فلسفه ریاضی

کلاسیک، مدرن، پست مدرن

دکتر محمد صال مصلحیان

عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

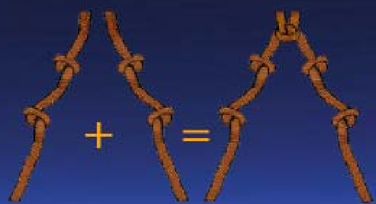
فلسفه ریاضی

Philosophy of Mathematics

Classic, Madern, Postmodern

Mohammad Sal Moslehian (Ph.D)

Ferdowsi University of Mashhad



۲+۲ = ۵

شابک: ۰-۲۴-۸۹۳۱-۹۶۴

ISBN:964-8931-24-0

انتشارات واژگان خرد

فلسفه ریاضی

کلاسیک، مدرن، پست‌مدرن

دکتر محمد صال‌مصلحیان

نام کتاب: فلسفه ریاضی (کلاسیک، مدرن، پست‌مدرن)

نویسنده: دکتر محمد صال‌مصلحیان

ویراستار: دکتر مجید میرزاوزیری

طرح جلد: علی‌رضا سیستانی

ناشر: انتشارات واژگان خرد

چاپ اول ۱۳۸۴

تقدیم به همسر و فرزندانم

فهرست مطالب

مقدمه i

۱. هستی‌شناسی ریاضیات ۱

۲. منطق‌گرایی ۵

۳. صورت‌گرایی ۹

۴. شهودگرایی (ساخت‌گرایی) ۱۹

۵. انسان‌گرایی ۲۷

۶. دیدگاه کانت نسبت به ریاضیات ۳۳

۷. معرفی دستگاه تسرملو- فرانکل ۳۷

۸. آشنایی با هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی ۴۱

۹. پارادوکس ۴۹

۱۰. منطق‌های چند ارزشی ۶۱

۱۱. زیبایی در ریاضیات ۶۷

۱۲. چرا تاکنون از روش‌های شبه‌تجربی استفاده نکرده‌ایم؟ ۷۱

۱۳. ریاضیات چیست؟ ۷۹

۱۴. عدد چه نوع چیزی است؟ ۸۵
۱۵. شهود چهار بعدی ۹۵
۱۶. نظری به ریاضیات پست‌مدرن ۱۰۱
۱۷. ریاضیات از دیدگاه افلاطون ۱۰۹
۱۸. آیا «واقعیت» خصلت ریاضی دارد؟ ۱۱۳
۱۹. فلسفه فیثاغوریان ۱۱۹
۲۰. تاریخ مختصر حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱۲۵
نام اشخاص ۱۳۱
واژه نامه ۱۳۷
منابع ۱۴۱

مقدمه

ریاضیات لااقل در دو جهت قابل توسعه است، یکی به سوی ریاضیات عالی و ساختارهایی با پیچیدگی متزاید و دیگری به سوی مبانی ریاضیات و شالوده‌هایی با تجرد و سادگی هر چه بیشتر. جهت اخیر، فلسفهٔ ریاضی را مشخص می‌کند.

در فلسفهٔ ریاضی می‌خواهیم به چیستی ریاضیات بپردازیم و بنیادهایی برای آن (البته در صورت وجود) بیابیم، ریاضی ورزیدن خود را (شامل اکتشاف ریاضی، کاربرد ریاضی و آموزش ریاضی) توصیف و ارزش‌گذاری کنیم، معرفت ریاضی را صراحت بخشیم، به رابطهٔ بین ریاضیات و دنیای طبیعی و این‌که آیا ریاضیات ارائه دهندهٔ حقایق تردیدناپذیر است یا خیر بپردازیم، منطق استدلال‌ها را شناسایی کنیم، تلاش نماییم به تجارب و آگاهی‌های خود معنی و نظم بخشیم و بالاخره جایگاه ریاضیات را در میان معارف بشری مشخص کنیم. البته تمام این‌ها، اندیشه می‌طلبد و این کتاب در مورد جنبه‌هایی از آن‌ها به کنکاش می‌پردازد.

در ابتدا اجازه دهید از بحران‌های اساسی که ریاضیات در دوران زندگیش پشت سر گذاشته است یاد کنیم:

بحران اول در قرن پنجم قبل از میلاد و در زمان *فیثاغورس* روی داد. فیثاغورس یک انجمن برادری تأسیس کرد. اعضای این انجمن موسوم به فیثاغوریان معتقد بودند که هر دو کمیت همجنس *متوافق* هستند یعنی مقیاس واحدی وجود دارد که در هر دو به تعداد صحیح می‌گنجد، یا

به عبارت دیگر نسبت هر دو کمیت همجنس یک عدد گویاست. اما کشف غیرمنتظرهٔ نامتوافق بودن قطر و ضلع یک مربع، اساس حکمت فیثاغورسی را که مبتنی بر ایدهٔ شناخت جهان به کمک اعداد طبیعی و نسبت این اعداد با هم بود، متزلزل کرد. این بحران توسط *ائودوکسوس* یونانی در ۳۷۰ ق.م با ارائهٔ یک نظریهٔ دقیق در مورد کمیت‌ها و تناسب‌ها، برطرف گردید.

بحران دوم در اواخر قرن هفدهم و بعد از کشف *حسابان* توسط *نیوتن* و *لایبنیتز* و به دنبال کاربردپذیری چشمگیر آن روی داد. قدرت «ابزار» حسابان، دقت در مبانی آن را تحت تأثیر قرار داده بود ولی به زودی و به ویژه با انتقادهای *اسقف بارکلی* سستی پایه‌های حسابان آشکار گردید. بنیان آنالیز (شامل حسابان) در قرن نوزدهم با کارهای *کوشی*، *وایرشتراس* و دیگران در ارائهٔ نظریه‌های دقیق حد، پیوستگی، مشتق پذیری و انتگرال پذیری بازسازی شد و این بحران مرتفع گردید.

در اواخر قرن نوزدهم، بحران سوم، با ضربه به شهود بصری توسط خم فضا پرکن پئانو، منحنی پیوستهٔ هیچ جا مشتق پذیر وایرشتراس و تابعی حقیقی که روی اعداد اصم و فقط روی این اعداد پیوسته است، شروع شد و با کشف پارادوکس های *راسل* و *کانتور* که مبانی نظریه مجموعه‌ای ریاضیات را به لرزه در آوردند، ادامه یافت. این بحران منجر به بازنگری در نظریهٔ مجموعه‌های *کانتور* و ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌های بسیار دقیق‌تر به عنوان بنیان ریاضیات و نیز تکوین منطق ریاضی شد و متعاقب آن مکاتب گوناگون پدید آمدند.

شالودهٔ این بحران‌ها را شک (به خصوص نسبت به بنیان‌های نظری و کارآمدی نظریه‌های موجود) تشکیل می‌داد. تشکیک آراء گذشتگان اساس بسیاری از نوآوری‌ها، اکتشاف‌ها، باروری اندیشه و ژرف نگری در علم و فلسفه است. *کوپرنیک* به مرکزیت زمین، *گالیله* به سقوط سریع‌تر اجسام سنگین‌تر، *لوکازیه‌ویچ* به قانون طرد شق ثالث، *لوباچفسکی* به اصل پنجم *اقلیدس*، *همیلتون* به خاصیت جابجایی ضرب و ... شک کردند. شک به یقین‌هایی همچون عدم $\sqrt{-1}$ (ارائه شده توسط *کاردان*)، وجود اتر، عدم وجود مقادیر بی‌نهایت کوچک (ارائه شده توسط *بارکلی*)، وجود فقط پنج سیاره در منظومه شمسی، عدم وجود مجموعه‌های بدون مساحت در صفحه، کوچکتر بودن جزء از کل و ... علم را دگرگون ساخت.

تاریخ نشان داده است یقینی که بدون گذشتن از پل شک به دست آمده باشد از نظر فلسفه کم‌ارزش است. شک، سؤال برانگیز و دردآور است و فلسفه را به خاطر این سؤالات و نه

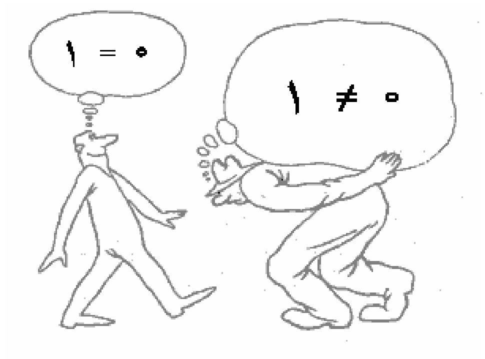
لزوماً یافتن پاسخ، مطالعه می‌کنیم. زندگی فقط زیستن در جواب سؤالات نیست، بلکه همزیستی با سؤالات حل نشده نیز می‌باشد. جهان برای کسی که سؤالی ندارد متناهی، کراندار، معقول، همراه با اصول بدیهی و حقایق معین بوده و در نتیجه آرامش بخش است!

در تهیهٔ این کتاب از دست نوشته‌های شخصی، درس فلسفهٔ استاد دکتر محمدعلی‌پورعبدالله، مقالات، کتب، اطلاعات روی شبکه جهانی وب و نیز پروژه ها و سمینارهای دانشجویان، که متأسفانه ذکر نام آنها در اینجا میسر نیست، کمک گرفته‌ام.

این کتاب مجموعه‌ای از مباحث گوناگون است که ضمن تدریس فلسفه ریاضی از سال ۱۳۷۵ در گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد فراهم شده است و بخش‌هایی از آن ترجمهٔ آزاد بعضی از متون فلسفی است؛ هر چند مرز مشخصی بین ترجمه و تألیف در این کتاب مشاهده نمی‌شود. این کتاب مدعی هیچ یک از موارد جامع بودن، مانع بودن، درستی قطعی، یکنواختی مطلب، و . . . نیست، چرا که مجموعه‌ای از مطالبی است که برای نگارنده این سطور جالب بوده و خواسته است دیگران را در این لذت شریک نماید.

از اعضای گروه Foundation of Mathematics (FOM) و P. Maddy، R. Hersh، P. Ernest، H. Field و V. Kanovei، دانشجویان عزیز و نیز جمعی از همکاران ارجمندم به خاطر بحث‌های فلسفی و آموزنده‌ای که با ایشان داشتم، کمال امتنان را دارم. از همسرم، خانم *دکتر مریم امیاری*، به خاطر مطالعه دقیق نسخه اولیه کتاب، از آقای *محمد صادق عامر پایهان* به خاطر تقبل زحمت تایپ و صفحه‌آرایی ظریفانه و سرانجام از آقای *دکتر مجید‌میرزاوزیری* به خاطر پیشنهادات ارزنده و دقت نظر در ویراستاری، صمیمانه سپاسگزارم.

محمد صال مصلحیان
دانشگاه فردوسی مشهد
۱۳۸۴


۰ = ۱
۰ ≠ ۱

فصل اول

هستی‌شناسی ریاضیات

کواین سه منظر در هستی‌شناسی (فلسفهٔ ریاضیات) قائل است: *واقع‌گرایی (افلاطون‌گرایی)*، *نام‌گرایی* و *مفهوم‌گرایی* که مکاتب *منطق‌گرایی*، *صورت‌گرایی* و *شهودگرایی* به ترتیب ناظر به آن‌ها هستند.

در مکتب افلاطون‌گرایی، اعیان ریاضی مانند عدد، مجموعه‌های نامتناهی، خط، دایره، مکعب چهار بعدی، فضای هیلبرت و ... بیرون از فضا و زمان و بیرون از اندیشه و ماده ، در قلمروی مجهول و مجرد (موسوم به عالم مُثُل)، و مستقل از هرگونه آگاهی فردی یا اجتماعی وجود دارند. این اشیاء ازلی و ابدی هستند، خلق نشده‌اند، تغییر نیز نمی‌پذیرند و خواصی دارند که برخی بر ما معلومند و بعضی هنوز نامعلوم. عقل رهنمای ما به چنین هستی‌هایی است. قضایای ریاضی، پیشینی، ضروری و به علت وجود شیوه‌های قطعی استنتاج، یقینی هستند. هر سؤال با معنی در ریاضیات جوابی دارد که ممکن است به علت ناقص بودن معرفت ما فعلاً قابل جواب دادن نباشد. به زعم افلاطون‌گرایان ریاضیات احکامی‌دارد که چه بخواهیم و چه نخواهیم خود را بر ما تحمیل می‌کند. عدد $۱ + ۱۰^{۱۰^{۱۰}}$ یا اول است یا نیست، گرچه عمر همه ما کفاف نمی‌دهد با شمارش به آن برسیم ، ولی به هر حال حتی قبل از نوشتن این عدد، اول بودن یا اول نبودنش تعیین گردیده‌است. عدد ۲ زوج است، اما نه به این خاطر که ما فکر می‌کنیم زوج است و نه به این خاطر که عقل ما چنین شکل گرفته یا ترتیب یافته است، بلکه به این دلیل که چنین هست. یک

ریاضی‌دان، یک ابداع‌کننده نیست، بلکه به مثابهٔ یک دانشمند تجربی، مثلاً یک زمین‌شناس، یک مکتشف است که آن‌چه را از قبل وجود دارد، می‌یابد. البته اگر او شانس نیاورد و نیابد، دیر یا زود خودش یا کس دیگری این کار را خواهدکرد. *راسل* در یکی از اولین نوشته‌های خود آورده‌است: «حساب باید همان طور کشف شده باشد که کریستف کلمب هند غربی را کشف کرد. ما اعداد را نیافریده‌ایم همچنان که کلمب هندیان را نیافرید.»

رنه تام یکی از طرفداران این مکتب است. وی می‌گفت: «ریاضیدان باید شهامت پایبندی به عقاید خود را داشته باشد. در آن صورت تصدیق خواهدکرد که ساختارهای ریاضی، وجودی دارند مستقل از ذهن شخصی که به آن‌ها می‌اندیشد. صورت این وجود بی‌تردید با صورت وجود ملموس و مادی جهان خارجی تفاوت دارد، ولی با این همه به نحوی دقیق و عمیق با وجود عینی مرتبط است، زیرا اگر ریاضیات فقط یک بازی بی‌ثمر و محصول تصادفی فعالیت‌های مغز باشد پس پیروزی بی‌چون و چرای آن در تشریح جهان را چگونه می‌توان توضیح داد؟ ریاضیات نه تنها در قوانین خشک و مرموز طبیعی آشکارا دیده می‌شود، بلکه به شکلی نهفته‌تر اما تردیدناپذیر در توالی نامتناهی و تفنن آمیز صورت‌ها در جهان جانداران و بی‌جانان و بودی و نابودی تقارن آن‌ها نیز تجلی می‌کند. چنین است که فرض افلاطونی مُثُل (در مورد ساختمان عالم)، علی‌رغم ظاهرش، طبیعی‌ترین و از لحاظ فلسفی اقتصادی‌ترین فرض به‌شمار می‌رود، ولی ریاضی‌دانان در هر لحظه تنها یک تصور جزیی و ناقص از عالم مُثُل دارند. با اعتقاد به وجود جهان مثالی، ریاضی‌دان بیش از حد نگران حدود روش‌های صوری نخواهد بود. وی خواهد توانست که مسألهٔ سازگاری را فراموش کند زیرا عالم مثال از امکانات عملی ما بسیار فراتر است و نسبت غایی ایمان ما به راستی یک قضیه، در شهود ما جای دارد.»

قرائتی دیگر از افلاطون‌گرایی، افلاطون‌گرایی نظریه مجموعه‌ای *گودل* است که در آن مجموعه‌های نامتناهی، که همواره در برابر تجارب متناهی بشری، وجودشان، جایگاهشان و نحوه دستیابی به آن‌ها مورد سؤال بوده است، واقعیتی غیر فیزیکی و صرفاً ریاضی دارند. در این دیدگاه وجود مفاهیم و اصولی که برمبنای شهود ریاضی ما توجیه می‌شوند یا در ارائهٔ نتایج تصدیق‌پذیر و به دست‌دادن نتایج جدید کارایی دارند پذیرفته می‌شود. گودل می‌گوید:«من دلیلی نمی‌بینم که چرا باید به این گونه ادراک، یعنی شهود ریاضی، کمتر از ادراک حسی عقیده داشته باشیم، آن شهودی که ما را وامی‌دارد تا نظریه‌های فیزیکی را بناکنیم و انتظار داشته باشیم که ادراکات حسی

آتی با آن‌ها سازگاری نشان‌دهد، و به‌علاوه، باید باور داشته باشیم سؤالی که اکنون نمی‌توان پاسخ داد، معنایی دارد و ممکن است در آتیه بتوان پاسخی برای آن یافت. مزاحمت پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ها برای ریاضیات خیلی کمتر از دردسری است که فریب‌های احساسی برای فیزیک دارند.»

دیدگاه افلاطون‌گرایی گاهی واقع‌گرایی خام خوانده می‌شود. نوع دیگر واقع‌گرایی، واقع‌گرایی علمی کواین–پاتنام است که می‌گوید آن اشیاء ریاضی وجود دارند که برای بهترین نظریهٔ ما در مورد جهان اجتناب‌ناپذیر هستند، به‌همان وجه که مثلاً وجود الکترون در فیزیک پذیرفته شده‌است. به‌زعم ایشان وقتی نظریه‌های علمی با تأیید پیش‌بینی‌های انجام گرفته پذیرفته‌می‌شوند، ریاضیات نیز که بخشی اجتناب‌ناپذیر از نظریه است، تأیید می‌شود. این دیدگاه توسط *پنلوپ مدی* با ترکیب با واقع‌گرایی نظریه مجموعهٔ گودل و به کمک مکانیزم‌های نظری عصب‌شناختی بازسازی شد.


پنلوپ مدی

درشکلی دیگر از افلاطون‌گرایی، مدی وجودی فیزیکی برای مجموعه‌ها قائل می‌شود. بر طبق نظر او، مجموعهٔ متشکل از کتاب‌های یک قفسه کتاب در همان قلمرو زمانی و مکانی قراردارد که خود کتاب‌ها آن‌جا هستند. وی می‌گوید که مغز ما از لحاظ عصب‌شناختی دارای یک «مجموعه‌یاب» است که ما را قادر به درک مجموعه‌ها می‌کند.

در قرائتی دیگر از افلاطون‌گرایی، ارائه شده توسط *م.بلاگور*، موسوم به *افلاطون‌گرایی تمام عیار*، هر شئ ریاضی که وجودش ممکن باشد، واقعاً وجود دارد و هر نظریهٔ ریاضی سازگار، بخشی از واقعیت ریاضی را توصیف می‌کند.

چند ایراد به دیدگاه کلاسیک افلاطونی وارد است: چنین فلسفه‌ای با واقعیت مادی ارتباطی ندارد و با گوشت و استخوان ریاضی‌دان تماسی برقرار نمی‌کند، تجربه‌گرایی علم جدید را نقض می‌کند و در پذیرفتن «وجود نامتجانس دو واقعیت فیزیکی و ریاضی» اصرار می‌ورزد، اما در چگونگی تأثیر متقابل این دو بر هم توضیحی نمی‌دهد. فلسفهٔ افلاطونی دنیایی آرمانی و مستقل از تفکر و فعالیت انسانی را ثابت می‌کند اما درباره مکانیزم‌هایی که به وسیلهٔ آن‌ها انسان می‌تواند با آن دنیا رابطه برقرارکند چیزی نمی‌گوید.

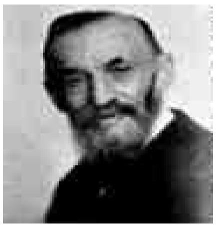
همچنین با پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی، تصور اشیای ریاضی به مثابه اشـیای محسـوس، جای خود را به تمیز ریاضیات و واقعیت داد.

دیدگاه افلاطونی در برابر نام‌گرایی و مفهوم‌گرایی قرار دارد. بـر طبـق نـام‌گرایـی هـیچ موجود ریاضی به طور مجرد و مستقل از زمان و مکان وجود ندارد، اشـیاء ریاضـی تخیلاتـی بـیش نیستند و صحبت از صدق جملات ریاضی بـی‌معنـی اسـت، و مـثلاً « ۴ = ۲ + ۲ » بـه همـان انـدازه درست است که «رستم پسرش سهراب را کشت». نام‌گرایان وجود فیزیکی خواص مختلف اشیاء و روابط بین آن‌ها را ردکرده، آن‌ها را وهم می‌پندارند. ایشان، دقیقاً بر خـلاف افلاطـونی‌هـا، وجـود اشیاء قرمز را می‌پذیرند، اما وجود «قرمزی» را خیر. در حالی که مفهوم‌گرایان می‌گویند موجودات مجرد وجود دارند و توسط فعالیت ذهنی به‌دست می‌آیند.

فصل دوم

منطق‌گرایی

پئانو نظریهٔ اعداد طبیعی را اصل موضوعی ساخت و قدم اصلی را برای حسابیدن ریاضیات، یعنی تحویل ریاضیات به حساب، برداشت. وی سه مفهوم اولیه صفر، عدد و تالی را ارائه کرد (مقصود از عدد، عدد طبیعی و منظور از تالی، عدد بعدی در ترتیب طبیعی بود، مثلاً یک تالی صفر است، دو تالی یک است و قس‌علی‌هذا). سپس پنج اصل موضوع زیر(موسوم به *اصول پئانو*)را وضع کرد:


پئانو

الف) صفر یک عدد است.

ب) تالی هر عدد، یک عدد است.

ج) صفر تالی هیچ عددی نیست.

د) هیچ دو عدد متفاوتی دارای تالی برابر نیستند.

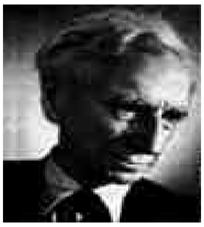
ه) هر خاصیتی که به صفر و به تالی هر عدد دارای آن خاصیت متعلق باشد، به همه اعداد متعلق است (اصل استقرای ریاضی). به‌این ترتیب می‌توانیم رشته اعداد طبیعی را با شروع از صفر و گذر از یک عدد مانند n به تالی آن یعنی $s(n)$ در دست داشته باشیم.

جمع به سادگی قابل تعریف است. درواقع به ازای هر m، عدد $m+0$ را برابر m قرار می‌دهیم و اگر $m+n$ داده شده باشد، $m+s(n)$ را برابر تالی $m+n$ یعنی $s(m+n)$ تعریف

می‌کنیم. ضرب نیز به طور مشابه تعریف می‌شود و به دنبال آن می‌توان همه قضایای حساب (مقدماتی) را اثبات نمود.

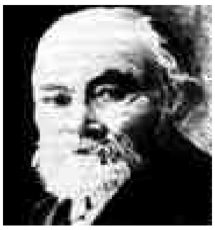
کار پئانو ایراداتی داشت، از جمله این‌که دستگاه قیاسی وی قابلیت پذیرفتن تعدادی نامتناهی تعبیر را داشت. یک تعبیر این است که صفر را به معنی صد، عدد را به معنای اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی صد وتالی را به معنای معمولی آن می‌گیریم. در این صورت هر پنج اصل موضوع پئانو، احکام صادقی خواهند بود (توجه کنید که صد تالی نود و نه نیست زیرا در این الگو نود و نه عدد نیست!).

بر طبق نظر راسل، در دستگاه پئانو چیزی برای تمیزدادن الگوهای متفاوت وجود نداشت.


برتراند راسل

ما می‌دانیم «صفر» چه باید باشد، به ویژه نمی‌خواهیم به معنای صد باشد. دستگاهی که در آن صفر به معنای صد است به درد زندگی نمی‌خورد. می‌خواهیم اعدادمان چنان باشند که بتوانند برای شمارش اشیای معمولی به کار روند.

