# محاسبات عددی

دکتر مسعود نیکوکار
دکتر محمد تقی درویش



گسترش علوم پایه

# فصل سوم

# درونیابی و برونیابی

## ۱.۳ مقدمه

در اغلب کشورها هر ده سال یکبار جمعیت سرشماری می‌شود.فرض کنید جدول زیر جمعیت کشوری را در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۹۰ میلادی ( به هزار نفر ) نشان می‌دهد:

| سال | ۱۹۴۰ | ۱۹۵۰ | ۱۹۶۰ | ۱۹۷۰ | ۱۹۸۰ | ۱۹۹۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (جمعیت به هزار نفر) | ۱۰۷،۹۲۳ | ۱۲۶،۴۰۷ | ۱۳۳،۱۱۷ | ۱۵۰،۹۰۵ | ۱۷۱،۱۱۰ | ۱۹۲،۲۳۷ |

جدول (۱)

حال سوال این است که آیا می‌توان با توجه به داده‌های جدول فوق، جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ و یا در سال ۲۰۰۰ میلادی در حد قابل قبول تخمین زد.

تخمین جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ که بین اعداد جدول است **درونیابی** و تخمین جمعیت کشور را در سال ۲۰۰۰ که در فاصله [۱۹۴۰ , ۱۹۹۰] قرار ندارد، **برونیابی** می‌نامیم.

هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ به صورت $f_0, f_1, \cdots, f_n$ معلوم باشد، درونیابی روندی برای تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ است.

فرض کنید تابع $f(x)$ با جدول زیر داده شده است :

| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i) = f_i$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_n$ |

جدول (۲)

درونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \in (x_0, x_n)$ و $i = 1, \cdots, n-1$ $x \neq x_i$.
و برونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$.

**تعریف۱.۳.** تابعی مانند $f$ که مقادیر آن دربعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی مانند جدول (۲) بیان شده است، یک **تابع جدولی** نامیده می‌شود.

## ۲.۳ درونیابی

فرض کنید تابع $f$ با جدول (۲) داده شده است، به طوری که برای $i \neq j$ داریم : $x_i \neq x_j$.
برای تخمین $f(x)$ که $x \in (x_0, x_n)$ برای $i = 1, \cdots, n-1$، $x \neq x_i$، یکی از راههای ساده این است که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در $x_i$ همان $f_i$ باشد.یعنی برای $i = 0, 1, \cdots, n$ داشته باشیم :

$$\boxed{P(x_i) = f_i \qquad (1)}$$

و بعد به جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ با $P(x)$ کارکنیم.دراین ارتباط قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.۳.** فقط یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه $n$، وجود دارد که در شرط (۱) صدق می‌کند.

در قسمت‌های بعد به معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$، که در شرط (۱) صدق می‌کند، خواهیم

پرداخت.

**تعریف ۲.۳.** چند جمله‌ای $P(x)$ که در شرط (۱) صدق می‌کند، **چند جمله‌ای درونیاب** $f$ نامیده می‌شود.

## ۱.۲.۳ چند جمله‌ایهای لاگرانژ

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله‌ای درجه $n$ باشند و داشته باشیم

$$\boxed{P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n \qquad (۲)}$$

که در آن برای $j = 0, 1, \cdots, n$ داریم :

$$\boxed{L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (۳)}$$

از (۳) داریم :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 \;, \; i \neq j \\ 1 \;, \; i = j \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

یعنی چند جمله‌ای $P(x)$ که با (۲) تعریف می‌شود، در شرط (۱) صدق می‌کند.

**تعریف ۳.۳.** چند جمله‌ای $L_j(x)$ که با (۳) تعریف می‌شود.چند **جمله‌ای لاگرانژ** نامیده می‌شود که یک چند جمله‌ای از درجه $n$ می‌باشد.

**مثال ۱.** چند جمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

| $x_i$ | $-۱$ | $۰$ | $۱$ |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | $۱$ | $۱$ | $۳$ |

**حل:** در این مثال داریم $n = ۲$، بنابراین چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_۰(x)$، $L_۱(x)$ و $L_۲(x)$ را که همگی از درجه ۲ هستند به دست می‌آوریم :

$$L_۰(x) = \frac{(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)} = \frac{(x-۰)(x-۱)}{(-۱-۰)(-۱-۱)} = \frac{x^۲-x}{۲}$$

$$L_۱(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۲)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)} = \frac{(x+۱)(x-۱)}{(۰+۱)(۰-۱)} = -(x^۲-۱)$$

$$L_۲(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)} = \frac{(x+۱)(x-۰)}{(۱+۱)(۱-۰)} = \frac{x^۲+x}{۲}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲) داریم :

$$\begin{aligned} P(x) &= L_۰(x)f_۰ + L_۱(x)f_۱ + L_۲(x)f_۲ \\ &= ۱ \times L_۰(x) + ۱ \times L_۱(x) + ۳ \times L_۲(x) \\ &= \frac{x^۲-x}{۲} - (x^۲-۱) + \frac{۳}{۲}(x^۲+x) \\ P(x) &= x^۲ + x + ۱ \end{aligned}$$

**توجه:** چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱ در شرط (۱) صدق می‌کند، زیرا مثلاً

$$P(x_۰) = P(-۱) = (-۱)^۲ + (-۱) + ۱ = ۱ = f_۰$$

$$P(x_۲) = P(۱) = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ = f_۲$$

**مثال ۲.** برای تابع جدولی مثال ۱ تقریبی از $f(۰/۵)$ بدست آورید.

**حل:** چون $x = ۰/۵$ بین نقاط جدولی مثال ۱ قرار داشته و برابر هیچکدام از آنها نیست، پس

$P(\circ/\text{۵})$ را به عنوان تقریب $f(\circ/\text{۵})$ محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$\begin{aligned} f(\circ/\text{۵}) &\simeq P(\circ/\text{۵}) \\ &= \circ/\text{۲۵} + \circ/\text{۵} + \text{۱} = \text{۱/۷۵} \end{aligned}$$

**مثال ۳.** چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورید.

| $x_i$ | $-\text{۱}$ | $\circ$ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $-\text{۲}$ | $-\text{۱}$ | $\circ$ | ۷ |

**حل:** داریم ۳ $= n$، لذا بایستی چند جمله‌ایهای از درجه ۳ لاگرانژ $L_\circ(x)$ ، $L_\text{۱}(x)$، $L_\text{۲}(x)$ و $L_\text{۳}(x)$ را به دست آوریم :

$$\begin{aligned} L_\circ(x) &= \frac{(x-x_\text{۱})(x-x_\text{۲})(x-x_\text{۳})}{(x_\circ-x_\text{۱})(x_\circ-x_\text{۲})(x_\circ-x_\text{۳})} = \frac{x^\text{۳}-\text{۳}x^\text{۲}+\text{۲}x}{-\text{۶}} \\ L_\text{۱}(x) &= \frac{(x-x_\circ)(x-x_\text{۲})(x-x_\text{۳})}{(x_\text{۱}-x_\circ)(x_\text{۱}-x_\text{۲})(x_\text{۱}-x_\text{۳})} = \frac{x^\text{۳}-\text{۲}x^\text{۲}-x+\text{۲}}{\text{۲}} \\ L_\text{۲}(x) &= \frac{(x-x_\circ)(x-x_\text{۱})(x-x_\text{۳})}{(x_\text{۲}-x_\circ)(x_\text{۲}-x_\text{۱})(x_\text{۲}-x_\text{۳})} = \frac{x^\text{۳}-x^\text{۲}-\text{۲}x}{-\text{۲}} \\ L_\text{۳}(x) &= \frac{(x-x_\circ)(x-x_\text{۱})(x-x_\text{۲})}{(x_\text{۳}-x_\circ)(x_\text{۳}-x_\text{۱})(x_\text{۳}-x_\text{۲})} = \frac{x^\text{۳}-x}{\text{۶}} \end{aligned}$$

چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از :

$$P(x) = L_\circ(x)f_\circ + L_\text{۱}(x)f_\text{۱} + L_\text{۲}(x)f_\text{۲} + L_\text{۳}(x)f_\text{۳}$$

با توجه به جدول داریم :

$$\begin{aligned} P(x) &= -\text{۲}L_\circ(x) - \text{۱}L_\text{۱}(x) + \circ\, L_\text{۲}(x) + \text{۷}L_\text{۳}(x) \\ &= \frac{-\text{۲}(x^\text{۳}-\text{۳}x^\text{۲}+\text{۲}x)}{-\text{۶}} - \frac{x^\text{۳}-\text{۲}x^\text{۲}-x+\text{۲}}{\text{۲}} + \circ + \text{۷}\frac{x^\text{۳}-x}{\text{۶}} \end{aligned}$$

$$P(x) = x^\text{۳} - \text{۱}$$

**مثال ۴.** برای تابع جدولی مثال قبل تقریبهایی از $f(-\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۳}{۲})$ به دست آورید.

**حل:** با توجه به اینکه $P(x) = x^{۳} - ۱$ خواهیم داشت :

$$f(-\frac{۱}{۲}) \simeq P(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۹}{۸}$$
$$f(\frac{۳}{۲}) \simeq P(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱۹}{۸}$$

**مثال ۵.** با اضافه کردن نقطه $(-۲, -۹)$ به جدول مثال ۳ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

**حل:** جدول جدید عبارت است از :

| $x_i$ | $-۲$ | $-۱$ | $۰$ | $۱$ | $۲$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $-۹$ | $-۲$ | $-۱$ | $۰$ | $۷$ |

لذا $n = ۴$ و چند جمله‌ایهای لاگرانژ عبارتند از :

$$L_۰(x) = \frac{x(x-۲)(x^{۲}-۱)}{۲۴} \quad , \quad L_۱(x) = \frac{x(x-۱)(x^{۲}-۴)}{-۶}$$
$$L_۲(x) = \frac{(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۱)}{۴} \quad , \quad L_۳(x) = \frac{x(x+۱)(x^{۲}-۴)}{-۶}$$
$$L_۴(x) = \frac{x(x^{۲}-۱)(x+۲)}{۲۴}$$

در نتیجه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$\begin{aligned}P(x) &= -۹L_۰(x) - ۲L_۱(x) - L_۲(x) + ۰ \times L_۳(x) + ۷L_۴(x)\\ &= -\frac{۹}{۲۴}x(x-۲)(x^{۲}-۱) + \frac{۲}{۶}x(x-۱)(x^{۲}-۴) - \frac{۱}{۴}(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۱)\\ &\quad + ۰ + \frac{۷}{۲۴}x(x^{۲}-۱)(x+۲)\end{aligned}$$
$$P(x) = x^{۳} - ۱$$

توجه: چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۵ همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ می‌باشد و دلیل آن این است که چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ از نقطه $(-۲, -۹)$ می‌گذرد.همچنین با اینکه در مثال ۵ داریم $n = ۴$ چند جمله‌ای درونیاب از درجه ۳ می‌باشد.

**معایب روش لاگرانژ**

۱- محاسبات برای تعیین چند جمله‌ای درونیاب زیاد است.

۲- درجه چند جمله‌ای درونیاب، تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.

۳- با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی، کلیهٔ عملیات را بایستی مجدداً انجام داد.

### ۲.۲.۳ چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

**تعریف ۴.۳**.فرض کنید $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f$ در این نقاط باشند.تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین $x_i$ و $x_{i+۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+۱}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+۱})}{x_i - x_{i+۱}} = \frac{f_i - f_{i+۱}}{x_i - x_{i+۱}} \quad (۴)}$$

**مثال ۶**.تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول را بین $x_۰$ و $x_۱$ و بین $x_۱$ و $x_۲$ بنویسید.

**حل:**

$$f[x_۱, x_۲] = \frac{f_۱ - f_۲}{x_۱ - x_۲} \quad , \quad f[x_۰, x_۱] = \frac{f_۰ - f_۱}{x_۰ - x_۱}$$

**تعریف ۵.۳**. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین $x_i, x_{i+۱}$ و $x_{i+۲}$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\boxed{f[x_i, x_{i+۱}, x_{i+۲}] = \frac{f[x_i, x_{i+۱}] - f[x_{i+۱}, x_{i+۲}]}{x_i - x_{i+۲}} \quad (۵)}$$

**مثال ۷**. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین $x_۰, x_۱$ و $x_۲$ را بنویسید.

**حل:**

$$f[x_۰, x_۱, x_۲] = \frac{f[x_۰, x_۱] - f[x_۱, x_۲]}{x_۰ - x_۲}$$

**نکته:** مشابه مثالهای فوق تفاضلات تقسیم شده از مرتبه بالاتر قابل تعریف است، اما به کمک جدول می‌توان تفاضلات تقسیم شده از مرتبه‌های مختلف را بدون نوشتن فرمولهای (۴) و (۵) و با تکیه بر مقادیر تفاضلات تقسیم شدهِ محاسبه شده از مرتبه پایین‌تر، نوشت.به مثالهای زیر توجه کنید.

**مثال ۸.** جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

| $x_i$ | −۱ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | ۱ | ۳ |

**حل:** برای این منظور، جدول زیر را خواهیم داشت :

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم |
|---|---|---|---|
| −۱ | ۱ | | |
| | | $\frac{۱-۱}{-۱-۰}=۰$ | |
| ۰ | ۱ | | $\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$ |
| | | $\frac{۱-۳}{۰-۱}=۲$ | |
| ۱ | ۳ | | |

**مثال ۹.**با اضافه نمودن نقطه (۲,۷) به جدول مثال ۸، مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

**حل:**با استفاده از مقادیر به دست آمده در مثال ۸ کافیست نقطه (۲,۹) را به آخر جدول اضافه نموده و تفاضلات جدید را محاسبه کنیم.

