

# سیگنال و سیستم (تجزیه و تحلیل سیستم‌ها) ۱۸-۱۱-۱۳



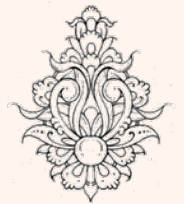
دانشگاه شهید بهشتی  
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

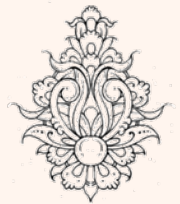
# فهرست مطالب

- سیستم‌های LTI
- کانولوشن
- خواص سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف‌شونده با معادلات دیفرانسیل



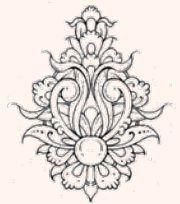
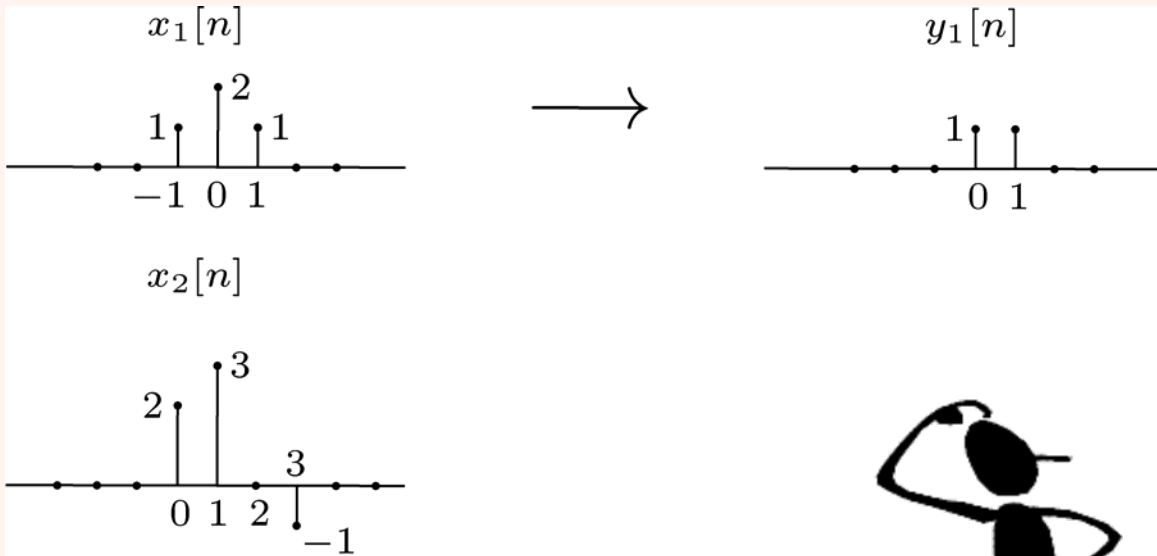
# پیش‌گفتار

- در ادامه بر روی سیستم‌های خطی و تخریب‌ناپذیر با زمان (LTI) متمرکز خواهیم شد.
- بسیاری از سیستم‌های فیزیکی بدین صورت مدل می‌شوند.
- چنین سیستمی را می‌توان به راحتی و با دقت تحلیل کرد.

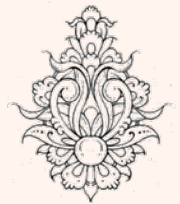
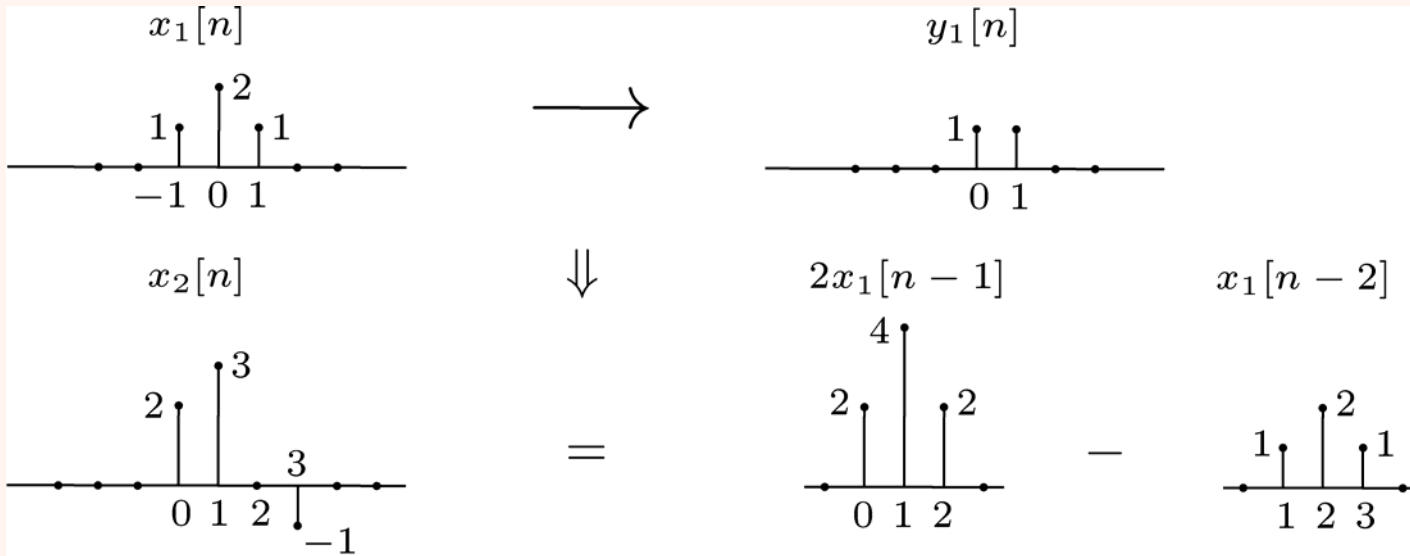


# DT LTI System

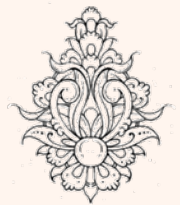
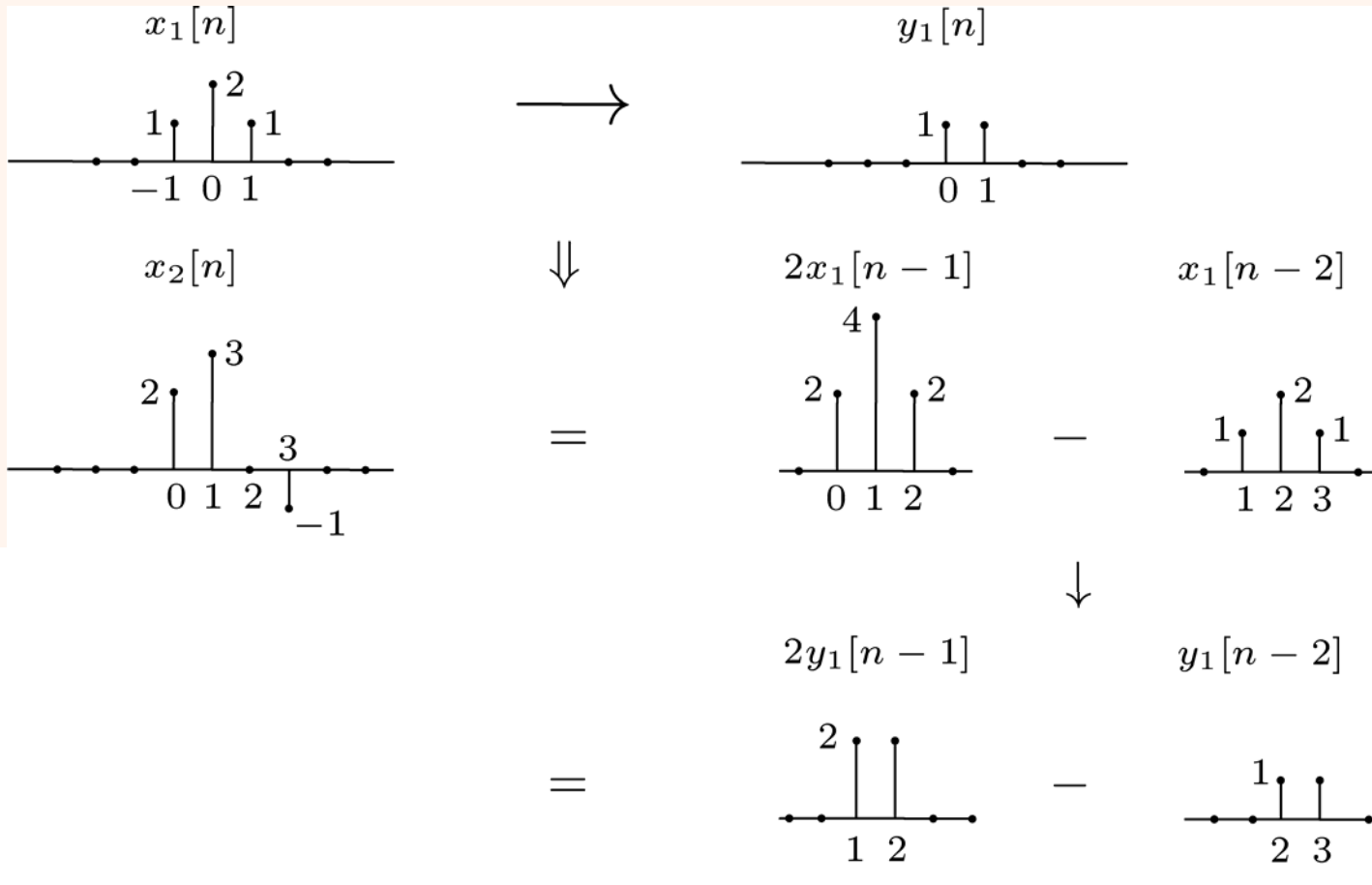
مثال