در ۱۸۸۴ *فرگه* به منطقیدن حساب، یعنی تقلیل حساب به منطق (و با توجه به کار *پئانو*، در واقع منطقیدن ریاضیات) همت گماشت و اولین مکتب ریاضی را به نام منطق‌گرایی، که به عقیدهٔ *کواین* یک رهیافت افلاطون‌گرایانه به ریاضیات بود، تأسیس کرد. هدف این مکتب تحویل ریاضیات به منطق بود، یعنی اثبات این‌که ریاضیات شاخه‌ای از منطق (جدید و نه سنتی) است.


گوتلوب فرگه

به زعم *فرگه* عدد چیزی است که مشخصه اعداد است همان‌طور که انسان مشخصه انسان‌ها است. یک عدد خاص مانند ۳ نمونه ای از عدد است و یک گروه سه نفری نمونه‌ای از عدد ۳ است، و نه عدد. خود عدد ۳ چیزی است که بین همهٔ گردآیه‌های سه عضوی مشترک است. فرگه صفر را گردآیهٔ متشکل از مجموعهٔ تهی، ۱ را گردآیهٔ متشکل از همه مجموعه‌های تک‌عضوی، ۲ را گردآیه متشکل از همهٔ مجموعه‌های دو عضوی و ... تعریف کرد.

با این‌حال همهٔ این‌ها، توسط راسل دوباره کشف شد. در واقع منطق‌گرایی درحدود ۱۹۱۰ توسط راسل و وایتهد تنقیح شد. این دو نفر سعی کردند نشان دهند تمام ریاضیات کلاسیک

که تا آن زمان شناخته شده‌بود از نظریهٔ مجموعه‌ها و این نظریه در جای خود از اصول موضوع مذکور در کتاب *اصول ریاضیات* آن‌ها مشتق می‌شود و بالاخره این‌که این اصول موضوع متعلق به منطق هستند.

آن‌ها در ارائهٔ منطق‌گرایی نظریهٔ انواع و اصل تقلیل‌پذیری را به کار بردند. اما برنامهٔ آن‌ها ناقص بود، زیرا مثلاً این اصل موضوع که مجموعه‌های نامتناهی وجود دارند یک حکم منطقی (یعنی حکمی‌با عمومیت کامل که صدقش در پرتو صورتش باشد نه محتوایش) نبود. در واقع پذیرش این اصل به خاطر آشنایی ما با مجموعه‌های نامتناهی مانند مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه نقاط فضای سه بعدی بود، یعنی بر مبنای مضمون این اصل، نه صورت آن. همین وضعیت در مورد اصل انتخاب نیز برقرار بود. مشکل دیگر این بود که فرآیند استخراج قضایا از اصول منطق، طویل، پیچیده و ملال‌آور بود و با دید شهودی ما از ریاضیات منطبق نبود. به این ترتیب، منطق‌گرایی در ارائه قواعد و اصول زیربنایی ریاضی شکست خورد.

هم‌اکنون جریان‌های اصلی فلسفه ریاضی عبارتند از: صورت‌گرایی، شهودگرایی یا ساخت‌گرایی، و انسان‌گرایی .

فصل سوم

صورت‌گرایی

شاهکار *اقلیدس* در حدود سه قرن قبل از میلاد، وضع هندسه به شیوه‌ای خاص بود. او توانست ارتباط منطقی بین گزاره‌های هندسی را که تا آن زمان مجموعه‌ای از اطلاعات متفرق بود و توسط مصریان و بابلیان بدون هیچ دلیلی برای درستی آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت، به دست دهد و بنیانی سازگار برای آن ارائه کند.

چون دور و تسلسل در منطق متعارف باطل است پس چنین نیست که همهٔ گزاره‌ها قابل اثبات و همهٔ مفاهیم قابل تعریفند. لذا باید بعضی گزاره‌ها را بدون اثبات و بعضی مفاهیم را بدون تعریف پذیرفت. در واقع او مفاهیم هندسی را به کمک تعدادی مفهوم اولیه مانند جزء، طول، عرض، هموار و ... که آن‌ها را بدون تعریف به کار می‌برد، تعریف نمود و سپس نشان‌داد که چگونه حدود پانصد گزارهٔ هندسی (که درستی بعضی از آن‌ها به هیچ‌وجه واضح نبود) می‌تواند از پنج اصل معین که بدون اثبات پذیرفته می‌شوند، نتیجه شود.

روش اقلیدس توسط *ارشمیدس* و *نیوتن* به کار گرفته شد و بعدها، به خصوص از اواسط قرن نوزدهم، در بقیهٔ شاخه‌های ریاضیات و علوم (تجربی و انسانی) برای تدقیق، تجزیه، تحلیل و تفهیم اطلاعات و نیز تجرید شهود ما، به تدریج مورد توجه و استفاده قرار گرفت. این روش، شیوه اصل موضوعی (روش قیاسی) خوانده می‌شود وآن‌چه از اعمال آن به دست می‌آید دستگاه اصل موضوعی (یا قیاسی) نامیده می‌شود.

مکتبی که هدفش تأسیس (شاخه‌های) ریاضیات به روش اصل موضوعی است صورت‌گرایی خوانده می‌شود. این مکتب توسط دیوید هیلبرت در اوایل قرن بیستم تأسیس شد.


داوید هیلبرت

صورت‌گرایان می‌گویند هیچ شئ ریاضی در خارج از ذهن ما وجود ندارد. مفاهیمی‌چون نقطه، عدد ۲، بیضی، فضاهای متری و ... آفریده ذهن آدمی است و تنها روی کاغذ وجود دارد. ریاضیات چیزی جز تعدادی اصل، تعریف و قضیه نیست، یک بازی با قوانین واضح ولی دلخواه و با نمادهای فاقد معنی است. به عقیده *کواین* صورت‌گرایی یک رهیافت نام‌گرایانه به ریاضیات است.

ریاضیات یک علم به روش اصل موضوعی بر مبنای سه انتخاب است:

الف) انتخاب یک دستگاه منطقی، که مبین قوانین منطق و شیوه‌های استنتاج مطالب جدید (به نام قضایای دستگاه) است و به علاوه نقش زبان را ایفا می‌کند. این انتخاب به تجارب، انتظارات، شرایط اقتصادی، اجتماعی و روان‌شناختی، ملاک‌های زیبایی‌شناختی و حتی ویژگی‌های ژنتیکی سازندهٔ دستگاه وابسته است و گاه تجربه و مشاهده، معین کننده نوع منطق حاکم است، مانند منطق کوانتومی برای مکانیک کوانتومی، منطقی که در آن مثلاً قوانین توزیع‌پذیری عاطف روی فاصل و برعکس، برقرار نیست.

ب) انتخاب تعدادی گزاره، با عنوان *اصل موضوع* که بدون هیچ دلیلی ولی گاهی با پاره‌ای توجیه‌ها پذیرفته شده‌اند. انتخاب این اصول کاملاً دلخواه است و صحبت از صحت و سقم آن‌ها بر مبنای دنیای خارج از ذهن بی‌معنی است. به علاوه تلقی آن‌ها به عنوان «حقایق بدیهی» یا «حقایق ضروری» گمراه‌کننده محسوب می‌شود. اصول موضوع شالودهٔ تمام قضایای (حقایق) دستگاه را تشکیل می‌دهند، به این معنی که فقط احکامی صادق شمرده می‌شوند که بتوانند از اصول موضوع نتیجه شوند. همچنین یک مطلب ممکن است در یک دستگاه حقیقت باشد ولی در دستگاهی دیگر چنین نباشد و لذا صحبت از حق و باطل فقط در درون یک دستگاه بامعنی است نه در دو دستگاه متفاوت.

ج) انتخاب تعدادی کلمه یا عبارت به عنوان *مفهوم اولیه* (اصطلاح تعریف نشده)، که تعریف نمی‌شوند ولی دیگر اصطلاحات به کار برده‌شده در دستگاه قیاسی به کمک آن‌ها تعریف می‌شوند. البته ممکن است بتوان بعد از تأسیس یک دستگاه اصل موضوعی از یک مجموعهٔ دیگر

از مفاهیم اولیه و یا یک مجموعهٔ دیگر از اصول موضوع نیز استفاده کرد به طوری که هر مفهوم یا هر قضیهٔ یکی از دستگاه‌ها، مفهوم یا قضیهٔ دستگاه دیگر باشد که در این حالت، دو دستگاه را متوافق می‌گویند.

در ریاضیات برای این‌که پندارها و پیش‌فرض‌هایمان را در استدلال‌ها وارد نکنیم از زبان نمادی و منطق صوری برای معرفی اصطلاحات اولیه و بیان اصول و بالاخره استنتاج قضایا کمک می‌گیریم. در این حالت محصول را دستگاه قیاسی صوری می‌نامند.

لزومی ندارد که مفهوم اولیه، مابه‌ازایی در عالم خارج از ذهن داشته‌باشد یا اصول و قضایای آن توصیف حوزه‌ای از جهان عینی (در برابر ذهنی) باشد. بر این اساس *دیودونه* ریاضیات را فقط ترکیبی از نمادهای بی‌معنی می‌دانست. اما اگر به اصطلاحات تعریف نشده یا نمادهای دستگاه قیاسی صوری معنای خاص بدهیم به طوری که اصول موضوع به احکام درست تبدیل شوند، می‌گوییم دارای یک تعبیر یا الگو هستیم. در این صورت همهٔ قضایای دستگاه بعد از ترجمه به زبان تعبیر، به احکام درستی تبدیل می‌شوند.

توجه نمایید که معنی دادن به مفاهیم اولیه وسپس ترجمه اصول و احکام دستگاه و به‌دست‌آوردن تعبیر، امری خارج از ریاضیات است که ممکن است با جهان فیزیکی خارج از ذهن (البته در صورت وجود) تطبیق بکند یا نکند، به قول راسل در ریاضیات نه می‌دانیم از چه صحبت می‌کنیم و نه حتی می‌دانیم که آن‌چه می‌گوییم راست است.

برای یک دستگاه ممکن است تعبیرهای متفاوت داشته باشیم. دستگاهی صوری که فقط یک تعبیر (تا حد یکسانی) داشته باشد *جازم* خوانده می‌شود. بنا به قضیه‌ای از *اسکولم* هیچ دستگاه صوری سازگار جازمی که بتوان اعداد طبیعی را در آن تعریف کرد، وجود ندارد.

استنتاج قضایا به عنوان احکام جدید به کمک قوانین منطق صورت می‌پذیرد و به تجربهٔ عینی نیاز ندارد. البته شهود، محاسبه، آزمایش و خطا، و الهام به حدس یا کشف قضایا کمک می‌کند.

هرکس در انتخاب اصول موضوع و تعریف‌نشده‌های خود آزادی کامل دارد تا آن‌جا که تناقض ایجاد نشود. با این‌حال ما فقط مجاز به استفاده از آن خاصیت‌هایی از اصطلاحات اولیه در استدلال‌های خود هستیم که اصول موضوع به ما می‌دهند.

چنین نیست که علومی مانند فیزیک، شیمی و ... ، مثل قوانین نیوتن در مکانیک، از تجارب حسی استنتاج شده باشند، گرچه عموماً در آن‌جا دستگاه‌های اصل موضوعی فقط به قوام بخشیدن تجارب حسی و ارائه یک مدل می‌پردازند، نه یک دستگاه قیاسی صوری. البته ویژگی‌های موضوع مورد مطالعه، نیازها، تجربه، مشاهده، آزمایش، انتظارات و ملاحظات زیبایی‌شناسی به طور بنیادی ما را در انتخاب اصول و مفاهیم اولیه یاری می‌رسانند ولی به هر حال گزینش آن‌ها و ساخت دستگاه‌های قیاسی در نهایت به کمک فعالیت آزاد مغز انسان صورت می‌پذیرد. با این‌حال مطالعه تاریخ علم نشان می‌دهد که اصول موضوع در ریاضیات کلاسیک دلخواه وضع نشده‌اند بلکه به گونه‌ای ارائه شده‌اند که نظمی ساختاری به یک موضوع معین ببخشند.

اینک به معرفی یک دستگاه اصل موضوعی به نام *هندسه وقوع* در صفحه می‌پردازیم:

در مورد واقع‌شدن یک نقطه بر یک خط (در یک صفحه) تعدادی اطلاعات پراکنده داریم:

۱- بر هر خط لااقل دو نقطه متمایز وجود دارد.

۲- بر هر دو نقطه یک و فقط یک خط می‌گذرد.

۳- سه خط متمایز وجود دارد که متقارب نیستند (یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که بر آن سه خط واقع باشد).

۴- به ازای هر نقطه لااقل یک خط هست که از آن نقطه نمی‌گذرد.

۵- به ازای هر خط لااقل یک نقطه وجود دارد که بر آن نیست.

۶- سه نقطه متمایز وجود دارد به طوری که هیچ خطی بر هر سه آن‌ها واقع نمی‌شود.

۷- به ازای هر نقطه لااقل دو خط متمایز وجود دارد که از آن نقطه می‌گذرد.

*- بر هر نقطه واقع در خارج یک خط، یک و فقط یک خط موازی آن می‌گذرد.

اگر بخواهیم این اطلاعات را به روش اصل موضوعی نظم بخشیم، باید اصول موضوع و حدود اولیه را معین کنیم. این کار نیاز به شم (هندسی)، ذکاوت و نیز قدری شانس دارد.

ما بر حسب تجربه‌ای که در هندسه داریم، گزاره‌های ۱و۲و۶ را به‌عنوان اصل موضوع انتخاب می‌کنیم و همچنین نقطه، خط و وقوع (واقع شدن یک نقطه بر یک خط) را به عنوان اصطلاحات اولیه اختیار می‌کنیم. برای ارائه دستگاه قیاسی صوری از مجموعه Σ متشکل از

حروف P و Q و متفرعات آن‌ها، برای نمایش مجموعه نقاط، از مجموعه Ω متشکل از حروف d و l و متفرعات آن‌ها، برای نشان دادن مجموعه خطوط، و از نماد $\propto$ برای نمایش نسبت وقوع استفاده می‌کنیم. پس از $P \propto l$ به عبارت «P بر l واقع است» تعبیر می‌شود. در این صورت با استفاده از نمادهای منطقی اصول موضوع انتخابی ما عبارت خواهند بود از:

$(i) \quad \forall l \in \Omega \exists P, Q \in \Sigma; (P \neq Q \wedge P \propto l \wedge Q \propto l)$

$(ii) \quad \forall P, Q \in \Sigma; (P \neq Q \Rightarrow \exists! l \in \Omega; (P \propto l \wedge Q \propto l))$

$(iii) \quad \exists P, Q, R \in \Sigma; (P \neq Q \wedge Q \neq R \wedge R \neq P \wedge \forall l \in \Omega; \neg(P \propto l \wedge Q \propto l \wedge R \propto l))$

اینک گزاره‌های ۳، ۴، ۵ و ۷ به عنوان قضایای دستگاه قابل اثبات هستند. ما برای نمونه گزاره ۷ را اثبات می‌کنیم:

قضیه.

$$\forall P \in \Sigma \exists l, l' \in \Omega; (l \neq l' \wedge P \propto l \wedge P \propto l')$$

برهان.

نقطه P را در نظر می‌گیریم. از اصل موضوع *(iii)* نتیجه می‌شود که لااقل دو نقطه متمایز دیگر Q و R وجود دارند که هیچ خطی بر هر سهٔ آن‌ها نمی‌گذرد. بنا به اصل موضوع *(ii)* بر P و Q خطی یکتا مانند l و بر P و R خطی یکتا مانند l' می‌گذرد. اگر $l = l'$ ، آن گاه l خطی خواهد بود که از سه نقطهٔ P و Q و R می‌گذرد که ممکن نیست. پس $l \neq l'$، فهوالمطلوب.■

اینک اگر تلاش نماییم گزاره * یا نقیض آن را اثبات کنیم موفق نخواهیم شد. خوشبختانه این عدم موفقیت ناشی از ناتوانی ما نیست.

در واقع نه گزاره * و نه نقیضش را نمی‌توان از اصول موضوع *(i)*، *(ii)* و *(iii)* نتیجه گرفت. برای اثبات این مطلب تعبیرهای ذیل را در نظر بگیرید:

تعبیر الف)

Σ را مجموعهٔ $\{A, B, C\}$، Ω را مجموعهٔ

$$\{\{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B\}\}$$

و نسبت $\propto$ را تعلق نظریه مجموعه‌ای تعبیر می‌کنیم.

در این صورت اصول موضوع مورد نظر ما، بعد از ترجمه به زبان تعبیر به احکام درستی در مبحث مجموعه‌ها تبدیل می‌شوند. به وضوح گزاره * بعد از ترجمه یک حکم غلط را به دست می‌دهد، زیرا در این تعبیر اساساً دو خط «موازی» وجود ندارد:

$$\{A,B\}\bigcap\{A,C\}\neq\varnothing$$
$$\{A,C\}\bigcap\{B,C\}\neq\varnothing$$
$$\{B,C\}\bigcap\{A,B\}\neq\varnothing$$

تعبیر ب)

Σ را مجموعهٔ $\{A,B,C,D\}$ و Ω را مجموعهٔ

$$\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$$

و نسبت $\propto$ را همان تعلق نظریه مجموعه‌ای تعبیر می‌کنیم.

در این صورت دوباره یک تعبیر به دست می‌آوریم، با این تفاوت که گزارهٔ * بعد از ترجمه به زبان تعبیر به یک حکم درست تبدیل می‌شود. مثلاً اگر «نقطهٔ» A و «خط» $\{B,C\}$ را در نظر بگیریم فقط یک «خط» یعنی $\{A,D\}$ وجود دارد که از A «می‌گذرد» و با $\{B,C\}$ «موازی» است.

تعبیر پ)

Σ را مجموعهٔ $\{A,B,C,D,E\}$ و Ω را مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی $\{A,B,C,D,E\}$ و نسبت $\propto$ را دوباره همان تعلق نظریه مجموعه‌ای تعبیر می‌کنیم. در این صورت مجدداً یک تعبیر به‌دست‌می‌آوریم، با این فرق که در این تعبیر گزارهٔ * بعد از ترجمه به زبان تعبیر به یک حکم غلط تبدیل می‌شود، مثلاً اگر «نقطهٔ» A و «خط» $\{B,C\}$ را در نظر بگیریم دو «خط» متمایز $\{A,D\}$ و $\{A,E\}$ وجود دارد که از A «می‌گذرند» و با خط $\{B,C\}$ «موازی» هستند.

اگر گزارهٔ * قضیهٔ دستگاه می‌بود در هر تعبیری به یک حکم درست تبدیل می‌شد (زیرا نتیجهٔ منطقی احکام درست، حکمی درست است) پس با توجه به تعبیر (الف) (یا (پ)) و تعبیر (ب) نه این گزاره و نه نقیض آن هیچ کدام قضیه دستگاه نیستند.

در معرفت‌شناسی دستگاه‌های قیاسی گفته می‌شود که اگر بخواهیم گزارهٔ * یا نقیض آن را به عنوان حقیقت در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم هر کدام را (بدون هیچ رجحان یکی بر دیگری) به عنوان اصل موضوع به دستگاه اضافه کنیم.

بر مبنای منطق کلاسیک ملاک‌های «خوب» بودن یک دستگاه قیاسی عبارتند از:

۱- سازگاری، بدین معنی که استنتاج دو گزاره متناقض از آن ممکن نباشد.

در ریاضیات، سازگاری (نسبی) یک دستگاه قیاسی با ارائه تعبیر در یک دستگاه از پیش سازگار فرض یا اثبات شده صورت می‌گیرد. به عنوان مثال تعبیرهایی برای هندسهٔ هذلولوی در هندسهٔ اقلیدسی و نیز هندسهٔ اقلیدسی در هندسهٔ هذلولوی وجود دارد. پس اگر یکی از هندسه‌ها سازگار باشد دیگری نیز سازگار است، معمولاً سازگاری نظریهٔ مجموعه‌ها فرض می‌شود و سازگاری شاخه‌های دیگر ریاضیات کلاسیک از روی آن اثبات می‌شود. چون در یک دستگاه ناسازگار هر چیزی قابل اثبات می‌باشد، پس اگر لااقل یک *فرمول دستگاهی* در آن دستگاه قابل اثبات نباشد، دستگاه سازگار است. مطلب اخیر به قاعده سازگاری پست، منطقدان آمریکایی، معروف است.

یک راه به دست آوردن دستگاهی ناسازگار این است که نقیض یکی از قضایای دستگاه را به عنوان اصل موضوع به آن اضافه کنیم. مثلاً با افزودن « ۰ = ۱ » به اصول حساب پئانو یک دستگاه ناسازگار به دست می‌آید.

۲- استقلال، بدین معنی که دستگاه قیاسی، اصل موضوع زائد نداشته باشد. به عبارت دیگر، هیچ یک از اصول آن‌را نتوان از اصول دیگر نتیجه گرفت.

برای اثبات استقلال دستگاه باید به ازای هر اصل موضوع، تعبیری ارائه داد که در آن اصل موضوع مورد نظر برقرار نباشد ولی بقیه اصول، احکام درستی باشند.

۳- تمامیت، بدین معنی که دستگاه قیاسی ناقص نباشد. به عبارت دیگر، هر مطلب که به زبان دستگاه بیان می‌شود قابل اثبات یا ابطال باشد.

اگر گزاره‌ای نسبت به یک دستگاه مستقل باشد، یعنی قابل اثبات یا قابل ابطال نباشد، می‌توانیم آن را به عنوان یک اصل موضوع جدید به دستگاه اضافه نماییم و به یک دستگاه وسیع‌تر دست یابیم. برای مثال فرضیهٔ پیوستار (CH) و این مطلب که «هر فضای توپولوژی نرمالِ بی‌کاست و به طور شمارا فشرده، فشرده است» که به اصل O-W موسوم است، در دستگاه ZFC

مستقل هستند. . البته هر قدر به تمامیت دستگاه نزدیک شویم سازگاری آن بیشتر مورد تهدید قرار می‌گیرد.

کورت گودل در ۱۹۳۱ با روشی موسوم به *عددگذاری گودل* اثبات کرد که هیچ دستگاه اصل موضوعی سازگار تمام که شامل ساختار اعداد طبیعی باشد وجود ندارد. گودل همچنین نشان داد اثبات سازگاری یک دستگاه اصل موضوعی که شامل ساختار اعداد طبیعی باشد در درون خود دستگاه ممکن نیست و بنابراین به قول *یان استوارت*، کسی نمی‌تواند خود را با کشیدن بندهای کفشش از زمین بلند کند. در این راستا *هرمان ویل* گفته است:«خدا وجود دارد زیرا ریاضیات سازگار است و شیطان وجود دارد زیرا نمی‌توانیم این سازگاری را اثبات کنیم.»


کورت گودل

یکی از پرسش‌هایی که در مورد یک ردهٔ معین از سؤالات در ریاضیات پرسیده می‌شود، مسأله تصمیم (یا قطعیت) برای آن رده است. به این معنی که آیا یک مجموعهٔ متناهی از دستورالعمل‌های صریح موسوم به روش کار آمد یا «الگوریتم» وجود دارد که با به کار بستن آن‌ها، جواب آن سؤالات در تعداد متناهی مرحله و به طور ماشینی فراهم شود. این رده‌ها عموماً از نوع سؤالات با پاسخ آری یا نه، یا از نوع سؤالاتی که متضمن محاسبهٔ یک شئ ریاضی است می‌باشند. مانند:

الف) به ازای عدد طبیعی داده شدهٔ n، آیا n اول است؟

ب) در حساب صوری گزاره‌ها، آیا یک فرمول مفروض، راستگو است یا نه؟

ج) چگونه ریشه‌های مختلط یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب مختلط را محاسبه کنیم؟

الگوریتم تجزیه یک عدد به عوامل اول، شیوهٔ جدول ارزش ودستور حل معادلهٔ درجهٔ دو به ترتیب پاسخگوی رده‌های (الف)، (ب) و (ج) می‌باشند.