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم |
|---|---|---|---|---|
| $-۱$ | ۱ | | | |
| | | ۰ | | |
| ۰ | ۱ | | ۱ | |
| | | ۲ | | ۰ |
| ۱ | ۳ | | ۱ | |
| | | ۴ | | |
| ۲ | ۷ | | | |

**مثال ۱۰.** جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

| $x_i$ | $-۱$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $-۱$ | ۱ | ۱ | ۵ | ۱۹ |

**حل:** جدول تفاضلات به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|---|
| $-۱$ | $-۱$ | | | | |
| | | $\frac{-۱-۱}{-۱-۰}=۲$ | | | |
| ۰ | ۱ | | $\frac{۲-۰}{-۱-۱}=-۱$ | | |
| | | $\frac{۱-۱}{۰-۱}=۰$ | | $\frac{-۱-۲}{-۱-۲}=۱$ | |
| ۱ | ۱ | | $\frac{۰-۴}{۰-۲}=۲$ | | $\frac{۱-۱}{-۱-۳}=۰$ |
| | | $\frac{۱-۵}{۱-۲}=۴$ | | $\frac{۲-۵}{۰-۳}=۱$ | |
| ۲ | ۵ | | $\frac{۴-۱۴}{۱-۳}=۵$ | | |
| | | $\frac{۵-۱۹}{۲-۳}=۱۴$ | | | |
| ۳ | ۱۹ | | | | |

هرگاه کسرها را ننویسیم، جدول فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|---|
| −۱ | −۱ | | | | |
| | | ۲ | | | |
| ۰ | ۱ | | −۱ | | |
| | | ۰ | | ۱ | |
| ۱ | ۱ | | ۲ | | ۰ |
| | | ۴ | | ۱ | |
| ۲ | ۵ | | ۵ | | |
| | | ۱۴ | | | |
| ۳ | ۱۹ | | | | |

**فرمول چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن :**

چند جمله‌ای درونیاب $f$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ عبارتست از

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \\ \qquad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \qquad (6) \end{array}}$$

که در آن $f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$ تفاضل مرتبه $i$ام بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_i$ برای $i = 1, \cdots, n$ می‌باشد و به صورت زیر برحسب تفاضلات مراتب قبلی محاسبه می‌شود :

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{i-1}] - f[x_1, \cdots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

**مثال ۱۱.** چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۳ | ۶ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | −۶ | ۴ | ۱۶۹ |

**حل:** جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | | | |
| | | −۷ | | |
| ۱ | −۶ | | ۴ | |
| | | ۵ | | ۱ |
| ۳ | ۴ | | ۱۰ | |
| | | ۵۵ | | |
| ۶ | ۱۶۹ | | | |

بنا به رابطه (۶) چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

تفاضلات تقسیم شده مورد نیاز در رابطه فوق، اعداد بالایی جدول تفاضلات هستند که زیر آنها خط کشیده شده است، لذا خواهیم داشت :

$$P(x) = 1 - 7x + 4x(x - 1) + x(x - 1)(x - 3)$$

$$P(x) = x^3 - 8x + 1$$

**مثال ۱۲.** با افزودن نقطه (۱۰, ۹۲۱) به تابع جدولی مثال قبل، مجدداً چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

**حل:** جدول جدید تابع $f$، به صورت زیر است :

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۳ | ۶ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | ۶- | ۴ | ۱۶۹ | ۹۲۱ |

و جدول تفاضلات جدید به کمک جدول قبلی به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | | | | |
| | | ۷- | | | |
| ۱ | ۶- | | ۴ | | |
| | | ۵ | | ۱ | |
| ۳ | ۴ | | ۱۰ | | ۰ |
| | | ۵۵ | | ۱ | |
| ۶ | ۱۶۹ | | ۱۹ | | |
| | | ۱۸۸ | | | |
| ۱۰ | ۹۲۱ | | | | |

جدول تفاضلات مرتبه چهارم صفر شده است بنابراین در این حالت، چند جمله‌ای درونیاب همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱۱ یعنی چند جمله‌ای زیر خواهد بود :

$$P(x) = x^{۳} - ۸x + ۱$$

**نکته:** برعکس روش چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، با اضافه نمودن نقطه یا نقاطی به یک جدول، برای محاسبه چند جمله‌ای درونیاب جدید از تمام محاسبات قبلی استفاده می‌شود.

**مثال ۱۳.** چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید:

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | ۱ | ۲ | ۵ |

**حل:** جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | | | |
| | | ۰ | | |
| ۱ | ۱ | | $\frac{1}{2}$ | |
| | | ۱ | | $-\frac{1}{12}$ |
| ۲ | ۲ | | $\frac{1}{6}$ | |
| | | $\frac{3}{2}$ | | |
| ۴ | ۵ | | | |

لذا چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر خواهد بود :

$$P(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

**مثال ۱۴.** فرض کنید $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$، به روش نیوتن چند جمله‌ای از درجه حداکثر چهار را به دست آوریدکه تابع $f$ را در نقاط متساوی الفاصله زیر درونیابی کند :

$$x_i = \frac{10i}{4} - 5 \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

**حل:** نقاط درونیابی عبارتند از :

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{5}{2}, \quad x_4 = 5$$

جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i$ | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|---|
| −۵ | ۰٫۰۳۸۴۶ | | | | |
| | | ۰٫۰۳۹۷۹ | | | |
| −۲٫۵ | ۰٫۱۳۷۹۳ | | ۰٫۰۶۱۰۱ | | |
| | | ۰٫۳۴۴۸۳ | | −۰٫۰۲۶۵۳ | |
| ۰ | ۱٫۰۰۰۰۰ | | −۰٫۱۳۷۹۳ | | ۰٫۰۰۵۳۰۶ |
| | | −۰٫۳۴۴۸۳ | | ۰٫۰۲۶۵۳ | |
| ۲٫۵ | ۰٫۱۳۷۹۳ | | ۰٫۰۶۱۰۱ | | |
| | | −۰٫۰۳۹۷۹ | | | |
| ۵ | ۰٫۰۳۸۴۹ | | | | |

با استفاده از اعداد جدول که زیر آنها خط کشیده شده است، چندجمله‌ای درونیاب تابع $f$ در نقاط $x_۰, \cdots, x_۴$ به صورت زیر است

$$P(x) = ۰٫۰۳۸۴۶ + ۰٫۰۳۹۷۹(x+۵) + ۰٫۰۶۱۰۱(x+۵)(x+۲٫۵)$$
$$- ۰٫۰۲۶۵۳(x+۵)(x+۲٫۵)x + ۰٫۰۰۵۳۰۶(x+۵)(x+۲٫۵)x(x-۲٫۵)$$

### ۳.۲.۳ تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ چه متساوی الفاصله باشند، چه نباشند، چند جمله‌ای درونیاب را به دست می‌دهند.اما وقتی $x_i$ها متساوی الفاصله باشند، فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت آنها را به دست می‌آوریم.

**نمادگذاری.** هرگاه فاصله $[a,b]$ را به $N$ زیر فاصله به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ هرکدام به طول $h$ تقسیم کنیم، می‌نویسیم :

$$x = a(h)b$$

که در آن $h = \frac{b-a}{N}$.

**مثال ۱۵.** نقاط $x = 1(0/1)2$ عبارتند از :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1/1, \quad x_2 = 1/2, \cdots, x_{10} = 2$$

**توجه:** همانگونه که مثال ۱۵ نشان می‌دهد نقاط $x = a(h)b$ عبارتند از :

$$x_i = a + ih \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, N$$

و

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

و هرگاه $a = x_0$ در این صورت

$$x_i = x_0 + ih \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, N$$

در حالتی که نقاط $x_i$ متساوی‌الفاصله هستند، یک تبدیل خطی را که باعث تغییرها می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$s(x) = s = \frac{x - x_0}{h} \Longrightarrow x(s) = x = x_0 + sh$$

بنابراین برای تبدیل خطی فوق خواهیم داشت :

$$f(x) = f(x_0 + sh)$$

که آن را به طور خلاصه با $f_s$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$\boxed{f(x) = f(x_0 + sh) = f_s \qquad (7)}$$

رابطه (۷) یک چند جمله‌ای برحسب $x$ را به یک چند جمله‌ای بر حسب $s$ تبدیل می‌کند.

**تعریف ۶.۳.** عملگر تفاضل پیشرو، $\Delta$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s, & i > 0 \end{cases} \qquad (8)}$$

**مثال ۱۶.** $\Delta f_s$ و $\Delta^2 f_s$ را بنویسید.

**حل:** بنا به روابط (۸) داریم :

$$\Delta f_s = \Delta^0 f_{s+1} - \Delta^0 f_s = f_{s+1} - f_s$$

$$\Delta^2 f_s = \Delta f_{s+1} - \Delta f_s = (\Delta^0 f_{s+2} - \Delta^0 f_{s+1}) - (f_{s+1} - f_s)$$

$$= f_{s+2} - 2 f_{s+1} + f_s$$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده، هرگاه نقاط $x_i$ متساوی الفاصله باشند، می‌توان جدول تفاضلات را که جدول **تفاضلات متناهی** هم نامیده شود، تشکیل داد.

**مثال ۱۷.** برای $n = 3$ جدول تفاضلات به صورت زیر است :

| $x_i$ | $f_i$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | |
| | | $\Delta f_0$ | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | |
| | | $\Delta f_1$ | | $\Delta^3 f_0$ |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta^2 f_1$ | |
| | | $\Delta f_2$ | | |
| $x_3$ | $f_3$ | | | |

**مثال ۱۸.** تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید.

| $x_i$ | $-۱$ | $۰$ | $۱$ | $۲$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | $۰$ | $-۱$ | $۲$ | $۹$ |

**حل.**

| $x_i$ | $f_i$ | $\Delta$ | $\Delta^۲$ | $\Delta^۳$ |
|---|---|---|---|---|
| $-۱$ | $۰$ | | | |
| | | $-۱-۰=-۱$ | | |
| $۰$ | $-۱$ | | $۳+۱=۴$ | |
| | | $۲+۱=۳$ | | $۴-۴=۰$ |
| $۱$ | $۲$ | | $۷-۳=۴$ | |
| | | $۹-۲=۷$ | | |
| $۲$ | $۹$ | | | |

**فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو :**

هرگاه $x_i$ نقاط متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_۰ + sh$، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب $f$ برحسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_۰ + s\Delta f_۰ + \frac{s(s-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰ + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰ + \cdots \\ + \frac{s(s-۱)(s-۲)\cdots(s-n+۱)}{n!}\Delta^n f_۰ \qquad (۹) \end{aligned}}$$

رابطه (۹) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پیشرو نشان می‌دهد، که به **فرمول تفاضل پیشرو نیوتن** موسوم است.و با توجه به اینکه داریم :

$$\frac{s(s-۱)(s-۲)\cdots(s-i+۱)}{i!} = \binom{s}{i}$$

بنابراین رابطهٔ (۹) را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم :

$$\boxed{P(x) = f_\circ + \binom{s}{1}\Delta f_\circ + \binom{s}{2}\Delta^2 f_\circ + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_\circ \qquad (10)}$$

**مثال ۱۹.** فرمول چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را برحسب تفاضلات پیشرو نیوتن به دست آورید.

| $x_i$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۲ | ۵ | ۱۰ | ۱۷ |

**حل:** جدول تفاضلات پیشرو به صورت زیر است :

| $x_i$ | $f_i$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | <u>۲</u> | | | |
| | | <u>۳</u> | | |
| ۲ | ۵ | | <u>۲</u> | |
| | | ۵ | | ۰ |
| ۳ | ۱۰ | | ۲ | |
| | | ۷ | | |
| ۴ | ۱۷ | | | |

چند جمله‌ای درونیاب برحسب $s$ عبارت است از

$$P(x) = f_\circ + s\Delta f_\circ + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_\circ = 2 + 3s + \frac{s(s-1)}{2} \times 2 = s^2 + 2s + 2$$

و چون $x = x_\circ + sh$ و اینکه $h = 1$ و $x_\circ = 1$ بنابراین $x = 1 + s$ و یا $s = x - 1$.

لذا چند جمله‌ای درونیاب برحسب $x$ عبارت است از :

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

**تعریف۷.۳.** عملگر **تفاضل پسرو**، $\nabla$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1}, & i > 0 \end{cases} \qquad (11)}$$

**مثال ۲۰.** $\nabla f_s$ و $\nabla^2 f_s$ را به دست آورید.

**حل:** با استفاده از روابط (۱۱) خواهیم داشت :

$$\nabla f_s = \nabla^0 f_s - \nabla^0 f_{s-1} = f_s - f_{s-1}$$

و

$$\nabla^2 f_s = \nabla f_s - \nabla f_{s-1} = (f_s - f_{s-1}) - (\nabla^0 f_{s-1} - \nabla^0 f_{s-2})$$
$$= f_s - 2 f_{s-1} + f_{s-2}$$

**مثال ۲۱.** برا ی $n = 3$، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید.

**حل:** این جدول به صورت زیر می‌باشد:

| $x_i$ | $f_i$ | $\nabla$ | $\nabla^2$ | $\nabla^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | | | |
| | | $\nabla f_1$ | | |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\nabla^2 f_2$ | |
| | | $\nabla f_2$ | | $\nabla^3 f_3$ |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\nabla^2 f_3$ | |
| | | $\nabla f_3$ | | |
| $x_3$ | $f_3$ | | | |

**مثال ۲۲.** برای تابع جدولی مثال ۱۸، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید:

| $x_i$ | $f_i$ | $\nabla$ | $\nabla^۲$ | $\nabla^۳$ |
|---|---|---|---|---|
| $-۱$ | ۰ | | | |
| | | $-۱$ | | |
| ۰ | $-۱$ | | ۴ | |
| | | ۳ | | ۰ |
| ۱ | ۲ | | ۴ | |
| | | ۷ | | |
| ۲ | ۹ | | | |

## فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x$ نزدیک نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود، استفاده کنیم.

چند جمله‌ای درونیاب $f$ در نقاط $x_n, x_{n-۱}, \cdots, x_۱, x_۰$ عبارت است از :

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_n + \frac{s(s+۱)(s+۲)}{۳!}\nabla^۳ f_n + \cdots \\ + \frac{s(s+۱)(s+۲)\cdots(s+n-۱)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (۱۲) \end{aligned}}$$

که $x = x_n + sh$. رابطه (۱۲) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پسرو نشان می‌دهد، که به فرمول **تفاضل پسرو نیوتن** موسوم است.