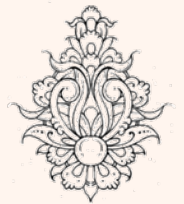
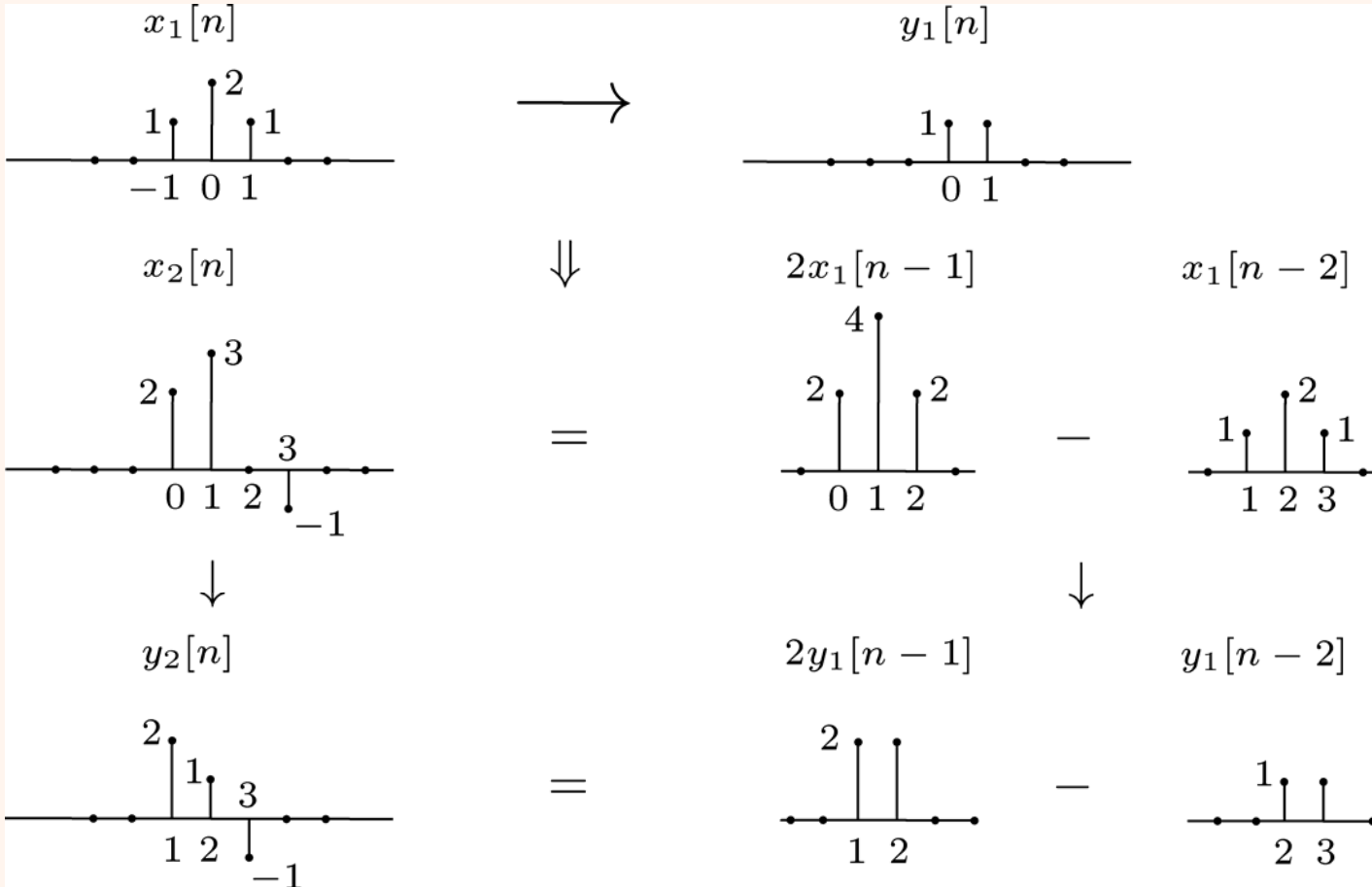
# پاسخ



# مثال



# مثال



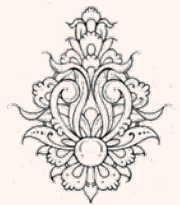
# خواص سیستم‌های خطی



$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots$$

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots$$

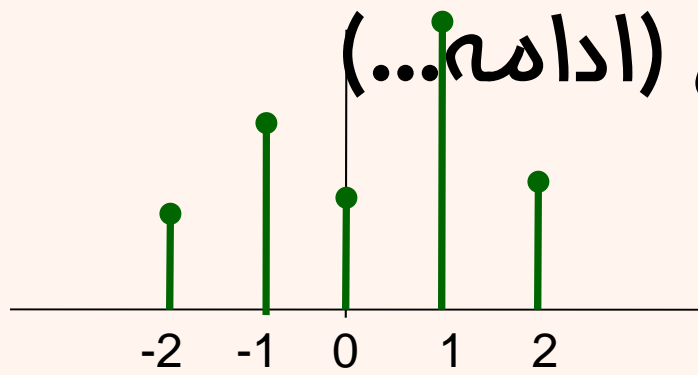
- در صورتی که بتوانیم یک سیگنال را بر اساس یک سری سیگنال‌های پایه بنویسیم، برای به دست آوردن پاسخ سیستم، کافیست پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه را محاسبه کنیم.
- برای سیگنال پایه پیشنهادی ندارید؟



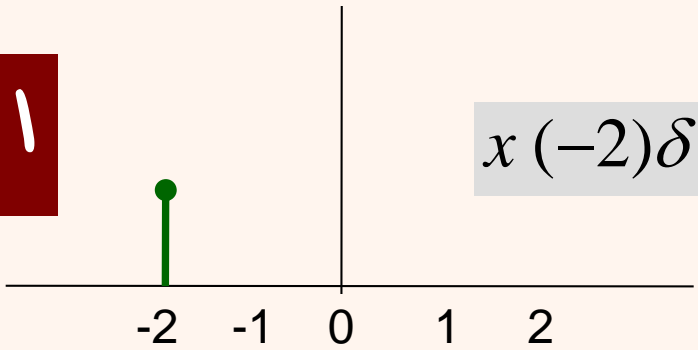


# خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)

$$x(n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

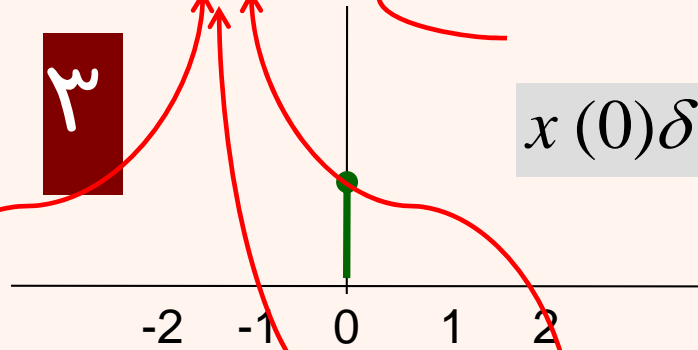


۱



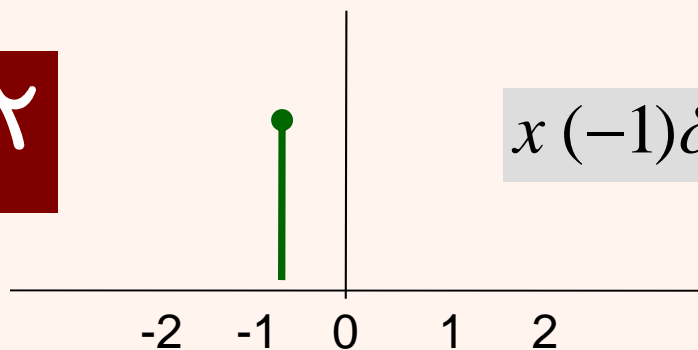
$$x(-2)\delta(n - (-2))$$

۳



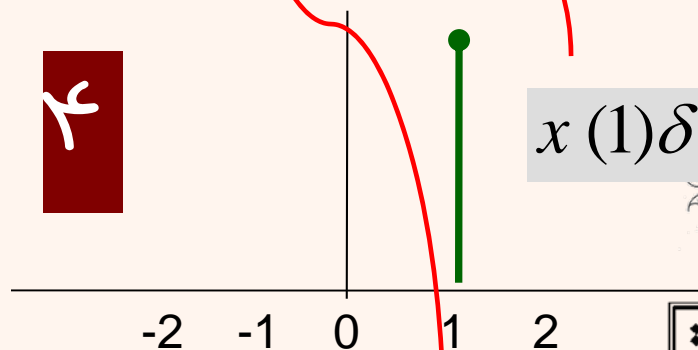
$$x(0)\delta(n - 0)$$

۲



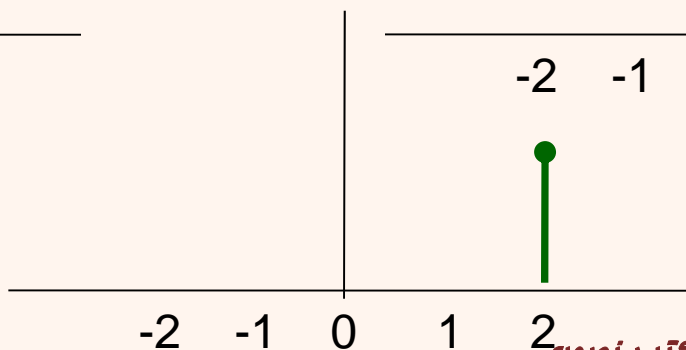
$$x(-1)\delta(n + 1)$$

۴

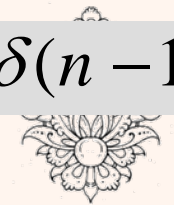


$$x(1)\delta(n - 1)$$

۵



$$x(2)\delta(n - 2)$$



دانشگاه  
تهران

# خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1] & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان هر سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از ضربه‌ها در نظر گرفت:

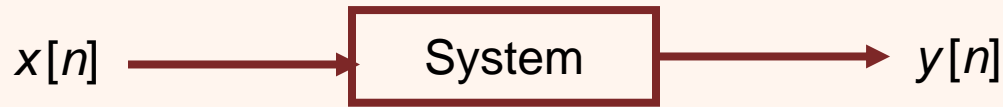
$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \dots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

سیگنال پایه

ضربه

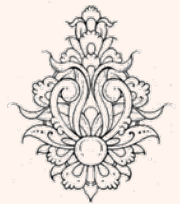
# خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)



$$\delta[n - k] \rightarrow h_k[n]$$

با توجه به خطی بودن سیستم:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$



# خواص سیستم‌های LTI

با فرض این که سیستم تأخیرناپذیر با زمان هم هست



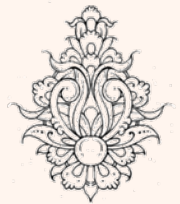
از تأخیرناپذیر بودن با زمان

$$\delta[n] \rightarrow h[n] \quad \rightarrow \quad \delta[n - k] \rightarrow h[n - k]$$

از خطی بودن

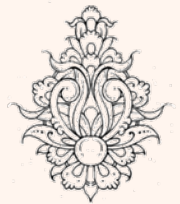
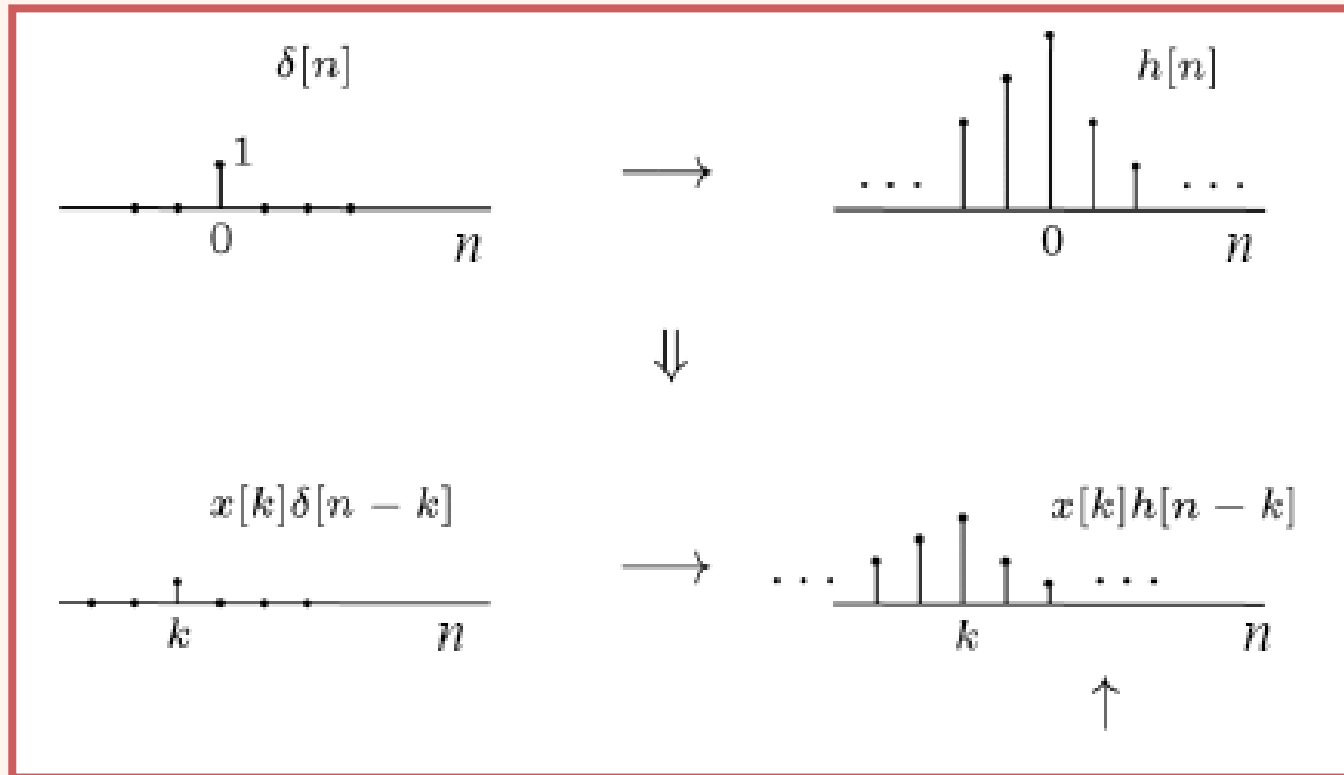
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Convolution Sum