اینک این سؤال مطرح است که آیا شیوهٔ تصمیم گیری مشخصی در یک دستگاه صوری وجود دارد که با به کار بستن آن شیوه، پاسخ این سؤال که آیا گزارهٔ قابل بیان به زبان دستگاه (یعنی یک فرمول) اثبات پذیر است یا نه، به طور خود به خود به دست آید؟ (•)

همان طور که در بالا اشاره شد، برای حساب صوری گزاره‌ها، جواب (•) مثبت است. اما *آلن تورینگ* در ۱۹۳۶، به کمک نوعی ماشین محاسبه منطقی یا به قول *ویتگنشتاین* «انسان

محاسب» موسوم به ماشین تورینگ، «محاسبه پذیری با ماشین تورینگ» را به عنوان معادل صوری وجود «الگوریتم» یا روش کار آمد ارائه کرد و نشان‌داد که مسائل تصمیم به وجود برنامه‌های ماشین تورینگ تحویل می‌یابند. او سپس اثبات کرد که پاسخ سؤال(•) برای حساب محمولات منفی است، هر چند، مدتی قبل از او و مستقل از وی *آلنسوچرچ* به کمک مفهوم λ- تعریف‌پذیری، همین نتیجه را به دست آورده بود.

آلن تورینگ

۴- تعداد اصول موضوع و تعریف نشده‌ها «کم» باشد.

البته این یک خواست روانی انسان است که تمایل دارد آنچه را باید بدون دلیل بپذیرد «کم» باشد ولی گاهی ملاحظات آموزشی جهت تسهیل در فهم دستگاه، موجب می‌شود که این ملاک نقض شود. همچنین سادگی و دقت بیان اصول و مفاهیم اولیه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۵- کاربرد پذیری، تأیید تجربی ومفید بودن؛ یعنی دستگاه قیاسی باید:

الف) دارای نتایج عمیقی در دل خود باشد، مانند رده‌بندی گروه‌های متناهی ساده در نظریهٔ گروه‌ها؛

ب)توجیه کننده، تبیین کننده و نظم دهنده تجارب حسی وپدیده‌های طبیعت باشد، قدرت پیش بینی داشته باشد و مشاهدات وآزمایش های آن‌ها را تأیید کند؛

ج) مجموعه‌ای از اطلاعات متفرق راجع به یک موضوع را تدوین نماید و یا نظریه ای را برای ارتباط شاخه‌های مختلف علوم یا دیدگاه‌های متفاوت راجع به یک موضوع به دست دهد.

البته مدلی که یک دانشمند از بخشی از طبیعت (به عنوان دنیای خارجی مستقل از ذهن و ضمناً قابل شناخت) به روش قیاسی ارائه می‌دهد:

اولاً- لزومی‌ندارد که یکتا و تنها مدل ممکن باشد.

ثانیاً- لزومی‌ندارد با تجارب حسی تطبیق کامل داشته باشد. با وجود این، خوشبختانه و بر مبنای تفکر علمی، چیزی است که می‌توان بر مبنای آن عمل کرد، زیرا می‌دانیم چه کار می‌کنیم.

ثالثاً- رو به تکامل است و بر مبنای تعلیم و تربیت علمی هرگاه تصویری کامل‌تر از موضوع مورد بررسی به دست آمد باید مدل قبلی را بدون تعصب کنار گذاشت و مدل جدید را جانشین آن کرد.

رابعاً- همچون نگرش *بور* و *هایزنبرگ* به نقش معرفت‌شناختی فیزیک، هدف می‌تواند یافتن یک ارتباط بین تجارب شخصی (یا گاهی جمعی) ما باشد، نه لزوماً درک سرشت جهان و طبیعت اشیا.

تجربهٔ سقوط یک سنگ به طرف زمین را در نظر آورید. *ارسطو* می‌گفت که سنگ به این دلیل سقوط می‌کند که هر چیز میل بازگشت به اصل خویش را دارد. بعدها *نیوتن* گفت که علت سقوط سنگ، نیروی جاذبه است و بالاخره *اینشتین* گفت که نیازی به فرض نیروی جاذبه نیست چرا که انحنای فضا–زمان توجیه کننده سقوط سنگ است. همچنین مدل *دموکریت*، مدل *اپیکور*، مدل اتمی *تامسون*، مدل اتمی *رادرفورد* ومدل اتمی *بوهر* را در معرفی کوچکترین ذرات ماده به یاد آورید.

فرض چند وجهی بودن واقعیت نیز مطرح است واین که زاویهٔ دید معین کننده چگونگی تجلی واقعیت است. یک شیٔ و دو انسان A و B را در نظر بگیرید که در جایگاه‌های خاص و ثابتی قرار دارند. A از روبرو به شیٔ نگاه می‌کند و آن را مستطیل قرمز می‌بیند و B از بالا به شیٔ نگاه می‌کند آن را دایره آبی می‌بیند. سؤال اینست که نظر کدام درست است؟ اگر از قبل ندانیم که شیٔ مورد نظر چیست (که غالباً چنین است!) تصمیم گیری سخت و شاید غیرممکن باشد. ولی بر حسب یک *عادت و تربیت بد* که به ما می‌گوید از دو دیدگاه متضاد حتماً یکی اشتباه است، بر مبنای پیش‌داوری و تعصبات گوناگون، عموماً یکی را نسبت به دیگری برتری می‌بخشیم و از قبول دیگری اجتناب می‌کنیم. حال فرض کنیم که از قبل بدانیم که شیٔ مورد نظر یک استوانه با سطح جانبی قرمز رنگ و سطح بالایی آبی رنگ است در این صورت هر دو دیدگاه ارائه شده، که هر کدام ناظر به جنبه‌ای از شیٔ هستند، باید به رسمیت شناخته شوند، گرچه متأسفانه هر دو «بی فایده‌اند» !

ایراداتی به این مکتب وارد است: صورت‌گرایی درباره این‌که نتایج ریاضی از کجا می‌آیند توضیح نمی‌دهد. ریاضی‌دانان همیشه نتیجه را پیش از نوشتن یک اثبات نمادین می‌دانند. در واقع ساختارهای اصل موضوعی مطلقاً نتیجه جدیدی به دست نمی‌دهند و به خاطر ساختار منطقی‌شان بی‌فایده‌اند. اصول و قوانین دستگاه قراردادی نیستند، بلکه نسبتاً به وسیله عملکرد جامعه که تحت فشارهای درونی و روابط متقابل میان گروه‌های اجتماعی به وجود می‌آید به لحاظ تاریخی تعیین می‌شوند و اساساً به گونه‌ای که صورت‌گرایان مدعی هستند تحقق نمی‌یابند.

فصل چهارم

شهودگرایی (ساخت‌گرایی)

شهودگرایان مجموعهٔ اعداد طبیعی {۱,۲,۳,...} را به عنوان مأخذ بنیادهای ریاضیات تصور می‌کنند و معتقدند که سرچشمهٔ این اعداد شهود است. بنیانگذار این مکتب *بروئر* است. به عقیده او منشأ مفهوم دنباله اعداد طبیعی، در قابلیت ما در فرق گذاشتن بین دو احساس است (هنگامی که یکی از آن‌ها به گذشته بپیوندد و یاد آن در حافظه باقی بماند و در عوض احساس دیگر جایگزین اولی شود)، و همچنین در قابلیت تکرار نامحدود این فرآیند. از نظر شهودگرایان ما اعداد طبیعی را به همان طریق احساس می‌کنیم که *کانت* فضا را احساس می‌کرد.


بروئر

از دید ایشان یک شئ ریاضی *وجود دارد* هرگاه ریشه در شهود ما داشته باشد، یا به طور دقیق‌تر، هرگاه بتوانیم آن را با یک روش معین و در تعداد متناهی مرحله از اعداد طبیعی بسازیم. بنابراین آن قسمت‌هایی از ریاضیات کلاسیک که به روش ساختنی به دست نیایند، یعنی در یک فرآیند متناهی خود را به اعداد طبیعی متصل ننمایند، فاقد معنا محسوب می‌شوند. برای نمونه به دو مثال زیر توجه کنید:

۱) فرض کنید p *فرضیه ریمان* باشد، یعنی اینکه صفرهای تابع *زتای ریمان* روی خط $x = \frac{۱}{۲}$ قرار دارند. در حال حاضر نمی‌دانیم p راست است یا دروغ. در این صورت،

$$a = \begin{cases} ۱ & \text{اگر p صادق باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$
، از نظر ساختنی هیچ شئ ریاضی را به دست نمی‌دهد.

۲) یک برهان ساختنی برای قضیهٔ «اعداد اصم a و b وجود دارند که a^b گویا است» عبارت است از $a = e$ و $b = \ln ۲$ و یک برهان غیرساختنی به صورت زیر قابل ارائه است:

« $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ یا گویا است یا اصم است. اگر گویا باشد، قرار می‌دهیم $a = b = \sqrt{۲}$ و اگر اصم باشد قرار می‌دهیم $a = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$.»

اشکال برهان اخیر این است که a ساختنی نیست.

اینان بر خلاف منطق‌گرایان نمی‌خواهند تمام ریاضیات کلاسیک را توجیه نمایند، بلکه می‌خواهند تعریف معتبری از ریاضیات ارائه دهند و بعد ببینند در عمل چه چیزی از آن حاصل می‌گردد.

در بیانیه ساخت‌گرایان، ارائه شده توسط *ارت بیشاپ*، آمده است:

«ریاضیات بخشی از فعالیت‌های ذهنی ماست که برتر از زیست‌شناسی و محیط‌شناسی است. قوانین زیست‌شناسی به صورتی که با آن آشنا هستیم ممکن است برای تشکیل زندگی در جهانی دیگر به کار روند، گرچه لزومی‌ندارد چنین باشد.

همچنین با این‌که قوانین فیزیک عام‌تر هستند، تصور این‌که در جهانی دیگر قوانین فیزیکی متفاوتی حاکم باشد، آسان است. ریاضیات آفرینشی ذهنی است که کمتر از فیزیک و زیست‌شناسی اختیاری است، بدین معنا که موجوداتی که ما آن‌ها را ساکن در جهان دیگری با قوانین فیزیکی و زیست‌شناسی متفاوتی تصور می‌کنیم، ریاضیاتی در دست خواهند داشت که اساساً همان ریاضیات ماست.»

بروئر در ۱۹۰۸ این مطلب را که «قوانین منطق ارسطویی بدان گونه که به ما رسیده‌اند اعتبار مطلق دارند» مورد تردید قرار داد. به ویژه قانون طرد شق وسط (ثالث) (که می‌گوید برای هر گزاره p، یا p یا $\neg$p) را معتبر ندانست. البته شهودگرایان قائل به شق سوم نیستند آن‌ها فقط

می‌گویند:« چنین نیست که شق سوم وجود ندارد.» وی همچنین کاربرد بینهایت بالفعل (به مثابه یک کمیت نامتناهی) را مورد شک قرار داد و اشیای ریاضی را ساختمان‌های معین ذهنی دانست.

بعدها از شهودگرایی مکاتب گوناگونی مانند *ساخت‌گرایی بیشاپ* و *ساخت‌گرایی بازگشتی مارکوف* پدید آمد.

در ریاضیات کلاسیک وجود به معنای «عدم به تناقض می‌انجامد» است. در حالی که در ریاضی شهودگرایان، اگر فرض نادرست بودن گزاره p به تناقض منجر شود فقط می‌توان گفت که $\neg p$ نادرست است و چنین نیست که همواره نتیجه شود p درست است. یعنی در منطق شهودگرایانه (که بیشتر نقش زبان برای انتقال اندیشه را دارد و مستقل از ریاضیات است)، «اگر $\neg\neg p$ آن گاه p» معتبر نیست.

آن چه برای درستی یا نادرستی‌اش برهانی ساختنی ارائه نشود قابل پذیرش نیست. اصل انتخاب، قضیه مقدار میانی و ... که احکامی مهم در ریاضیات کلاسیک هستند در ریاضیات شهودگرا قابل پذیرش نیستند. به هر حال توجه به این نکته مهم است که از دیدگاه ساخت‌گرایان، چنین نیست که تمام ریاضیات کلاسیک، که البته گاهی «ریاضیات توصیفی» خوانده می‌شود، و روش‌هایش بی‌فایده و بی‌اعتبار است. برای توضیح بیشتر حالت خاصی از قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته (در ریاضیات کلاسیک) را در نظر بگیرید:

قضیه. اگر تابع f روی بازه $[\circ,۱]$ پیوسته باشد و $f(\circ) < \circ$ و $f(۱) > \circ$ ، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در بازه $[\circ,۱]$ موجود است به طوری که $f(x) = \circ$.

برای اثبات این قضیه ریاضی‌دان کلاسیک با برهان خلف نشان می‌دهد که عدم وجود چنین نقطه‌ای به تناقض منجر می‌شود و از آن‌جا نتیجه می‌گیرد که چنین نقطه‌ای وجود دارد. در حالی که ریاضی‌دان ساخت‌گرا چنین برهانی را نمی‌پذیرد و حتی نشان می‌دهد که هیچ روش ساختنی برای یافتن نقطه مورد نظر وجود ندارد.

از نظر ریاضی‌دان ساخت‌گرا، قضایای غیر ساختنی ریاضیات کلاسیک را ممکن است بتوانیم اصلاح کنیم تا به یک برهان ساختنی دست یابیم. مثلاً (آ) با قوی کردن مفروضات و یا (ب) با ضعیف کردن نتیجه.

به عنوان نمونه شکل‌های ساختنی قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته بر اساس دو روش فوق عبارتند از:

(آ) فرض کنید $f:[0,1]\rightarrow R$ یک تابع پیوسته باشد به‌طوری‌که $f(0)<0$ و $f(1)>0$. دراین‌صورت برای هر $\varepsilon>0$ ، xی در $[0,1]$ موجود است که $|f(x)|<\varepsilon$.

(ب) فرض کنید $f:[0,1]\rightarrow R$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، به‌طوری‌که $f(0)<0$ و $f(1)>0$. دراین‌صورت xی در $[0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)=0$.

البته در وضعیت‌های متناهی تفاوتی بین روش‌های استدلال در ریاضیات کلاسیک و ریاضیات شهودگرا نیست و به ویژه در این حالت آن‌ها قائل به قانون طرد شق ثالث هستند. مثلاً اگر p گزارهٔ «بین 10^{10} و 10^{100} یک عدد اول وجود دارد» باشد با یک بررسی (هرچند طولانی) نتیجه می‌شود که یا p یا $\neg p$ درست است. لذا در این‌جا اگر فرض نادرستی p به تناقض منجر شود، می‌توان نتیجه گرفت که p درست است.

بیشاپ در جواب این سؤال که از کجا می‌فهمید که یک برهان، ساختنی است یا نه، می‌گوید:«اگر شما بتوانید یک برنامهٔ کامپیوتری برای آن بنویسید، آن اثبات، ساختنی خواهد بود؛ گرچه ضرورتی ندارد آن برنامه را اجرا کنید و برای نتایجش انتظار بکشید.»

یکی از ظرافت‌های کار *بروئر* ارائهٔ مثال‌هایی موسوم به مثال‌های نقض بروئری است که در آن‌ها تصمیم‌پذیری یک حکم به تصمیم‌پذیری حکمی دیگر که تاکنون نه اثبات و نه ابطال شده است موکول می‌شود. همچنین پذیرش آن‌ها منجر به پذیرش اصل طرد شق ثالث می‌شود که یک حکم غیر ساختنی است. این مثال‌ها ضمن نمایش تفکر شهودگرایانه نشان می‌دهند که بعضی قضایای ریاضیات کلاسیک غیر ساختنی هستند. در ذیل تعدادی از این مثال‌ها را ارائه می‌دهیم:

۱) اصل کمال در ریاضیات کلاسیک به این معنا است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی، دارای کوچکترین کران بالا (یا سوپریمم) است. این اصل، سرشتی غیر ساختنی دارد. فرض کنید $\mathrm{S}n$ به این معنا باشد که $2n+2$ مجموع دو عدد اول است. اگر n داده شده باشد، می‌توان در تعداد متناهی مرحله معین کرد که $\mathrm{S}n$ راست است یا دروغ. اما صدق $\forall n;\mathrm{S}n$ که به حدس گلدباخ موسوم است، تاکنون معلوم نشده است. اگر برای هر k، قرار دهیم:

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{۱}{k} & \text{اگر برای هر } n \le k\text{، } Sn \text{ صادق باشد} \\ ۳ - \dfrac{۱}{k} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$
و فرض کنیم Λ مجموعهٔ متشکل از α_kها باشد آن‌گاه عدد ۳ یک کران بالا برای Λ است. اینک اگر اصل کمال برقرار باشد، Λ باید دارای سوپریمم t باشد. اما در ریاضیات ساختنی یک عدد حقیقی، یک دنباله کوشی $\{x_n\}$ از اعداد گویا است که در شرط $\forall m,n \in N, \left|x_m - x_n\right| < \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n}$ صدق می‌کند. یک نتیجهٔ این تعریف این است که می‌توانیم بسط اعشاری t را تا هر تعداد مشخص رقم بعد از اعشار تعیین نماییم. پس می‌توان تعیین کرد $t < ۱/۸$ یا $t > ۱/۶$. حالت اول نتیجه می‌دهد که برای هر n، Sn راست است، یعنی اگر $t < ۱/۸$ ، حدس گلدباخ اثبات شده است. حالت دوم و تعریف کوچکترین کران بالا، نتیجه می‌دهد که kیی وجود دارد که $۳ - \frac{۱}{k} > ۱/۶$. لذا در یک تعداد متناهی مرحله ، می‌توان $n(\le k)$ی یافت که Sn صادق نباشد.

شما ممکن است بگویید:«خوب، واضح است که سوپرمم Λ یا ۱ است یا ۳» ، ولی اگر شما واقعا بتوانید بگویید کدامیک از این دو حالت روی می‌دهد، که دیگر بحثی با شهودگرایان نخواهید داشت، چرا که دراین‌صورت حدس گلدباخ اثبات یا ابطال شده است! توجه کنید، این که عددی با خواص معین، در صورت وجود، باید مساوی با یکی از دو عدد داده شده باشد، متفاوت با این است که آن عدد واقعاً وجود دارد.

۲) ارقام بعد از ممیز در بسط اعشاری $\pi = ۳/۱۴۱۵۹...$ را به گروه‌های نه رقمی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$a_n = \begin{cases} \sum_{k=۱}^{n} \dfrac{۱}{۲^k} & \text{اگر برای هر } k \le n\text{، گروه ردیف } k\text{ام ۱۲۳٤٥٦٧٨٩ باشد} \\ -۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و نیز $a = \{a_n\}$. ما نمی‌دانیم $a \ge ۰$ یا $a < ۰$.

۳) می‌دانیم عدد تام، عددی است که با مجموع مقسوم علیه‌های سره‌اش برابر است، مثلاً $۳+۲+۱=۶$ تام است. مسأله «عدد تام» این است: «آیا عدد فرد تامی وجود دارد یا خیر؟»

دنباله $\{\alpha_k\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{اگر هیچ عدد تام فردی کوچکتر از } k \text{ وجود نداشته باشد} \\ \dfrac{1}{2^k} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قرار دهید $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ ، به وضوح $\alpha \geq 0$. اگر $\alpha = 0$ آنگاه برای هر k نتیجه می‌شود، $\alpha_k = 0$؛ یعنی هر عدد تامی زوج است و اگر $\alpha > 0$، نتیجه می‌شود که عدد تام فردی در دست داریم. پس اصل تثلیث که بیان می‌کند به‌ازای هر α، یکی و فقط یکی از سه رابطهٔ $\alpha > 0$، $\alpha < 0$ و $\alpha = 0$ برقرار است، ساختنی نیست. در واقع اصل تثلیث وجود جوابی را برای مسألهٔ عدد تام فرد ایجاب می‌کند.

همچنین تابع f که در ریاضیات کلاسیک روی تمام بازه $[0,1]$ به صورت $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ تعریف می‌شود، ابهامات ساختنی دارد. در واقع در بالا دیدیم که هیچ روش متناهی کلی برای تصمیم در مورد این‌که عدد حقیقی مشخصی از $[0,1]$، صفر یا مثبت است وجود ندارد. پس هیچ روش متناهی برای تصمیم در مورد این که تابع f چه مقداری را به نقطهٔ داده شده x نسبت می‌دهد وجود ندارد. نتیجه مطلب اخیر این است که در ریاضیات شهودگرا حوزهٔ تعریف این تابع تمام $[0,1]$ نیست.

۴) فرض کنید a یک عدد حقیقی در $(-1,1)$ باشد که نمی‌دانیم $a \geq 0$ یا $a \leq 0$.

تابع $f(x) = \min\{x-1,0\} + \max\{0, x-2\} + a$ روی $[0,3]$ پیوسته است. $f(0) < 0$ و $f(3) > 0$. اگر به‌ازای xی در $[0,3]$، $f(x) = 0$، آن‌گاه $x > 1$ یا $x < 2$ و لذا $a \geq 0$ یا $a \leq 0$. پس نمی‌توانیم xی بیابیم که $f(x) = 0$.

آرند هایتینگ

لازم به ذکر است که افلاطون‌گرایان و صورت‌گرایان از نظر اعتقاد به وجود اشیاء ریاضی در نقطه مقابل یکدیگرند ولی در مبانی استدلال متوافق هستند و شهودگرایان در نقطه مقابل هر دو هستند.

اولین کسی که منطق شهودگرایانه را صوری ساخت *آرند هایتینگ* بود که در سال ۱۹۳۰ این کار را انجام داد. در این منطق

رابط‌های $\wedge$ و $\vee$ و $\neg$ و $\Rightarrow$ و سورهای $\exists$ و $\forall$ به طور مستقل تعریف می‌شود:

$\neg p$ درست است اگر و فقط اگر فرض درستی p به تناقض منجر شود.

$p \wedge q$ درست است اگر و فقط اگر بتوانیم درستی p و درستی q را به طور ساختنی ثابت کنیم.

$p \vee q$ درست است اگر و فقط اگر بتوانیم درستی p یا درستی q را به طور ساختنی ثابت کنیم.

$p \Rightarrow q$ درست است اگر و فقط اگر بتوانیم ساختمانی متشکل از یک روش ارائه دهیم به‌طوری‌که هر اثبات ساختنی از p را به یک اثبات ساختنی از q تبدیل کند.

همچنین چنانچه S یک محمول یک متغیره با دامنه متغیر A باشد:

$\forall x;\mathrm{S}x$ درست است اگر و فقط اگر بتوانیم یک روش ساختنی کلی ارائه دهیم به‌طوری‌که هر اثبات ساختنی برای $a \in \mathrm{A}$ را به اثباتی ساختنی برای $\mathrm{S}a$ تبدیل کند.

$\exists x;\mathrm{S}x$ درست است اگر و فقط اگر بتوانیم یک عنصر $a \in \mathrm{A}$ بسازیم به‌طوری‌که $\mathrm{S}a$ به طور ساختنی قابل اثبات باشد.