**توجه .** همانگونه که مثال ۲۲ نشان می‌دهد $\nabla^i f_n$ برای $i = ۱, \cdots, n$ اعداد انتهای جدول تفاضلات است.

**مثال ۲۳.** چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال ۱۹ را با استفاده از تفاضلات پسرو بنویسید.

**حل:** با استفاده از فرمول (۱۲) و اعداد انتهایی جدول تفاضلات مثال ۱۹ داریم :

$$\begin{aligned} P(x) &= f_۳ + s\nabla f_۳ + \frac{s(s+۱)}{۲}\nabla^۲ f_۳ \\ &= ۱۷ + ۷s + \frac{s(s+۱)}{۲}۲ = s^۲ + ۸s + ۱۷ \end{aligned}$$

چند جمله‌ای فوق، چند جمله‌ای درونیاب $f$ بر حسب $s$ است.برای به دست آوردن چند جمله‌ای درونیاب بر حسب $x$، چون $x = ۴ + s$ پس $s = x - ۴$، لذا

$$P(x) = (x - ۴)^۲ + ۸(x - ۴) + ۱۷ = x^۲ + ۱$$

**حل:** بایستی بسط دترمینان زیر را بنویسیم؛ در این مثال داریم $n = ۱$.

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow ۲P(x) - ۱(۲) + x(۱-۳) = ۰ \Longrightarrow P(x) = x + ۱$$

## ۳.۳ خطای چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب $f$ در نقاط دو به دو متمایز $x_۰, x_۱, \cdots x_n$ بوده و $f$ دارای مشتق مرتبه $n+۱$ باشد، آن گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_n)}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(c)$$

که در آن $c$ عددی نامشخص بوده و $x_۰ < c < x_n$ و $f^{(k)}(x)$ مشتق مرتبه $k$ام تابع $f$ می‌باشد. به دلیل مشخص نبودن $c$، هرگاه $M$ یک کران بالا برای $f^{(n+۱)}(x)$ بر فاصله $[x_۰, x_n]$ باشد، یعنی داشته باشیم :

$$|f^{(n+۱)}(x)| \leq M, \qquad x \in [x_۰, x_n]$$

بنابراین

$$\boxed{|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+۱)!} \qquad (۱۳)}$$

رابطهٔ (۱۳) یک کران بالا برای خطای چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ ارائه می‌دهد.

**مثال ۲۵.** چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \cos\frac{\pi}{۲}x$ را در نقاط $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ به دست آورده و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{۱}{۲}) - P(\frac{۱}{۲})|$ را با کران بالا در $x = \frac{۱}{۲}$ مقایسه کنید.

حل: جدول مربوط به تابع عبارت است از :

| $x_i$ | $f_i$ | تفاضل مرتبه اول |
|---|---|---|
| ۰ | ۱ | |
| | | $-۱$ |
| ۱ | ۰ | |

لذا، چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است :

$$P(x) = ۱ + (x - ۰) \times (-۱) = ۱ - x$$

واضح است که :

$$f(\frac{۱}{۲}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad , \qquad P(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین :

$$|f(\frac{۱}{۲}) - P(\frac{۱}{۲})| = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۰/۲۱ \qquad (۲D)$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع $f$ به دست آوریم :

$$f'(x) = -\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}x$$
$$f''(x) = -\frac{\pi^۲}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}x$$

بنابراین

$$|f''(x)| = |-\frac{\pi^۲}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}x| \leq \frac{\pi^۲}{۴}$$

در نتیجه

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x - ۰)(x - ۱)| \times \frac{\pi^۲/۴}{۲!} = \frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$$

یعنی کران بالای خطا عبارت است از $\frac{\pi^{۲}}{۸}|x^{۲}-x|$، مقدار این کران بالا برای $x=\frac{۱}{۲}$ برابر است با :

$$\frac{\pi^{۲}}{۸}|\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}|=\frac{\pi^{۲}}{۳۲}=۰/۳۱ \qquad (۲D)$$

که با مقدار واقعی خطا یعنی ۰/۲۱ به مقدار ۰/۱ اختلاف دارد. مقدار خطا و همچنین کران بالای خطا اعدادی بزرگ هستند که بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چند جمله‌ای درجه اول به عنوان یک تقریب تابع $\cos\frac{\pi}{۲}x$ می‌باشد.

**مثال ۲۶.** فرض کنید $f(x)=\sin\frac{\pi}{۲}x$.چند جمله‌ای درونیاب $f$ را در نقاط ۰، ۱ و ۲ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x)-P(x)|$ حساب کنید.

**حل:** با توجه به نقاط داده شده و ضابطه تابع $f$ جدول تفاضلات زیر را خواهیم داشت :

تفاضلات مرتبهٔ

| $x_i$ | $f_i=\sin\frac{\pi}{۲}x_i$ | اول | دوم |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | | |
| | | ۱ | |
| ۱ | ۱ | | $-۱$ |
| | | $-۱$ | |
| ۲ | ۰ | | |

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از :

$$P(x)=۰+(x-۰)(۱)+(x-۰)(x-۱)(-۱)=-x^{۲}+۲x$$

برای تعیین کران بالای خطا باید مشتق سوم تابع $f(x)$ را حساب کنیم.

$$f'(x) = \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}$$
$$f''(x) = -\frac{\pi^{۲}}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲}$$
$$f'''(x) = -\frac{\pi^{۳}}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}$$
$$|f'''(x)| = |-\frac{\pi^{۳}}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}| \leq \frac{\pi^{۳}}{۸} = M$$

لذا

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-۰)(x-۱)(x-۲)| \times \frac{\pi^{۳}/۸}{۳!} = \frac{\pi^{۳}}{۴۸}|x(x-۱)(x-۲)|$$

## ۴.۳ برونیابی

هرگاه تابع $f$ در نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ مقادیر معلوم $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ را داشته باشد، در بخش‌های قبل تخمین تابع $f(x)$ را در $x = \bar{x}$ که $\bar{x}$ در فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار داشت، مورد بررسی قرار دادیم.با این حال یک سوال طبیعی این است که هرگاه $\bar{x} < x_۰$ و یا $\bar{x} > x_n$، در این صورت مقدار $f(\bar{x})$ را چگونه تخمین بزنیم؟ چون در این حالتها $\bar{x}$ خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار دارد، روند تخمین مقدار تابع $f$ را در $\bar{x}$ **برونیابی** می‌نامیم.برای برونیابی می‌توان از همان چند جمله‌ای درونیاب تابع $f$ استفاده نمود.درونیابی و برونیابی دو مفهوم از یک روند می‌باشند.اما درونیابی بیشتر از برونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا هرگاه رابطه (۱۳) یعنی کران بالای خطا را در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که هرگاه $\bar{x}$ به اندازه کافی به نقاط مرکزی $x_i$ها نزدیک باشد، خطا کمترین مقدار را دارد.برعکس هرگاه $\bar{x}$ خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ باشد که در حالت برونیابی چنین وضعی داریم، عاملهای $x_i - \bar{x}$ در رابطه (۱۳) می‌توانند مقادیر بزرگی باشند.بنابراین مقدار خطای چند جمله‌ای $P(x)$ به عنوان تقریب تابع $f(x)$ زیاد خواهد بود، مگر $\bar{x}$ به یکی از نقاط انتهایی فاصلهٔ $[x_۰, x_n]$

بسیار نزدیک باشد.لذا برونیابی نسبت به درونیابی دارای دقت کمتری است و بایستی برونیابی را با احتیاط مورد استفاده قرار داد.

**مثال ۲۷.** برای تابع جدولی مثال ۱۹ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۲)$ را تخمین بزنید.

**حل:** در مثال ۱۹ و مثال ۲۳ چند جمله‌ای درونیاب $f(x)$ به صورت زیر به دست آمد:

$$P(x) = x^۲ + ۱$$

بنابراین

$$f(۰/۵) \simeq P(۰/۵) = ۱/۲۵$$

$$f(۴/۲) \simeq P(۴/۲) = ۱۸/۶۴$$

استفاده از چند جمله‌ای درونیاب در تمام نقاط درونیابی $x_i$ برای $i = ۰, ۱, \cdots, n$ تنها روند مورد استفاده در برونیابی نیست، بلکه می‌توان از درونیابی خطی نیز استفاده نمود که ذیلاً توضیح داده می‌شود.

هرگاه چند جمله‌ای درونیاب گذرنده از دو نقطه $(x_k, y_k)$ و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ را بخواهیم به دست آوریم با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} y &= y_k + (x - x_k)f[x_k, x_{k+۱}] \\ y &= y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+۱} - x_k}(y_{k+۱} - y_k) \qquad (۱۴) \end{aligned}$$

رابطه (۱۴) نشان دهنده خط ماربر دونقطه $(x_k, y_k)$ و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ می‌باشد.

حال برای برونیابی، هرگاه $\bar{y} = f(\bar{x})$ و $\bar{x} < x_۰$ در این صورت با قرار دادن $k = ۰$ در رابطه (۱۴) داریم :

$$\bar{y} = y_۰ + \frac{\bar{x} - x_۰}{x_۱ - x_۰}(y_۱ - y_۰) \qquad (۱۵)$$

و اگر $x_n < \bar{x}$ با قرار دادن $k = n - ۱$ در رابطه (۱۴) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = y_{n-۱} + \frac{\bar{x} - x_{n-۱}}{x_n - x_{n-۱}}(y_n - y_{n-۱}) \qquad (۱۶)$$

بنابراین روابط (۱۵) و (۱۶) می‌توانند برای برونیابی مورد استفاده قرار گیرند.

**مثال ۲۸.** تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-۱$ | ۰ | ۱ | ۲ |
| $y_i$ | ۰ | $-۱$ | ۲ | ۹ |

به کمک روابط (۱۵) و (۱۶) مقادیر $f(-۱/۵)$ و $f(۲/۲)$ را تخمین بزنید.

**حل:** داریم :

$$x_۰ = -۱, \quad x_۱ = ۰, \quad x_۲ = ۱, \quad x_n = x_۳ = ۲$$

$$y_۰ = ۰, \quad y_۱ = -۱, \quad y_۲ = ۲, \quad y_n = y_۳ = ۹$$

در این صورت برای $\bar{x} = -۱/۵$ از رابطهٔ (۱۵) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = ۰ + \frac{-۱/۵ + ۱}{۰ + ۱}(-۱ - ۰) = ۰/۵$$

بنابراین $f(-۱/۵) \simeq ۰/۵$.

و برای $\bar{x} = ۲/۲$ از رابطه (۱۶) داریم :

$$\bar{y} = ۲ + \frac{۲/۲ - ۱}{۲ - ۱}(۹ - ۲) = ۱۰/۴$$

لذا $f(۲/۲) \simeq ۱۰/۴$.

لازم به ذکر است درفصل هشتم روشی به نام تقریب‌حداقل مربعات معرفی خواهد شد که برای برونیابی نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

## مجموعه مسائل فصل سوم

۱- هرگاه $x_\circ, x_۱, \cdots, x_n$ نقاط درونیابی و $f_\circ, f_۱, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه $n$، وجود دارد به طوری که :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = \circ, ۱, \cdots, n$$

۲- چند جمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۳ | ۲ | ۷ | ۵۹ |

جواب .

$$L_\circ(x) = -\frac{۱}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸) \quad , L_۱(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x)$$
$$L_۲(x) = -\frac{۱}{۴}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x) \quad , L_۳(x) = \frac{۱}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$

۳- چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مساله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(۳)$ به دست آورید.

جواب. $P(x) = x^۳ - ۲x + ۳$ , $f(۳) \simeq ۲۴$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(\circ/۶)$ به دست آورید.

| $x_i$ | ۰/۴ | ۰/۵ | ۰/۷ | ۰/۸ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۰/۹۱۶۲۹۱- | ۰/۶۹۳۱۴۷- | ۰/۳۵۶۶۷۵- | ۰/۲۲۳۱۴۴- |

جواب . $f(\circ/۶) \simeq -\circ/۵\circ۹۹۷۵$

۵- با استفاده از چند جمله‌ایهای لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | ۱ | ۲ | ۵ |

جواب. $P(x) = \frac{۱}{۱۲}(-x^۳ + ۹x^۲ - ۸x + ۱۲)$

۶- برای تابع جدولی مساله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[۲, ۴]$ ب. $f[۱, ۲, ۴]$ پ. $f[۰, ۱, ۲]$

ت. $f[۰, ۱, ۲, ۴]$

جواب. الف. $\frac{۳}{۲}$ ب. $\frac{۱}{۶}$ پ. $\frac{۱}{۲}$ ت. $-\frac{۱}{۱۲}$

۷- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ایهای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۴ و ۵ را به دست آورید.

۸- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

| $x_i$ | $-۱$ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | $-۳$ | ۰ | ۴ |

جواب. $P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$

۹- به کمک فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن تقریبهایی از $f(۱/۱)$ و $f(۲)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

| $x_i$ | ۱ | ۱/۳ | ۱/۶ | ۱/۹ | ۲/۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۰/۷۶۵۱۹۷۷ | ۰/۶۲۰۰۸۶۰ | ۰/۴۵۵۴۰۲۲ | ۰/۲۸۱۸۱۸۶ | ۰/۱۱۰۳۶۳۲ |

جواب. $f(۱/۱) \simeq ۰/۷۱۹۶۴۸۰$ و $f(۲) \simeq ۰/۲۲۳۸۷۵۵$

۱۰- به کمک شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب، چند جمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

۱۱- برای تابع جدولی مساله ۲ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۳)$ را تخمین بزنید.

**جواب.** $f(۰/۵) \simeq ۲/۱۲۵$ و $f(۴/۳) \simeq ۷۳/۹۰۷$

۱۲- به کمک چند جمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای $f(۲/۴)$ و $f(۰)$ مقادیری به دست آورید.