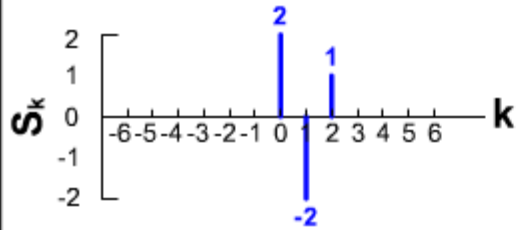


# جمع کانولوشن در سیستم‌های LTI

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$



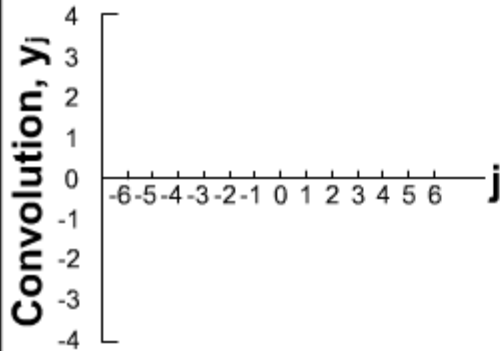
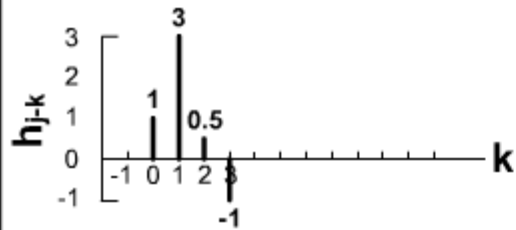
## Convolution Animation (discrete)



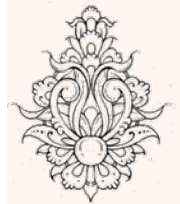
$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$

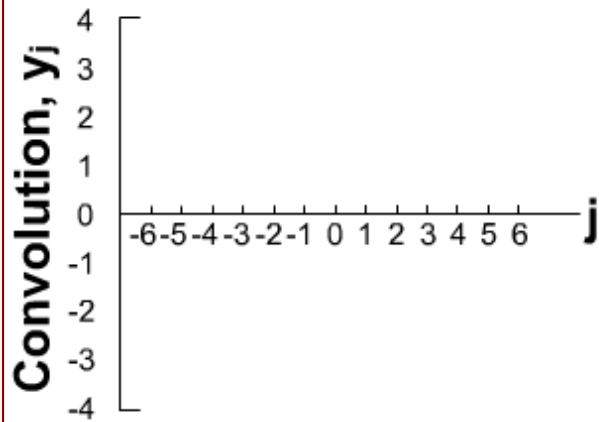
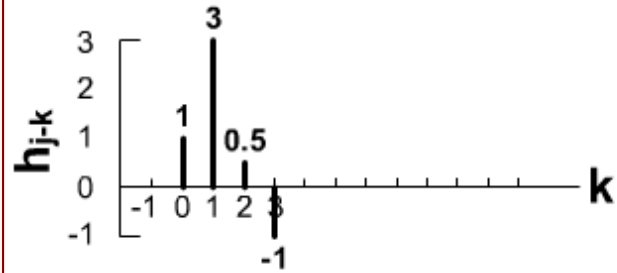
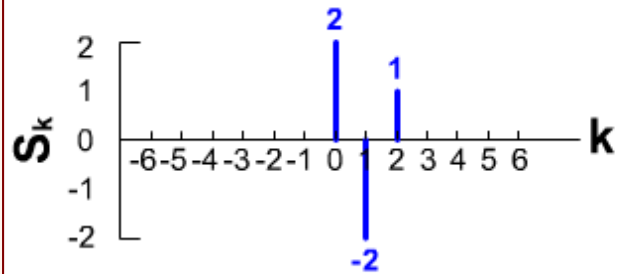
$$1 \ 3 \ 0.5 \ -1$$



First step is to reverse this function  
(Click "reverse" button)



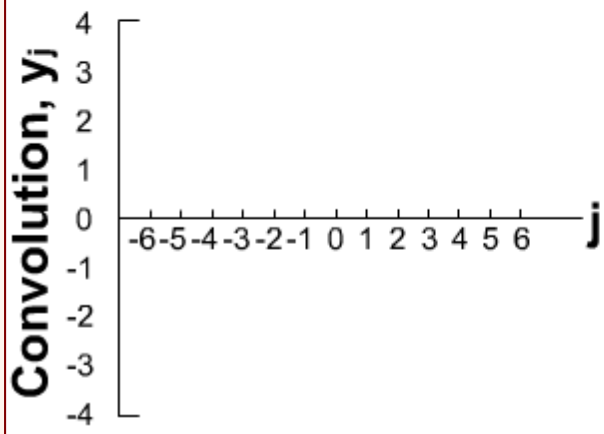
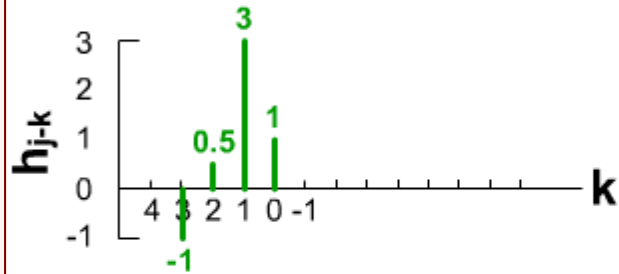
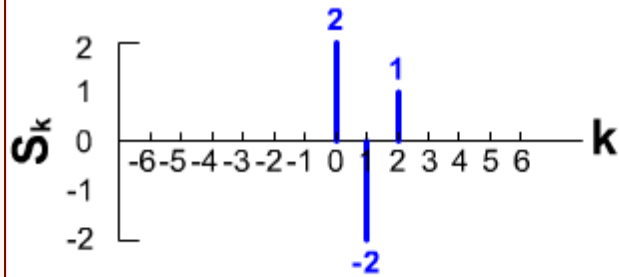
# مثال



$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$
$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$
$$1 \ 3 \ 0.5 \ -1$$



ژانسیکانه  
سپهبد  
بهشتی



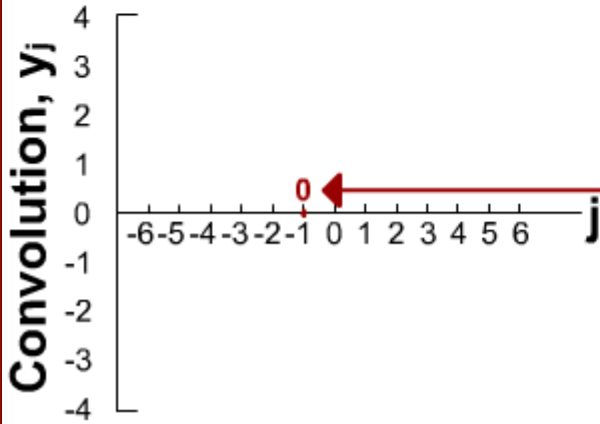
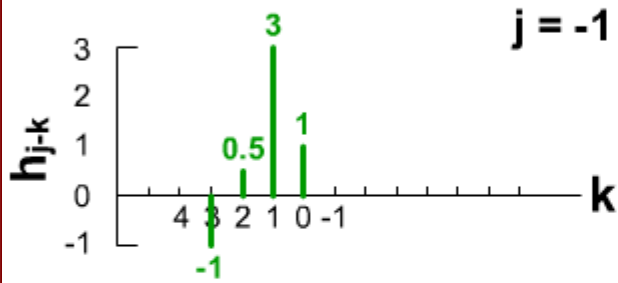
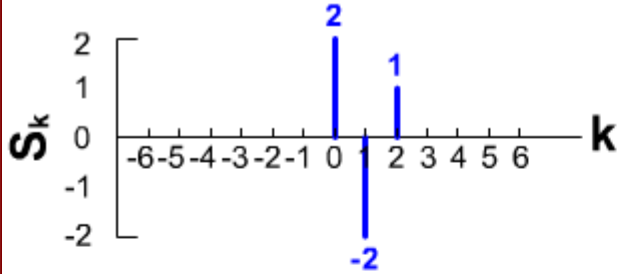
$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 3 & 1 & & & & \end{matrix} *$$



دانشگاه  
تهران  
پیشرو





$$y_{-1} = \sum_k S_k h_{-1-k}$$

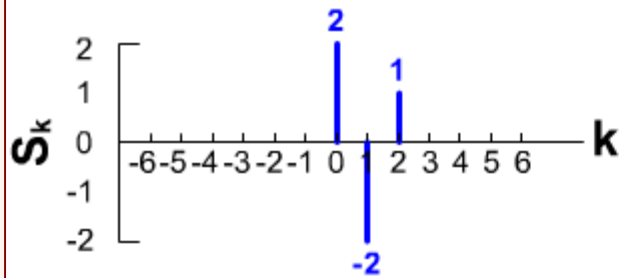
$$= 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$= -1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 1 = 0$$

→  $(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$

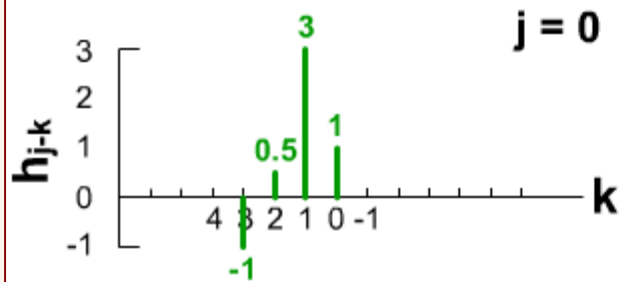


شرکت  
مشاورین  
تکنولوژی



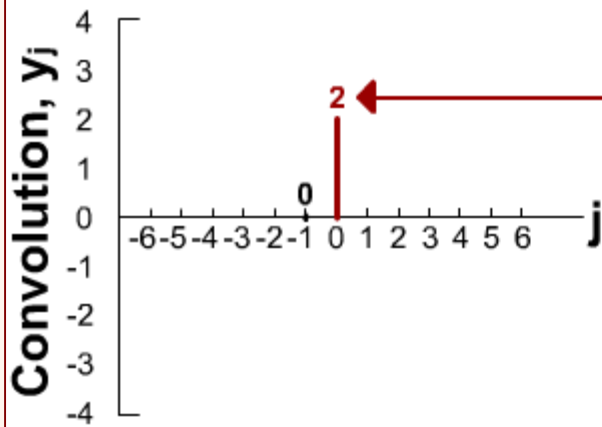
$$y_0 = \sum_k S_k h_{0-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ * \\ -1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