در جدول زیر بعضی از قضایای منطق شهودگرایانه و نیز فرمول‌هایی که قضیه نیستند، آمده است:

بعضی فرمولهایی که در منطق هایتینگ قضیه نیست	بعضی فرمولهایی که در منطق هایتینگ قضیه است
$\neg\neg p \Rightarrow p$	(*) $p \Rightarrow \neg\neg p$
$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(**) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
$p \vee \neg p$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$
$\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$
$\neg(\forall x;\neg \mathrm{S}x) \Rightarrow \exists x;\mathrm{S}x$	$\exists x;\mathrm{S}x \Rightarrow \neg(\forall x;\neg \mathrm{S}x)$
$\neg(\forall x;\mathrm{S}x) \Rightarrow \exists x;\neg \mathrm{S}x$	$\exists x;\neg \mathrm{S}x \Rightarrow \neg(\forall x;\mathrm{S}x)$

توجه داریم که در این منطق $\neg p$ معادل $\neg\neg\neg p$ است زیرا بنا به (*) $\neg p \Rightarrow \neg\neg\neg p$، از طرفی بنا به (**)، از $p \Rightarrow \neg\neg p$ نتیجه می‌شود که $\neg\neg\neg p \Rightarrow \neg p$. همچنین علی‌رغم آن‌که استنتاج $\forall x;(\varphi x \vee \psi x)$ از $\exists x;\varphi x \vee \forall x;\psi x$ در منطق کلاسیک

معتبر است، در منطق شهودگرایانه معتبر نیست. مثلاً می‌دانیم «به ازای هر دستهٔ ده‌تایی از ارقام متوالی بسط اعشاری π، آن دسته متشکل از ده صفر متوالی است یا نیست». اما این مطلب یک برهان ساختنی برای این ادعا که « ده صفر متوالی در بسط اعشاری π وجود دارد یا هیچ دسته ده‌تایی از ارقام متوالی این بسط از دقیقاً ده صفر تشکیل نشده است» به دست نمی‌دهد. در واقع محتوای ساختنی $\exists x; \varphi x \vee \forall x; \psi x$ از $\forall x; (\varphi x \vee \psi x)$ بیشتر است.

خواص منطق شهودگرایانه بعدها توسط *کولموگورف*، *گنتسن* و *گودل* کشف شد و *کریپکی* نوعی *معناشناسی برای منطق شهودگرایانه ابداع کرد.*

انتقاداتی به این مکتب وارد است: شهود اعداد طبیعی واقعاً جهانی نیست. تحقیقات *پیاژه* نشان داده است که کودکان بر اساس تجربیات و روش خاصی از تفکر، اعداد طبیعی را در ذهن خود می‌سازند. به زعم *پیاژه* بر خلاف نظر *کرونکر* که گفت:«خداوند اعداد طبیعی را آفرید بقیه کار انسان است»، اعداد طبیعی را خداوند به ما نداده است (حداقل نه قبل از هفت سالگی برای اکثر بچه‌ها در فرهنگ غرب)، بلکه از طریق تناسب و هماهنگی مفاهیم جزئیت و ترتیب در ذهن فرد ساخته می‌شوند. مسألهٔ بعدی این است که بعضی اثبات‌ها در ریاضیات کلاسیک ظریف، هوشمندانه و کوتاه هستند ولی ساختنی نیستند، پس شهودگرایان آن‌ها را قبول ندارند و به جایش، آن‌هم در صورت امکان، یک برهان ساختنی که عموماً طولانی‌تر است ارائه می‌کنند. همچنین بعضی احکام ریاضیات شهودگرایان در ریاضیات کلاسیک معتبر نیستند، مثلاً این که «هر تابع حقیقی مقدار که روی تمام خط حقیقی تعریف شود، پیوسته است».

فصل پنجم

انسان‌گرایی

در فروشگاهی که من خرید می‌کنم، یک قوطی کنسرو ماهی به قیمت ۱۰۰۰ تومان و دو قوطی معادل با ۱۹۰۰ تومان فروخته می‌شود. شما ممکن است بگویید که قیمت «واقعی» دو قوطی برابر ۲۰۰۰ تومان است و فروشنده قیمت «واقعی» را از شما مطالبه نکرده است. من می‌گویم که قیمت «واقعی» چیزی است که فروشنده طلب می‌کند و اگر او تشخیص می‌دهد که جمع ساده به طور مناسبی با حرفهٔ او جور در نمی‌آید، آنگاه بی‌هیچ تردیدی آن‌را تغییر می‌دهد.

اخیراً در برابر مکاتب فلسفی سنتی، اندیشه‌ای شکل گرفته است که سعی دارد ریاضیات را از قالب یک دانش ایستا، کامل، بدون تغییر، و به طور مطلق صحیح یا به اصطلاح عامیانه «حق محض»، بیرون آورد و تصویری متفاوت و حتی متضاد از ریاضیات را به عنوان یک پدیده انسانی و اجتماعی- تاریخی- فرهنگی نشان دهد. در واقع جنبشی ایجاد شده است که *ویتگنشتاین* و*لاکاتوش* به شروع آن کمک کردند و در سال‌های اخیر، *جورج پولیا*، *فیلیپ دیویس*، *پاول ارنست*، *روبن هرش*، *پنلوپ‌مدی*، *جیان کارلوروتا*، *توماس تیموچکو*، و *هائووانگ* در آن سهیم بوده‌اند.

این جریان که از آن به فلسفه خطاگرای ریاضیات یاد می‌کنند ریاضیات را به عنوان نتیجهٔ فرآیندهای اجتماعی در نظر می‌گیرد و دانش ریاضی را تا ابد هم در برهان‌ها و هم در مفاهیمش

قابل تجدیدنظر می‌داند و برخلاف جریان‌های کلاسیک که نقش تاریخ ریاضیات را به کلی در بررسی ماهیت آن نادیده می گیرد، ریاضیات را حاصل فرهنگ بشری می‌داند که در طول تاریخ رشد کرده است. در این دیدگاه، ریاضیات از ساختارهای زیادی تشکیل شده‌است که در اصطکاک با یکدیگرند و در طول تاریخ رشد می کنند، از بین می‌روند و سپس از نو می‌رویند مانند درختها در یک جنگل (استین۱۹۸۸) و بدین گونه این عقیده را که یک ساختار ثابت و واحد که به طور ابدی به عنوان یک سلسله مراتب منطقی با نام ریاضیات بر ما تحمیل شده است را رد می کند .

یکی از شریان‌های اصلی فلسفه خطاگرای ریاضیات، انسان گرایی است که به عنوان یک مکتب در فلسفهٔ ریاضیات توسط «*روبن هرش*» در اوایل دهه ۱۹۸۰ معرفی شد. در انسان گرایی، ریاضیات به عنوان یک عملکرد انسانی، یک پدیدهٔ اجتماعی، بخشی از فرهنگ بشری که با تاریخ انسانی شکل گرفته و تنها در یک زمینهٔ اجتماعی قابل درک است، در نظر گرفته می‌شود و بدین گونه، هرش در مقابل عالم مُثُل افلاطونی، جهانی از طرح‌ها و اندیشه‌ها را در نظر می گیرد که به وسیلهٔ افراد بشر خلق شده و در ادراک مشترک آن‌ها وجود دارد و از آن با عنوان واقعیتی تاریخی- فرهنگی- اجتماعی، یاد می کند. بنابراین از دیدگاه انسان گرایی، ریاضیات بدون انسان‌ها، وجود ندارد.

از نظر هرش، هستی و وجود اشیاء ریاضی نه از ماهیت بیرونی همچون صخره یا روح برخوردار است و نه از ماهیت درونی مثل اندیشه‌های ذهنی. در واقع هرش با رد این دو ماهیت که بحث‌های متداول در هستی‌شناسی ریاضی را به خود اختصاص داده‌اند، نوع سومی را برمی گزیند که بیشتر مورد بحث علومی چون انسان‌شناسی و جامعه شناسی‌اند. او می گوید ما بر اساس یک تربیت یا عادت، جهان را متشکل از ماده و ذهن می‌انگاریم. اما این رده‌ها ناکافی‌اند، دقیقاً چنان که چهار عنصر (یونان باستان) یعنی خاک، آب، آتش و هوا برای فیزیک جدید ناکافی است. *ما نباید از سروته ریاضیات خود بزنیم تا متناسب با فلسفهٔ حقیر ما شود، بلکه باید فلسفهٔ خود را وسعت دهیم تا تجارب ریاضی گسترده ما را دربرگیرد.* هرش معتقد است که اشیاء ریاضی، موجوداتی اجتماعی‌اند و هستی و وجود آن‌ها به عنوان یک پدیدهٔ اجتماعی از این نوع سوم است.

ریاضیات می تواند همچون علوم تجربی در نظر گرفته شود که با خطاها و اشتباه ها بوجود آمده و با تصحیح و بازسازی آنها پیشرفت می کند. ریاضیات یک علم صددرصد درست

نیست ولی برخلاف علوم تجربی و سایر حوزه‌های معرفت بشری، دانشی عاری از تناقض است. هیچ گاه در ریاضیات نظریه‌ای را نمی‌یابیم که نقض‌کنندهٔ نظریه‌ای دیگر باشد. هندسهٔ اقلیدسی هنوز هم برقرار است (البته در سطح محدود زمینی) در حالی که فیزیک ارسطویی مدت‌ها پیش از بین رفته است. آیا این ناشی از قطعیت و واقعیت بی‌چون و چرای ریاضیات است و یا تنها در تلاش افرادی توجیه می‌شود که سعی کرده‌اند دانشی عاری از تناقض را شکل دهند. این پاسخ بیانگر دیدگاهی است که انسان‌گرایی از آن دفاع می‌کند.

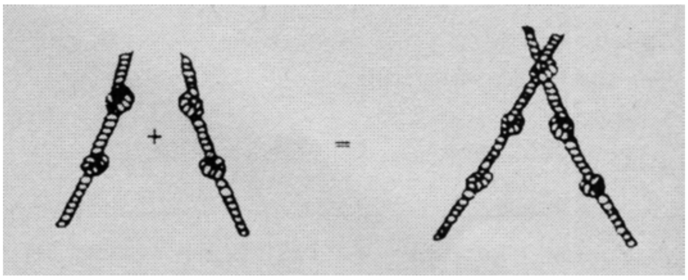
از دیدگاه انسان‌گرایی، ریاضیات واقعیتی مطلق و بی‌تردید نیست که برجامعهٔ بشری تحمیل شده باشد، بلکه ما ساختارهای ریاضی خود را بر جهان تحمیل می‌کنیم و جنبه‌های مختلف فیزیکی و اجتماعی دنیای خود را وادار می‌کنیم تا در قالب این الگوها به عنوان بهترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم، قرارگیرند. ولی چگونه است که ریاضیات تا این اندازه، کاربردپذیر است و قضایای محض ریاضی که مدت‌ها پیش ایجاد شده‌اند، امروزه در توجیه پدیده‌های اطراف ما بکار می‌آیند. هرش می‌گوید:

«ریاضیات بخشی از فرهنگ و تاریخ بشری است که از ماهیت فیزیولوژیک ما و محیط‌های بیولوژیکی و فیزیکی ما سرچشمه گرفته‌اند. طرح‌های ریاضی در کل به همان دلیلی با جهان ما تطبیق می‌یابند که ریه‌های ما با اتمسفر جو زمین تطبیق می‌کند.»

ریاضیات انسان‌گرایانه در تعاملات درونی یک جامعه شکل می‌گیرد و ریشه در فرهنگ و تاریخ آن جامعه دارد. این جامعه می‌تواند جمع دو نفری من و شما و یا جامعهٔ بزرگ بشری باشد. براساس تحقیقات باستان‌شناسی، زبان‌شناسی، ژنتیک و نژادشناسی، شمردن و حرف‌زدن، هر دو آغازینه‌های بشری انگاشته شده‌اند. ریاضیات نیز همچون زبان یک محصول فرهنگی است. وقتی بشر به زندگی اجتماعی روی آورد، نیاز او به ارتباط با همنوعانش، قراردادهای زبانی را به وجود آورد و ریاضیات نیز در درون همین اجتماع‌های نوپای انسانی و در ارتباط با نیازهایی که اینک زندگی جمعی در پیش پای بشر قرار داده بود و همچنین نیاز او به غلبه بر محیط پیرامونش شکل گرفت قوانین ریاضی صرفاً قراردادهای اجتماعی‌اند که در درون آن جامعه، معنی می‌یابند و به قول ویتگنشتاین، مسأله صدق و کذب یک قضیهٔ ریاضی در جایی که آن مسأله مطرح می‌شود، قابل بررسی است. معمولاً قوانین معمولی حساب اعداد در جامعهٔ فروشندگان صدق نمی‌کند.

تخفیفهایی که بنا به ضرورتهای شغلی آن‌ها صورت می‌گیرد، قوانین جمع را به گونه‌ای دیگر جلوه می‌دهد.

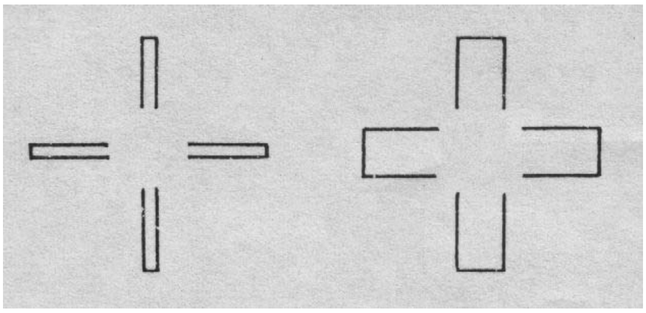
شاید تعجب کنید اگر بدانید که در گذشته‌های دور اقوامی بودند که برای آنها ۲+۲ برابر با ۵ بود. زیرا آن‌ها برای جمع‌کردن اعداد با یکدیگر این اعداد را به صورت گره‌هایی بر روی طناب نشان می‌دادند و سپس طناب‌ها را به هم گره می‌زدند. در واقع ریاضیات با روشهایی که از درون جامعه بوجود می‌آید، شکل می‌گیرد و متأثر از شرایط فیزیکی، زیستی و فرهنگی حاکم بر آن جامعه است.



ریاضیات انسان‌گرایانه، تلاش می‌کند تا قوانین ساختاری خود را منطبق بر شرایط فیزیکی، زیستی و فرهنگی موجود قرار دهد. در ریاضیات انسان‌گرایانه، در الگوی ساختاری جمع اعداد، همیشه ۲+۲ برابر با ۴ نیست. گاهی اوقات، این الگوی ساختاری ممکن است وقتی که یک فنجان شیر را به یک فنجان ذرت بو داده اضافه می‌کنیم، به کار رود که در این صورت، طبق شرایط، دیگر ۱+۱ برابر با ۲ نیست. چرا که ذرت‌ها، شیر را در خود جذب می‌کنند و حاصل نه دو لیوان بلکه کمتر از دو لیوان است. این الگو ممکن است در زیست‌شناسی به کار برده شود، در آن‌جا شاید ۲+۲ بیشتر شبیه ۶ باشد تا ۴. همچنین با محاسبات معمولی نمی‌توان قیمت یک تریلیون بشکه نفت را با دانستن قیمت یک بیلیون بشکه نفت حساب کرد چرا که الگوی جمع در اینجا در مورد ذخیره‌ای بکار می‌رود که در حال کاهش است و قیمت‌ها متناسب با تقاضا بالا می‌رود و ثابت نمی‌ماند.

دیدگاه انسان‌گرایی در فلسفه ریاضیات تلاش می‌کند تا با قراردادن ریاضیات به عنوان یک محصول فرهنگی که حاصل تعاملات زندگی بشر از گذشته تا حال بوده است ریاضیات

جهانی را همچون یک زبان جهانی مثل زبان انگلیسی، جلوه دهد که در یک توافق سطح بالای اجتماعی در میان انسان‌ها صورت گرفته و توانسته است نقش خود را در پیشرفت جامعه بشری به خوبی ایفا کند ولی این نقش در جامعه ما زمانی آشکارتر می‌شود که بتوانیم ریاضیاتی متناسب با نیازهای جامعه خود داشته باشیم، ریاضیاتی که بتوان آن را همچون گویش‌های محلی در برابر زبان جهانی توصیف کرد.

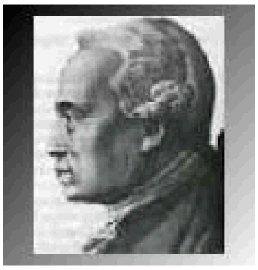


بدون شرح!

فصل ششم

دیدگاه کانت نسبت به ریاضیات

ایمانوئل کانت در اثرش به نام «نقد عقل محض» احکام (یا گزاره‌ها، یعنی جملات خبری که یا راست هستند یا دروغ ، هر چند ما ندانیم که راست هستند یا دروغ) را به دو دستهٔ تحلیلی و ترکیبی تقسیم می‌کند. وی می‌گوید حکمی تحلیلی است که صدق یا کذب آن تنها با تحلیل واژه‌های (منطقی) در آن مشخص گردد مانند«گربهٔ سیاه، سیاه است»،«هر دایره‌ای شکل است» و... . همچنین می‌توان گفت، حکمی که در آن مفهومی تجزیه می‌شود و از آن مفهومی دیگر که بالذات جزء آن است استخراج می‌شود (یا به عبارت دیگر حکمی که در آن محمول بخشی از موضوع باشد) تحلیلی است. از این رو احکام تحلیلی صادق، از مضمون عینی تهی هستند و چیزی جز آن‌چه برای درک حکم ضرورت دارد به ما نمی‌گویند و بنابراین غیرآموزنده‌اند. بعدها فیلسوفان تعریف جامع‌تری برای حقیقت تحلیلی عرضه‌کردند، به این ترتیب که گفتند، حکم صادق (حقیقت) تحلیلی آن است که نفی آن تناقض (یعنی حکمی‌با قالب $p \wedge \neg p$) باشد. کانت حکمی را که تحلیلی نباشد، ترکیبی (یا تألیفی) خواند به عبارت دیگر حکم ترکیبی آن است که تفکر راجع به مفاهیم مذکور در حکم و روابط این مفاهیم با هم برای تعیین درستی یا نادرستی آن کافی نیست. این احکام می‌توانند درست یا نادرست باشند و صدق یا کذب آنها از طریق شهود، تجربه یا هر دو حاصل



ایمانوئل کانت

می‌شوند. مانند «آقا محمدخان قاجار مؤسس سلسله قاجار بود.»، «برف سفید است» و از این قبیل. رده‌بندی دیگری نیز برای احکام توسط کانت ارائه شد. وی احکام را به دو دسته پیشینی یا ماتقدم و پسینی یا ماتأخر تقسیم نمود. حکم پیشینی آن است که صدق یا کذب آن نیاز به تحقیق تجربی قراین محسوس ندارد مانند «همه عموها، مذکرند»، «مولکول اکسیژن دو اتمی‌است یا دو اتمی‌نیست» و از این قبیل. توجه کنید که تحلیلی بودن به ساختار حکم وابسته است در حالی که پیشینی بودن به روش شناخت. حکم پسینی آن است که صدق یا کذب آن موکول به تجربه وقوانین تجربی است مانند «آب خالص در سطح دریا در صد درجه سانتیگراد می‌جوشد»، « هر انسان یکدستی، کور است»و از این قبیل. مرز مشخصی بین تحلیلی بودن و ترکیبی بودن وجود ندارد. مثلاً وقتی می گوییم « همه کلاغ‌ها سیاه هستند»، معلوم نیست که سیاه بودن واقعاً جزء مشخصه‌های کلاغ است و لذا حیوانی که سیاه نباشد، بنابه تعریف، کلاغ نیست؛ چرا که در تعریف کلاغ، سیاه بودن نیامده است و حتی در یک تحقیق تجربی (مثلاً در جنگل‌های آمازون) ممکن است کلاغی یافت شود که سیاه نباشد. وضعیت مشابهی در مورد پیشینی و پسینی بودن وجود دارد و لذا در اینجا مسأله زبان و مشکلات آن مطرح می‌شود.

بنا به تعریف، حقایق تحلیلی پسینی وجود ندارد. در مورد حقایق تحلیلی پیشینی و ترکیبی پسینی نیز مشکلی وجود ندارد. اما آیا حقیقت ترکیبی پیشینی وجود دارد؟

	پیشینی	پسینی
تحلیلی	+	–
ترکیبی	؟	+

خردگرایان که معتقدند معرفت با حکم قاطع ذهن انسان به دست می‌آید، حقیقت ترکیبی پیشینی را ممکن می‌دانند، در حالی که تجربه‌گرایان که معرفت انسانی را زاییدهٔ حواس می‌دانند قائل به هیچ حقیقت ترکیبی پیشینی نیستند. کانت مدعی بود که قضایای ریاضی نمونه‌ای از احکام ترکیبی پیشینی هستند، ترکیبی هستند چون علاوه بر معانی نمادهایی که در آن‌ها به کار رفته است، اطلاعات دیگری نیز عرضه می کنند و مانند حقایق منطقی توخالی نیستند، و پیشینی

هستند زیرا از ضرورت و کلیتی برخوردارند که احکام پسینی (که عموماً تعمیم‌های تجربی ناشی از حدسی استقرایی هستند) فاقد آنند.

به زعم کانت این‌که بعضی حقایق هم ترکیبی هستند و هم پیشینی به ساختار ذهن بشر مربوط است. ساختمان ذهن ما چنان است که داده‌های عالم خارج را در قالب‌های خاصی می‌ریزد که عبارتند از «صور شهود» یعنی زمان و مکان، و «صور فاهمه» مانند علیت وجوهر.

وقتی کسی عینکی قرمز به چشم زده باشد، همه چیز را به رنگ قرمز (کم‌رنگ یا پررنگ) می‌بیند ولی امکان برداشتن عینک را دارد. ذهن ما مانند چشم است ولی ما نمی‌توانیم عینک قرمز خود را از شائبه صور خلاص کنیم، در واقع ذهن بر چگونگی درک ما از جهان اثر می‌گذارد. به زعم کانت ما نمی‌توانیم با قطعیت بدانیم جهان «در نفس خود» (نومن) چگونه است بلکه فقط می‌توانیم نمود آن (فنومن) را، یعنی آن‌چنان‌که نومن خود را به ما می‌نماید، بشناسیم. وی دو عنصر را در شناخت ما از جهان معرفی کرد، یکی ماده شناخت که همان ادراکات حسی است و دیگری صورت شناخت که قالب‌هایی را که ماده شناخت در آن می‌ریزد به دست می‌دهد.

به عقیده کانت صحت احکام ترکیبی پیشینی به وسیله شهود حاصل می‌شود. او می‌گوید حساب بر شهود ما از زمان و هندسه بر شهود ما از فضا مبتنی است. عدد استعداد فکر است برای شمردن مکرر در مکرر و اشیا هندسی استعداد فکرند در ساختن اشکال فضایی در مخلیه. قضایای (اساسی) در ریاضی ترکیبی پیشینی هستند و ذهن با وضع آن‌ها فقط در کار داخلی خود بصیرت می‌یابد نه در یک حقیقت جزمی خارج از ذهن.

آیر در کتاب زبان، حقیقت و منطق می‌گوید که همهٔ حقایق ریاضی، تحلیلی پیشنی یعنی همان‌گویی می‌باشند، مثلاً اصول یک هندسه (اقلیدسی یا نااقلیدسی) صرفاً تعریف، و قضایای آن صرفاً نتایج منطقی این تعاریف هستند. وی بر خلاف کانت که حقیقت «۱۲ = ۵ + ۷» را ترکیبی می‌دانست، صدق حکم ۱۲ = ۵ + ۷ را صرفاً به این مربوط می‌داند که ۵ + ۷ نام دیگر (مترادف) ۱۲ است.