**جواب.** $f(۲/۴) \simeq ۶/۰۶۷$ و $f(۰) \simeq -۲/۳۳۳$

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

۱۴- با به دست آوردن یک چند جمله‌ای درجه چهارکه تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی ( برونیابی ) کنید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱ | $-۱$ | ۱ | $-۱$ | ۱ |

**جواب.** ۳۱، ۱۲۹، ۳۵۱

۱۵- مانند مساله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی کنید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |

**جواب.** ۱۰، ۴۵، ۱۲۶

# فصل چهارم

# مشتق‌گیری و انتگرالگیری عددی

## ۱.۴ مشتق‌گیری عددی

کاربرد مشتق در ریاضیات کاربردی فراوان است و در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد.معمولاً برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را با روشهای حساب دیفرانسیل می‌توانیم به دست آوریم.اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، برای مشتق گیری بایستی به روشهای عددی روی آورد.در این قسمت بعضی از روشهای مشتق گیری عددی یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.دستورهای مشتق‌گیری عددی را می‌توان با مشتق‌گرفتن از چند جمله‌ای درونیاب به دست آورد.هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب $f$ باشد، در این صورت مشتقهای $f'(x)$، $f''(x)$ و ... را به کمک $P'(x)$، $P''(x)$ و ... به دست می‌آوریم.البته باید متذکر شد که مشتق‌گیری عددی بر اساس چند جمله‌ای درونیاب یک عمل ناپایدار است، یعنی نمی‌توانیم دقت خوبی را برای جواب انتظار داشته باشیم، زیرا خطای حاصل از مشتق‌گیری یعنی $f'(x) - P'(x)$ ممکن است خیلی بزرگ باشد.

### ۱.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری بر اساس چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه تابع $f$ در نقاط متساوی‌الفاصله $x_j$ ، $j = ۰, ۱, \cdots, n$ داده شده باشد، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب $f$ در نقاط $x_i, x_{i+۱}, \cdots, x_{i+k}$ به کمک دستور تفاضل پیشرو نیوتن عبارتست از :

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_i + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_i + \cdots \\ + \frac{s(s-۱)\cdots(s-k+۱)}{k!}\Delta^k f_i \qquad (۱) \end{aligned}}$$

که در آن $x_{i+۱} - x_i = h$ و $x = x_i + sh$ برای $i = ۰, ۱, \cdots, n-۱$ .چون $P(x)$ بر حسب $s$ بیان شده است، بنابراین

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds}.\frac{ds}{dx} \qquad (۲)$$

و چون از $x = x_i + sh$ داریم $dx = hds$، لذا

$$\frac{ds}{dx} = \frac{۱}{h} \qquad (۳)$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و مشتق‌گیری از (۱) خواهیم داشت :

$$f'(x) \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i + (s - \frac{۱}{۲})\Delta^۲ f_i + \frac{۳s^۲ - ۶s + ۲}{۶}\Delta^۳ f_i + \cdots] \qquad (۴)$$

به طور مشابه برای مشتق مرتبه دوم داریم :

$$f''(x) = \frac{d^۲ f(x)}{dx^۲} \simeq \frac{d^۲ P(x)}{dx^۲} \simeq \frac{۱}{h^۲}\frac{d^۲ P(x)}{ds^۲} = \frac{۱}{h^۲}[\Delta^۲ f_i + (s-۱)\Delta^۳ f_i + \cdots] \qquad (۵)$$

علی الخصوص هرگاه $s = ۰$ برای مشتقات $f$ در نقاط جدولی $x_i$ دستورهای زیر را خواهیم داشت :

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i + \frac{۱}{۳}\Delta^۳ f_i - \cdots] \qquad (۶)$$

و

$$f''(x_i) = f_i'' \simeq \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i - \cdots] \qquad (7)$$

معمولاً برای محاسبه تقریبی از $f_i'$ و $f_i''$ یک یا چند جمله از عبارات سمت راست (۶) و (۷) انتخاب می‌شوند. مثلاً

$$f_i' \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (8)$$

یا

$$f_i' \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i] = \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (9)$$

به طور مشابه به کمک رابطه (۷) یک تقریب برای $f_i''$ به صورت زیر است :

$$f_i'' \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad (10)$$

همچنین با قرار دادن $s = \frac{1}{2}$ در رابطه (۴) دستور زیر برای نقاط میانی $x_i$ها به دست می‌آید :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i - \cdots] \qquad (11)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (12)$$

به طور مشابه با قرار دادن $s = 1$ در دستور مشتق‌گیری (۵) داریم :

$$f''(x_i + h) = f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_i - \frac{1}{12}\Delta^4 f_i + \cdots] \qquad (13)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad (14)$$

**مثال ۱.** مقدار $f'_i$ را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای تابع جدولی زیر با استفاده از فرمول (۸) به دست آورید.

| $x_i$ | ۰/۱ | ۰/۱۵ | ۰/۲ | ۰/۲۵ | ۰/۳ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۱/۱۰۵۱۷ | ۱/۱۶۱۸۳ | ۱/۲۲۱۴۰ | ۱/۲۸۴۰۳ | ۱/۳۴۹۸۶ |

**حل:** جدول تفاضلات تابع جدولی فوق به صورت زیر است :

| $x_i$ | $f_i$ | $\Delta f_i$ | $\Delta^2 f_i$ |
|---|---|---|---|
| ۰/۱ | ۱/۱۰۵۱۷ | | |
| | | ۰/۰۵۶۶۶ | |
| ۰/۱۵ | ۱/۱۶۱۸۳ | | ۰/۰۰۲۹۱ |
| | | ۰/۰۵۹۵۷ | |
| ۰/۲ | ۱/۲۲۱۴۰ | | ۰/۰۰۳۰۶ |
| | | ۰/۰۶۲۶۳ | |
| ۰/۲۵ | ۱/۲۸۴۰۳ | | ۰/۰۰۳۲۰ |
| | | ۰/۰۶۵۸۳ | |
| ۰/۳ | ۱/۳۴۹۸۶ | | |

با توجه به فرمول (۸) و اینکه $h = 0/05$ خواهیم داشت :

| $i$ | $f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i$ |
|---|---|
| ۰ | ۱/۱۳۳۲ |
| ۱ | ۱/۱۹۱۴ |
| ۲ | ۱/۲۵۲۶ |
| ۳ | ۱/۳۱۶۶ |

**مثال ۲.** برای تابع جدولی مثال ۱ مقدار $f'_i$ را برای $i = ۰, ۱, ۲$ با استفاده از فرمول (۹) به دست آورید.

**حل:**

| $i$ | $f'_i \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{۲}\Delta^۲ f_i)$ |
|---|---|
| ۰ | ۱/۱۰۴ |
| ۱ | ۱/۱۶۰۸ |
| ۲ | ۱/۲۲۰۶ |

**توجه:** مقادیر $f_i$ در مثال ۱ مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است.لذا بایستی مقادیر جدولهای مثال ۱ و ۲ با مقدار تابع یعنی $f_i$ها برابر باشند که نیستند.و این مطلب از همان ناپایدار بودن و توام با خطای زیاد بودن مشتق‌گیری عددی حاصل می‌شود.البته همانگونه که جدول مثال ۲ نشان می‌دهد، این مقادیر بهتر از مقادیر جدول مثال ۱ هستند.

**مثال ۳.** مقدار $f''_۰ = f''(۰/۱)$ و $f''_۱ = f''(۰/۱۵)$ را برای تابع جدولی مثال ۱ به کمک فرمول (۱۰) به دست آورید.

**حل:**

$$f''_۰ \simeq \frac{۱}{h^۲}\Delta^۲ f_۰ = ۱/۱۶۴$$

$$f''_۱ = f''(۰/۱۵) \simeq \frac{۱}{h^۲}\Delta^۲ f_۱ = ۱/۲۲۴$$

**مثال ۴.** به کمک فرمول (۱۲) تقریبهایی از $f'(x_i + \frac{h}{2})$ را برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$ به دست آورید.

**حل:** با توجه به فرمول (۱۲) این مقادیر همان مقادیر جدول مثال ۱ می‌باشند.

### ۲.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور

به کمک بسط تیلور یک تابع می‌توان بعضی از دستورهای قسمت قبل و دستورهای دیگری را برای مشتق‌گیری به دست آورد.فرض کنید داریم $x_{i+1} = x_i + h$، لذا خواهیم داشت :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \tag{۱۵}$$

همچنین هرگاه $x_{i-1} = x_i - h$، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \tag{۱۶}$$

بنابراین از رابطه (۱۵) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \tag{۱۷}$$

رابطه (۱۷) همان رابطه (۸) می‌باشد.به طور مشابه از رابطه (۱۶) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \tag{۱۸}$$

**توجه:** برای محاسبه $f'(x_0)$ از رابطه (۱۷) و برای محاسبه $f'(x_n)$ از رابطه (۱۸) استفاده می‌کنیم.

هرگاه رابطهٔ (۱۶) را جمله به جمله از رابطهٔ (۱۵) کم نموده و جملات اضافی را حذف کنیم خواهیم داشت :

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \tag{۱۹}$$

همچنین هرگاه جملات دو رابطه (۱۵) و (۱۶) را با هم جمع کنیم، تقریب زیر برای $f''(x_i)$ به دست می‌آید.که همان رابطه (۱۰) می‌باشد.( با حذف جملات اضافی )

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i-۱}) - ۲f(x_i) + f(x_{i+۱})}{h^۲} = \frac{f_{i-۱} - ۲f_i + f_{i+۱}}{h^۲} \qquad (۲۰)$$

با بحثی مشابه می‌توان رابطه زیر را برای مشتق مرتبه سوم $f$ در نقطه $x_i$ به دست آورد.

$$f'''(x_i) \simeq \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + ۲f_{i-۱} - f_{i-۲}}{۲h^۳} \qquad (۲۱)$$

**مثال ۵.** تابع جدولی زیر مفروض است، مقادیر $f'_۰$، $f'_۲$ و $f''_۲$ را به دست آورید.

| $x_i$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۰ | ۰/۳۷۵ | ۰/۹۷۱ | ۱/۵۱۱ |

**حل:** از فرمول (۱۷) داریم؛ ( $h = ۱$ )

$$f'_۰ = f'(x_۰) = f'(۰) \simeq \frac{f_۱ - f_۰}{h} = \frac{۰/۳۷۵ - ۰}{۱} = ۰/۳۷۵$$
$$f'_۲ = f'(x_۲) = f'(۲) \simeq \frac{f_۳ - f_۲}{h} = \frac{۱/۵۱۱ - ۰/۹۷۱}{۱} = ۰/۵۴۰$$

همچنین برای $f'_۲$ از فرمول (۱۸) داریم :

$$f'_۲ \simeq \frac{f_۲ - f_۱}{h} = \frac{۰/۹۷۱ - ۰/۳۷۵}{۱} = ۰/۵۹۶$$

و از فرمول (۱۹) برای $f'_۲$ خواهیم داشت :

$$f'_۲ \simeq \frac{f_۳ - f_۱}{۲h} = \frac{۱/۵۱۱ - ۰/۳۷۵}{۲} = \frac{۱/۱۳۶}{۲} = ۰/۵۶۸$$

و از رابطه (۲۰) برای $f''_۲$ داریم:

$$f''_۲ = f''(x_۲) \simeq \frac{f_۱ - ۲f_۲ + f_۳}{h^۲} = \frac{۰/۳۷۵ - ۱/۹۴۲ + ۱/۵۱۱}{۱} = -۰/۰۵۶$$

## ۲.۴ خطای مشتق‌گیری عددی

به منظور به دست آوردن خطای فرمولهای مختلفی که در بخش‌های قبل برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلور استفاده می‌کنیم.به عنوان مثال فرمول (۱۷) را در نظر بگیرید که از رابطه (۱۵) به دست آمده است، هرگاه جملات را به طور کامل بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=f_i'+\frac{h}{2}f_i''+\frac{h^2}{6}f_i'''+\cdots \qquad (۲۲)$$

در نتیجه :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f_i'=\frac{h}{2}f_i''+\frac{h^2}{6}f_i'''+\cdots \qquad (۲۳)$$

لذا مقدار سمت راست در رابطه (۲۳) خطای $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ را به عنوان تقریبی از $f_i'$ بیان می‌کند.با توجه به این که $h$ کوچک اختیار می‌شود، **جمله غالب** در سمت راست عبارت (۲۳)، $\frac{h}{2}f_i''$ است، بنابراین خطای رابطه (۱۷) را به منظور تقریب $f_i'$ به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f_i'\simeq\frac{h}{2}f_i'' \qquad (۲۴)$$

چون توان $h$ در عبارت (۲۴) یک می‌باشد، اصطلاحاً می‌گوییم خطا **متناسب** با $h$ است و می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f_i'=O(h)$$

**مثال ۶.** نشان دهید خطای عبارت (۱۲) به منظور تقریب $f'(x_i+\frac{h}{2})$ متناسب با $h^2$ است، یعنی نشان دهید :

$$f'(x_i+\frac{h}{2})-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=O(h^2)$$

**حل:** بسط $f'(x_i + \frac{h}{2})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{(\frac{h}{2})^2}{2!}f'''_i + \cdots$$

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{8}f'''_i + \cdots \qquad (25)$$

هرگاه جملات عبارت (۲۲) را از عبارت (۲۵) کم کنیم، خواهیم داشت :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{h^2}{8}f'''_i - \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots = -\frac{1}{24}h^2 f'''_i$$

بنابراین

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

توجه: می‌دانیم $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ هم به عنوان تقریبی از $f'(x_i)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد و هم به عنوان تقریب $f'(x_i + \frac{h}{2})$. اما همانگونه که مثالهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، این عبارت تقریب بهتری برای $f'(x_i + \frac{h}{2})$ می‌باشد و عبارتهای خطا نیز این مطلب را تایید می‌کند، زیرا هر چه توان $h$ در عبارت خطا بیشتر باشد خطا کمتر است. از اینکه با کوچکتر شدن $h$، خطا کمتر می‌شود.