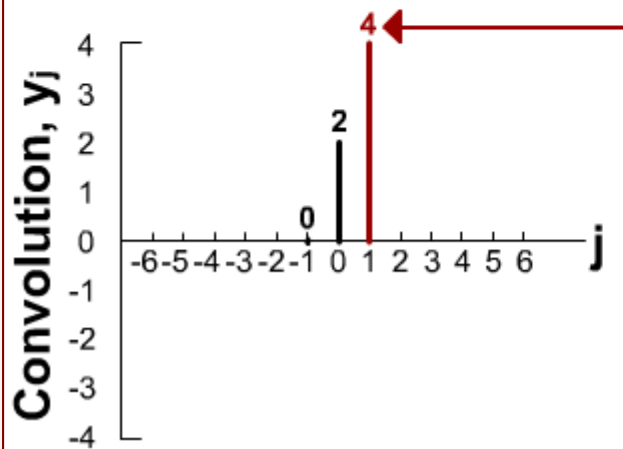
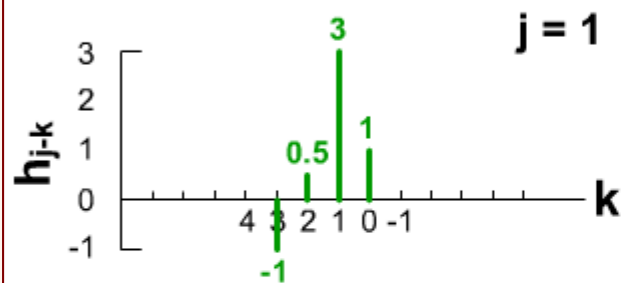
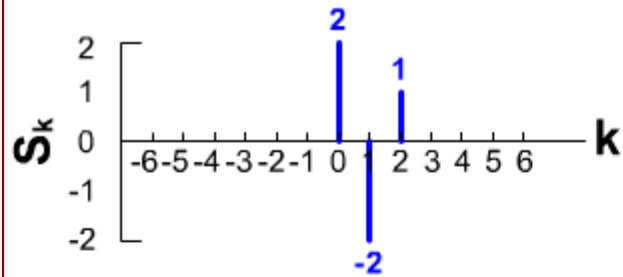


$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$\rightarrow (0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$



پیشاپیش



$$y_1 = \sum_k S_k h_{1-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$

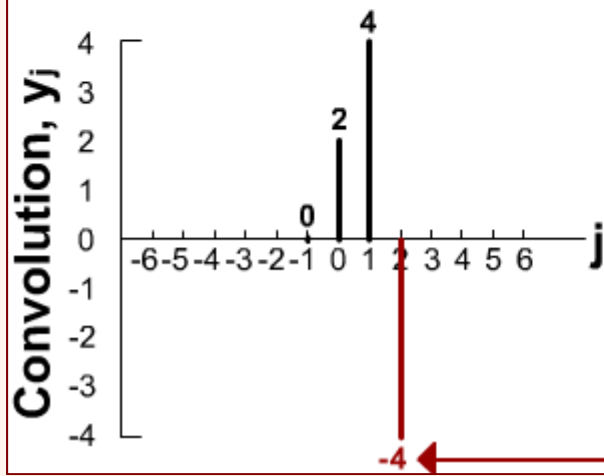
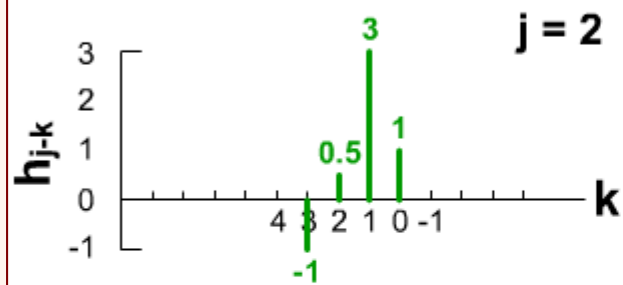
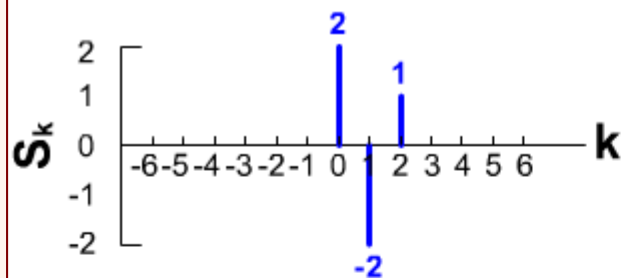
$$-1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$





$$y_2 = \sum_k S_k h_{2-k}$$

$$= 0 \cdot 2 \cdot -2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot *$$

$$-1 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 1 = -4$$

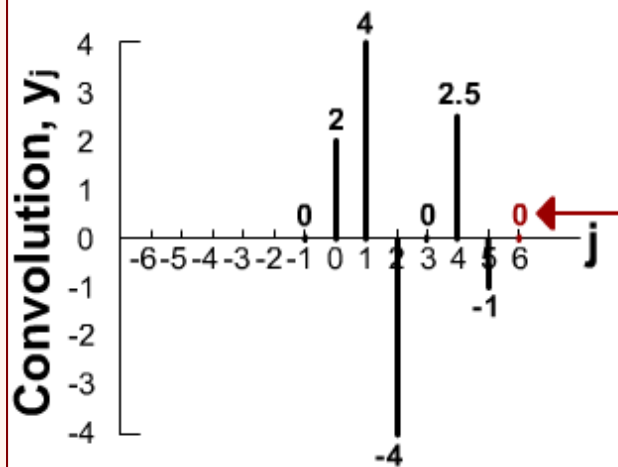
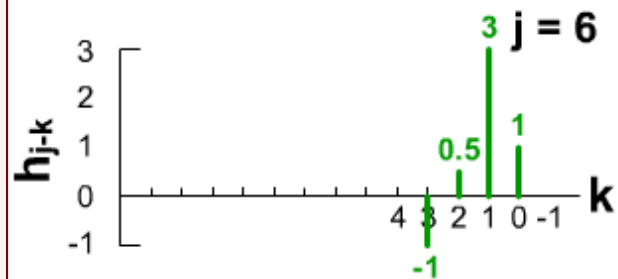
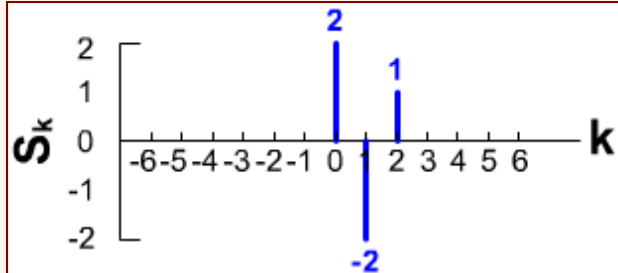
$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$





$$y_6 = \sum_k S_k h_{6-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ * \ -1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$

$$(2 \times -1) + (-2 \times 0.5) + (1 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(-2 \times -1) + (1 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 2.5$$

$$(1 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = -1$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$



تازشک  
سپهری  
بهشتی

# خواص کانولوشن گسسته

- یک سیستم **DT LTI** به طور کامل با پاسخ ضربی آن شناخته می‌شود.

• مثال:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]$$

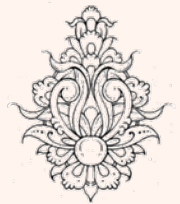
- مثال:

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

- تنها یک سیستم با این پاسخ ضربی وجود دارد.

$$y[n] = \delta[n - n_0] * x[n]$$

$$y[n] = x[n - n_0]$$

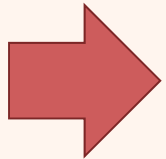


# مثال

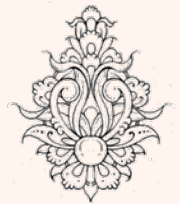
- پاسخ ضربی سیستم زیر را به دست آورید:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = u[n]$$

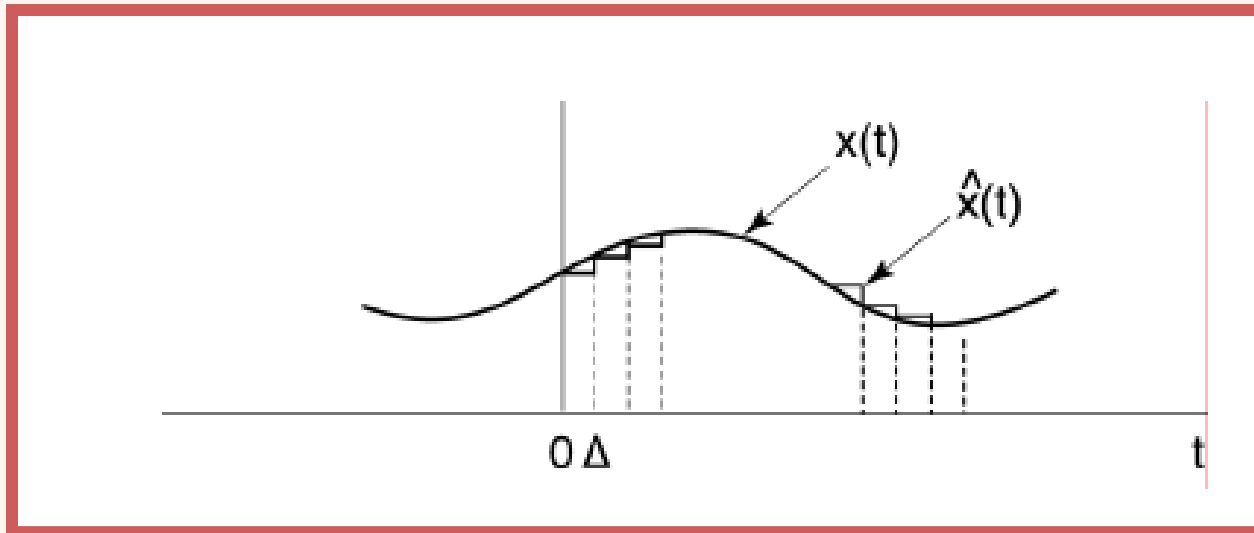


$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

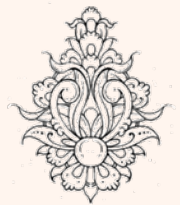


# نمایش سیگنال‌های پیوسته

- می‌توان هر سیگنال پیوسته را به صورت مجموع وزن‌دهی شده یک سری پالس در نظر گرفت.

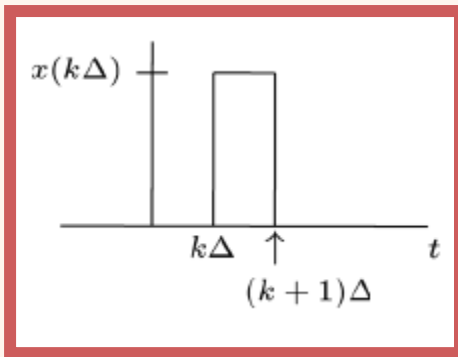
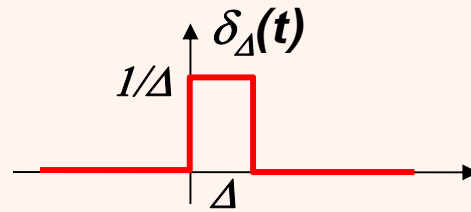