فصل هفتم

معرفی دستگاه تسرملو- فرانکل (ZF)


ارنست تسرملو

اولین دستگاه اصل موضوعی برای نظریهٔ مجموعه‌ها توسط *تسرملو* در ۱۹۰۸ وضع شد. تمام اشیاء این نظریه به طور شهودی «مجموعه» تصور می‌شوند درحالی که در نظریه‌های جدید، اشیاء «رده» هستند و مجموعه عبارت از رده‌ای است که متعلق به ردهٔ دیگر است. در ۱۹۲۲ *فرانکل* دریافت که دستگاه *تسرملو* به عنوان زیربنای کل ریاضیات ضعف دارد و یک سال بعد *اسکولم* با وضع اصل موضوعی جایگزین، مشکل را حل نمود و به این ترتیب دستگاه قدرت‌مند نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو- فرانکل یا به طور مختصر ZF تأسیس شد.

برای معرفی ZF به یک زبان مرتبه اول L احتیاج داریم. این زبان شامل موارد زیر است:


آبراهام فرانکل

الف) حروف محمولی E «متعلق بودن» و I «همانی بودن» و احیاناً تعدادی حرف محمولی دیگر.

ب) متغیرهای فردی x و y و... .

ج) ثابت‌های فردی برای نمایش مجموعه‌های معین.

د) نمادهای سجاوندی (،)و... .

ه) رابط‌های $\neg$، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$.

و) سورهای $\forall$ و $\exists$.

جملات خوش ساخت یا فرمول‌ها با نماد A، B، ... به کمک دو فرمول بسیط $\mathrm{E}ab$ («a متعلق به b است») و $\mathrm{I}ab$ («a همان b است») ساخته می‌شوند، که در آن‌ها a و b نمایش متغیرهای فردی یا ثابت‌های فردی هستند. بنا به منطق مزبور قوانین اصلی استنتاج عبارتند از:

الف) قیاس استثنایی، یعنی از A و $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ نتیجه می‌شود B، که در آن A و B فرمول‌های دلخواهی از L هستند.

ب) تعمیم، یعنی از A نتیجه می‌شود $\forall x; \mathrm{A}$ که در آن A یک فرمول و x یک متغیر فردی دلخواه است.

اینک علاوه بر اصول موضوع منطق مرتبه اول، از هشت اصل موضوع زیر کمک می‌گیریم:

(اصل گسترش) $\forall x \forall y(\mathrm{I}xy \Leftrightarrow \forall w(\mathrm{E}wx \Leftrightarrow \mathrm{E}wy))$

(اصل مجموعهٔ تهی) $\exists x(\neg \exists w \mathrm{E}wx)$

توجه کنید که بنابه اصل مجموعهٔ تهی و اصل گسترش فقط یک مجموعه تهی وجود دارد که آن را با ثابت فردی $\varnothing$ نمایش می‌دهند.

(اصل تزویج) $\forall x \forall y \exists w \forall u(\mathrm{E}uw \Leftrightarrow (\mathrm{I}ux \vee \mathrm{I}uy))$

(این w را با $\{x, y\}$ نمایش می‌دهند.)

(اصل اجتماع) $\forall x \exists w \forall z(\mathrm{E}zw \Leftrightarrow (\exists y(\mathrm{E}yx \wedge \mathrm{E}zy)))$

(اصل مجموعهٔ توانی) $\forall x \exists w \forall z(\mathrm{E}zw \Leftrightarrow (\forall y(\mathrm{E}yz \Rightarrow \mathrm{E}yx)))$

(اصل بی‌نهایت) $\exists x(\mathrm{E}\varnothing x \wedge (\forall y(\mathrm{E}yx \Rightarrow \mathrm{E}(y \cup \{y\})x)))$

(اصل انتظام) $\forall x(\neg \mathrm{I}x\varnothing \Rightarrow (\exists y \neg(\exists z(\mathrm{E}zy \wedge \mathrm{E}zx))))$

(اصل جایگزینی)

$$(\forall x \exists! y \mathrm{S}xy) \Rightarrow (\forall u \exists v \forall w(\mathrm{E}wv \Leftrightarrow (\exists t(\mathrm{E}tu \wedge \mathrm{S}tw))))$$

که در آن $\mathrm{S}xy$ یک محمول با دو متغیر و $\exists!$ سور وحدت وجود است.

یک نتیجهٔ اصل جایگزینی، قضیهٔ زیر موسوم به اصل تصریح است:

اگر a یک مجموعه و $\varphi(x)$ یک فرمول از L با متغیر x (و به معنای x خاصیت φ دارد) باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند b وجود دارد که متشکل از اعضایی از a است که خاصیت φ دارند.

اینک اگر a یک مجموعه باشد، بنا به اصل تزویج $\{a,a\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصل تصریح $\{x \in \{a,a\} | x = a\}$ ، یعنی $\{a\}$ یک مجموعه است. پس چون $\{a\} \neq \varnothing$ بنا به اصل انتظام $\exists b; b \cap \{a\} \neq \varnothing$. بنابراین $a \cap \{a\} = \varnothing$ پس $a \notin a$. به این ترتیب مجموعهٔ همه مجموعه‌ها وجود ندارد یا به قول *پ.ر.هالموس* «هیچ چیز شامل همه چیز نیست». پس معضلاتی همچون پارادوکس *کانتور* و (نیز با توجه به اصل تصریح) پارادوکس *راسل* مرتفع می‌گردند.

همچنین می‌توانیم اعداد نامنفی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\varnothing = \circ \text{ و } \{\varnothing\} = ۱ \text{ و } \{\varnothing,\{\varnothing\}\} = ۲ \text{ و } \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} = ۳ \text{ و } \ldots$$

در حالت کلی $n = \{\circ,۱,۲,\ldots,n-۱\}$. در واقع اصل بی‌نهایت وجود مجموعهٔ نامتناهی $N = \{\circ,1,2,\ldots\}$ را تضمین می‌کند.

در مرحلهٔ بعد، از N و به کمک رابطهٔ هم ارزی $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ روی $N \times N$ مجموعهٔ اعداد صحیح Z، و سپس به کمک رابطهٔ هم ارزی $(u,v) \sim (s,t) \Leftrightarrow ut = sv$ روی $\mathsf{Z} \times (\mathsf{Z} - \{\circ\})$ مجموعهٔ اعداد گویا Q و بالاخره به کمک برش‌های *ددکیند* یا معرفی دنباله‌های کوشی، R ساخته می‌شود.

دو اصل قابل توجه دیگر نیز وجود دارد:

۱. اصل انتخاب(AC) – به ازای هر مجموعه از مجموعه‌های ناتهی، مجموعه‌ای وجود دارد که با هر یک از آن مجموعه‌های ناتهی اشتراک تک عضوی دارد.

این اصل معادل بسیاری از احکام ریاضی مهم مانند لم *تسورن*، اصل خوش ترتیبی، قضیه وجود پایه برای فضاهای برداری، قضیه حاصل ضرب *تیخونوف*، قضیه وجود زیرگروه های *آبلی* بیشین، قضیه وجود و یکتایی بستار جبری میدان و نیز قضیه توسیع هان- باناخ است.

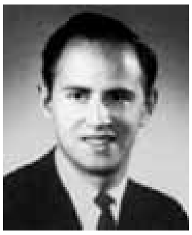
اصل انتخاب نتایج شگفت انگیزی دارد. یکی از آن‌ها قضیه‌ای از *استفان مازور* ، ارائه شده در ۱۹۱۴ است:

«به ازای هر عدد طبیعی $n > ۱$ ، مجموعه‌ای از نقاط صفحه وجود دارد به‌طوری که هر خط واقع در صفحه، مجموعه مزبور را دقیقاً در n نقطه قطع می‌کند.»

همچنین *استفان باناخ* و *آلفرد تارسکی* در سال ۱۹۲۴ نشان دادند که هر دو جسم کراندار A و B که هر یک شامل یک گوی باشند در یک تقسیم متناهی همنهشت هستند یعنی می‌توان

و B را به صورت اجتماع جدا از هم $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ و $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ نوشت به طوری که برای هر i، A_i همنهشت با B_i باشد. (به یاد آورید که دو جسم در R^3 همنهشت خوانده می‌شوند هرگاه بتوان یکی را با انتقال یا دوران بر دیگری منطبق کرد.)

۲. فرضیه پیوستار (CH) – هر زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه اعداد حقیقی یا با N یا با R در تناظر یک‌به‌یک است.



پال کوهن

گودل در سال ۱۹۳۶ نشان داد که ابطال AC و نیز CH در ZF غیر ممکن است. سی سال بعد *پال کوهن* ثابت کرد که اثبات AC و CH در ZF غیر ممکن است. همچنین *گودل* به کمک این قضیه که می‌گوید «یک دستگاه سازگار است اگر و فقط اگر دارای الگو باشد» نشان داد که اگر ZF سازگار باشد، دستگاه حاصل از افزودن AC یا CH (و حتی هر دو) به اصول موضوع آن نیز سازگار است.

ضمناً بیان مشابهی با $\neg AC$ و $\neg CH$ به جای AC و CH برقرار است. لذا می‌توان با آسودگی خاطر به جای ZF از $ZF+AC+CH$ استفاده کرد.

نقش $ZFC=ZF+AC$ در ریاضیات مانند نقش الکترون در الکترونیک و نقش سلول‌ها در بیولوژی است و حتی ادعا می‌شود که ZFC پایهٔ ۹۹٪ ریاضیات کنونی است، به خصوص با استفاده از ایده‌های *رنه دکارت* و *کارل وایرشتراس* می‌توان نشان داد که ZF شامل یک دستگاه «هم ارز» با هندسه مسطحه اقلیدسی است که توسط *آلفرد تارسکی* ارائه گردید. به این ترتیب به یکی از اهداف تحقیقات منطق نوین که ارائه یک نظریه صوری برای وحدت بخشیدن به کل ریاضیات است، نزدیک شده‌ایم. البته توجه کنید که پدیده ناتمامیت *گودل* در مورد ZFC صادق است. ما نمی‌دانیم ZFC سازگار است یا خیر، ولی قوام وقدرت آن گویای سازگاری این دستگاه وسیع است.

فصل هشتم

آشنایی با
هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی

ارسطو اولین کسی بود که پایه‌های روش علمی را بنا نهاد. اساس این شیوه بر تنظیم منطقی اطلاعات یک حوزه علم بر اساس مفاهیم اولیه، اصول، تعاریف و قضایا بود، همان چیزی که امروزه روش صوری خوانده می‌شود. ایده‌های روش‌شناسی ارسطو شدیداً بر کار اقلیدس در کتابش به نام «اصول» اثر گذاشت. *اقلیدس* در حدود سه قرن قبل از میلاد مسیح اولین نمونه دستگاه‌های اصل موضوعی را در هندسه ارائه داد. او ابتدا تعدادی مفهوم از جمله جزء، طول، عرض و... را به عنوان اصطلاحات اولیه برگزید و سپس به تعریف مفاهیم هندسی پرداخت. وی گفت که نقطه آن است که جزء ندارد، خط را طول بلا عرض نامید و... . سپس پنج گزاره زیر را به عنوان اصل موضوع انتخاب کرد:

۱- از هر نقطه به هر نقطه دیگر می‌توان خطی کشید.

۲- هر پاره خط را می‌توان به طور نامحدود امتداد داد.

۳- با هر مرکز و هر شعاعی می‌توان دایره رسم کرد.

۴- همه زوایای قائمه با هم برابرند.

۵- اگر خطی دو خط را قطع کند و مجموع زوایای داخلی در یک طرف کوچکتر از دو قائمه باشد آن‌گاه آن دو خط همدیگر را قطع می‌کنند، در صورتی که به قدر کافی در همان

طرفی که مجموع زوایا از دو قائمه کم‌تر است امتداد داده شوند (این اصل موسوم به اصل پنجم(اصل توازی) اقلیدس است که معادل بدیل ارائه شده توسط *پلی فیر* می‌باشد که از یک نقطه واقع در خارج یک خط، یک و فقط یک خط موازی آن رسم می‌شود).

اقلیدس سپس از روی این اصول ساده و به کمک پنج اصل متعارف:

الف)- دو چیز مساوی با یک چیز، با یکدیگر مساوی‌اند؛

ب)- کل از هر جزء خود بزرگ‌تر است؛

ج)- دو چیز منطبق بر هم، با یکدیگر برابرند؛

د)- حاصل جمع مقادیر متساوی با مقادیر متساوی، با یکدیگر مساوی‌اند؛

ه)- حاصل تفریق مقادیر متساوی از مقادیر متساوی، با یکدیگر مساوی‌اند.

که اصول منطقی تصور می‌شوند، به اثبات ۴۵۶ حکم هندسی که بعضی که از نظر شهودی بسیار پیچیده هستند پرداخت و اولین دستگاه قیاسی را در تاریخ تفکر به دست داد.

البته کار اقلیدس شامل ایرادهای اساسی بود. مثلاً بنا به اصل دوم«خط راست را می‌توان پیوسته ادامه داد» ، اما این نتیجه نمی‌داد که« خط نامتناهی است»، در حالی که اقلیدس خط را نامتناهی فرض کرده بود. یا در جایی دیگر تلویحاً از این فرض موسوم به اصل *پاش* استفاده کرده بود که« اگر خطی یکی از اضلاع مثلثی را ببرد، حداقل یکی از دو ضلع دیگر را قطع خواهد کرد»، بدون این‌که اصلی که وی را مجاز به استفاده از این فرض بکند ارائه دهد. او همچنین بدون این‌که مفهوم حرکت (و ویژگی‌های سطح) را بیان کند، از حرکت در انطباق‌های هندسی، مثلاً در اثبات حالت‌های مختلف تساوی دو مثلث، استفاده کرده بود. با این حال باید توجه داشت تلاش *اقلیدس* آرمانی کردن دیدگاه‌های شهودی عصر خود از نقطه فیزیکی، خط فیزیکی و... بود که تا حد زیادی موفقیت‌آمیز بود.

در اوایل قرن بیستم تعدادی از ریاضی‌دانان از جمله *داوید هیلبرت* و *آلفرد تارسکی* به اصلاح کار *اقلیدس* همت گماشتند. *هیلبرت* ضمن ارائه یک دستگاه اصل موضوعی برای هندسه تأکید کرد که به جای «نقطه، خط و صفحه» در هندسه می‌توان از «میز، صندلی و فنجان» استفاده کرد زیرا مفاهیم اولیه هیچ معنایی در خارج از دستگاه قیاسی ندارند.

در این‌جا طرحی از نظریهٔ صوری *آلفرد تارسکی* را برای هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی به دست می‌دهیم:

محمولات (مفاهیم) اولیه عبارتند از: P («نقطه»)، B («بین»)، D («فاصله»)، I («همانی»).


آلفرد تارسکی

فرمول‌های بسیط $\mathrm{P}x$، $\mathrm{B}xyz$، $\mathrm{D}xyuv$ و $\mathrm{I}xy$ به ترتیب به معنای «x یک نقطه است»، «y بین x و z قرار دارد»، «فاصلهٔ x تا y برابر فاصلهٔ u تا v است» و «x همان y است» می‌باشند. اشیاء دیگر هندسی از قبیل پاره‌خط‌ها، زوایا، مثلث‌ها، دوایر و ... به وسیلهٔ مفاهیم اولیه تعریف می‌شود. مثلاً دایره به مرکز x و شعاع uv متشکل از همه نقاط y است به‌طوری که $\mathrm{D}xyuv$ برقرار باشد.

در هندسه دو نقطه x و y یکی تصور می‌شوند هرگاه فاصله بین آن‌ها صفر باشد. *تارسکی* این مطلب را با اصل موضوع $\forall x \forall y \forall z(\mathrm{D}xyzz \Rightarrow \mathrm{I}xy)$ بیان کرد. یک اصل موضوع دیگر عبارت است از

$$\forall w \forall x \forall y \forall z((\mathrm{B}wxy \wedge \mathrm{B}wyz) \Rightarrow \mathrm{B}xyz)$$

که مبین این مطلب است که به ازای هر چهار نقطهٔ داده شده، اگر دومی بین اولی و سومی و سومی بین اولی و چهارمی باشد، آن‌گاه سومی بین دومی و چهارمی است.

یک اصل قابل توجه عبارت است از:

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v((\mathrm{D}xuxv \wedge \mathrm{D}yuyv \wedge \mathrm{D}zuzv \wedge \neg \mathrm{I}uv) \Rightarrow (\mathrm{B}xyz \vee \mathrm{B}xzy \vee \mathrm{B}yxz))$$

که می‌گوید هر سه نقطهٔ x، y و z هم فاصله با دو نقطه متمایز u و v باید بر یک استقامت باشند.

تارسکی روی‌هم‌رفته دوازده اصل موضوع به علاوه یک گردایه از اصول موضوع که پیوستگی خط را به دست می‌دهد، ارائه کرده است. وی همچنین نشان‌داد که دستگاه صوری‌اش تمام است یعنی به ازای هر گزاره هندسی، یا آن گزاره یا نقیضش قضیه دستگاه است. از طرفی قضیهٔ تمامیت *گودل* بیان می‌کند هر دستگاه اصل موضوعی تمام، و از جمله دستگاه هندسی *تارسکی*، تصمیم‌پذیر است. یعنی الگوریتمی وجود دارد که یک گزاره دلخواه از هندسه مسطحه اقلیدسی را به عنوان ورودی می‌پذیرد و خروجی «راست» یا «دروغ» را بر حسب این که گزاره، راست یا دروغ باشد به دست می‌دهد.

اصل پنجم اقلیدس، بر خلاف چهار اصل اول، به طریقی تجربی قابل تحقیق نبود و ایجاز و وضوح آن‌ها را نداشت. بنابراین عدهٔ زیادی از جمله *والیس*، *لژاندر*، *ساکری* و *لامبرت* سعی کردند آن‌را به کمک چهار اصل دیگر اثبات کنند. ولی در طول دو هزار سال این تلاش‌ها ناموفق

ماند، مثلاً *ماری لژاندر* چند بار کتاب اصول هندسه خود را چاپ کرد و در هر بار اثباتی از اصل توازی ارائه داد، ولی همهٔ اثبات‌هایش شامل استفاده از صورتی معادل از اصل توازی بود. حتی می‌گویند *عمر خیام* و *خواجه نصیرالدین طوسی* نیز برهانی «دوری» را برای اصل پنجم ارائه کردند. اما این شکست‌ها مقدمه یک پیروزی بود و منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی شد. این هندسه‌ها با کارهای *گاوس*، *لباچوفسکی*، *ریمان*، *فورکوش*، *یانوش بویویی* و ... تکوین یافتند. به علاوه با کمک الگوها نشان داده شد که این هندسه‌ها و هندسه اقلیدسی به یک اندازه سازگارند، یعنی اگر یکی سازگار باشد دیگری نیز سازگار است. به این ترتیب نظر *کانت* مبنی بر ترکیبی پیشینی بودن هندسه و ذاتی ساختار ذهن بودن آن (مطلبی که بیشتر گویای دانش روز و محدودیت‌های علمی دوران کانت است) رد گردید.

البته انتخاب یک دستگاه هندسی از نوع اقلیدسی یا نااقلیدسی به نوع کاربردها وابسته است، مثلاً *اینشتین* در نظریهٔ نسبیت عام از هندسهٔ *ریمانی* و در نظریه نسبیت خاص از هندسهٔ ساده‌تر فضا- زمان *مینکوفسکی* استفاده نمود.


هانری پوانکاره

پوانکاره می‌گوید :«اگر هندسه دانشی تجربی بود نمی‌توانست دانشی دقیق باشد و پیوسته دستخوش تجدید نظر می‌بود... بنابراین، اصول هندسی نه شهود ترکیبی هستند و نه حقایق تجربی، بلکه قرارداد هستند. تنها انتخاب ما از میان همهٔ قراردادهای ممکن به وسیله حقایق تجربی رهبری می‌شود، ولی انتخاب ما آزاد است و فقط به لزوم اجتناب از هرگونه تناقضی محدود می‌شود. بنابراین، این اصول هستند که می‌توانند دقیقاً درست باقی بمانند، حتی اگر قوانین تجربی که موجب پذیرفته شدن آن‌ها شده‌اند تقریبی باشند. به عبارت دیگر اصول موضوع هندسه تنها عبارتند از تعاریف در لباس مبدل. پس برای این پرسش که «آیا هندسه اقلیدسی درست است؟» چه باید اندیشید؟ پرسشی بی‌معنی است، درست مثل این‌که بپرسیم «آیا دستگاه متری درست است و اوزان ومقیاس‌های قدیم نادرست‌اند؟ آیا مختصات دکارتی درست و مختصات قطبی نادرست است؟» ... هیچ هندسه‌ای نمی‌تواند درست‌تر از هندسه‌ای دیگر باشد، تنها ممکن است مناسب‌تر باشد.»

متذکر می‌شویم که در هندسه بین اشیاء فیزیکی و اشیاء ریاضی تفاوت وجود دارد. خطی که بر صفحه کاغذ رسم می‌شود، یک خط فیزیکی است و نه خط ریاضی؛ خط ریاضی یک موجود ایده‌آلی است.

رادولف کارناپ می‌گوید که ما، بین هندسه فیزیکی و هندسه ریاضی تفاوت قائل می‌شویم. قضایای هندسه ریاضی تحلیلی پیشینی هستند، در حالی که اساس هندسه فیزیکی تجربه بوده و قضایای آن ترکیبی پسینی است.

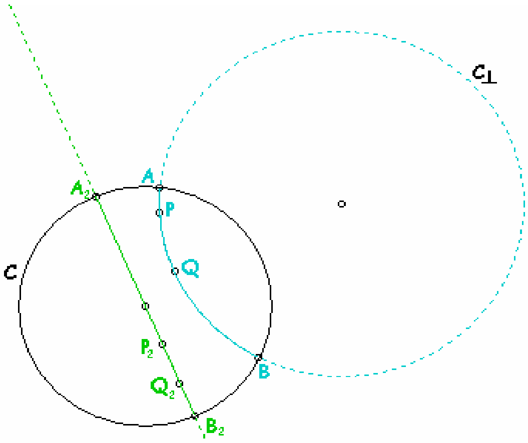
هانس رایشنباخ در کتاب خود با نام «فلسفه فضا-زمان» می‌گوید که ریاضیات متشکل از حقایق تحلیلی پیشینی است و صدق ترکیبی یک هندسه سؤالی تجربی است... ما دیگر نمی‌توانیم بگوییم که هندسه *اینشتین* «درست‌تر» از هندسه اقلیدسی است چنان‌که نمی‌توانیم بگوییم متر یک مقیاس «درست تر» از یارد است.

اکنون طرحی از یک الگو موسوم به الگوی *کلاین* با موجودات اقلیدسی برای اصل توازی بیضوی که می‌گوید خطوط موازی وجود ندارند ارائه می‌دهیم:

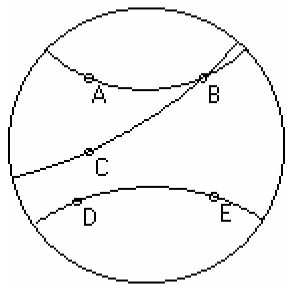
فرض کنید یک نقطه، یک جفت نقطه متقاطر از یک کره باشد (دو نقطه از یک کره را متقاطر می‌گویند، هرگاه دو سر یک قطر باشند) و یک خط، یک دایرهٔ عظیمهٔ آن کره باشد. دراین‌صورت خطوط موازی وجود ندارند ضمن آن که همه خطوط، درازای متناهی دارند.

و سرانجام اجازه دهید یک الگو موسوم به «قرص پوانکاره» برای هندسه هذلولوی و با موجودات اقلیدسی ارائه دهیم:

فرض کنید C یک دایره ثابت در صفحه اقلیدسی باشد. درون C را صفحه هذلولوی تصور می‌کنیم. یک نقطه هذلولوی را (که H- نقطه می‌نامیم) یک نقطه از درون دایره C و یک خط هذلولوی را (که H- خط می‌نامیم) فصل مشترک درون C با یک دایره عمود بر C یا فصل مشترک آن با یک قطر C تعبیر می‌کنیم. نسبت‌های «قرارداشتن» یک H- نقطه بر یک H- خط و «میان بودن» یک H- نقطه بین دو H- نقطه دیگر به معنای معمولی (اقلیدسی) آن است.