**توضیحی در مورد ناپایداری مشتق‌گیری عددی**

در حالت کلی خطای فرمولهای مشتق‌گیری عددی به صورت $O(h^p)$ است که در آن $p$ بستگی به تعداد جملاتی دارد که برای تقریب مشتق مورد نظر استفاده می‌شود ظاهراً هر چه $p$ بزرگتر باشد خطا نیز کمتر خواهد بود، اما در عمل به هنگام کوچک بودن مقدار $h$ مشکلاتی به وجود می‌آید. به عنوان مثال کسر زیر را به عنوان تقریب $f'_i$ در نظر بگیرید

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (26)$$

که نشان دادیم، خطای آن متناسب با $h$ است.در ظاهر برای کم بودن خطا، $h$ را بایستی کوچک اختیار کنیم.اما کوچک بودن $h$ به معنی نزدیک بودن $f_i$ و $f_{i+1}$ است، بنابراین $f_{i+1} - f_i$ می‌تواند

توام با خطای زیاد باشد (مسأله ۱۱ فصل اول را ببینید) و چون $f_{i+1} - f_i$ بر مقدار کوچک $h$ تقسیم می‌شود و یا در واقع در مقدار بزرگ $\frac{1}{h}$ ضرب می‌شود، خطای محاسبه کسر زیاد خواهد بود.خلاصه اینکه هرگاه $h$ خیلی کوچک باشد، خطای محاسبه $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ زیاد خواهد بود.بنابراین برای کم بودن خطا از طرفی $h$ باید خیلی کوچک اختیار شود و از طرف دیگر نباید خیلی کوچک اختیار شود.لذا برای انتخاب $h$ در تنگنا قرار می‌گیریم و انتخاب بهترین $h$ در عمل امکانپذیر نیست.

## ۳.۴ انتگرالگیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ هرگاه تابع اولیه $f$ موجود نباشد و یا $f$ به صورت جدولی داده شده باشد.از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود.واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که محصور است به محور $x$ها، خطوط $x = a$ و $x = b$ تعبیر کرد و با تقسیم فاصله $[a, b]$ به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحتهای مربوط به این زیر فاصله‌ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

فرض کنید $[a, b]$ به $n$ قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود :

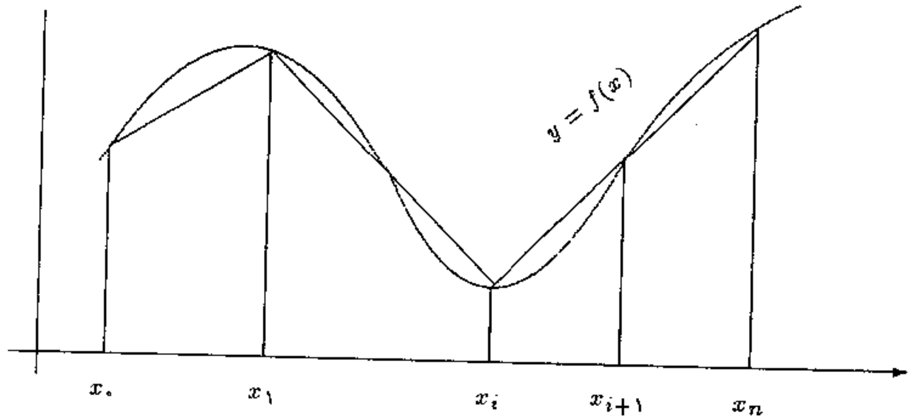
$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

لذا $$h = \frac{b-a}{n}$$

### ۱.۳.۴ قاعده ذوزنقه‌ای




در فاصله $[x_i, x_{i+۱}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx \simeq \frac{h}{۲}(f_i + f_{i+۱}) \qquad (۲۷)}$$

رابطه (۲۷) مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های $f_i$ و $f_{i+۱}$ و ارتفاع $h$ می‌باشد.

بنابراین برای پیدا کردن تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_۰}^{x_۱} f(x)dx + \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx + \cdots +$$
$$\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\simeq \frac{h}{۲}(f_۰ + f_۱) + \frac{h}{۲}(f_۱ + f_۲) + \cdots + \frac{h}{۲}(f_i + f_{i+۱}) + \cdots + \frac{h}{۲}(f_{n-۱} + f_n)$$
$$= \frac{h}{۲}[f_۰ + ۲f_۱ + ۲f_۲ + \cdots + ۲f_{n-۱} + f_n]$$

بنابراین با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{۲}[f_۰ + ۲f_۱ + ۲f_۲ + \cdots + ۲f_{n-۱} + f_n] \qquad (۲۸)}$$

**توجه:** $T(h)$ به معنی مقدار انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه‌ای (Trapezoid) می‌باشد که هر زیر فاصله دارای طول $h$ می‌باشد.

### ۲.۳.۴ قاعده سیمپسون

در قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ یک چند جمله‌ای درجه یک ( یک خط ) را جایگزین تابع $f(x)$ می‌کنیم که این عمل رابطه (۲۸) را نتیجه می‌دهد.اما در روش سیمپسون یک چند جمله‌ای درجه دوم را جایگزین تابع $f$ در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ می‌کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (۲۹)}$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_۰, x_n]$ چون رابطه (۲۹) تقریبی برای فاص
$[x_i, x_{i+۲}]$ است، لذا باید $n$ زوج باشد، یعنی تعداد نقاط فرد باشد تا بتوان (۲۹) را به کار برد با فرض زوج بودن
داریم:

$$\int_{x}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_۰}^{x_۲} f(x)dx + \int_{x_۲}^{x_۴} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-۲}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\simeq \frac{h}{۳}(f_۰ + ۴f_۱ + f_۲) + \frac{h}{۳}(f_۲ + ۴f_۳ + f_۴)$$
$$+ \cdots + \frac{h}{۳}(f_{n-۲} + ۴f_{n-۱} + f_n)$$

بنابراین هرگاه $S(h)$ نشان‌دهنده تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد که هر زیر فاصله دارای طول
است، خواهیم داشت:

$$\int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{۳}[f_۰ + ۴f_۱ + ۲f_۲ + ۴f_۳ + ۲f_۴ + \cdots + ۲f_{n-۲} + ۴f_{n-۱} + f_n]$$

مثال ۹: تقریبهایی از $\int_{۱}^{۱/۳} \sqrt{x}dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h = ۰/۱۵$ و $h = ۰/۰۵$ به دست آورید.

حل: داریم $f(x) = \sqrt{x}$، لذا

$$S(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۸۵$$

و

$$S(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۲۴۷۰) + ۲(۱/۰۴۸۸۱) + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۲(۱/۰۹۵۴۵) + ۴(۱/۱۱۸۰۳) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۹$$

### ۳.۳.۴ قاعده‌های دیگر انتگرالگیری

در فرمول قاعده‌ذوزنقه‌ای داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}f_i + \frac{h}{2}f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k$$

که در آن $A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$.

همچنین از قاعده سیمپسون نتیجه می‌شود که :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}f_i + \frac{4h}{3}f_{i+1} + \frac{h}{3}f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} A_k f_k$$

لذا در حالت کلی قواعدی که داریم به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} A_k f_k + E \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E \end{aligned} \qquad (30)$$

در رابطه (۳۰) آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ و ضرائب $A_0, A_1, \cdots, A_n$ است، که ذیلاً دو روش را برای محاسبه آنها ارائه می‌کنیم. در رابطه (۳۰)، $E$ مقدار خطای $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ است.

#### روش نیوتن- کاتس

در این روش نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی‌الفاصله و به صورت زیر :

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

بنابراین در رابطه (۳۰) مجهولات عبارتند از $n+1$ ضریب $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

برای به دست آوردن این ضرائب فرض می‌کنیم در رابطه (۳۰) برای توابع زیر مقدار خطا صفر است:

$$f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^n$$

یعنی ضرائب مجهول $A_k$ را طوری پیدا می‌کنیم که خطای عبارت $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ برای چند جمله‌ایهای تا درجه $n$ صفر باشد.هرگاه برای راحتی قرار دهیم $x_0 = 0$ در این صورت فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k + E \tag{۳۱}$$

که در آن $x_k = kh$، یعنی

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h$$

برای به دست آوردن ضرائب $A_0$ تا $A_3$ برای محاسبه انتگرال (۳۱) مقدار $E$ را برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

هرگاه $f(x) = 1$ در این صورت

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} dx = 3h$$

از طرفی برای $E = 0$ مقدار سمت راست رابطه (۳۱) عبارت است از :

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

بنابراین برای $f(x) = 1$ معادله زیر نتیجه می‌شود :

$$3h = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \tag{۳۲}$$

به طور مشابه برای $f(x) = x$ معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{9h^2}{2} = hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 \tag{۳۳}$$

زیرا

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} xdx = \frac{1}{2}(9h^2)$$

و

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k x_k = 0 + A_1 h + 2hA_2 + 3hA_3$$

به طور مشابه برای توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 A_1 + 4h^2 A_2 + 9h^2 A_3 \qquad (34)$$

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 A_1 + 8h^3 A_2 + 27h^3 A_3 \qquad (35)$$

پس از ساده کردن معادلات (۳۲) تا (۳۵) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = \frac{9h}{2} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 9h \\ A_1 + 8A_2 + 27A_3 = \frac{81h}{4} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه خواهیم داشت :

$$A_0 = \frac{3h}{8}, \qquad A_1 = \frac{9h}{8}, \qquad A_2 = \frac{9h}{8}, \qquad A_3 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq \frac{3h}{8}(f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

و با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر خواهد بود :

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(X)dX \simeq \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad (36)}$$

روش فوق‌الذکر به روش **ضرائب مجهول** نیز معروف است.

**مثال ۱۰.** با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس مقدار انتگرال $\int_0^1 xe^x dx$ را به دست

آورید.

حل: چون فرمول چهار نقطه‌ای است پس $n = ۳$ و از آن $h = \frac{۱ - ۰}{۳} = \frac{۱}{۳}$ لذا

$$x_۰ = ۰, \quad x_۱ = \frac{۱}{۳}, \quad x_۲ = \frac{۲}{۳}, \quad x_۳ = ۱$$

بنابراین

$$\int_۰^۱ xe^x dx \simeq \frac{۱}{۸}[f(۰) + ۳f(\frac{۱}{۳}) + ۳f(\frac{۲}{۳}) + f(۱)]$$
$$= \frac{۱}{۸}[۰ + e^{\frac{۱}{۳}} + ۲e^{\frac{۲}{۳}} + e^۱] = ۱/۰۰۱۱۷$$

## روش گاوس

در روش گاوس نقاط و ضرائب در رابطه (۳۰) مجهول فرض می‌شوند، پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۰}^{n} A_k f(x_k) + E$$

$(n + ۱)$ نقطه $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ و $(n + ۱)$ ضریب $A_۰, A_۱, \cdots, A_n$ مجهول هستند. به منظور به دست آوردن این $۲n + ۲$ مجهول برای توابع $f(x) = ۱, x, x^۲, \cdots, x^{۲n+۱}$ قرار می‌دهیم $E = ۰$.

بنابراین با این عمل $\sum_{k=۰}^{n} A_k f(x_k)$ برای انتگرال‌گیری چند جمله‌ایهای تا درجه $۲n + ۱$ دقیق می‌باشد.

**نکته:** برای آشنایی با روش‌های گاوس در حالت کلی از قبیل گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف و ... به یکی از کتب آنالیز عددی پیشرفته مراجعه کنید، در این بخش صرفاً بعضی از فرمولهای گاوس-لژاندر معرفی می‌شوند.

**توجه:** تفاوت اساسی روش گاوس با روشهای قبلی این است که در روشهای قبل تمام فرمولهای بیان شده برای نقاط متساوی‌الفاصله $x_k$ می‌باشند. در حالی که در روش گاوس چنین نیست. همچنین

فرمولهای قاعده گاوس برای فاصله $[-۱,۱]$ به دست می‌آیند.واضح است که فاصله‌های $[a,b]$ و $[-۱,۱]$ را به سادگی می‌توان باتغییر متغیر زیر به هم تبدیل نمود.فرض کنید $x \in [a,b]$ و $u \in [-۱,۱]$ در این صورت هر گاه قرار دهیم :

$$x = \frac{۱}{۲}[(b-a)u + (b+a)]$$

خواهیم داشت :

$$dx = \frac{b-a}{۲}du$$

لذا

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{۲}\int_{-۱}^{۱} g(u)du$$

که در آن

$$g(u) = f(\frac{۱}{۲}((b-a)u + (b+a)))$$

## فرمول دونقطه‌ای گاوس

هرگاه فرمول دونقطه‌ای گاوس را برای $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ بخواهیم به دست آوریم بایستی داشته باشیم :

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \sum_{k=۰}^{۱} A_k f(x_k) + E \qquad (۳۷)$$

که در آن برای توابع $f(x) = ۱, x, x^۲, x^۳$ داریم $E = ۰$.

با قرار دادن توابع فوق در رابطه (۳۷) و با $E = ۰$ به دستگاهی با چهار معادله و چهار مجهول می‌رسیم که از آن خواهیم داشت :

$$A_۰ = A_۱ = ۱$$

$$x_۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \qquad x_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

لذا فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \qquad (38)}$$

**مثال ۱۱.** برای محاسبه $\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin t dt$ دستور دو نقطه‌ای گاوس را بکار ببرید.

**حل:** با تغییر متغیر

$$t = \frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۲}x + \frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi(x+۱)}{۴}$$

نتیجه می‌شود :

$$\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin t dt = \frac{\pi}{۴}\int_{-۱}^{۱} \sin\frac{\pi(x+۱)}{۴}dx$$

$$f(x) = \sin\frac{\pi(x+۱)}{۴} \Longrightarrow f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۳۲۵۸۹$$

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۹۴۵۴۱$$

لذا بنا بر رابطه (۳۸) خواهیم داشت :

$$\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin t dt \simeq \frac{\pi}{۴}[۰/۳۲۵۸۹ + ۰/۹۴۵۴۱]$$

$$= ۰/۹۹۸۴۸$$

**نکته:** توجه کنید که در مثال قبل ابتدا فاصلهٔ $[\circ, \pi/۲]$ به فاصلهٔ $[-۱, ۱]$ تغییر داده شده و سپس از فرمول مربوطه استفاده شده است.