$$\hat{x}(t) = x(k\Delta), \quad k\Delta < t < (k+1)\Delta$$





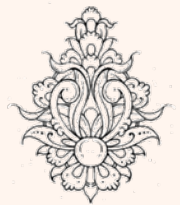
# نمایش سیگنال‌های پیوسته



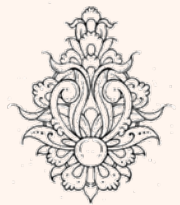
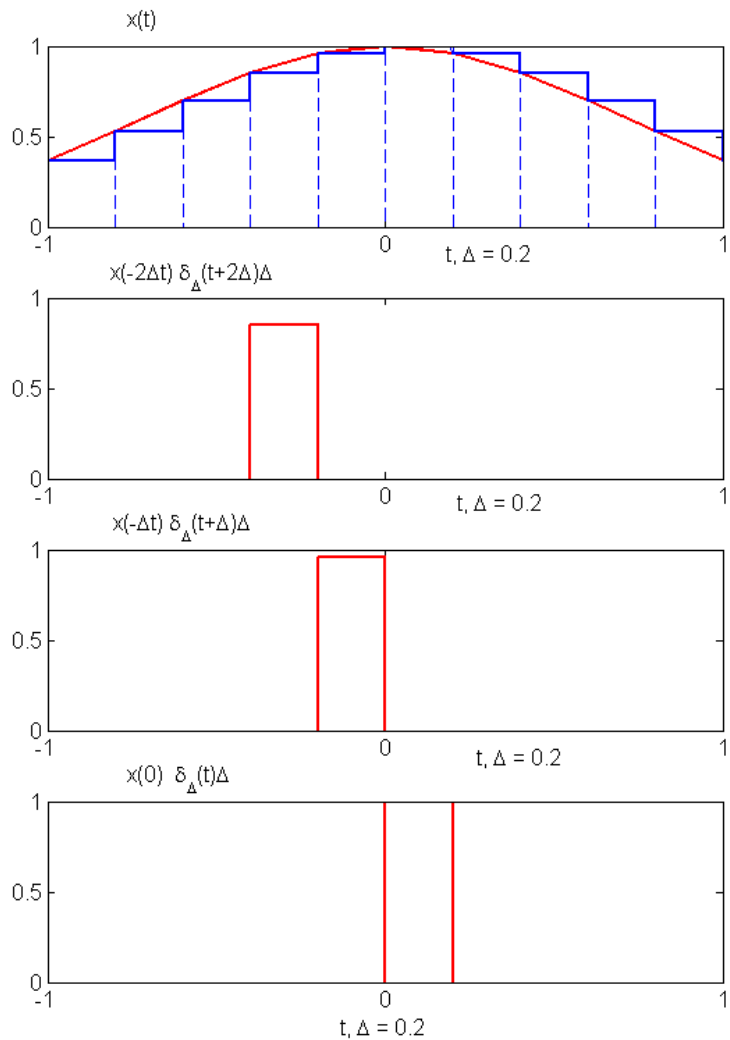
$$= x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

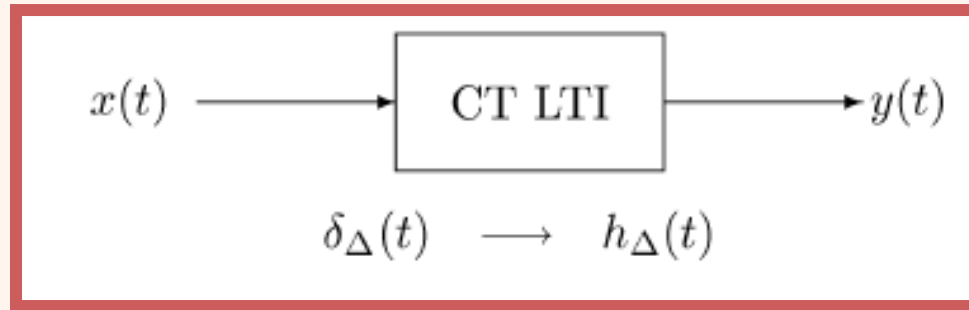
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



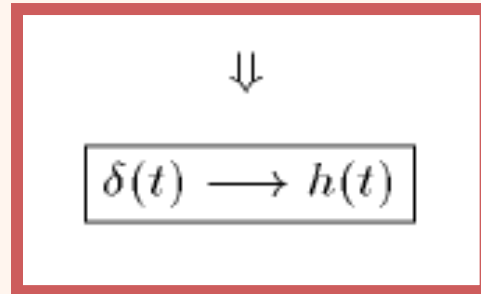
# نمایش سیگنال‌های پیوسته



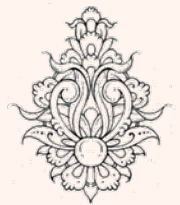
# پاسخ یک سیستم CT LTI



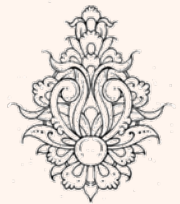
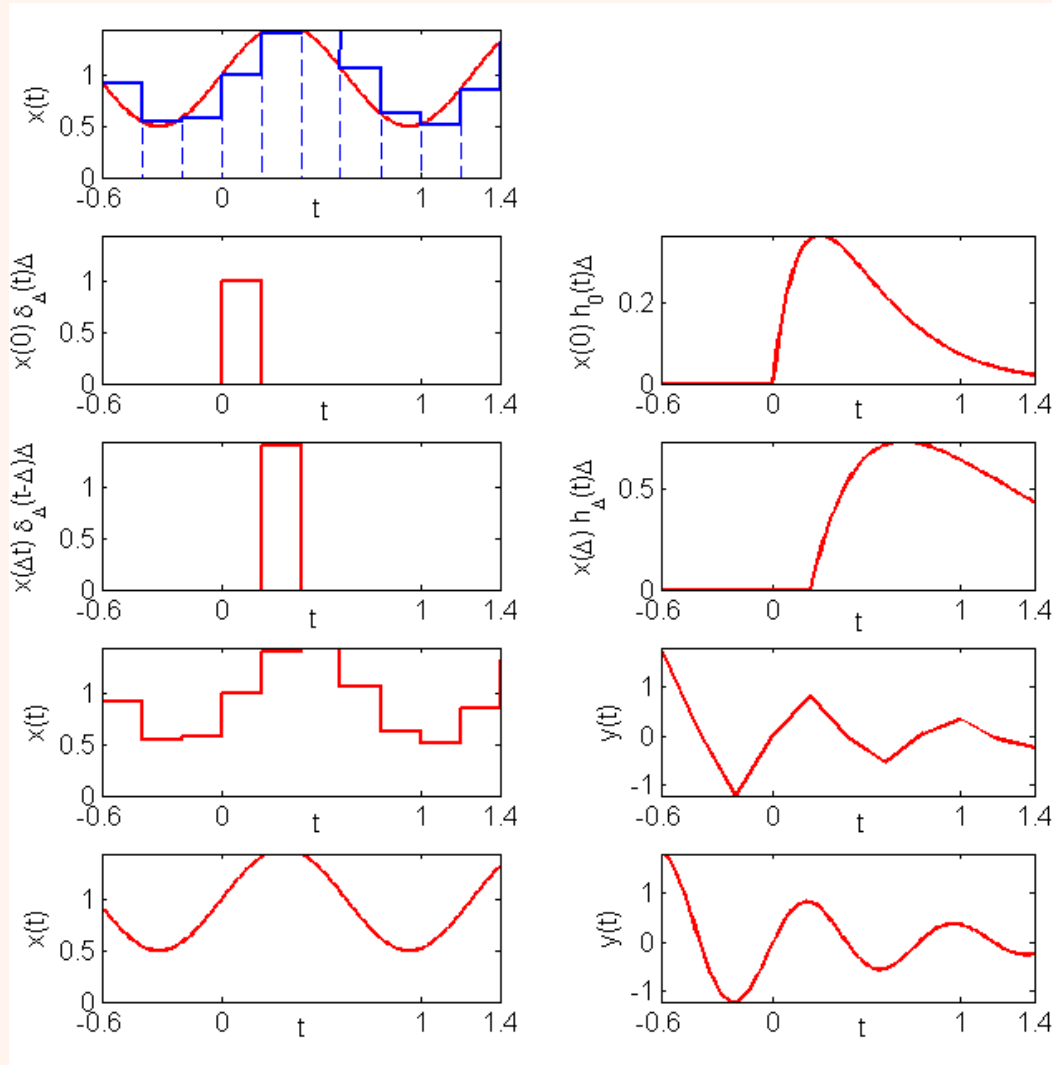
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad \rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$



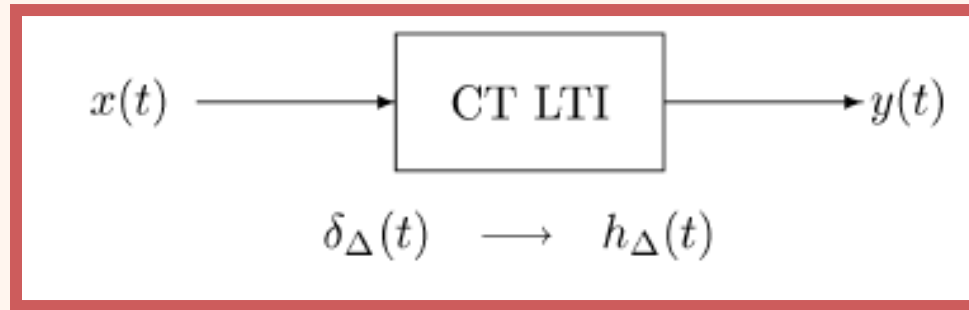
$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$



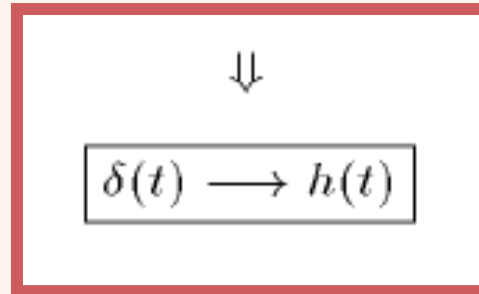
# پاسخ سیستم به سیگنال زمان پیوسته



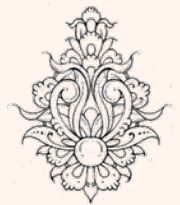
# پاسخ یک سیستم CT LTI



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad \longrightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta$$



$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

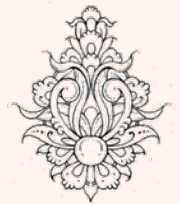
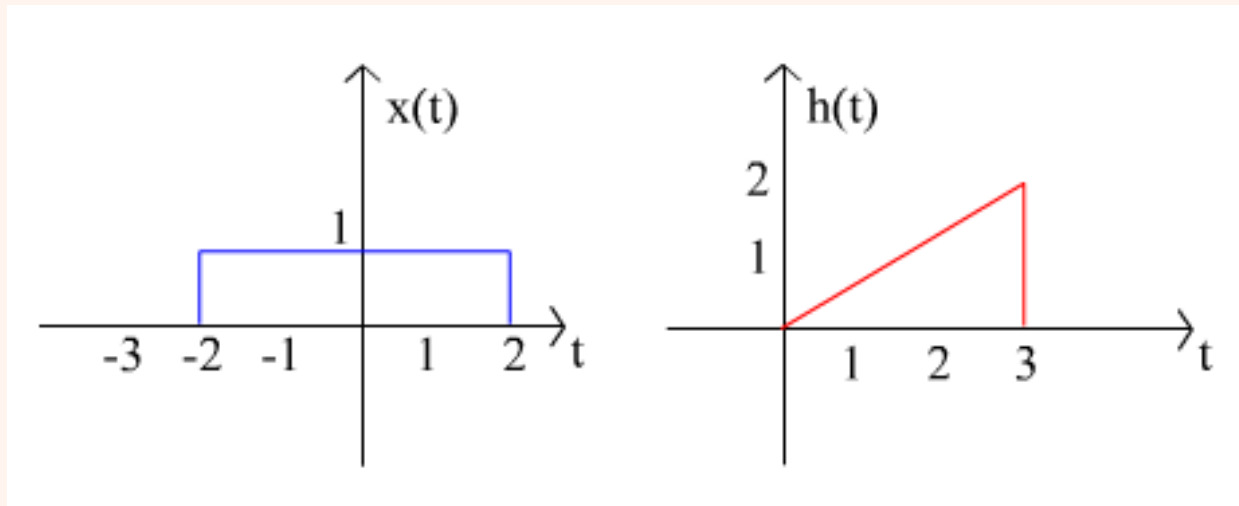