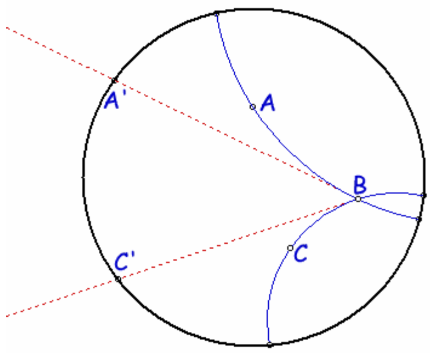
اینک H- خط DE و H- نقطه B را که بر آن قرار ندارد در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که تعداد نامتناهی H- خط از قبیل CB و AB وجود دارند که از B می‌گذرند و «موازی» DE هستند (به یاد آورید که دو خط را موازی گویند هرگاه نقطه مشترکی نداشته باشند). پس این حکم صادق در هندسه اقلیدسی که دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند، در هندسه هذلولوی صادق نیست.



همچنین فاصله هذلولوی دو نقطه P و Q توسط $d(P,Q)=\left|\ln\dfrac{|PA||QB|}{|QA||PB|}\right|$ داده می‌شود که در آن A و B دو سر H- خط مار بر P و Q و مثلاً $|ST|$ نمایش فاصله اقلیدسی دو نقطه T و S است (این تعریف فاصله همه خواص متعارف مفهوم فاصله را دارد). نکته جالب در این‌جا این است که اگر P ثابت باشد، می‌توانیم $d(P,Q)$ را هر قدر بخواهیم بزرگ کنیم مشروط

به این که Q به قدر کافی بر H- خط AB به B نزدیک شود. پس H-خطوط درازای نامتناهی دارند. همچنین توجه کنید که در این‌جا بر خلاف هندسه اقلیدسی، خطوط موازی، هم فاصله نیستند. ضمناً نور در این جهان (هذلولوی) و در خلأ، روی H- خطوط حرکت می‌کند.

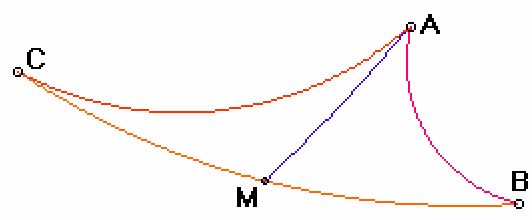
یک D- زاویه از برخورد دو H- خط حاصل می‌شود و اندازه آن برابر اندازه معمولی زاویه اقلیدسی بین مماس‌های اقلیدسی مرسوم بر دو H- خط مورد نظر در نقطه تقاطع آن‌ها تعریف می‌شود. پس در شکل زیر اندازه H- زاویه $\angle ABC$ برابر اندازه زاویه اقلیدسی $\angle A'BC'$ می‌باشد.



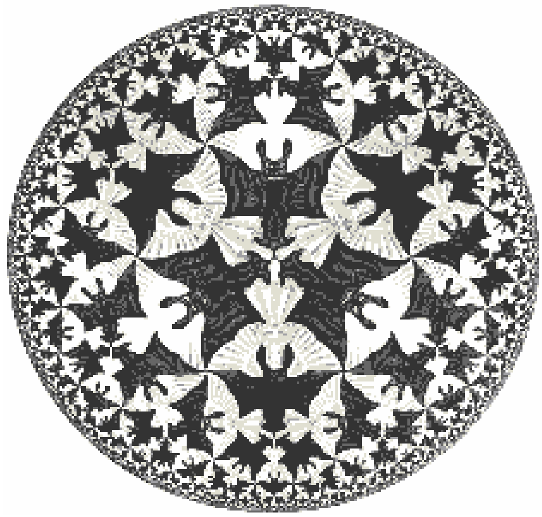
در این هندسه مجموع زوایای داخلی یک H- مثلث (که شکل حاصل از برخورد دو به دوی سه تا H- خط متمایز تعریف می‌شود) همواره کوچکتر از ۱۸۰° است. اگر s اختلاف مجموع زوایای یک مثلث از ۱۸۰° باشد، مشاهده می‌شود که هرقدر اضلاع مثلث کوچکتر باشد s کوچکتر خواهد بود لذا می‌توان گفت که یک تکه کوچک از فضای هذلولوی رفتاری مشابه فضای اقلیدسی دارد.

در شکل زیر

$$s(BAM) = ۷۷/۴^\circ \leq ۱۲۱/۱^\circ = s(ABC)$$



گراور زیر اثر *موریس اشر* یک جهان هذلولوی را به زیبایی نمایش می‌دهد.



فصل نهم

پارادوکس

آن‌چه تناقض‌آمیز، باورنکردنی یا خلاف انتظار و شهود ماست (آن‌چه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است) پارادوکس یا باطلنما خوانده می‌شود.

ممکن است فکر کنیم که پارادوکس‌ها ربطی به ریاضیات ندارند، یا این‌که «جزء ریاضیات» واقعی نیستند. ویا اساساً حقه و شعبده‌اند و به همین دلیل مفید نیستند، اما نه تنها چنین نیست بلکه عدهٔ زیادی آن‌ها را بخشی از ریاضیات به حساب می‌آورند که از نظر تاریخی در ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید تأثیر شگرف داشته اند. مثلاً پارادوکس‌های *زنون* در تکامل حسابان در قرن‌های ۱۷ تا ۱۹، پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها مانند پاراداوکس‌های *بورالی فورتی*، *کانتور* و *راسل* در تدقیق نظریهٔ (شهودی) مجموعه‌های *کانتور*، پارادوکس دروغگو در طرح برهان قضیهٔ ناتمامیت *گودل* در قرن بیستم (که می‌گوید «این جمله اثبات شدنی نیست» در درون یک دستگاه صوری به قدر کافی بزرگ اثبات شدنی نیست)، پارادوکس *بوچوفسکی* در درک نارسایی‌های زبان و پارادوکس لامپ *تامسون* و پارادوکس تیر *زنون* در طرح مشکلات مفاهیم نظری در فیزیک نقش به سزایی داشتند.

بعضی پارادوکس‌ها که متضمن تناقضند صادق به نظر می‌رسند و حتی این ایده را به ذهن نزدیک می‌کنند که چرا تناقض‌ها را نپذیریم. می‌دانیم در ریاضیات کلاسیک به استناد استنتاج معتبر از $B \Rightarrow (\neg A \wedge A)$، تناقض هر چیزی نتیجه می‌شود. اما چرا باید به این مطلب گردن نهاد؟ در واقع نوعی منطق به نام پیراسازگار وجود دارد که در آن تناقض پذیرفتنی است و بر خلاف ریاضیات کلاسیک، چنین نیست که از تناقض هر چیزی نتیجه شود.

ابزارهای متفاوتی برای رفع و رجوع پاراداوکس‌ها به کار گرفته‌شده‌اند. مثلاً *بوچفار* در ۱۹۳۸ از منطق‌های سه ارزشی برای تحلیل پارادوکس‌ها استفاده کرد. همچنین می‌توان از فرازبان برای تفکیک جملات به لایه‌های مختلفی با نام‌های نوع اول، نوع دوم و ... که روی آن‌ها درستی و نادرستی به طور مستقل تعیین می‌شوند استفاده کرد، کاری که مثلاً در مورد پارادوکس دروغگو که بیان می‌دارد «آن‌چه می‌گویم دروغ است» انجام شدنی است.

برای مثال *آلفرد تارسکی* با تقسیم زبان به دو لایهٔ زبان موضوعی که در مورد امور بیرون از زبان صحبت می‌کند و فرازبان که در مورد زبان موضوعی سخن می‌راند، استدلال می‌کند که وقتی می‌گوییم «آن‌چه می‌گویم دروغ است»، عبارت «دروغ است» که متعلق به فرازبان است در لایهٔ موضوعی به کار رفته است و لذا از نظر ساختار منطقی اشکال دارد.

با این حال، هربار که پارادوکسی در ریاضیات (وعلم) ظاهر می‌شود، برای حل آن باید فهم خود را از آن‌چه داریم بهبود بخشیم یا تصحیح کنیم یا قوانین زبان شناختی مناسب وضع کنیم و این دلیل، برای قراردادن پارادوکس‌ها در کالبد ریاضیات و جدی گرفتن آن‌ها کافی به نظر می‌رسد.

رده‌بندی پارادوکس‌ها

در این بخش به رده‌بندی و معرفی بعضی از معروف‌ترین پارادوکس‌ها (در ریاضیات) می‌پردازیم:

اولین پارادوکس‌های مورد مطالعه، پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها است که به علت وجود مجموعه‌های بسیار بزرگ مانند مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها به وجود می‌آیند. به خصوص این پارادوکس‌ها ضعف دیدگاه شهودی نظریهٔ مجموعه‌های کانتور را نشان می‌دهند. در نظریهٔ کانتور، مجموعه، یک گروه یا دسته از اشیاء معین است که هر شئ دلخواه، یا عضو آن مجموعه باشد یا

نباشد، به علاوه با هر خاصیت یک مجموعه مشخص می‌شود یعنی اگر ϕ یک محمول (یا خاصیت) باشد، دستهٔ همهٔ xهایی که برای آن‌ها $\phi(x)$ درست است، یک مجموعه به دست می‌دهد. البته دستگاه اصل موضوعی *تسرملو* و *فرانکل* که برای تنقیح نظریهٔ مجموعه‌ها وضع شد با این اصل که «هر مجموعهٔ ناتهی دارای عضوی است که اشتراکش با خود مجموعه تهی است» از ظهور این تناقض‌ها و نیز پارادوکس راسل جلوگیری می‌کند.

پارادوکس بورالی فورتی[1]

ریاضی‌دان ایتالیایی به نام *بورالی فورتی*، در ۱۸۹۷ اولین پارادوکس در نظریهٔ مجموعه‌ها را عرضه کرد. وی گفت اگر A مجموعهٔ همهٔ عددهای ترتیبی باشد آن‌گاه با ترتیب طبیعی‌اش خوش ترتیب بوده و لذا دارای عدد ترتیبی یکتایی مانند α است. α باید از هر یک از اعضای A و از جمله خود α اکیداً بزرگتر باشد که ممکن نیست.

پارادوکس کانتور[2]


جورج کانتور

فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها باشد، پس $P(A)=A$ لذا $Card(P(A))=Card(A)$ از طرفی بنابه قضیهٔ *کانتور* $Card(A)<Card(P(A))$ و این تناقض است (در اینجا $Card(B)$ نمایش عدد اصلی (یا به عبارت نادقیق تعداد اعضای) مجموعه B است).

بعضی پارادوکس‌ها خلاف شهود ما و باورنکردنی و در عین حال درست هستند مانند پارادوکس‌های باناخ- تارسکی و روز تولد:

پارادوکس باناخ- تارسکی[3]

باناخ و *تارسکی* در ۱۹۲۴ به کمک اصل انتخاب اثبات کردند که می‌توان با برش یک گوی (پرتقال) به شش قطعه، ایجاد حرکات صلب (یعنی دوران و انتقال) و دوباره چسباندن آن‌ها

۱- Boralli Forty's Paradox

۲- Cantor's Paradox

۳- Banach-Tarski Paradox

دو گوی (پرتقال) هم اندازهٔ اولی به دست آورد. (توجه کنید که قطعات مزبور اندازه‌پذیر لبگ نیستند زیرا در حرکات صلب، اندازه پایا است. ضمناً هیچ حکم مشابهی برای قرص مستدیر وجود ندارد.)

در ۱۹۴۴ *رِم رابینسون* تعداد قطعات را از شش به پنج تقلیل داد. همچنین در ۱۹۹۹ *فرانسیس ادوارد سو* از دانشگاه هاروارد نشان داد که اگر هر دو مجموعهٔ کراندار در صفحه داده شده باشند همواره می‌توان یکی را با تقسیم به پنج قسمت و سپس حرکت در صفحه بر دیگری منطبق کرد.

پارادوکس روز تولد[۴]

اگر ۲۳ نفر در یک سخنرانی شرکت کرده باشند، احتمال این‌که حداقل دو نفر روز تولدشان یکی باشد حدود ۵۰٪ است، اگر ۲۲ نفر شرکت کرده باشند این احتمال حدود ۰/۰۵ و اگر بیش از ۶۰ نفر حضور داشته باشند این عدد بزرگتر از ۹۹٪ است.

بعضی پارادوکس‌ها نتایج نادرست حاصل از استدلال نادرست هستند. مانند پارادوکس دار غیرمنتظره، پارادوکس آشیل و لاک‌پشت زنون (فیلسوف قرن پنجم اهل الیا در جنوب ایتالیا و شاگرد *پارامندیس*) و پارادوکس استقراء:

پارادوکس دار غیرمنتظره[۵]

به یک زندانی گفته می‌شود که او در یکی از روزهای بین شنبه و پنجشنبه به دار آویخته خواهد شد، اما تا روز به دار آویخته شدن، وی نخواهد دانست که کدام روز اعدام می‌شود.

او روز پنجشنبه به دار آویخته نمی‌شود، زیرا اگر او تا چهارشنبه زنده باشد می‌فهمد که اعدام در روز پنجشنبه صورت خواهد گرفت، اما به او گفته می‌شود که وی از روزی که به دار کشیده می‌شود پیشاپیش آگاه نیست. او روز چهارشنبه نیز اعدام نمی‌شود زیرا اگر تا سه شنبه زنده بماند، با توجه به این که بنا به استدلال بالا روز پنجشنبه اعدام نمی‌شود، می‌فهمد که روز چهارشنبه

۴- Birthday Paradox

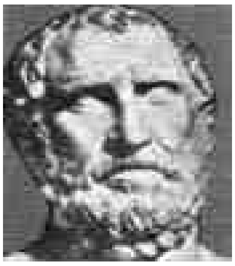
۵- Unexpected Hanging Paradox

اعدام انجام نخواهد شد. استدلال‌های مشابه نشان می‌دهد که او در هیچ یک از روزهای دیگر نیز نمی‌تواند اعدام شود.

اما در روزی غیر از پنجشنبه جلاد وارد می‌شود و وی را اعدام می‌کند.

پارادوکس آشیل و لاک‌پشت زنون[۶]

در مسابقه «دو» بین آشیل تندرو و لاک‌پشت کندرو، آشیل که کمی عقب‌تر از لاک‌پشت است، هیچ‌گاه به او نمی‌رسد. زیرا ابتدا باید به نقطه‌ای برسد که لاک‌پشت از آن‌جا حرکت کرده است. اما وقتی به آن‌جا می‌رسد لاک‌پشت قدری جلوتر رفته است و همان وضعیت قبل روی می‌دهد و با تکرار این روند، گرچه آشیل به لاک‌پشت نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به او نمی‌رسد.



زنون ایلیایی

پارادوکس حسن کچل[۷]

اگر حسن یک تار مو داشته باشد کچل است. اگر حسن n تار مو داشته باشد و کچل باشد، آن‌گاه اگر یک تار موی دیگر نیز روی سرش بروید (یا رویانده شود) یعنی دارای $n+1$ تار مو شود باز هم کچل است. پس بنا به استقرای ریاضی، حسن هر تعداد تار مو داشته باشد کچل است.

تعدادی از پارادوکس‌ها ناشی از تعریف‌های مبهم هستند مانند پارادوکس‌های توده، ریچارد، اژدها و تخته سیاه:

پارادوکس توده (کپه)[۸]

یک دانه گندم یک توده گندم نیست. با اضافه کردن یک دانه گندم، به دو دانه دست می‌یابیم که باز هم توده گندم نیست. با اضافه کردن یک دانه گندم دیگر، سه دانه خواهیم داشت

۶- Achilles and the Tortoise Paradox

۷- Induction Paradox

۸- Sorites Paradox

که توده محسوب نمی‌شود. اگر این عمل را تکرار کنیم، هیچ‌گاه به توده گندم نمی‌رسیم. اما زمانی که گردآیه گندم‌ها به قدر کافی بزرگ شود، توده نامیده می‌شود.

پارادوکس ریچارد[۹]

آیا «کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن‌را با کم‌تر از صد حرف تعریف کرد» وجود دارد؟ چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی و تعداد حروف زبان فارسی متناهی است پس عددی وجود دارد که نمی‌توان آن را با عبارتی شامل کم‌تر از صد حرف فارسی تعریف کرد. بنا به اصل خوش ترتیبی اعداد طبیعی، کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن‌را با کم‌تر از صد حرف فارسی تعریف کرد وجود دارد. اما عبارت بالا که بین دو نماد گیومه قرار دارد کم‌تر از صد حرف (یعنی پنجاه و سه حرف) دارد، یعنی عدد ارائه شده با کم‌تر از صد حرف فارسی تعریف شد.

پارادوکس اژدها[۱۰]

چگونه می‌توانیم راجع به چیزی که وجود ندارد صحبت کنیم، وقتی که می‌گوییم «اژدهای هفت سر وجود ندارد».

پارادوکس تخته سیاه[۱۱]

تخته سیاهی را در نظر بگیرید که روی آن علاوه بر اعداد ۲،۱و۳ جمله «کوچکترین عدد طبیعی که روی این تخته سیاه ارائه نشده است.» نوشته شده است. در این صورت گرچه عدد ۴ روی تخته سیاه نمایش داده نشده است، ولی عبارت مذکور روی تخته سیاه مبین ۴ است.

پارادوکسی مانند بوچوفسکی مشعر به نارسایی های زبان است:

۹- Richard's paradox
۱۰- Dragon Paradox
۱۱- Blackboard Paradox

پارادوکس بوچوفسکی[۱۲]

فرض کنید شما فقط دو برادر دارید که هر دو از شما مسن‌تر هستند. در این صورت جمله به ظاهر غلط ذیل، راست است:

«برادر جوان‌ترم از من مسن‌تر است»

پوانکاره و راسل دریافتند که بروز بسیاری از پارادوکس‌ها مانند پارادوکس راسل، کانتور و ... به علت وجود تعریف‌های غیرحملی در آن‌ها است. یک تعریف غیرحملی، تعریفی است که در آن یک شئ با ارجاع به خود شئ تعریف می‌شود، مثلاً وقتی یک شئ a و یک مجموعهٔ A طوری تعریف شوند که a عضو A باشد ولی تعریف a فقط با مراجعه به A ارائه گردد، مانند مفهوم کوچکترین کران بالایی یک مجموعه که به عنوان کوچکترین عضو مجموعهٔ متشکل از همهٔ کران‌های بالای آن مجموعه تعریف می‌شود. پارادوکس‌های آرایشگر، راسل، فهرست، خودناتوصیف، اسمارندارچ و بری از این دسته‌اند:

پارادوکس آرایشگر[۱۳]

در دهکده‌ای فقط یک آرایشگر وجود دارد. او فقط ریش کسانی را می‌تراشد که ریش خود را نمی‌تراشند. سؤال این است که ریش خود آرایشگر را چه کسی می‌تراشد؟

اگر او ریش خود را نتراشد، باید نزد آرایشگر یعنی خودش، برود تا ریش خود را بتراشد و اگر ریش خود را بتراشد، نباید توسط آرایشگر یعنی خودش، ریشش تراشیده شود.

پارادوکس راسل[۱۴]

فرض کنید φ خاصیت عضو خود نبودن باشد و $A = \{x | \varphi x\} = \{x | x \notin x\}$ درست است. پس بنابه نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، A یک مجموعه است و لذا یا $A \in A$ یا $A \notin A$. اگر $A \in A$، بنابه تعریف A، $A \notin A$؛ و اگر $A \notin A$، بنابه تعریف A باید $A \in A$. پس در هر حال تناقض داریم.

۱۲- Buchowski Paradox

۱۳- Barber Paradox

۱۴- Russell's Paradox

پارادوکس خود ناتوصیف[۱۵]

خود ناتوصیف، کلمه‌ای است که خودش را توصیف نمی‌کند. پس کلمه «خود ناتوصیف» خود ناتوصیف است اگر و فقط اگر خود ناتوصیف نباشد.

پارادوکس فهرست[۱۶]

کتابشناسی در حال تدوین یک فهرست از کتاب‌شناسی‌هایی است که نام خود را در فهرست ذکر نکرده‌اند. آیا فهرست این کتابشناس، نام خودش را نیز در بر می‌گیرد؟

پارادوکس اسماراندانچ[۱۷]

فرض کنید A یکی از عبارات ممکن، حاضر، کامل و... باشد. در این صورت عبارت «همه چیز A است» ایجاب می‌کند که $\neg A$ نیز A باشد.

پارادوکس بری[۱۸]

این پارادوکس اولین بار در نوشته‌های *برتراند راسل* با انتساب آن به آقای *ک.بری*، کتابدار دانشگاه آکسفورد، درج شده است. «اولین عددی که نمی‌تواند با کم‌تر از هزار کلمه فارسی مشخص شود.» اما عبارت اخیر فقط دوازده کلمه دارد و بنابراین عدد مورد نظر می‌تواند با کم‌تر از هزار کلمه معرفی شود.

دسته‌ای از پارادوکس‌ها ناشی از اشکالاتی در اصول و تعاریف ما است. در این مورد می‌توان از پارادوکس‌های *آلبرت ساکسونی*، *سقراط* و قبیلهٔ وحشی نام برد. یکی از مشهورترین پارادوکس‌ها، پارادوکس دروغگو است که پارادوکس‌های بالا ناظر به آن هستند و در زیر به شرح آن می‌پردازیم:

۱۵- Heterological paradox
۱۶- Catalogue Paradox
۱۷- Smarandache Paradox
۱۸- Berry Paradox

پارادوکس دروغگو[۱۹] یا پارادوکس ائوبولیدس[۲۰]

می‌گویند روزی *ائوبولیدس*، متفکر یونانی قرن چهارم قبل از میلاد، گفت:«چیزی که الان می‌گویم دروغ است.» اگر گفتهٔ او درست باشد، آن‌گاه بنابه آن‌چه گفته است، باید گفته‌اش دروغ باشد؛ واگر گفتهٔ او دروغ باشد، دوباره بنابه آن‌چه گفته است نتیجه می‌شود که گفته‌اش درست است.

پارادوکس آلبرت ساکسونی[۲۱]

این پارادوکس توسط *آلبرت ساکسونی* در قرون وسطی طرح گردیده است.

جمله p این است:«q دروغ است.»

جمله q این است:«p راست است.»

نکته جالب این است که اگر ما دارای یک منطق سه ارزشی باشیم که در آن گزاره‌ها فقط بتوانند یکی از ارزش‌های «راست»، «دروغ» و «تصمیم‌ناپذیر» را داشته باشند آن گاه گزارهٔ p به صورت «p دروغ یا تصمیم‌ناپذیر است» نمی‌تواند هیچ یک از ارزش‌های «راست»، «دروغ» و «تصمیم‌ناپذیر» را به خود بگیرد.

پارادوکس سقراط[۲۲]

نقل شده است که سقراط روزی گفته است:« چیزی که می‌دانم این است که من هیچ چیز نمی‌دانم.»