**مثال ۱۲ :** با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^۲ x}{x}dx$$

حل . با قرار دادن $x = \frac{u+۳}{۲}$ خواهیم داشت $dx = \frac{۱}{۲}du$، لذا

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^۲ x}{x}dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^۲(\frac{u+۳}{۲})}{(\frac{u+۳}{۲})}du$$

$$= \int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^۲(\frac{u+۳}{۲})}{u+۳}du \simeq f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

که در آن $f(x) = \dfrac{\sin^۲(\frac{x+۳}{۲})}{x+۳}$ لذا

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۲۶۶۴۷۵۲۳۶ \qquad , \qquad f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۳۶۱۶۹۱۲۳۱$$

بنابراین :

$$\int_۱^۲ \frac{\sin^۲ x}{x} dx \simeq ۰/۶۲۸۱۶۶۴۶۷$$

### فرمول سه نقطه‌ای گاوس

با روش مشابه فرمول دو نقطه‌ای، دستور انتگرالگیری ۳ نقطه‌ای گاوس به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \simeq \frac{۱}{۹}[۵f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) + ۸f(۰) + ۵f(\sqrt{\frac{۳}{۵}})] \qquad (۳۹)}$$

توجه:نقاط و ضرائب دستورهای مختلف انتگرالگیری گاوس در جداولی موجود هستند که می‌توان از آنها استفاده نمود.

**مثال ۱۳ :** جواب مثال ۱۲ را به کمک دستور سه نقطه‌ای گاوس به دست آورید.

حل: با داده‌های مثال ۱۲ داریم :

$$f(۰) = ۰/۳۳۱۶۶۵۴۱۶$$

$$f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۰/۳۶۱۴۷۳۲۴۶ \qquad , \qquad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۰/۲۳۹۲۶۴۵۱۲$$

لذا با توجه به فرمول (۳۹) خواهیم داشت :

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx \simeq \frac{۱}{۹}[۵/۶۵۷۰۱۲۱۱۸] = ۰/۶۲۸۵۵۶۹۰۲$$

### ۱.۵.۴ خطای روش ذوزنقه

فرمول قاعده ذوزنقه‌ای را برای محاسبه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ به وسیله چند جمله‌ای درونیاب $f$ که در نقاط $x_i$ و $x_{i+1}$ با $f$ هم مقدار است، به دست می‌آوریم.در فصل سوم خطای این چند جمله‌ای به صورت زیر بیان شد :

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x) \quad , \qquad \eta_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

که در آن $P(x) = f_i + s\Delta f_i$.هر گاه از طرفین رابطه اخیر انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x)dx \quad (41)$$

هرگاه فرض کنیم $f''(x)$ تابعی پیوسته است، چون برای $x$ در $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$x - x_i \geq 0$$

$$x - x_{i+1} \leq 0$$

لذا هرگاه قرار دهیم $g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ ، همواره خواهیم داشت :

$$g(x) \leq 0$$

یعنی $g(x)$ بر فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون تابع $H(x) = f''(\eta_x)$ نیز پیوسته فرض شده است، بنا بر قضیه ۱.۴ رابطه (۴۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = \frac{f''(\eta_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx \quad (۴۲)$$

که در آن $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$.هرگاه در انتگرال سمت راست عبارت فوق تغییر متغیر $x = x_i + sh$ را انجام دهیم، خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h^3}{6}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴۲) خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \quad (۴۳)$$

در نتیجه برای محاسبه خطای $T(h)$ یعنی محاسبه $ET(h)$، چون

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - T(h) =&[\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)] +\\ &[\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + [\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\\ &- \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})] + \cdots + [\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)]\end{aligned}$$

و بنابر رابطه (۴۳) مقدار خطا عبارت است از :

$$\begin{aligned}ET(h) &= -\frac{h^3}{12}f''(\eta_0) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_1) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_{n-1})\\ &= -\frac{h^3}{12}[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})] \qquad (۴۴)\end{aligned}$$

هرگاه قرار دهیم :

$$m = min\{f''(x): \ a \leq x \leq b\}$$

$$M = max\{f''(x): \ a \leq x \leq b\}$$

در این صورت بنا به خاصیت ماکسیمم و مینیمم تابع $f''(x)$ داریم :

$$m \leq f''(\eta_i) \leq M \qquad , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1 \qquad (۴۵)$$

هرگاه $n$ نامساوی در رابطه (۴۵) را با هم جمع کنیم،خواهیم داشت :

$$nm \leq f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) \leq nM$$

و از آن

$$m \leq \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n} \leq M$$

هرگاه قرار دهیم $\alpha = \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n}$ بنابراین چون

$$m \leq \alpha \leq M$$

بنا بر قضیه ۲.۴ یک $\beta \in [a, b]$ هست که

$$f''(\beta) = \alpha$$

یعنی

$$f''(\beta) = \frac{f''(\eta_0) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n}$$

و از آن $$f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) = nf''(\beta)$$

بنابراین رابطه (۴۴) به صورت زیر خواهد بود :

$$ET(h) = -\frac{nh^3}{12} f''(\beta)$$

و چون $nh = b - a$، لذا خطای انتگرال‌گیری روش ذوزنقه به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{ET(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta) \qquad (۴۶)}$$

نتیجه ۱.بنا بر رابطه (۴۶) خطای قاعده ذوزنقه‌ای متناسب با $h^2$ است، بنابراین هرگاه $h$ نصف شود مقدار خطا $\frac{1}{4}$ خواهد شد.

نتیجه ۲.بنا بر رابطه (۴۶) قاعده ذوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است زیرا مشتق مرتبه دوم در این توابع صفر است.

توجه: هرگاه $M_2$ یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$|f''(x)| \leq M_2 \qquad , \qquad x \in [a, b]$$

در این صورت :

$$\boxed{|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۲} h^{۲} M_{۲} \qquad (۴۷)}$$

**نتیجه .** نامساوی (۴۷) برای برآورد $h$، به طوری که خطای $T(h)$ از مقدار معینی بیشتر نباشد به کار می‌رود.مثلاً هرگاه بخواهیم $|ET(h)| \leq \epsilon$ کافی است $h$ را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{(b-a)}{۱۲} h^{۲} M_{۲} \leq \epsilon$$

**مثال ۱۷.** تقریبی از $\int_{۰}^{۱} x \sin x dx$ به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر $۱۰^{-۲}$ باشد.

حل: داریم $a = ۰$، $b = ۱$ و $\epsilon = ۱۰^{-۲}$، برای به دست آوردن $M_{۲}$ چون

$$f''(x) = ۲ \cos x - x \sin x$$

لذا

$$|f''(x)| = |۲ \cos x - x \sin x| \leq ۲|\cos x| + |x||\sin x| \leq ۲ + ۱ = ۳$$

پس $M_{۲} = ۳$، بنابراین بایستی $h$ را طوری به دست آوریم که داشته باشیم :

$$\frac{(۱-۰)}{۱۲} h^{۲}(۳) \leq ۱۰^{-۲}$$

و یا

$$\frac{h^{۲}}{۴} \leq ۱۰^{-۲} \Longrightarrow h \leq ۰/۲$$

بنابراین قرار می‌دهیم $h = ۰/۲$ و $T(۰/۲)$ را حساب کنیم.

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}(۰ + ۲(۰/۲ \sin ۰/۲ + ۰/۴ \sin ۰/۴ + ۰/۶ \sin ۰/۶ + ۰/۸ \sin ۰/۸)$$
$$+ \sin ۱) = ۰/۳۰۵۷۸$$

### ۲.۵.۴ خطای سایر روشهای انتگرالگیری

**الف.خطای روش سیمپسون .**

هرگاه $ES(h)$ خطای روش انتگرالگیری سیمپسون با طول زیر فاصله $h$ باشد با روشی مشابه روش به کار رفته در محاسبه $ET(h)$ می‌توان نشان داد که داریم :

$$\boxed{ES(h) \simeq -\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}f^{(۴)}(\eta) \qquad (۴۸)}$$

که در آن $\eta \in [a,b]$.

**نتیجه ۱.** رابطه (۴۸) نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با $h^{۴}$ بوده و روش سیمپسون برای چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

**نتیجه ۲.** چون $\eta$ مقداری نامعلوم است، لذا هرگاه داشته باشیم

$$|f^{(۴)}(x)| \leq M_{۴} \qquad , \qquad x \in [a,b]$$

بنابراین کران بالای خطای زیر را برای $S(h)$ خواهیم داشت

$$\boxed{|ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}M_{۴} \qquad (۴۹)}$$

با استفاده از رابطه (۴۹) می‌توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می‌شود حساب کرد.مثلاً هرگاه بخواهیم $S(h)$ را چنان به دست آوریم که

$$|ES(h)| \leq \epsilon$$

کافی است $h$ را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}M_{۴} \leq \epsilon$$

**مثال ۱۸.** $h$ را طوری به دست آورید که $S(h)$ مقدار $\int_{\circ}^{\pi/۲} x\cos x dx$ را با حداکثر خطای $۱۰^{-۵}$ تعیین کند.

**حل:** داریم $a=\circ$، $b=\frac{\pi}{۲}$، $\epsilon=۱۰^{-۵}$ و $f(x)=x\cos x$ ، لذا برای تعیین $M_۴$ چون

$$f^{(۴)}(x)=۴\sin x+x\cos x$$

برای $\circ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت :

$$|f^{(۴)}(x)|=|۴\sin x+x\cos x| \le ۴|\sin x|+|x||\cos x| \le ۴+\frac{\pi}{۲} < ۶$$

پس قرار می‌دهیم $M_۴=۶$ و از آن :

$$\frac{b-u}{۱۸۰}h^۴M_۴=\frac{\frac{\pi}{۲}-\circ}{۱۸۰}h^۴\times ۶=\frac{\pi h^۴}{۶۰} \le ۱۰^{-۵}$$

بنابراین بایستی

$$h \le \circ/۱ \times \sqrt[۴]{\frac{۶}{\pi}} \simeq \circ/۱۱۷۶$$

لذا چون داریم $nh=b-a=\frac{\pi}{۲}$ پس $n=\frac{\pi}{۲h}$ و از آن

$$n=\frac{\pi}{۲h} \ge \frac{\pi}{۲\times \circ/۱۱۷۶}=۱۳/۳۵۷۱$$

چون در روش سیمپسون بایستی $n$ زوج باشد، لذا قرار می‌دهیم $n=۱۴$ و از آن

$$h=\frac{\pi/۲}{n}=\frac{\pi}{۲۸} \simeq \circ/۱۱۲۲$$

که از $\circ/۱۱۷۶$ کمتر است.

## مجموعه مسائل فصل چهارم

۱- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید، فاصله $[۱, ۱/۳۰]$ را به صورت $x=۱/۰(۰/۰۵)۱/۳۰$ جدول بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف.با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(۱)$ را به دست آورید.

ب.با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(۱)$ را به دست آورید.

پ.با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(۱)$ به دست آورید.

جواب. الف. ۰/۴۹۴ ب. ۰/۴۹۹۹ پ.۰/۲۳۶−.

۲- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i, i=۱,۲,\cdots,۵$ به دست آورید.

۳- مساله ۲ را با استفاده از رابطه (۹) حل کنید.

۴- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۰) مقادیری برای $f''_i, i=۱,۲,\cdots,۵$ به دست آورید.

۵- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۲) تقریبی برای $f'(۱/۱۲۵)$ به دست آورید.

جواب.۰/۴۷۱۴.

۶- انتگرال $\int_۱^{۱/۳}\sqrt{x}dx$ را در نظر بگیرید.مقادیر خواسته شده را با $(۵D)$ به دست آورید.

الف.$T(۰/۳)$ ب.$T(۰/۱۵)$ پ.$T(۰/۱)$ ت.$T(۰/۰۵)$

جواب.الف.۰/۳۲۱۰۲ ب.۰/۳۲۱۳۷ پ. ۰/۳۲۱۴۳ ت.۰/۳۲۱۴۷

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x}$ را با $h=۱$ ، $h=۰/۵$ و $h=۰/۲۵$ $(۴D)$ به دست آورید.

جواب. $T(۱) = ۰/۷۵۰۰$ ، $T(۰/۵) = ۰/۷۰۸۳$ ، $T(۰/۲۵) = ۰/۶۹۷۰$

۸- مقدار $\int_۰^۱ x^۲ dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$ حساب کنید.

جواب. $T(۱) = \frac{۱}{۲}$، $T(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۸}$، $T(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱۱}{۳۲}$

۹- تقریبی از $\int_۰^{\pi/۲} \sin x dx$ را با $T(\frac{\pi}{۸})$ به دست آورید.

جواب. ۰/۹۸۷۱۲.

۱۰- تقریبهایی از $\int_۱^۳ \frac{dx}{x}$ را با $T(۱)$ و $T(\frac{۱}{۲})$ به دست آورید.

جواب. $T(۱) = \frac{۷}{۶}$، $T(\frac{۱}{۲}) = \frac{۶۷}{۶۰}$

۱۱- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x}$ را با $S(۰/۱)$ به دست آورید.

جواب. ۰/۶۹۳۱.

۱۲- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ x^۳ dx$ را با $S(۰/۵)$ به دست آورید.

جواب. ۰/۲۵.

۱۳- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(۰/۲۵)$ به دست آورید، (قرار دهید $۱ = \lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x}$).

جواب. ۰/۹۴۶۱.

۱۴- مقدار $\int_۰^{\pi/۲} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{۸}, \frac{\pi}{۱۶}, \frac{\pi}{۳۲}, \frac{\pi}{۶۴}$ به دست آورید.