# کانولوشن زمان پیوسته

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

**Convolution integral**

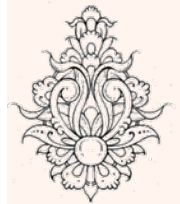
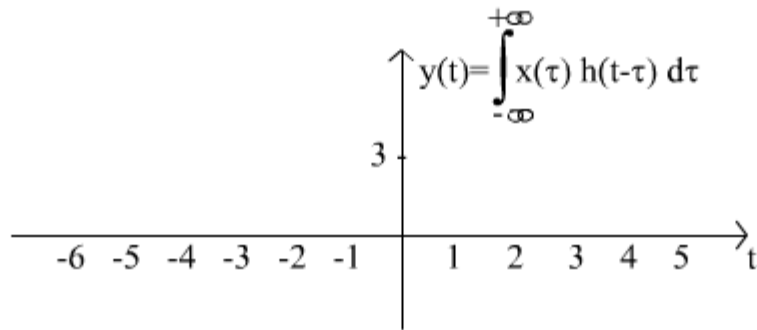
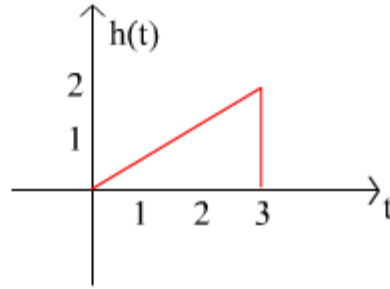
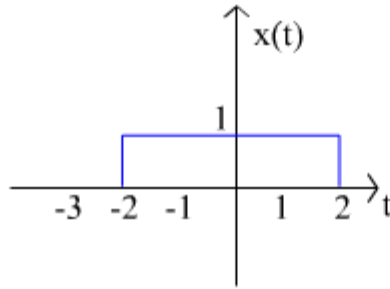
مثال: پاسخ سیستم به ورودی  $x(t)$  را حساب کنید:

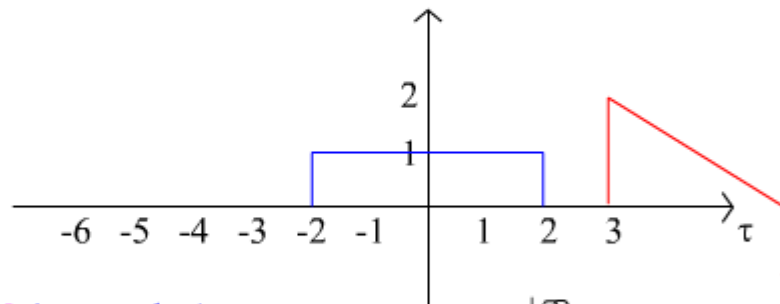
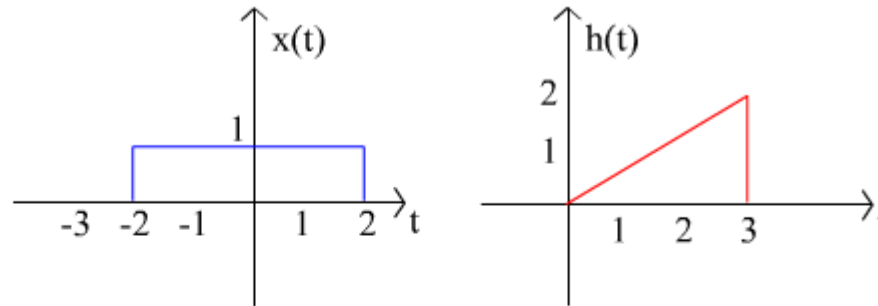


# مثال



1) Draw  $h(-\tau)$





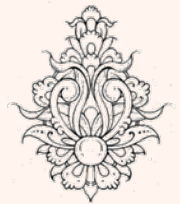
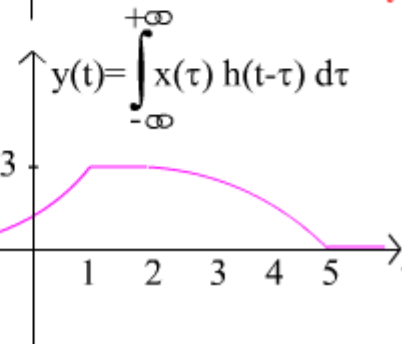
$t < -2$ :  $y(t) = 0$  (no overlap)

$-2 < t < 1$ :  $y(t) = \frac{(t+2)^2}{3}$

$1 < t < 2$ :  $y(t) = 3$

$2 < t < 5$ :  $y(t) = -\frac{(t-2)^2}{3} + 3$

$t > 5$ :  $y(t) = 0$  (no overlap)





# مثال

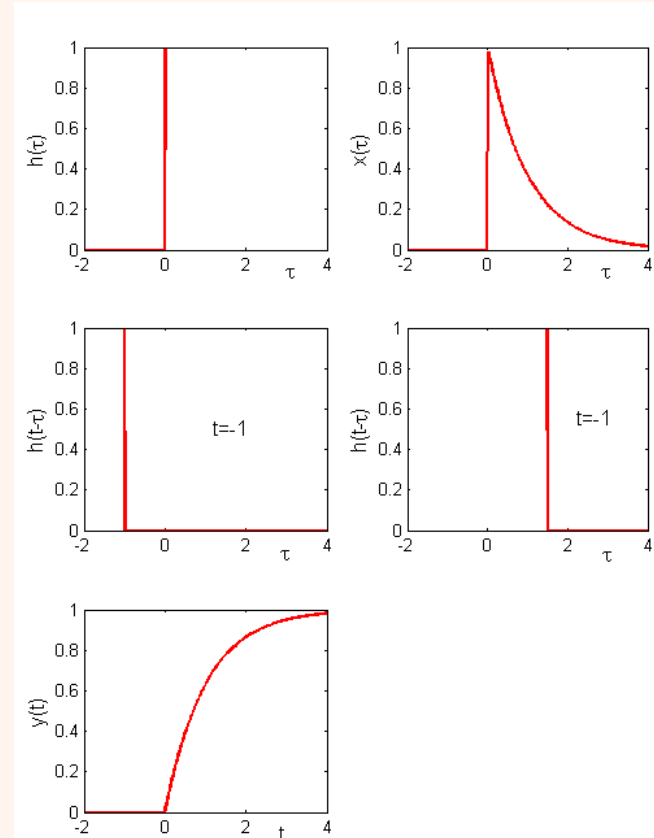
$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$



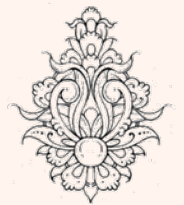
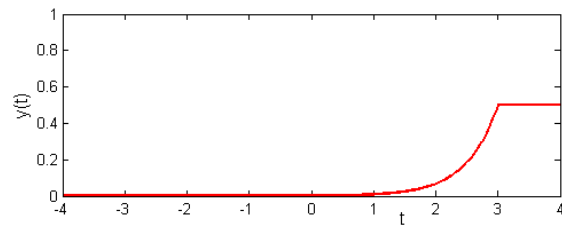
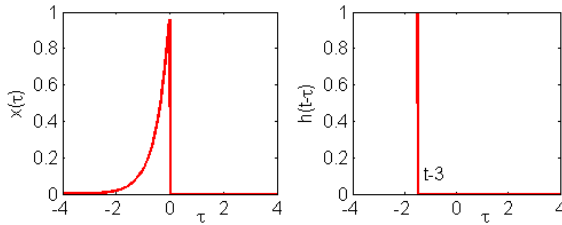
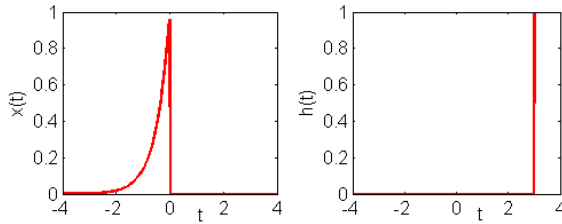
# مثال

$$x(t) = e^{2t} u(-t)$$

$$h(t) = u(t - 3)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}, \quad t < 3$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}, \quad t \geq 3$$



# خصوصیات سیستم

- با توجه به این که در سیستم‌های LTI پاسخ ضربه مشخص کننده‌ی سیستم می‌باشد، با در اختیار داشتن پاسخ ضربه همه‌ی مشخصات سیستم قابل استخراج خواهد بود.

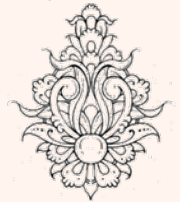
- به عنوان مثال برای پاسخ ضربه‌ی زیر

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- تنها یک سیستم LTI وجود دارد:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

برای چنین پاسخی چند سیستم غیر خطی وجود دارد؟



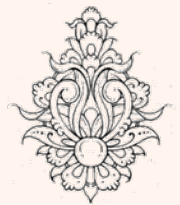
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

• مثال: پاسخ پله یک سیستم DT LTI ( $s[n]$ )

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

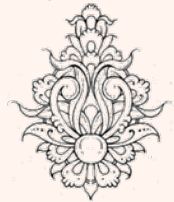
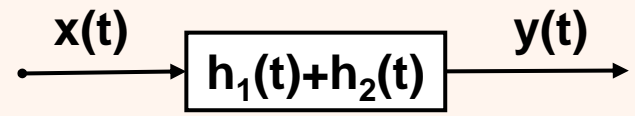
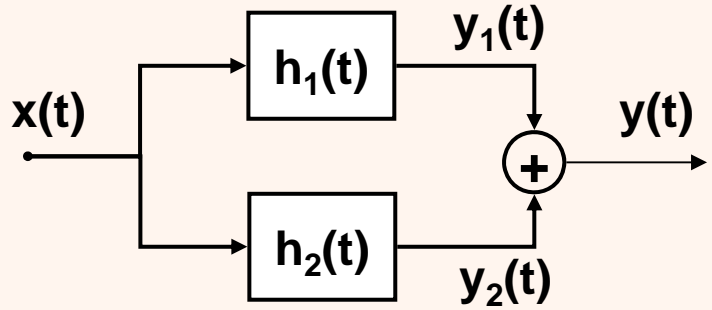


# The Distributive Property

# توزیع پذیری

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$



# مثال

$$x[n] = 0.5^n u[n] + 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$

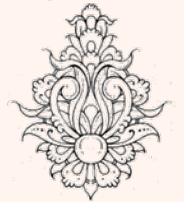
$$x_1[n] = 0.5^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2^n u[-n]$$