پارادوکس قبیله وحشی[۲۳]

در جزیره‌ای قبیله‌ای وحشی زندگی می‌کردند که دو خدا، خدای راستی و خدای دروغ داشتند. آن‌ها هرکس را که به جزیره می‌آمد قربانی می‌کردند، به این ترتیب که از وی سؤالی

۱۹- Liar's Paradox

۲۰- Eubulide's Paradox

۲۱- Albert Saxony's Paradox

۲۲- Socrate's Paradox

۲۳- Savage Trible Paradox

می‌پرسیدند، اگر راست می‌گفت او را قربانی خدای راستی و اگر دروغ می‌گفت، او را قربانی خدای دروغ می‌کردند. روزی شخصی وارد جزیره شد. او را گرفتند و از او پرسیدند:«سرنوشت تو چه خواهد بود؟» آن شخص جواب داد:«شما من را قربانی خدای دروغ خواهید کرد».

با این جواب وحشی‌ها مستأصل شدند زیرا نمی‌دانستند وی راست می‌گوید یا دروغ. اگر راست گفته باشد باید قربانی خدای راستی شود و اگر دروغ گفته باشد، باید قربانی خدای دروغ شود.

بعضی پارادوکس‌ها مانند لامپ تامسون و اشتقاق به دو بخش ناشی از مشکلات فلسفی مربوط به مفاهیم نظری در فیزیک مانند حرکت، زمان و ... مربوطند:

پارادوکس لامپ تامسون[۲۴]

لامپی به مدت $\frac{۱}{۲}$ دقیقه روشن می‌شود، سپس برای $\frac{۱}{۴}$ دقیقه خاموش می‌شود، به مدت $\frac{۱}{۸}$ دقیقه روشن می‌شود و قس‌علی‌هذا. درست بعد از یک دقیقه، لامپ روشن خواهد بود یا خاموش؟

پارادوکس اشتقاق به دو بخش زنون[۲۵]

این پارادوکس در ارتباط با امکان بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری زمان و مکان ارائه شده است:

در صورتی که پاره‌خط بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر باشد، حرکت ناممکن است، زیرا برای این‌که پاره‌خطی مانند AB را با شروع از نقطه A بپیماییم، ابتدا باید به نقطهٔ وسط آن C برسیم. برای این‌که AC پیموده شود، باید به نقطهٔ وسط آن D برسیم و قس‌علی‌هذا. پس نمی‌توان حتی از نقطه A حرکت کرد.

Thompson Lamp Paradox -۲۴

Dichotomy Paradox -۲۵

پارادوکس تیر زنون[۲۶]

در صورتی که زمان از لحظه‌های کوچک تقسیم‌ناپذیر تشکیل شده باشد، تیری که از کمانی پرتاب می‌شود، همواره در یک‌جاست، زیرا تیر در هر لحظه در وضعیتی ثابت است و این مطلب در مورد هر لحظه درست می‌باشد.

و بالاخره بحث را با پارادوکس نیوکام که نشان می‌دهد پیدایش بعضی پارادوکس ها به خاطر وجود فرض های غلط و یا ناکامل است خاتمه می‌دهیم:

پارادوکس نیوکام[۲۷]

فرض کنید دو جعبه A و B داده شده باشد. درجعبه A باز و درجعبه B بسته باشد. A شامل ۱۰۰۰ دلار و B شامل ۱۰۰۰۰۰۰ دلار است و یا شامل هیچ چیز نیست. شما فقط باید جعبه B را انتخاب کنید و یا هر دو جعبه A و B را. اما قبل از این‌که شما انتخاب خود را انجام دهید، پیشگویی بر اساس انتخابی که شما انجام خواهید داد، در جعبه B، ۱۰۰۰۰۰۰ دلار قرار می‌دهد اگر شما فقط جعبه B را انتخاب کنید و هیچ چیز نمی‌گذارد اگر شما هر دو جعبه A و B را انتخاب کنید.

سؤال: اگر شما به انتخاب فقط B تمایل داشته باشید، می‌توانید A را نیز انتخاب کنید؟

۲۶- Arrow Paradox

۲۷- Newcomb's Paradox

فصل دهم

منطق‌های چند ارزشی

در سال ۱۸۴۷ ، *جورج بول* ساختار جبری منطق را ارائه داد و در واقع اساس منطق ریاضی را پی‌ریخت. در همان سال *دمورگان* گفت که احساس می‌کند باید یک ارزش سوم به شالودهٔ منطق دو ارزشی اضافه شود. اما نمی‌دانست چگونه این ایده را تکامل بخشد. این مفهوم تا سال ۱۹۲۰ در هاله‌ای از ابهام قرار داشت تا این‌که در این سال منطق‌دانی لهستانی به نام *لوکازیه‌ویچ* منطق سه ارزشی و یک سال بعد و مستقل از او منطق‌دانی آمریکایی به نام پست منطق‌های m ارزشی ($m \geq 2$) را ابداع کردند.

یان لوکازیه ویچ

منطق‌های چند ارزشی منطق‌های غیرکلاسیک هستند ولی از این بابت که در آن‌ها فرض می‌شود ارزش یک گزاره مرکب بر حسب ارزش مؤلفه‌های آن (گزاره‌های بسیط) تعیین می‌شود با منطق‌های کلاسیک مشابه هستند. ۳۰۷۲ نوع منطق چند ارزشی وجود دارد که در هیچ کدام، هیچ تعبیر استاندارد و درک شهودی قطعی در مورد درجات ارزش وجود ندارد و در واقع فهم این درجات به زمینه‌ای بستگی دارد که در آن‌جا منطق مورد نظر به کار می‌رود.

لوکازیه‌ویچ منطق‌های L_m و L_∞ را که در آن مجموعه درجات ارزش به ترتیب $W_m = \{\frac{k}{m-1} | 0 \leq k \leq m-1\}$ و $W_\infty = [0,1] = \{x \in R | 0 \leq x \leq 1\}$ هستند ارائه داد. در این‌جا ۱ مبین راست، ۰ مبین دروغ و هر یک از اعداد بین ۰ و ۱ مبین ارزش‌های بین راست و

دروغ هستند (البته در منطق سه ارزشی، $\frac{۱}{۲}$ را گاهی نـه راسـت- نـه دروغ، پارادوکسـی، بـی‌معنـی، نامعین یا ناشناخته تعبیر می‌کنند). همچنین پنج عملگر N، K، A، C و E که به ترتیـب متنـاظر ناقض، عاطف، فاصل، ایجـاب و هـم ارزی منطقـی در منطـق دو ارزشـی هسـتند، بـا فـرض آن‌کـه متغیرهای گزاره‌ای p و q به ترتیب دارای ارزش‌های u و v که $۱ \leq v$ و $u \leq ۰$ باشند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) Np (یا $\neg p$) دارای ارزش $۱-u$ است.

ب) Kpq (یا $p \wedge q$) دارای ارزش $\min\{u,v\}$ است.

ج) Apq (یا $p \vee q$) دارای ارزش $\max\{u,v\}$ است.

د) Cpq (یا $p \Rightarrow q$) دارای ارزش $\min\{۱,۱-u+v\}$ است.

ه) Epq (یا $p \Leftrightarrow q$) دارای ارزش $\min\{۱,۱-|u-v|\}$ است.

به علاوه لوکازیه‌ویچ درجه ارزش $\forall x;\varphi x$ و $\exists x;\varphi x$ را به ترتیب اینفیمم و سوپریمم درجه‌های ارزش φx تعریف کرد.

بعضی از فرمول‌هایی که در منطق دو ارزشی راستگو (همـانگویی) یـا دروغگـو(تنـاقض) هستند در این منطق چنین نخواهند بود.

مثلاً در منطق سه ارزشی ($m = ۳$):

الف) $ECpqANpq$ (یا $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$) راسـتگو نیسـت، زیـرا مـاتریس نمایش آن فقط از ۱ تشکیل نشده است:

۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$ANpq$
۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$
۱	۱	۱	۰

Cpq	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰
۱	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰
$\frac{۱}{۲}$	۱	۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۱	۱	۱

$ECpqANpq$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰
۱	۱	۱	۱
$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱
۰	۱	۱	۱

توجه کنید که از حذف سطر دوم وستون دوم در جدول Cpq، همان جدول آشنای $p \Rightarrow q$ در منطق دو ارزشی به دست می‌آید. این مطلب در مورد بقیهٔ عملگرها و نیز در منطق m ارزشی درست است. لذا می‌توان گفت که منطق‌های معرفی شده در این‌جا، تعمیم منطق دو ارزشی هستند.

ب) $KNpp$ (یا $p \wedge \neg p$) دروغگو نیست زیرا ستون نمایش آن فقط از ۰ تشکیل نشده است (در حالی که منطق دو ارزشی $p \wedge \neg p$ دروغگو است).

p	Np	$KNpp$
۱	۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	۱	۰

ج) $KCpNpCNpp$ (یا $(p \Rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \Rightarrow p)$) که می‌گویند «$p$ راست است اگر و فقط اگر $\neg p$ راست باشد» (که البته در منطق دو ارزشی یک دروغگو است) در منطق سه ارزشی دارای جدول ارزش ذیل است:

p	Np	$CpNp$	$CNpp$	$KCpNpCNpp$
۱	۰	۰	۱	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰

حال اگر این فرمول را با U نمایش دهیم، جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که $AANPPU$ (یا $\neg p \vee p \vee U$) راستگو است.

p	Np	$ANpp$	U	$AANppU$
۱	۰	۱	۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱

منطق‌های سه ارزشی (چند ارزشی) در زندگی واقعی و در حوزه‌های گوناگونی مانند منطق فازی (Fuzzy logic)، طراحی سخت‌افزارها، زبان SQL در نرم افزار کامپیوتر، نظریهٔ کلیدها (Switching Theory) در مدارهای الکترونیکی و حتی مسائل فلسفی مربوط به حقیقت کاربرد مهمی دارند.

فصل یازدهم

زیبایی در ریاضیات

فلیکس کلاین می‌گوید:

«ریاضیات عالی‌ترین دستاورد فکری و اصیل‌ترین ابداع ذهن آدمی‌است. موسیقی می‌تواند روح را برانگیزد یا آرام سازد، نقاشی می‌تواند چشم نواز باشد، شعر می‌تواند عواطف را تحریک کند، فلسفه می‌تواند ذهن را قانع و راضی سازد، مهندسی می‌تواند زندگی مادی آدمی را بهبود بخشد. اما ریاضیات همه این ارزش‌ها را عرضه می‌کند.»

زیبایی ریاضیات فرعی بر آن نیست، بلکه یک خصوصیت اصلی ریاضیات است. از دیدگاهی تاریخی، حداقل از دوره طلایی یونان باستان، هیچ‌گاه ریاضیات زشت مفید نبوده است. بنابراین باید صحبت از زیباترین‌ها نمود. لیکن در مورد معیارهای انتخاب زیباترین‌ها، بین ریاضی‌دان‌ها توافق وجود ندارد. معلوم نیست که باید بر محتوای قضیه، برهان، مفاهیم مورد بحث یا استراتژی‌ها تأکید کرد و آن‌ها را ملاک قرار داد یا باید بر نقش احساسات شخصی و تعصبات ملی و مذهبی نسبت به زیبایی تکیه نمود. به‌هرحال همچنان‌که ممکن است بتوانیم شعر زیبا را تعریف کنیم و وقتی خوانده می‌شود، عدهٔ کثیری به زیبایی آن پی‌می‌برند و لذا معیارهایی برای زیبایی یک شعر داریم، ما نیز می‌توانیم ملاک‌هایی به دست دهیم که اکثریت قریب به اتفاق ریاضی‌دانان برای تشخیص زیبا و زشت از یکدیگر به کار می‌برند. مهم‌ترین این‌ها عبارتند از: غیرمنتظره بودن (نظیر وجود تابعی از R به R که همه‌جا پیوسته است ولی هیچ‌جا مشتق پذیر

نیست، وجود منحنی‌های فضا پرکن، و قضیه باناخ-تارسکی)، قدرت ایجاد ارتباط بین شاخه‌های مختلف ریاضیات و توانایی نمایش مشابهت‌ها در ریاضیات (مانند گروه گالوای یک میدان، گروه بنیادی یک فضای همبند مسیری، و عضوی آزاد در یک رسته)، سادگی برهان (نظیر این‌که $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است، و ...۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳ اصم است)، اختصار در بیان که *آتیا* آن‌را بیش و کم مترادف ظرافت می‌داند (همچون $e^{i\pi}=-1$، $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$) کاربردپذیری در علوم و مهندسی (مانند قضیه استوکس در آنالیز برداری، وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه، و تبدیل شوارتس- کریستوفل)، عمق(نظیر قضیه اساسی جبر، فرضیه پیوستار، و حل‌ناپذیری چندجمله‌ای‌های از درجهٔ بزرگتر یا مساوی پنج بوسیله رادیکال‌ها) و کلیت(مثل قضیه نقطه ثابت بروئر، وجود میدانی با خاصیت کوچکترین کران بالایی، و قضیه هان- باناخ) عمق و کلیت به معنای این است که قضیه ریاضی مورد نظر تکیه گاه ساختارهای ریاضی مختلف و ایجاد کنندهٔ سؤالات جدید باشد، در اثبات قضایای دیگر به کار رود و یا نمونهٔ بارز دسته‌ای از قضایای شبیه به هم باشد.

البته ممکن است میزان زیبایی چیزی با گذشت زمان تغییر کند، چنان‌که در قرن گذشته $e^{i\pi}=-1$ یکی از زیباترین اسرار کائنات تصور می‌شد درحالی‌که اکنون در نظر اکثر ریاضی‌دانان یک رابطهٔ معمولی است. همچنین مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی $\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ است و در دوره درخشان یونان مظهر زیبایی بود، امروزه در سبک‌های غیرکلاسیک معماری، زیبا محسوب نمی‌شود.

یک سؤال اساسی این است که چگونه ریاضی‌دان‌ها توانسته‌اند یک علم زیبا و به عنوان عمیق‌ترین معرفت بشری بیابند؟ در پاسخ باید گفت سخت‌گیری، بدون بخشش کوچک‌ترین خطاها (که عموماً به صورت یک عادت برای ریاضی‌دان‌ها در می‌آید) در کنار روش و معیارهای منطقی آن‌ها به همراه جدیت، خلاقیت، به غایت اندیشیدن، و نیز بلند پروازی و جسارت شکستن هرچه موجود است صرف نظر از ارجمندی صاحبان افکار (بزرگانی نظیر اقلیدس، فیثاغورس،

ارسطو، کانتور، هیلبرت،...) عامل موفقیت ریاضی‌دان‌ها در پرداختن به ریاضیات به عنوان علمی‌دقیق، منسجم، منظم، قطعی و دارای مبانی واضح و ساده و هیجان انگیز، بوده است.

اینک اجازه دهید به ریاضیات به عنوان یک هنر نگاه کنیم. در واقع نوعی شباهت بین کار ریاضی‌دان و کار یک هنرمند، مثلاً نقاش، وجود دارد. اولی بدون توانایی ارائه استدلال عمیق و دومی بدون مهارت‌های فنی واقعی، و نه خیالی، نمی‌توانند یک ریاضیدان خوب و یک نقاش خوب باشند. به قول *هاردی* «هم ریاضی‌دان و هم نقاش، نقش پرداز هستند»، هر دو می‌توانند اندیشه‌هایی ناب را منعکس سازند. هر دو مظهر بی‌نقصی و نمایش‌دهنده الگوهایی ظریف و درخشان و به تعبیری یک «خیال واقعی» هستند. هر دو به انسان لذت می‌بخشند، لذتی که فقط با تلاش به دست می‌آید. اما در هر دو مورد فایده دلیل اصلی فعالیت فرد نیست، بلکه تلذذ از ساختن «دنیایی خیالی» که زیباتر از « دنیای تجربی» است انگیزهٔ اوست. البته نقاشی (همچون موسیقی) احساسات را بیشتر و سریع‌تر برمی‌انگیزاند و لذا «هنری‌تر» از ریاضیات به نظر می‌آید. در همین راستا باید گفت که تشریح ارزش ریاضیات محض برای عامه مردم کار شاقی است درست مانند این‌که برای شخصی که هرگز موسیقی نشنیده است یک ملودی پخش کنیم و بگوییم «این عجب ملودی قشنگی است!» و انتظار تأیید از طرف مقابل داشته باشیم.

همه شنیده‌ایم که روزی یکی از دانش‌آموزان هیلبرت، ریاضیات را رها کرد تا شاعر شود، وقتی وی از موضوع اطلاع یافت گفت:«هیچ وقت فکر نمی‌کردم آن جوان چنان تخیلی داشته باشد که ریاضیدان شود.» مهم‌ترین عامل ابداعات ریاضی، تخیل است. استدلال منطقی آن‌را پیرایش کرده و به آن قوام می‌بخشد. منطق قضاوت می‌کند ولی چیزی نمی‌آفریند. تاریخ نشان می‌دهد که هر ریاضی‌دانی که قوهٔ تصور قوی‌تری داشته باشد، ریاضیات زیباتری خلق می‌کند.

فصل دوازدهم

چرا تاکنون از روش‌های شبه‌تجربی استفاده نکرده‌ایم؟

هیلاری پاتنام

اگر کاربرد روش‌های شبه‌تجربی (نگوییم شیوه‌های تجربی) در ریاضیات توجیه شده‌اند پس چرا از آن‌ها استفاده نکرده ایم؟ حقیقت این است که ما انسان‌های روی زمین در طول تاریخ روش‌های شبه‌تجربی و حتی تجربی را در ریاضیات به کار برده‌ایم.

اینک اصل موضوع بنیادینی را که مبحث هندسه تحلیلی بر آن بنا شده است (و همراه با آن، تمام مطالب راجع به فضا در ریاضیات جدید شامل نظریهٔ توپولوژی خمینه‌ها) در نظر بگیرید. این اصل موضوع عبارت است از این‌که یک تناظر یک به یک حافظ ترتیب بین نقاط روی یک خط و اعداد حقیقی وجود دارد.

اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. آیا اعداد حقیقی و این اصل موضوع با شیوه و توجیه ریاضی دقیق معرفی شده‌اند؟ یقیناً چنین نیست. حقیقت این است که یونانیان باستان فاقد تجربهٔ ریاضی بوده‌اند و به همین خاطر نیز از فکر و مهارت لازم در زمینه ریاضی بی‌بهره بودند تا مفهوم «عدد» را به میزانی که برای وجود تناظر مزبور مورد نیاز بود تعمیم دهند. به این جهت هنگامی‌که با پیدایش اعداد گنگ مواجه شدند تنها توانستند اصل موضوع تناظر و همراه آن امکان بررسی جبری هندسه را کنار بگذارند. از طرف دیگر *دکارت* مایل بود وجود عدد را (البته عدد حقیقی که ما امروزه مد نظر داریم) که متناظر با فاصله‌ای دلخواه است اصل موضوعی سازد. وی این

اعداد را با مجموعه‌ها یا دنباله‌هایی از اعداد گویا یکی نگرفت. اما همین که او نشان داد عواید اصل موضوع تناظر نه تنها در ریاضیات محض بلکه در مکانیک چقدر عظیم است، دیگر تردید کم مایه اجتناب ازاصل موضوع تناظر یا این اعداد تعمیم یافته، از بین می‌رفت. به خصوص بحث در این مورد اشتباه است که *دکارت* تنها به این خاطر مورد تصدیق قرار گرفت که یکی پنداشتن اعداد حقیقی با مجموعه‌ها یا دنباله‌هایی از اعداد گویا امکان‌پذیر است. فرض کنید این امکان وجود نداشت که هویت اعداد حقیقی را با مجموعه‌ها یا دنباله‌هایی از اعداد گویا تعیین کنیم (یعنی آن‌ها را بدون اعداد گویا بسازیم. به عبارت دیگر تصور کنید که این ساختارها کشف نشده بودند). در این صورت آیا ما از هندسه تحلیلی و مکانیک دست می‌کشیدیم؟ یا ترجیح می‌دادیم که به سادگی اعداد حقیقی را اعیانی اولیه در نظر بگیریم، افراطی‌تر از اکثر ریاضیدانانی که اعداد طبیعی را چنین لحاظ می‌کنند (شیوهٔ *فرگه* و شیوهٔ *راسل*)، یا چنان که *فرگه* مفاهیم را، *تسرملو* مجموعه‌ها را یا بعضی از ریاضی‌دانان امروز رسته‌ها و تابعگون‌ها را در نظر می‌گیرند؟ و فرض کنید ما ریاضیاتی اصل موضوع شدنی و سازگار از این نوع داشته باشیم، ریاضیاتی که اعداد حقیقی را به عنوان مفاهیم اولیه بشمارد. آیا این ریاضیات ناموجه خواهد بود؟

بدون شک یافتن راهی جهت معرفی اعداد حقیقی به وسیله تعریف، اطمینان به دستگاه را افزایش می‌دهد (گرچه سنجش میزان اطمینان کاری دشوار است، زیرا قسمتی از بهایی که شخص باید بپردازد این است که مجموعه‌ها را به‌عنوان مفاهیم اولیه به‌شمار آورد و ظاهراً امروزه غریب می‌نماید که مجموعه‌ها را ایمن‌تر از اعداد حقیقی در نظر بگیریم). ولی بر خلاف نظر منطق‌گراها معرفی اعداد حقیقی با ساختارهای منطقی بدون اعداد گویا، اساسی نیست.

حقیقت امر این است که به محض آن که فرضیه اعداد حقیقی و تناظر بین نقاط و اعداد حقیقی ثمر بخشی خود را در هر دو رشته فیزیک و ریاضیات نشان داد، سؤال و تردیدی باقی نماند، به غیر از تناقض ریاضی، و احتمالاً حتی در آن هنگام، یقیناً سعی نمی‌کردیم بر تناقض با وسیله‌ای که کمتر از کنارگذاردن دستگاه اعداد حقیقی کارساز بود فائق آییم، و بی‌تردید موفق هم می‌شدیم.

وجود اعداد حقیقی و تناظر بین اعداد حقیقی و نقاط روی خط، بخشی به صورت شبه تجربی و قسمتی به صورت تجربی کشف گردیدند. این بیشتر مانند نمونه‌ای از کاربرد روش‌های فرضیه‌ای- استنتاجی در فیزیک است.

همین روال با ارائهٔ روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط *نیوتن* تکرار می‌گردد. اگر روش‌های اپسیلون- دلتا کشف نشده بود آن وقت بی‌نهایت کوچک‌ها اعیانی اصل موضوعی شده بودند (همان‌طور که اعداد موهومی برای مدتی طولانی چنین بودند). در حقیقت این رهیافت به حسابان (توسیع اعداد حقیقی) همانند رهیافت استاندارد، آن‌طور که امروزه از کار *آبراهام رابینسون* در می‌یابیم، سازگار است. نظراتی را که دربارهٔ ارائهٔ روش‌های هندسهٔ تحلیلی بیان کردیم با قدرت تمام در این مورد نیز اعمال می‌شوند. اگر حسابان به روش *وایراشتراس* تصدیق و توجیه نشده بود، به صورتی دیگر این عمل انجام می‌شد. نکته در این‌جا است که توجیه واقعی حسابان، موفقیت آن است، موفقیتش در ریاضیات و در علوم فیزیکی.