جواب. $S(\frac{\pi}{۸}) = ۱/۰۰۰۱۳۴۴$

$S(\frac{\pi}{۱۶}) = ۱/۰۰۰۰۰۸۱$، $S(\frac{\pi}{۳۲}) = ۰/۹۹۹۹۹۹۸۳$، $S(\frac{\pi}{۶۴}) = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۳$

۱۵- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. مقدار $\int_۰^{\pi/۲} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

| $x_i$ | ۰ | $\pi/۱۲$ | $۲\pi/۱۲$ | $۳\pi/۱۲$ | $۴\pi/۱۲$ | $۵\pi/۱۲$ | $\pi/۲$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | ۰ | ۰/۲۵۸۸۲ | ۰/۵ | ۰/۷۰۷۱۱ | ۰/۸۶۶۰۳ | ۰/۹۶۵۹۳ | ۱ |

جواب. $T(\frac{\pi}{۱۲}) = ۰/۹۹۴۲۹$، $S(\frac{\pi}{۱۲}) = ۱/۰۰۰۰۳$

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای $(n = ۳)$ مقدار $\int_۱^۳ e^{-x/۲} dx$ را تقریب کنید.

جواب.۰٫۷۶۶۹۲.

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن‌ـکاتس چهار نقطه‌ای ($n = ۳$) تقریبی از انتگرالهای زیر به دست آورید.

الف. $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + x}dx$ ب. $\int_{۱٫۱}^{۱٫۵} e^{x} dx$

جواب.الف.۰٫۱۰۲۴۵۹۸۲۱ ب. ۱٫۴۷۷۵۲۸۸۵۸

۱۸- مقدار $\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^{۲}} dx$ را به روش نیوتن‌ـکاتس و با $h = \frac{۱}{۶}$ به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۳۴۰۴.

۱۹- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۴۰۰۳.

۲۰- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۳۶۴۲.

۲۱- مقدار $\int_{۱}^{۳} e^{x} \sin x dx$ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۱۰٫۹۵۰۱۴۰

۲۲- مقدار انتگرال مساله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۱۰٫۹۴۸۴۰۳

۲۳- تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای $h$های داده شده، به دست آورید.

الف. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x} \quad , \quad h = ۰٫۱$

ب $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x^{۲}} \quad , \quad h = ۰٫۲$

پ. $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad h = ۰٫۲$

۲۴- تقریبی از $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$ حساب کنید.برای این منظور قرار دهید :

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} = \int_{۰}^{۰٫۹} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} + \int_{۰٫۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و $h = ۰/۰۱$ مقدار $\int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $h = ۰/۱$ مقدار $\int_{۰}^{۰/۹} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ را حساب کنید.

۲۵- تقریبی از $\int_{۰}^{۲} x \sin ۲x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰/۵ باشد.

جواب. $h = ۰/۵$ و $T(۰/۵) = ۰/۳۹۲$

۲۶- تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰/۰۰۰۱ و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

الف. $\int_{۰}^{\pi/۲} \cos x dx$ ب. $\int_{۰}^{\pi/۲} x \cos x dx$ پ. $\int_{۰}^{۱} e^x dx$

جواب.الف. $h \simeq ۰/۰۳۴, n = ۲۹$ ب. $h \simeq ۰/۰۱۳۷۸ ,n = ۱۱۴$

پ. $h = ۰/۰۲. n = ۵۰$

۲۷- حدود $h$ را برای محاسبه تقریبی $\int_{۰}^{۱} e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که :

الف.داشته باشیم $|ET(h)| \leq ۱۰^{-۵}$

ب.داشته باشیم $|ES(h)| \leq ۱۰^{-۵}$

جواب. الف. $h = ۰/۰۰۴۵, n = ۲۲۴$ ب. $h = ۰/۰۷۴۰۰۸, n = ۱۴$

۲۸- روش انتگرالگیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{۰}^{h} f(\sqrt{x})dx \simeq w_۱ f(۰) + w_۲ f'(۰) + w_۳ f(h)$$

ضرایب $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ را طوری به‌دست آورید که روش انتگراگیری فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق باشد.

جواب. $w_۱ = h - \frac{۱}{۲}$ و $w_۲ = \frac{۲}{۳}h\sqrt{h} - \frac{h}{۲}$ و $w_۳ = \frac{۱}{۲}$

**۲۹.** فرض کنید در تقریب زیر، معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_{۰}^{۶} f(x)dx \simeq \sum_{i=۰}^{۳} w_i f(x_i)$$

که در آن $x_0 = 0$، $x_1 = 2$، $x_2 = 5$ و $x_3 = 6$. مطلوبست محاسبه $w_i$ برای $i = 0, 1, 2, 3$.

**جواب.** $w_0 = \frac{2}{5}$، $w_1 = 3$، $w_2 = \frac{12}{5}$، $w_3 = 0$

**۳۰.** برای محاسبهٔ تقریبی از انتگرال تابع $f$ در فاصلهٔ $[0, 6h]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x)dx \simeq w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

**الف.** ضرایب $w_1$، $w_2$ و $w_3$ را چنان تعیین کنید که رابطهٔ فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق باشد.

**ب.** نشان دهید قاعده فوق برای چند جمله‌ایهای درجهٔ ۳ نیز دقیق است.

**جواب.** **الف.** $w_1 = w_3 = \frac{9}{4}h$ و $w_2 = \frac{3}{2}h$

**۳۱.** قسمتهای الف و ب مساله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \simeq h[w_1 f(-h) + w_2 f(0) + w_3 f(h)]$$

**جواب.** $w_1 = w_3 = \frac{1}{3}$، $w_2 = \frac{4}{3}$

# فصل پنجم

# روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

## ۱.۵ مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی در بسیاری از مسائل کاربرد دارند.یک معادله دیفرانسیل از مرتبه $p$، در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد :

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(p)}) = 0$$

و منظور از حل آن پیدا کردن تابع $y = y(x)$ است که در معادله فوق صدق می‌کند.در درس معادلات دیفرانسیل وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل و یادگیری فنون و روشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می‌شود.این کار با دسته بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دسته خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد.اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان به روشهای تحلیلی موجود جواب آنها را به دست آورد.حتی در مواقعی که می‌توان جواب تحلیلی معادلات را به دست آورد، این جواب ممکن

است دارای فرم پیچیده‌ای باشد.مثلاً جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

به صورت $\ln(x^2+y^2) = 2\arctan(\dfrac{y}{x})$ می‌باشد که پس از محاسبات زیادی به دست می‌آید.به علاوه هرگاه بخواهیم مقدار $y(x)$ را به ازای $x$ داده شده به دست آوریم این کار مشکل است، لذا حل عددی معادلات دیفرانسیل مبحثی است که بسیار موردنظر است و کاربرد دارد.

این قسمت را با ساده‌ترین معادله یعنی معادله مرتبه اول

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

شروع می‌کنیم که در آن $x_0$ و $y_0$ مقادیر معلومی هستند.هرگاه $y$ جواب معادله دیفرانسیل (۱) باشد $y(x_n)$ را مقدار واقعی $y$ به ازاء $x_n$ و $y_n$ را مقدار تقریبی در نظر می گیریم، یعنی داریم

$$y(x_n) \simeq y_n$$

روشی را که بررسی می‌کنیم این است که یک $h$ در نظر گرفته و بعد نقاط $x_n = x_0 + nh$ را در نظر می‌گیریم.هدف این است که $y(x_n)$ را توسط $y_n$ تقریب بزنیم و $y_n$ را به دست آوریم.برای این منظور روشهای زیادی وجود دارند که ذیلاً چند تا از آنها را معرفی می‌کنیم.

## ۲.۵ روش بسط تیلور

یکی از روشهای حل عددی معادلات دیفرانسیل، استفاده از سری تیلور است. معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید که معادله‌ای از مرتبه اول است و در آن تابع $f$ ممکن است نسبت به $y$

خطی یا غیر خطی باشد.در هر صورت فرض می‌کنیم $f$ به اندازه کافی نسبت به $x$ و $y$ مشتق‌پذیر باشد.هرگاه $x_1 = x_0 + h$ در این صورت بسط تیلور تابع $y$ را حول $x_0$ می‌نویسیم، بنابراین خواهیم داشت :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_0) + \cdots \qquad (2)$$

چون $y(x)$ مجهول است، مشتقات آن نیز موجود نخواهند بود ولی با استفاده از (۱) و به شرط وجود مشتقات $f$ نسبت به $x$ و $y$ تا هر مرتبه دلخواه می‌توان $y'$، $y''$ و ...را به دست آورد.هرگاه $y' = f(x, y) = f$ در این صورت :

$$y'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$
$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

به همین ترتیب می‌توانیم مشتقات مرتبه بالاتر را نیز به دست آوریم.هر چند همانطورکه روابط فوق نشان می‌دهند حتی اگر تابع $f$ تابعی ساده باشد، مشتقات مرتبه بالای $y$ می‌توانند پیچیده باشند.لذا امکان استفاده از جملات با مرتبه بالا در سری تیلور نیست.بنابراین بایستی سری (۲) را محدود کنیم که این عمل باعث می‌شود که جواب به دست آمده برای معادله در یک نقطه از فاصله $[a, b]$ با مقدار واقعی جواب، اختلاف ( فاحش ) داشته باشد.هرگاه سر ی(۲) را تا مشتق مرتبه $k$ام بنویسیم در این صورت

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \simeq y(x_0) + hy'(x_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_0) = y_1 \qquad (3)$$

برای تعیین جواب معادله (۱) در نقطه $x_2 = x_1 + h$ مراحل بالا را تکرار می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت

$$y(x_2) = y(x_1 + h) \simeq y(x_1) + hy'(x_1) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_1) \qquad (4)$$

البته در اینجا دیگر $y(x_۱)$ را نداریم و ناچار بایستی مقدار تقریبی آن یعنی $y_۱$ را قرار دهیم، در نتیجه :

$$y(x_۲) \simeq y_۲ = y_۱ + hy'_۱ + \cdots + \frac{h^k}{k!}y_۱^{(k)}$$

با تکرار روش فوق $y$ را در تمام نقاط $x_i = x_۰ + ih$ برای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$ تعیین می‌کنیم.

## ۱.۲.۵ الگوریتم روش تیلور از مرتبه $k$

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_۰) = y_۰$ در فاصله $[a, b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱. فاصله $[a, b]$ را به $N$ قسمت مساوی به طول $h = \dfrac{b-a}{N}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم :

$$x_۰ = a, \quad x_N = b, \quad y(x_n) = y(a + nh), \quad x_n = a + nh$$

۲. با داشتن $y_n$ مقدار تقریبی $y(x_{n+۱})$ یعنی $y_{n+۱}$ را از فرمول زیر به می‌آوریم:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) + \dfrac{h^۲}{۲!}f'(x_n, y_n) + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}f^{(k-۱)}(x_n, y_n) \\ n = ۰, ۱, ۲, \cdots, N - ۱ \qquad (۵) \end{array}}$$

**مثال ۱.** با استفاده از روش تیلور مرتبه چهار مطلوبست برآورد $y(۰/۵)$ مشروط به اینکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

**حل:** داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۱$ و $f(x, y) = x + y$ بنابراین :

$$y' = f(x, y) = x + y$$

$$y'' = f'(x, y) = ۱ + y' = ۱ + x + y$$

$$y''' = f''(x,y) = y'' = ۱ + x + y$$

$$y^{(۴)} = f'''(x,y) = y''' = ۱ + x + y$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۵) و اختیار نمودن ۴ = $k$ و ۰٫۱ = $h$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} y_{n+۱} &= y_n + ۰٫۱(x_n + y_n) + \frac{(۰٫۱)^۲}{۲!}(۱ + x_n + y_n) + \frac{(۰٫۱)^۳}{۶}(۱ + x_n + y_n) \\ &\quad + \frac{(۰٫۱)^۴}{۲۴}(۱ + x_n + y_n) \\ &\simeq ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷x_n + ۱٫۱۰۵۱۷y_n \end{aligned}$$

لذا

$$y_۱ = ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷(۰) + ۱٫۱۰۵۱۷(۱) = ۱٫۱۱۰۳۴$$

$$y_۲ = ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷(۰٫۱) + ۱٫۱۰۵۱۷(۱٫۱۱۰۳۴) = ۱٫۲۴۲۸۰$$

$$y_۳ = ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷(۰٫۲) + ۱٫۱۰۵۱۷(۱٫۲۴۲۸۰) = ۱٫۳۹۹۷۱$$

$$y_۴ = ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷(۰٫۳) + ۱٫۱۰۵۱۷(۱٫۳۹۹۷۱) = ۱٫۵۸۳۶۴$$

$$y_۵ = ۰٫۰۰۵۱۷ + ۰٫۱۰۵۱۷(۰٫۴) + ۱٫۱۰۵۱۷(۱٫۵۸۳۶۴) = ۱٫۷۹۷۴۳$$

در نتیجه

$$y(۰٫۵) \simeq y_۵ = ۱٫۷۹۷۴۳$$

## ۳.۵ روش اویلر

هرگاه در الگوریتم تیلور قرار دهیم ۱ = $k$، خواهیم داشت :

$$\boxed{y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (۶)}$$

این روش به روش اویلر موسوم است.

**مثال ۲.** معادله $y' = ۱ - \frac{y}{x}$ را با شرط $y(۲) = ۲$ در نظر بگیرید.به روش اویلر تقریبی از جواب معادله را در $x = ۲/۱$ با قرار دادن $h = ۰/۱$ به دست آورید.

**حل:** داریم $x_۰ = ۲$، $y_۰ = ۲$، $h = ۰/۱$ و $f(x, y) = ۱ - \frac{y}{x}$ بنابراین

$$\begin{aligned} y(۲/۱) = y(x_۱) \simeq y_۱ &= y_۰ + hf(x_۰, y_۰) \\ &= ۲ + ۰/۱(۱ - \frac{y_۰}{x_۰}) \\ &= ۲ + ۰/۱(۱ - \frac{۲}{۲}) \\ &= ۲ \end{aligned}$$

**مثال ۳.** تقریبی از $y(۰/۵)$ برای معادله دیفرانسیل مثال ۱ به روش اویلر و با $h = ۰/۱$ به دست

آورید.