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]$$

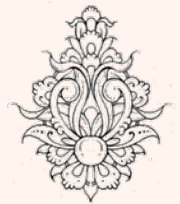
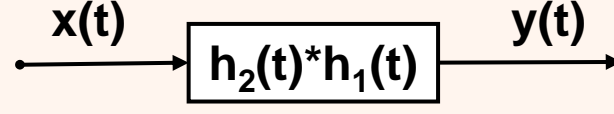
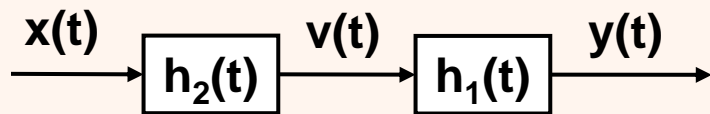
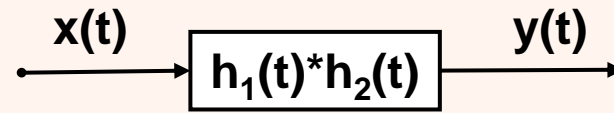
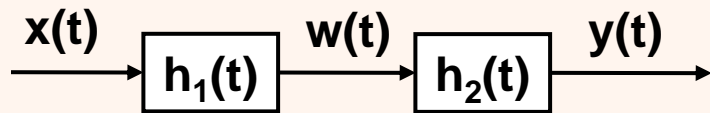
$$y_1[n] = \left( \frac{1 - 0.5^{n+1}}{1 - 0.5} \right) u[n]$$

$$y_2[n] = \begin{cases} 2^{n+1} & n \leq 0 \\ 2 & n \geq 1 \end{cases}$$

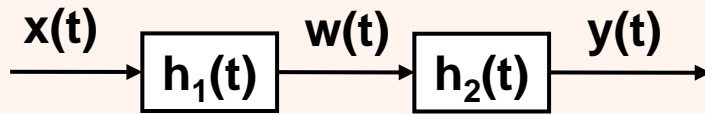


$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$



# مثال



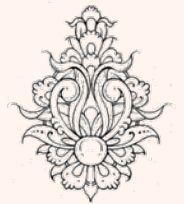
$$h_1[n] = \sin(8n)$$

$$h_2[n] = a^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$

$$y[n] = ?$$

$$y[n] = \sin(8n)$$





# خصوصیات سیستم‌های LTI

- با توجه به این که پاسخ ضربه مشخص کننده‌ی سیستم است، مشخصات سیستم از روی پاسخ ضربه قابل تشخیص خواهد بود:

$$h[n] = 0 \quad \text{for } n < 0$$

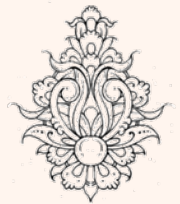
• علیت:

$$h(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

• پایداری:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

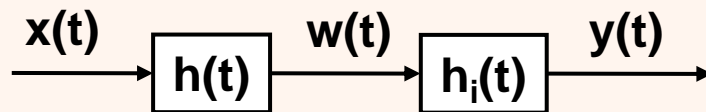


# خصوصیات سیستم‌های LTI (ادامه...)

• با حافظه بودن:  $h[n] = k\delta[n]$

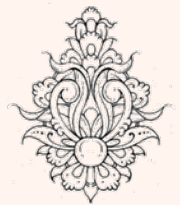
$$y(t) = kx(t)$$

• معکوس‌پذیری: در صورتی که  $h_i$  وجود داشته باشد:



$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$



# مثال

• کدام یک از سیستم‌های زیر پایدار هستند؟

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_0]| = 1 < \infty$$



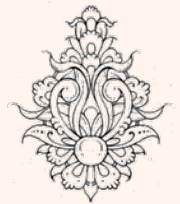
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1 < \infty$$

$$h[n] = u[n - n_0]$$

$$h(t) = u(t - t_0)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau - t_0)| d\tau = \int_{t_0}^{\infty} |u(\tau)| d\tau = \infty$$



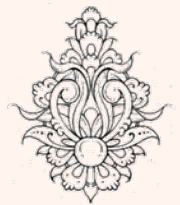
# پاسخ پله در سیستم‌های LTI

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$



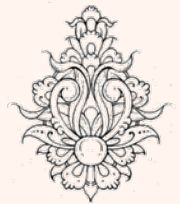
# معادلات دیفرانسیل و تفاضلی

- یکی از مهمترین دسته از سیستم‌های LTI هستند.
- در سیستم‌های زمان پیوسته:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

- در سیستم‌های زمان گسسته:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$



# معادلات دیفرانسیل خطی

- فرم کلی چنین سیستم‌هایی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- آیا چنین سیستمی با حافظه است؟

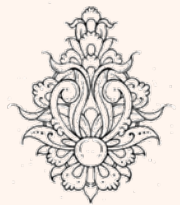
- آیا چنین سیستمی پایدار است؟

– مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) = 0$$

$$y(t) = Ae^{a_1 t}$$

بسته به مقدار  $a$  ممکن است پایدار باشد یا ناپایدار نباشد



# معادلات دیفرانسیل خطی (ادامه)

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = Ae^{-2t} \quad x(t) = K \cos(\omega_0 t) u(t) \rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

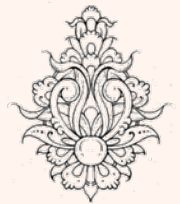
$$y(0) = y_0$$

**Auxiliary condition**

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos(\theta)] u(t)$$

پاسخ به شرایط اولیه

پاسخ به ورودی



# معادلات دیفرانسیل خطی (ادامه)

- سیستم در صورتی خطی خواهد بود که  $y(0)=0$
- در صورتی که پاسخ به شرایط اولیه صفر نباشد، در مورد خطی بودن سیستم چه می‌توان گفت؟
- آیا سیستم علی است؟

$$x_0(t) = 0$$

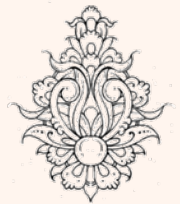
$$y_1(t) = 0$$

$$x_2(t) = u(t+1)$$

$$y_2(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2 \right) e^{-2(t+1)}$$

**Initial rest**

- آیا چنین سیستمی تخییرپذیر با زمان است؟





# معادلات تفاضلی خطی

- فرم کلی چنین سیستم‌هایی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- اگر معادله به صورت زیر باشد:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

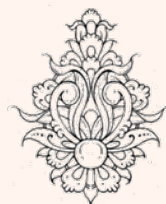
- پاسخ ضربه‌ی چنین سیستمی به شکل خواهد بود؟

– به چنین سیستمی که طول پاسخ ضربه‌ای آن محدود باشد، FIR (استمرار محدود) می‌گویند.

*finite impulse response*

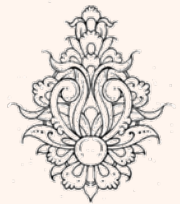
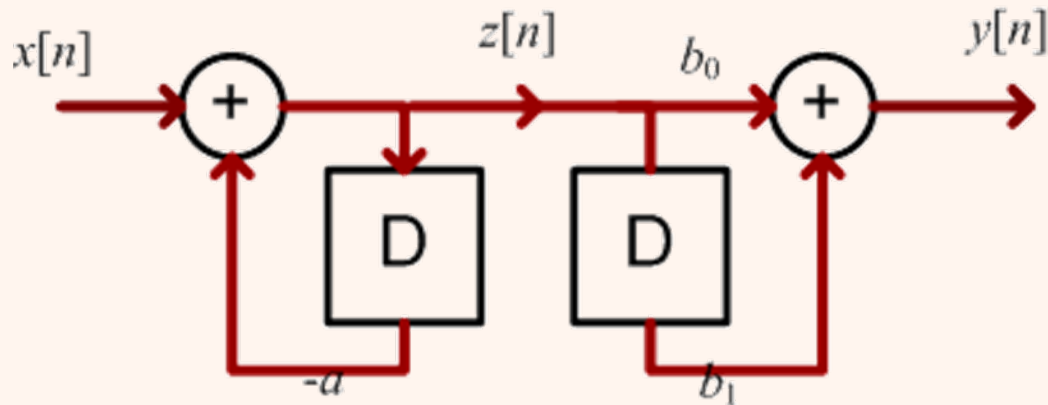
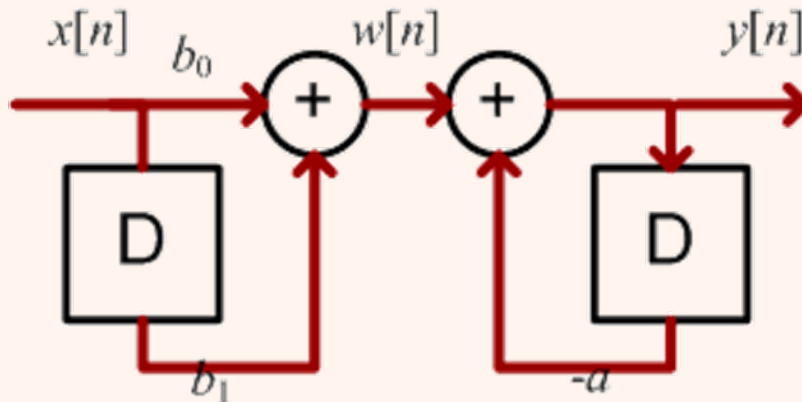
– وگرنه سیستم، IIR (استمرار نامحدود) خواهد بود.

*infinite impulse response*



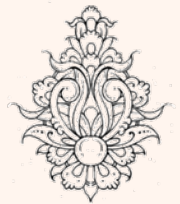
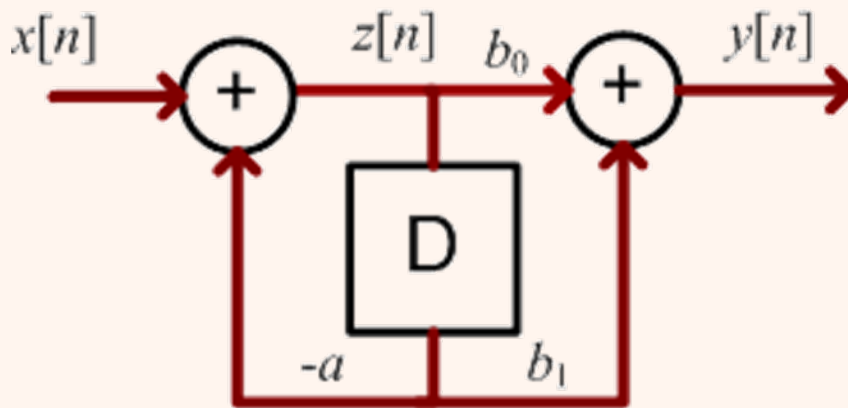
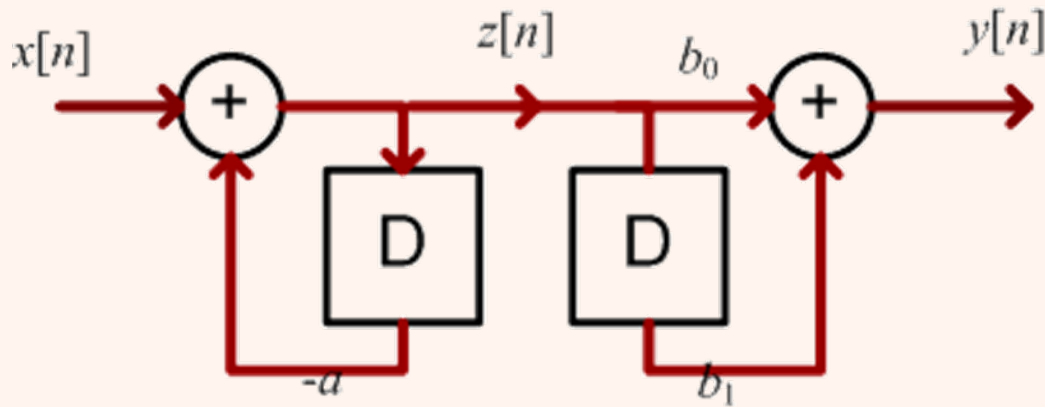
# دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی (مثال)

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 [n-1]$$



# دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی (مثال)

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 [n-1]$$

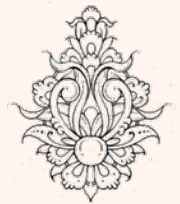
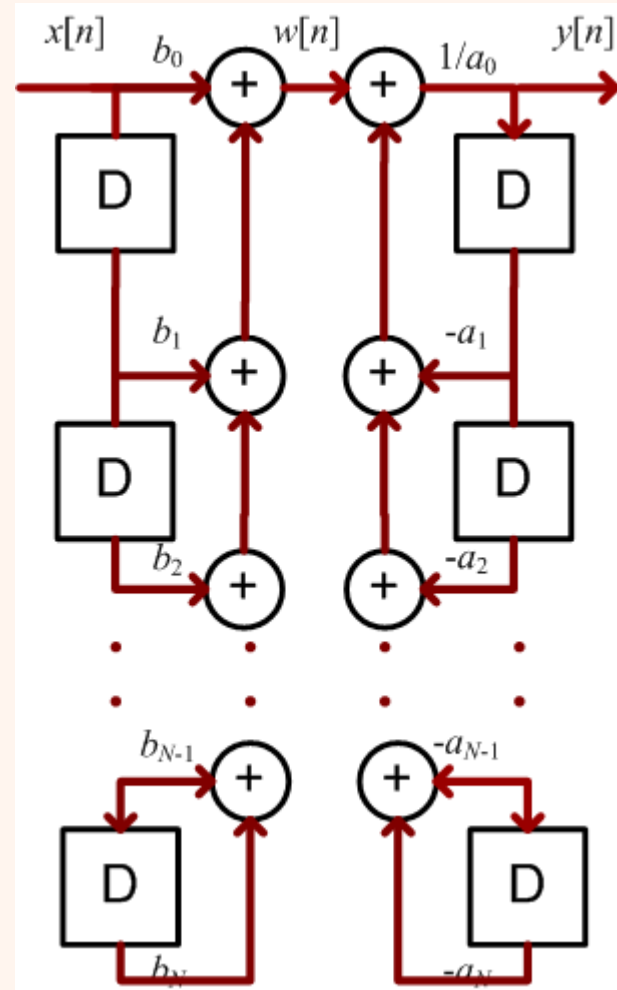


# دیگر بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)

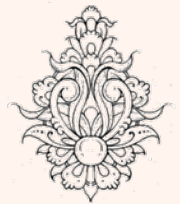
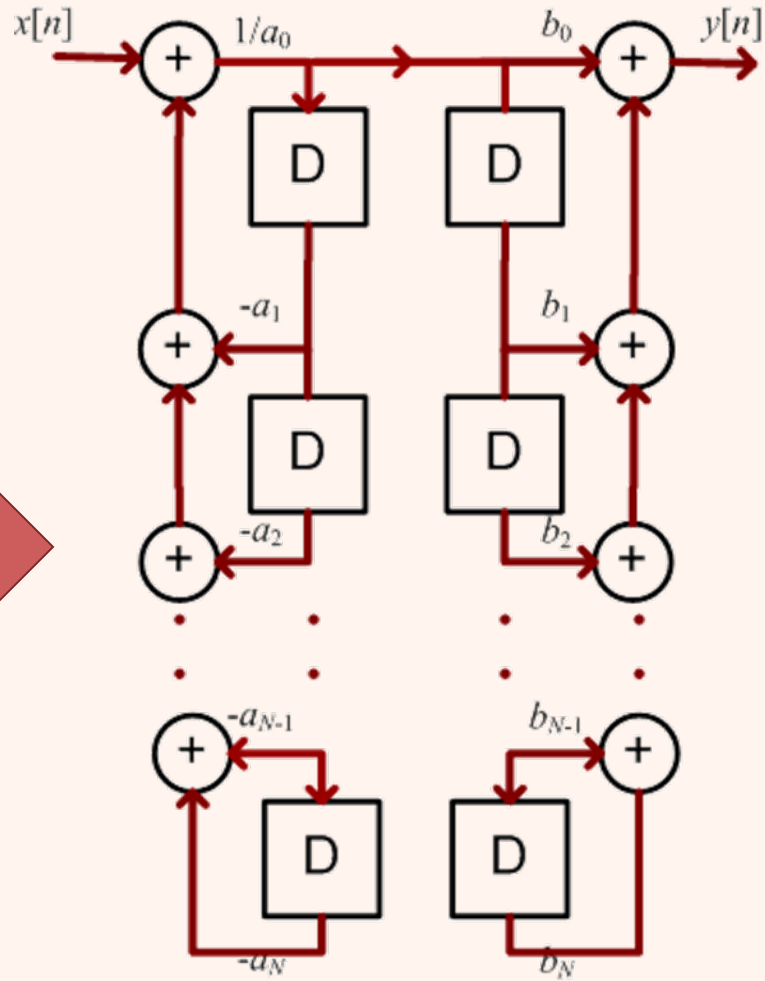
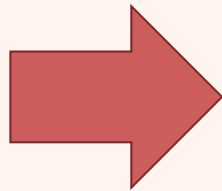
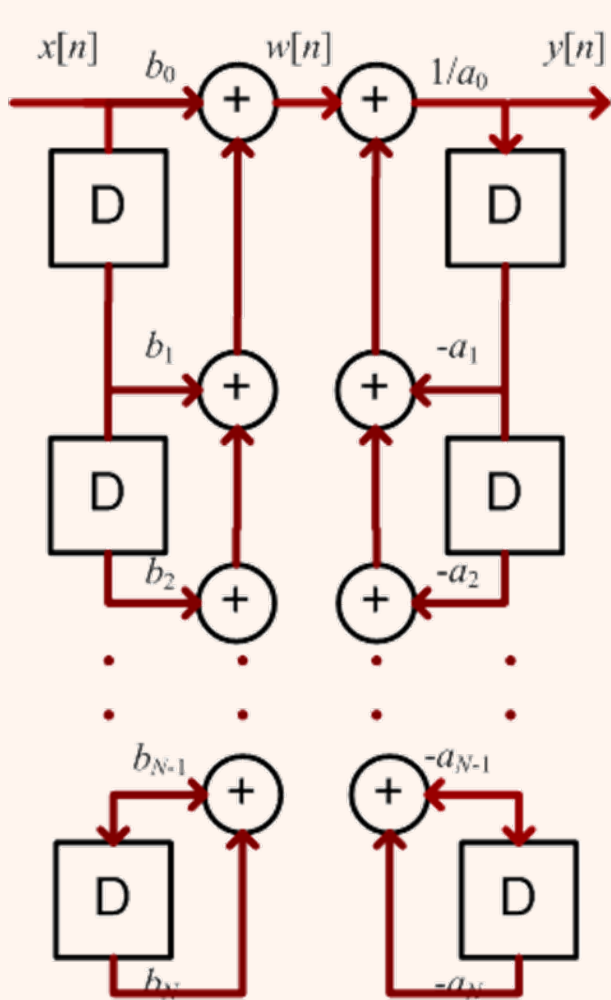
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\}$$

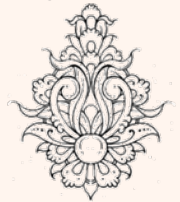
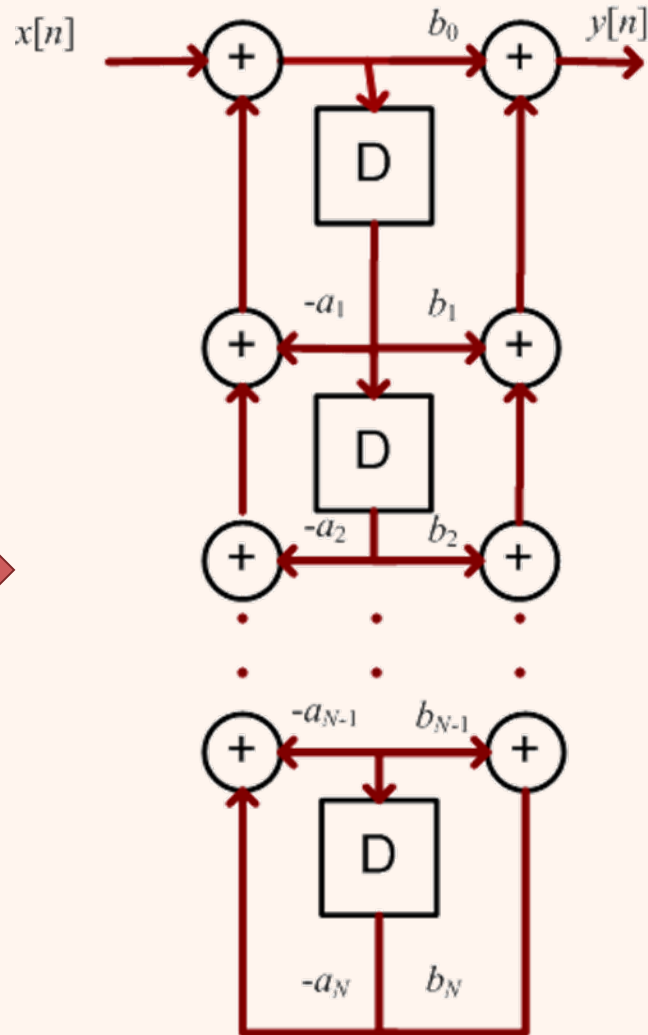
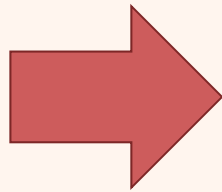
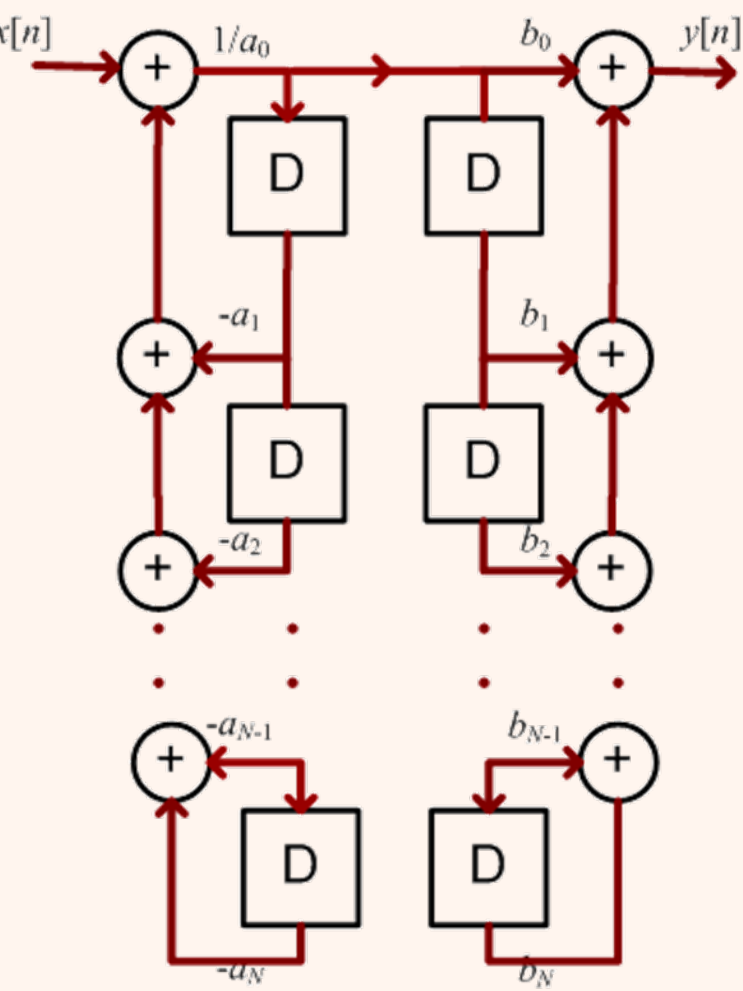
## Direct Form I Structure



# دیباگرام بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)



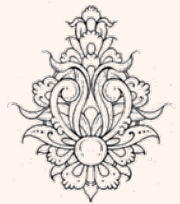
# دیگراه بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)



$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[x(t) * \delta(t)]}{dt} \\
 &= \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta'(t-\tau)d\tau \\
 &= \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\tau)\delta(\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

$$x'(t) = x(t) * \delta'(t)$$

$$x(t) * h'(t) = x'(t) * h(t)$$



# توابع ویژه (ادامه...)

$$x(t) * \delta'(t) = ?$$

$$x(t) * \delta'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) * \delta(t) = ?$$

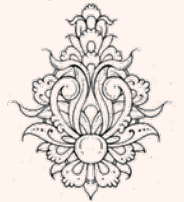
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * u(t) = ?$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$x(t) * u(t) * u(t) = ?$$

$$x(t) * tu(t)$$





# توابع ویژه (ادامه...)

$$\delta'(t) = u_1(t)$$

$$\delta(t) = u_0(t)$$

$$u(t) = u_{-1}(t)$$

$$tu(t) = u_{-2}(t)$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_{k}$$



$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$



$$u(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$$