حل: داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۱$، $h = ۰/۱$ و $f(x,y) = x + y$ ، لذا

$$y_{n+۱} = y_n + ۰/۱(x_n + y_n) = ۰/۱x_n + ۱/۱y_n$$

بنابراین :

$$y_۱ = ۰/۱x_۰ + ۱/۱y_۰ = ۰/۱(۰) + ۱/۱(۱) = ۱/۱$$

$$y_۲ = ۰/۱x_۱ + ۱/۱y_۱ = ۰/۱(۰/۱) + ۱/۱(۱/۱) = ۱/۲۲$$

$$y_۳ = ۰/۱x_۲ + ۱/۱y_۲ = ۰/۱(۰/۲) + ۱/۱(۱/۲۲) = ۱/۳۶۲$$

$$y_۴ = ۰/۱x_۳ + ۱/۱y_۳ = ۰/۱(۰/۳) + ۱/۱(۱/۳۶۲) = ۱/۵۲۸۲$$

$$y_۵ = ۰/۱x_۴ + ۱/۱y_۴ = ۰/۱(۰/۴) + ۱/۱(۱/۵۲۸۲) = ۱/۷۲۱۰۲$$

در نتیجه $y(۰/۵) \simeq y_۵ = ۱/۷۲۱۰۲$.

## ۴.۵ روش رونگه‌ـکوتا

روش تیلور مرتبه $k$ در عمل برای مراتب بالا قابل استفاده نیست زیرا به مشتقات مرتبه بالا نیاز دارد.حالت خاص $k = ۱$ یعنی روش اویلر نیز چندان مفید نیست، مگر اینکه $h$ را خیلی کوچک در نظر بگیریم.لذا برای حل معادله دیفرانسیل از روشهای دیگر استفاده می‌شود که در آن نیازی به محاسبه مشتقهای مرتبه بالای $f$ نیست، در عین حال از دقتی در حد دقت روش تیلور و مرتبه بالا برخوردار است.

## ۱.۴.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه دو

**الگوریتم روش رونگه-کوتای مرتبه دو:**

برای مقدار ثابت $h$ و $x_n = x_\circ + nh$ قرار دهید

$$\boxed{\begin{cases} k_۱ = hf(x_n, y_n) \\ k_۲ = hf(x_n + h, y_n + k_۱) \qquad (۷) \\ y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) \end{cases}}$$

عملیات فوق را برای $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ تکرار کنید.

**مثال ۴.** تقریبی از $y(۰/۲)$ به دست آورید هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

از روش رونگه‌ـکوتای مرتبه ۲ استفاده کنید و قرار دهید $h = ۰/۱$.

**حل:** با توجه به الگوریتم (۷) داریم :

$$\begin{cases} k_۱ = ۰/۱(x_n + y_n) \\ k_۲ = ۰/۱(x_n + ۰/۱ + y_n + k_۱) \\ y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) \end{cases}$$

بنابراین برای $n = ۰$ خواهیم داشت :

$$k_۱ = ۰/۱(۰ + ۱) = ۰/۱$$

$$k_۲ = ۰/۱(۰/۱ + ۱/۱) = ۰/۱۲$$

$$y_۱ = ۱ + \frac{۱}{۲}(۰/۱ + ۰/۱۲) = ۱/۱۱$$

و برای $n = ۱$ داریم :

$$k_۱ = ۰٫۱(۰٫۱ + ۱٫۱۱) = ۰٫۱۲۱$$

$$k_۲ = ۰٫۱(۰٫۲ + ۱٫۱۱ + ۰٫۱۲۱) = ۰٫۱۴۳۱$$

$$y_۲ = ۱٫۱۱ + \frac{۱}{۲}(۰٫۱۲۲ + ۰٫۱۴۳۱) = ۱٫۲۴۲۰۵$$

**مثال ۵.** فرض کنید

$$\begin{cases} y' = ۱ - y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

با $h = ۰٫۰۵$ و به روش رونگه‌ـکوتای مرتبه دوم تقریبی برای $y(۰٫۰۵)$ به دست آورید.

**حل:** داریم : $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۰$، $h = ۰٫۰۵$ و $f(x,y) = ۱ - y$، بنابراین

$$k_۱ = hf(x_۰, y_۰) = ۰٫۰۵(۱ - ۰) = ۰٫۰۵$$

$$k_۲ = hf(x_۰ + ۰٫۰۵, y_۰ + k_۱) = ۰٫۰۵f(۰٫۰۵, ۰٫۰۵) = ۰٫۰۵(۱ - ۰٫۰۵) = ۰٫۰۴۷۵$$

$$y_۱ = y_۰ + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) = ۰٫۰۴۸۷۵$$

لذا

$$y(۰٫۰۵) \simeq y_۱ = ۰٫۰۴۸۷۵$$

### ۲.۴.۵ روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار

#### الگوریتم روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار

برای معادله $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_۰) = y_۰$ و مقدار ثابت $h$ قرار دهید

$$y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۶}[k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴]$$

که در آن

$$k_۱ = hf(x_n, y_n)$$

$$k_۲ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۱}{۲})$$

$$k_۳ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۲}{۲})$$

$$k_۴ = hf(x_n + h, y_n + k_۳)$$

با تغییر مقدار $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ و داشتن $y_n$ مقدار تقریبی $y(x_{n+۱})$ یعنی $y_{n+۱}$ به دست خواهد آمد.

**مثال ۶.** معادله $y' = x + y$ را با شرط $y(\circ) = ۱$ در نظر بگیرید. تقریبی از $y(\circ/۱)$ را با استفاده از فرمول رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار با $h = \circ/۱$ به دست آورید.

**حل:** داریم $x_\circ = \circ$، $y_\circ = ۱$، $f(x, y) = x + y$ و $h = \circ/۱$. بنابراین

$$k_۱ = \circ/۱(\circ + ۱) = \circ/۱$$

$$k_۲ = \circ/۱(\circ/\circ۵ + ۱/\circ۵) = \circ/۱۱$$

$$k_۳ = \circ/۱(\circ/\circ۵ + ۱/\circ۵۵) = \circ/۱۱\circ۵\circ$$

$$k_۴ = \circ/۱(\circ/۱ + ۱/۱۱\circ۵\circ) = \circ/۱۲۱\circ۵$$

بنابراین

$$y_۱ = ۱ + \frac{۱}{۶}(\circ/۱ + ۲ \times \circ/۱۱ + ۲ \times \circ/۱۱\circ۵\circ + \circ/۱۲۱\circ۵) = ۱/۱۱\circ۳۴$$

لذا

$$y(\circ/۱) \simeq y_۱ = ۱/۱۱\circ۳۴$$

**توجه:** همانگونه که ملاحظه می‌کنید در روشهای رونگه‌ـکوتا تعداد محاسبات زیاد است وعملاً انجام این محاسبات برای $x_n$های دور از $x_\circ$ با دست امکان‌پذیر نیست و نیاز به استفاده از کامپیوتر داریم.

**مثال ۷.** معادله $y' = ۱ - y^۲$ را با شرط $y(۰) = ۰$ با قرار دادن $h = ۰/۱$ به روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار حل کنید و مقدار تقریبی $y(۰/۱)$ را به دست آورید.

**حل:** داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۰$، $f(x,y) = ۱ - y^۲$ و $h = ۰/۱$.لذا با استفاده از الگوریتم روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار داریم :

$$k_۱ = ۰/۱, \quad k_۲ = ۰/۰۹۹۷۵, \quad k_۳ = ۰/۰۹۹۷۵, \quad k_۴ = ۰/۰۹۹۰۰$$

بنابراین

$$y_۱ = ۰ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۰/۰۹۹۶۷$$

در نتیجه

$$y(۰/۱) \simeq y_۱ = ۰/۰۹۹۶۷$$

**توجه:** روش رونگه‌ـکوتا مرتبه چهارم از دقت بیشتری نسبت به روش مرتبه دوم رونگه‌ـکوتا برخوردار است و در عمل بیشتر از آن استفاد می‌شود.

## مجموعه مسائل فصل پنجم

۱-.معادله $xy' = x - y, x \neq ۰$ با شرط $y(۲) = ۲$ مفروض است.به روش تیلور مرتبه چهار تقریبی از جواب آن را در $x = ۲/۱$ به دست آورید.قرار دهید $h = ۰/۱$.

جواب.۲/۰۰۲۳۷۵.

۲- معادله زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

به روش تیلور مرتبه چهار و با $h = ۰/۱$ تقریبی از $y(۰/۵)$ به دست آورید.

جواب.۱/۷۹۷۴۴

۳- معادله $y' = y$ را با شرط $y(۰) = ۱$ با فرض $h = ۰/۰۱$ به روش اویلر حل کنید و تقریبی برای $y(۰/۰۴)$ به دست آورید.

جواب.۱/۰۴۰۶۰۶

۴- مطلوبست جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر در فاصله $[۰, ۱]$ با $h = ۰/۲۵$ و به روش اویلر.

$$\begin{cases} y' = \sin x + \sin y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

جواب. $y_1 = ۱/۲۱۰۴, \quad y_۲ = ۱/۵۰۶۲, \quad y_۳ = ۱/۸۷۵۵, \quad y_۴ = ۲/۲۸۴۴,$

۵- با استفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله [۰ , ۲] حل کنید.

$$\begin{cases} y' = -۱۰(x-۱)y \\ y(۰) = e^{-۵} \end{cases}$$

قرار دهید $h = ۰/۱$ و مقادیر زیر را تقریب کنید.

الف. $y(۰/۵)$ ب. $y(۱)$ پ. $y(۱/۵)$ ت. $y(۲)$

جواب. الف. ۰/۱۲۵۴ ب. ۰/۴۵۲ پ. ۰/۱۳۷ ت. ۰/۰۰۰۲

۶- فرض کنید

$$\begin{cases} y' = x - y + ۱ \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

با به کار بردن روش بسط تیلور مرتبه دوم و $h = ۰/۱$ مقدار تقریبی $y(۰/۱)$ را به دست آورید.

جواب. ۱/۰۰۵

۷- برای معادله مساله ۶ با همان $h = ۰/۱$ و روش بسط تیلور مرتبه دوم مقدار تقریبی $y(۰/۲)$ را به دست آورید.

جواب. ۱/۰۱۹

۸- هرگاه

$$\begin{cases} y' = ۲(x+۱)\cos ۲y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

تقریبی از $y(۰/۱)$ را با $h = ۰/۱$ به روش اویلر به دست آورید.

جواب. ۰/۲

۹- تقریبی از جواب معادلهٔ

$$\begin{cases} y' = x \sin \pi y \\ y(۰/۵) = ۰/۵ \end{cases}$$

را به ازای $h = ۰/۱$ در $x = ۰/۶$ به روش اویلر حساب کنید.

جواب.۰/۵۵

۱۰- معادله دیفرانسیل زیر را با روش رونگه-کوتا مرتبه دو حل کنید و تقریبی از $y(۰/۱)$ به دست آورید، قرار دهید $h = ۰/۰۵$.

$$\begin{cases} y' = -y + ۱ \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

جواب.۰/۰۹۵۱۲۳۴۳۷

۱۱- معادله دیفرانسیل مسأله ۱۰ را با روش رونگه-کوتای مرتبه چهار حل کنید.قرار دهید $h = ۰/۰۵$ و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(۰/۱)$ ب. $y(۰/۲)$ پ. $y(۰/۳)$ ت. $y(۰/۴)$

ث. $y(۰/۵)$

جواب.الف. ۰/۰۹۵۱۶۲۵۰ ب. ۰/۱۸۱۲۶۹۱۰ پ. ۰/۲۵۹۱۸۱۵۸

ت. ۰/۳۲۹۶۷۹۷۱ ث. ۰/۳۹۳۴۶۹۰۶

۱۲- با استفاده از روش رونگه-کوتا مرتبه چهار معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[۰, ۱]$ حل نمائید.قرار دهید $h = ۰/۲۵$

$$\begin{cases} ۱۰y' = x^۲ + y^۲ \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(۰/۲۵)$ ب. $y(۰/۵)$ پ. $y(۰/۷۵)$ پ. $y(۱)$

جواب.الف. ۱/۰۲۶۲ ب ۱/۰۵۶۹

پ. ۱/۰۹۵۷ ت. ۱/۱۴۶۴

۱۳- با استفاده از روش رونگه‌ـکوتا مرتبه چهار و قرار دادن $h = ۰/۱$ تقریبی از مقدار $y(۱/۱)$ برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^{۱/۳} \\ y(۱) = ۱ \end{cases}$$

جواب.۱/۱۰۶۸۲

۱۴- تقریبهایی از $y(۰/۴)$ و $p(۰/۴)$ را برای دستگاه معادلات مثال ۸ به دست آورید.

۱۵- تقریبی برای $y(۰/۶)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۹ به دست آورید.

۱۶- با قرار دادن $h = ۰/۱$ تقریبهایی از $y(۰/۱)$ و $y(۰/۲)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۱۰ به دست آورید.مقادیر به دست آمده را با مقدار واقعی جواب که $y(x) = e^{-x}$ می‌باشد، مقایسه کنید.

۱۷- با قرار دادن $h = ۰/۲$ تقریبهایی از $y(۰/۱)$ و $y(۰/۲)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۱۱ به دست آورید.

۱۰۲


گسترش علوم پایه

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۴۹۰-۰۴۸-۸

ISBN: 978-964-490-048-8

تلفن انتشارات : ۶۶۹۰۵۳۱۲-۱۵

تلفکس: ۶۶۹۰۵۳۱۶ -۰۲۱

مرکز پخش تهران : ۶۶ ۵۹ ۵۵ ۱۴ - ۶۶ ۵۹ ۵۵ ۱۳