مورد دیگر از کاربرد کاملاً آگاهانه و صریح استدلال شبه‌تجربی برای توجیه و توسعه مبانی اصل موضوعی ریاضیات، ارائه اصل انتخاب توسط *تسرملو* است. تسرملو در ۱۹۰۸ از این اصل در مقابل منتقدین مقالهٔ ۱۹۰۴ خود دفاع می‌کند. به خصوص *پئانو* خاطر نشان کرده بود که اصل مزبور ظاهراً مستقل از اصول مذکور در صورت‌بندی خاص وی می‌باشند و ادامه می‌دهد که بنابراین اثبات تسرملو برای این حکم که هر مجموعه‌ای می‌تواند خوش‌ترتیب شود، اصلاً برهان نیست، زیرا استدلال بر ادعای ثابت نشده اصل انتخاب مبتنی است. پاسخ تسرملو چنین بود:

اولاً چگونه پئانو به اصول بنیادین خویش دست می‌یابد و چگونه نتایج آن‌ها را در صورت‌بندی خاص خود توجیه می‌کند، در حالی که آن‌ها را نمی‌تواند به اثبات رساند. ظاهراً با تجزیه و تحلیل شیوه‌های استنتاج که در طول تاریخ معتبر شناخته شده‌اند و با خاطر نشان کردن این مطلب که این اصول به‌طور شهودی بدیهی‌اند و مورد لزوم علم هستند این کار را می‌کند. به کارگیری موفقیت‌آمیز این اصل علی‌رغم این‌که در هیچ کتاب درسی صورت‌بندی نشد، در زمینه‌های بسیار گوناگون ریاضی و به خصوص در نظریهٔ مجموعه‌ها توسط *ددکیند*، *کانتور*، *ف.برنشتاین*، *شوئنفلایز*، *ج.کونیگ* و دیگران، حقیقتی مسلم است که تنها به وسیلهٔ مخالفان آن، که هر از گاهی تعدادی خرده‌گیر منطقی (که در استعمال کلمات صحیح وسواس دارند) در مقابل آن صف‌آرایی می‌کنند، تأیید می‌شود. چنین کاربرد گسترده یک اصل تنها به وسیلهٔ مخالفان آن قابل تبیین است که البته نباید آن‌را با اثبات پذیری‌اش اشتباه کرد. بدون توجه به این‌که وضوح فی‌نفسه به میزان معینی ذهنی است، یقیناً منبعی ضروری برای اصول ریاضی می‌باشد، حتی اگر

ابزار اثبات‌های ریاضی نباشد، و ادعای *پئانو* دراین‌مورد که آن اصل، ارتباطی با ریاضیات ندارد در بیان منصفانهٔ حقایق دچار شکست می‌شود.

اما پرسشی که به طور عینی می‌توان در مورد آن تصمیم‌گرفت این است که آیا این اصل برای علم ضروری است؟

به نظر من در دو مورد حق با *ترمسلو* است. اول از همه این‌که، وی حق‌دارد کـه وضـوح فی‌نفسه را تا اندازه‌ای ذهنی به‌شمارآورد با این‌حال که آن‌را «چیزی» می‌داند. در علوم تجربـی نیـز اشتباه خواهد بود اگر چنین تصور شود کـه شـهود ابـداً هـیچ نقشـی نـدارد، شـهود یـک راهنمـای ممکن‌الخطاست- چیزی که *فرانسیس بیکن* به ما آموخت- ولی راهنمای ممکن‌الخطـا، از نداشـتن راهنما بهتر است. اگر شهود ما کاملاً غیر قابل اعتماد باشد هرگز به فکر یک نظریهٔ صحیح یا تقریباً درست برای آزمایش در اولین قدم نمی‌افتیم. در ریاضیات تمایل به این‌که اصول موضـوع مـا بایـد لزوماً ضروری باشد مجاز است، به خصوص زمانی که با خواستی که *ترمسلو* ذکر می‌کنـد ترکیـب شوند، یعنی این‌که آن‌ها باید عمل واقعی ریاضی‌دانان را قالب‌ریزی کنند. ولی قابل ذکر است کـه آن‌چه *ترمسلو* به عنوان «عینی» مشخص می‌کند وضوح فی‌نفسه اصل انتخاب نیست بلکه ضـرورت آن اصل برای علم است. امروزه نه تنها استحکام اصل انتخـاب بلکـه کـل سـاختمان نظریـهٔ جدیـد مجموعه‌ها بر موفقیت زیادشان در کاربردهای ریاضی یا به عبـارت دیگـر بـر ضرورتشـان بـر علـم مبتنی است. چه استدلالی به جز یک استدلال شبه‌تجربی برای اصل جـایگزینی مـی‌تـوانیم پیشـنهاد کنیم، و هیاهوی رایج پیرامون نظریه رسته‌ها گواهی است بر این‌کـه ارزیـابی فرضـیه‌ای اسـتنتاجی، آزمودن گزاره‌های وجودی ریاضی (اشیا جدید)، اصول موضوع و روش‌ها هنوز ادامه دارد.

کاربرد روش‌های شبه‌تجربی در ریاضیات به هیچ‌وجه به آزمودن اصول موضوع جدید یا دستاوردهای هستی‌شناسی نوین منحصر نمی‌شود. گرچه به‌ندرت اتفاق می‌افتد که ریاضی‌دانـان یـا فلاسفه آن را در جوامع عمومی مطرح کنند، روش‌های شبه‌تجربـی دائمـاً بـرای کشـف حقـایق یـا حقایق مورد قبول عامه که انسان سعی می‌کند بعدها مصراً آن‌ها را به اثبات برسـاند، مـورد اسـتفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر این، تعدادی از استدلال‌های تجربی که توسط آن‌هـا انسـان درسـتی یـک حکم ریاضی را کشف می‌کند، به طور کلی اولین قدم، برای ریاضی‌دانـان قـانع کننـده مـی‌باشـند. برای مثال توجه کنید که *اویلر* چگونه به این کشف نائل شد که مقـدار سـری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ برابـر $\frac{\pi^2}{6}$

می‌باشد. *اویلر* کار را در تشابه با تجزیه $P(x) = c_{\circ}(1-\frac{x}{\varepsilon_1})(1-\frac{x}{\varepsilon_2})...(1-\frac{x}{\varepsilon_n})$ که در آن $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ریشه‌های غیر صفر ε_1، ε_2،...و ε_n است آغاز کرد. وی $\sin(\pi x)$ را با توجه به این‌که ریشه‌ها مقادیری هستند که در $\sin(\pi x) = \circ$ صدق می‌کنند، یعنی $x = \circ, x = \pm 1, x = \pm 2,...$، تجزیه کرد بدین ترتیب $\sin(\pi x) = c_{\circ}x(1-\frac{x}{1})(1+\frac{x}{1})(1-\frac{x}{2})(1+\frac{x}{2})...$ (عامل x وجود دارد چون ∘ یکی از ریشه‌ها است). برای یافتن جملهٔ ثابت $c_{\circ}$ او از $c_{\circ} = \lim_{x\to\circ}\frac{\sin \pi x}{x} = \pi$ استفاده کرد. بنابراین

$$\sin(\pi x) = \pi x(1-\frac{x^2}{1})(1-\frac{x^2}{4})(1-\frac{x^2}{9})... \quad (1)$$

ولی بنا به قضیه تیلور

$$\sin \pi x = \frac{\pi x}{1!} - \frac{1}{3!}\pi^3 x^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 x^5 - ... \quad (2)$$

با برابر گرفتن ضریب x^3 در (۱) و (۲) داریم

$$-\frac{\pi^2}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{یا} \quad -\frac{\pi^3}{3!} = \pi(-\frac{1}{1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-...)$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

البته *اویلر* کاملاً از این مطلب آگاه بود که این برهان نیست، ولی تا آن زمان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را تا سی رقم اعشار یا بیشتر محاسبه کرده بودند که با $\frac{\pi^2}{6}$ تطبیق می‌کرد. هیچ ریاضی‌دانی شک نداشت که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، برابر $\frac{\pi^2}{6}$ است، گرچه این موضوع بیست سال قبل از ارائهٔ چنین استدلالی از جانب *اویلر* بود.

تشابه این نوع استدلال با استدلال فرضیه‌ای- استنتاجی در علوم تجربی باید واضح شده باشد: تشابه‌های قابل پذیرش شهودگرایانه (وگرچه غیریقینی) منجر به نتایجی می‌شود که بعداً به طور تجربی تحقیق می‌گردند. نتایج موفقیت آمیز این بررسی‌ها اعتماد انسان را نسبت به تشابه مورد نظر تقویت می‌کند.

اجازه دهید مثالی دیگر از این‌گونه، این بار از ریاضیات امروزی ارائه نماییم. تا این اواخر ریاضی‌دانان بسیاری معتقد بودند که تعداد نامتناهی «عدد اول دوقلو» (یعنی زوج‌هایی به صورت n، $n+۲$ که هر دو اول هستند، مانند ۵و۷ یا ۱۱و۱۳) وجود دارد (اخیراً برهانی برای این ادعا ارائه شده است). استدلالی را که آن‌ها قانع کننده می‌دانستند چنین است: ظاهراً قابل قبول بود (و با اطلاعات تجربی مطابق بود) که پیشامدهای « n عدد اول است» و « $n+۲$عدد اول است» به مفهوم آماری پیشامدهای مستقل هستند. ولی فراوانی اعداد اول کمتر از n تقریباً $\frac{n}{\log n}$ است. بنابراین فراوانی اعداد دوقلوی کمتر از n باید (به طور مجانبی) مانند $\frac{n^۲}{(\log n)^۲}$ باشد که ایجاب می‌کند تعداد اعداد اول دوقلو نامتناهی است.

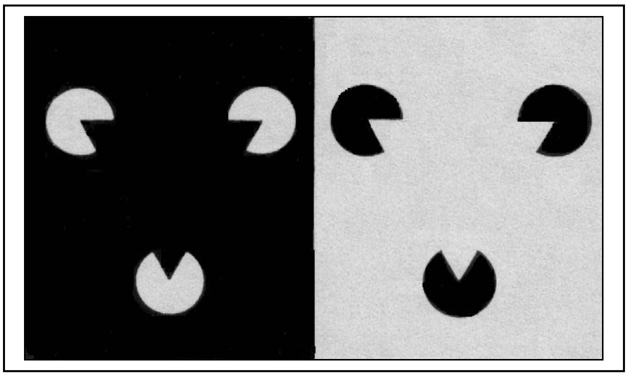
باس ون فرسن ادعا کرده است این‌که مورد زیر یک استنتاج شبه تجربی خوب در ریاضیات است که نتیجه‌ای از دیدگاه من می‌باشد:

رایانه‌ها از ارائه یک مثال نقض برای حدس گلدباخ درمانده‌اند، بنابراین حدس گلدباخ صحیح است. البته این استنتاج شبه‌تجربی خوبی نیست و من تظاهر نمی‌کنم قادر باشم قواعدی را ارائه نمایم که با آن‌ها بتوانیم بگوییم کدام استنتاج شبه‌تجربی، خوب است و کدام خوب نیست. روی‌هم‌رفته، مسألهٔ مشابهت در فلسفهٔ علم تجربی- مسألهٔ منطق استقرایی- قرن‌ها است با ارائهٔ راه حل مخالفت نموده است. ولی مردم علم تجربی را به این دلیل کنار نگذاشته‌اند. اما من می‌توانم اشتباه این استقرای ساده را که حدس گلدباخ صحیح است، بر ملا کنم. حقیقت این است که نه در ریاضیات و نه در علم تجربی ما به نتیجهٔ یک استقرا ساده به عنوان یک مطلب دقیقاً و کاملاً صحیح، اعتماد نمی‌کنیم. یک تعمیم عام- جمله‌ای که می‌تواند با یک «برای نمونه» کنار گذاشته شود- نمی‌تواند به وسیلهٔ استقرا در یک علم مورد بررسی قرار گیرد. ولی درست بر خلاف استدلال استقرایی برای وجود تعداد نامتناهی عدد اول دوقلو، استدلال بدی در مورد حدس

گلدباخ ارائه دادیم. حتی اگر پیشامدهای «n یک عدد اول است»، «$n + ۲$ یک عدد اول است» از نظر آماری کاملاً مستقل نباشند، نتیجه باز هم صحیح خواهد بود.

به عبارت دیگر این استنتاج که تعداد نامتناهی عدد اول دوقلو وجود دارد «تحت اختلالات کوچک فرضیات»، پایا است. به طور استقرایی انسان یک جملهٔ آماری را تصدیق می‌کند نه تعمیم بدون استثنا را، و آن‌وقت حتی از حقیقت تقریبی جملهٔ آماری استنتاج می‌کند که تعدادی نامتناهی عدد اول دوقلو وجود دارد. به عقیدهٔ من تعداد کمی از ریاضی‌دانان با این استدلال متقاعد نمی‌شوند، حتی اگر مستدل هم نباشد.

چون ما از روش‌های شبه‌تجربی زیادی در ریاضیات استفاده می‌کنیم (حتی مریخی نیز نیستیم!) معتقدم که کوشش در جهت سازماندهی آن‌ها و مطالعه در مورد این روش‌ها بسیار ارزشمند خواهد بود. شاید چنین تلاشی در مرحلهٔ کنونی دانش ما نابهنگام باشد. با این‌حال دوستی که در ریاضیات صاحب نظر است پیشنهاد کرد که از روش‌های نظریهٔ الگوها، مثلاً در کوشش برای تبدیل استدلال‌های احتمالاتی مانند استدلال در مورد وجود تعداد نامتناهی عدد اول دوقلو به دلایل متقن، می‌توان بهره گرفت.



فصل سیزدهم

ریاضیات چیست؟

هائو وانگ

عده‌ای می‌گویند ریاضیات چیزی است که ریاضی‌دانان انجام می‌دهند و متشکل از همهٔ حوزه‌های مربوط به موضوع‌های کمی، هندسی یا منطقی است که شامل آمار، علوم کامپیوتر، منطق، ریاضیات کاربردی،... ، آموزش ریاضیات و فلسفهٔ ریاضیات است. *بنجامین پرس*، پدر *چارلز پرس*، ریاضیات را به عنوان علمی که نتایج ضروری به دست می‌دهد تعریف کرد. برطبق دیدگاه انسان‌گرایی *هرش*، جهانی از ایده‌ها در آگاهی مشترک انسان‌ها وجود دارد. این ایده‌ها و شاخه‌ای از دانش که به مطالعهٔ این ایده‌ها می‌پردازد ریاضیات نامیده می‌شود.

مقالهٔ جالب زیر از فیلسوف مشهور *هائو وانگ* است که به مطالعهٔ جنبه‌های مهمی از مسأله «چیستی ریاضیات» پرداخته است.

بارزترین خصوصیات ریاضیات، قطعیت، تجرد و دقت، دامنه وسیع کاربردها، و زیبایی بی‌پیرایهٔ آن است. این دقت و قطعیت به میزان زیادی به علت مجرد بودن آن است که تا اندازه‌ای کاربردپذیری گستردهٔ آن‌را نیز توضیح می‌دهد. اما ارتباط نزدیک با دنیای فیزیکی خصوصیتی اساسی است که ریاضیات را از بازی صرف با نمادها متمایز می‌سازد. ریاضیات منطبق است بر تمامی آن‌چه در علم، دقیق محسوب می‌شود.

به نظر *کانت*، ریاضیات به وسیله شهود محض ما معین می‌شود، بنابراین تصور چیزی مخالف با ریاضیات غیرممکن است. اگر موافق باشیم دنیای فیزیکی، که شامل مغزهای ما نیز می‌باشد، یک حقیقت بی‌روح است، از این نظریه برمی‌آید که جهان خارجی به همراه ساختار فیزیولوژیک ذهن ما ریاضیات را معین می‌کند. کشف هندسه‌های نااقلیدسی دلیلی بر رد نظریهٔ *کانت* نیست، چرا که می‌توانیم آن‌ها را به عنوان فراساختارهایی روی هندسهٔ اقلیدسی و یا حتی یک هندسهٔ ضعیف‌تر تعبیر کنیم. ایراد مهم‌تر این است که نظریهٔ *کانت* توضیح کافی در مورد اصولی که براساس آن‌ها این هندسه‌ها و فراساختارهای دیگر ساخته شده‌اند به دست نمی‌دهد.

همه می‌دانیم شاؤ به گزافه گویی عادت کرده بود. وی با این استدلال که ایجاد شک بهترین راه جلب توجه به ایده‌های جدید است، از کار خود دفاع می‌کرد. ما نیز در وضعی مشابه، امیدواریم بتوانیم افکار و ایده‌های مبهم خود را با بررسی چند دیدگاه یک جانبه از ریاضیات روشن سازیم.

۱- ریاضیات رده گزاره‌های (منطقاً) معتبر یا ضروری« p، q را ایجاب می‌کند» است. به این ترتیب، به ازای هر قضیه داده شدهٔ q، می‌توانیم ترکیب عطفی اصول موضوع به کار رفته در برهان آن را با p نمایش می‌دهیم و در این صورت« p، q را ایجاب می‌کند» قضیه‌ای در منطق مقدماتی خواهد بود. به این مفهوم تا حدی سطحی، تمام ریاضیات را می‌توان به منطق مقدماتی تحویل کرد. اما در حقیقت این نظریه چیز مناسبی در مورد ریاضیات نمی‌گوید، زیرا ما علاقه‌مندیم p و q را بدون قید و شرط بیان کنیم. این نظریه به این پرسش که چرا یک pی معین، مثلاً استقرای ریاضی، به عنوان یک حقیقت ریاضی پذیرفته می‌شود، پاسخ درستی نمی‌دهد. علاوه بر این، مفاهیم اعتبار و لزوم (یا امکان) باید با مفهوم مجموعه یا شاید با مفاهیمی نظیر قانون و انتظام توضیح داده شوند. یک دیدگاه مربوط این است که منطق را بیشتر گسترش دهیم تا گزاره‌هایی مانند«به ازای هر x و y، اگر x و y اعضا مشترک نداشته باشند، x هفت عضو و y پنج عضو داشته باشد آن گاه $x \cup y$ دوازده عضو دارد» را شامل شود. در این صورت باید در منطق، اعداد و مفاهیم دیگری تعریف گردند که البته این شبیه دیدگاه بعدی است.

۲- ریاضیات نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها است. به مفهومی صریح، تمام ریاضیات می‌تواند از نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها استنتاج شود. برای روشن شدن موضوع می‌توانیم دستگاه استانداردی را که عموماً با نام ZF به آن ارجاع می‌شود در نظر بگیریم. این دیدگاه موافق

با نظر *فرگه* و *راسل* مبنی بر تحویل ریاضیات به منطق و نیز بـه طـور تنـاقض‌آمیـزی موافـق بـا نظـر *پوانکاره* (در ۱۹۰۰میلادی) مبنی بر حسابیدن ریاضیات (یعنی تحویل آن به اعداد و مجموعـه‌هـای عددی) است. این دیدگاه بر اثبات‌گراهای منطقی بیشترین تأثیر را گذاشته و منجر بـه تأکیـدی بـر اصل موضوع سازی و صوری سازی شده است. چندین ایراد به این دیـدگاه وارد اسـت. چنـان‌کـه می‌دانیم اشکالاتی در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد. این دیدگاه به این سؤال پاسخ نمـی‌دهـد که چرا از میان تمامی پیامدهای ممکن نظریـهٔ مجموعـه‌هـا فقـط آن‌هـایی کـه ریاضـیات امـروز را تشکیل می‌دهند برگزیده‌ایم و چرا مفاهیم و نتایج معینی از ریاضیات از بقیه جالـب‌تـر هسـتند. ایـن دیدگاه قادر نیست درکی شهودی از ریاضیات را آن‌چنان که یک ریاضی‌دان بزرگ دارد برای ما توجیه کند. با حذف بعضی ایده‌ها، مانند وجود مستقل اعداد طبیعی، در پـی آن اسـت کـه مطالـب مقدماتی‌تر و واضح‌تر را با مطالب مبهم‌تر توضیح دهد. موضوع جانبی منطق‌گرایی نیز وجـود دارد که در بعضی مجامع، علی‌رغم شواهد قطعی علیه آن، مرتبـاً مطـرح مـی‌شـود. دسـت کـم در یـک حالـت مهـم، ایـن وضـعیت تنـاقض‌آمیـز ناشـی از یکـی گـرفتن نادرسـت تعریـف نظریـهٔ منطقـی مجموعه‌های *فرگه* (توسیع محمولات) با نظریهٔ ریاضی مجموعه‌هـای *کـانتور* اسـت. ایـن اسـتدلال تقریباً به این صورت است: نظریهٔ *فرگه* شبیه به آن است که منطق و ریاضیات مـی‌تواننـد بـه نظریـه *کانتور* تحویل شوند؛ بنابراین، با یکی سازی، ریاضیات قابل تحویل به منطق است.

اینشتین در شرح حالی که به قلم خود نوشته است، دلیل انتخاب فیزیک به جـای ریاضـی را فقدان وحدت در ریاضیات بیان کرده است. ممکن است تعجب کنیم که چگونـه ممکـن اسـت نظریهٔ مجموعه‌ها به ریاضیات وحدت نبخشد. البته دستگاه صوری ZF نه تمام است و نه جـازم. بـه علاوه این دسـتگاه حتـی قـادر نیسـت دربـاره گـزاره‌هـای ریاضـی معروفـی نظیـر فرضـیهٔ پیوسـتار تصمیم‌گیری نماید. بنابراین به عنوان یک دستگاه تمام، از جنبـهٔ مفهـومی، رضـایت بخـش نیسـت. اینک اگر نامتناهی‌های مراتب بالاتر را کنار بگذاریم و خود را به ریاضـیات عملـی‌تـر نظیـر آنـالیز کلاسیک، نظریهٔ اعداد، و جبر مجرد محدود نماییم، قبـول ایـن‌کـه تقریبـاً تمـام قضـایای معـروف همانندهایی در ZF دارند، معقول به نظر خواهد رسید. آیا می‌توانیم ادعا کنـیم کـه ZF بـه همـراه تمامی شاخه‌های گوناگون ریاضی منشعب از آن، نمایانگر اشـاره‌ای اجمـالی بـه آن نـوع وحـدتی است که به دنبال آن بودیم؟

یک ایراد این است که این نمایش سعی دارد چهرهٔ مجردتر ریاضیات را ندیده بگیرد. مطمئناً اصول موضوع یک گروه یا یک میدان با الگوهای گوناگونی سازگارند. حتی قضایای آنالیز کلاسیک می‌توانند در دستگاه‌های اصل موضوعی قوی‌تر یا ضعیف‌تری اثبات شوند. این مطالب امکان وجود یک شبکه از دستگاه‌های اصل موضوعی را قوت می‌بخشد که هر دستگاه ساختار مجرد، و در واقع رده تمام الگوهای ممکن آن دستگاه را معین می‌کند. دستگاهی شبیه ZF یا یک دستگاه به قدر کافی بزرگ که هنوز ابداع نشده است، تمام این دستگاه‌ها را به این مفهوم در بر می‌گیرد که هیچ کس وجود شیئی را که با آن رو به رو نشده مسلم فرض نمی‌کند.

با این برداشت حتی ممکن است بدون استدلال دوری، ماوراء قضایایی در رابطه با همه الگوهای یک دستگاه اثبات کرد، زیرا آن‌ها همچنین نمی‌توانند در یک دستگاه نسبتاً ضعیف که هم الگوهای بسیار بزرگ و هم الگوهای نسبتاً کوچک را می‌پذیرد اثبات شوند. اگر چنین شبکه‌ای از حداکثر ده دستگاه، ابداع می‌کردیم به نوعی استخوان‌بندی دست می‌یافتیم که فقط می‌توانست با افزودن حقایقی درباره وضعیت کنونی، حدسی از تمایلات آتی و بالاخره نقاط درخشان تاریخی ریاضیات، آن‌را به صورت چیزی زنده تبدیل کند.

۳- ریاضیات مطالعه ساختارهای مجرد است. به نظر می‌رسد که این دیدگاه *بورباکی* باشد. تعدادی کتاب با نفوذ در اثبات این نظریه نوشته شده است. در این کتاب‌ها کوششی آگاهانه برای رها ساختن ریاضیات از کاربردهای آن انجام شده است، که در مجموع کار درستی نیست. نارسایی این چشم انداز نه تنها به نادیده گرفتن نتایج مرکزی گوناگونی که بیشتر از نوع ترکیباتی هستند، بلکه به خصوص به خاطر فقدان توجیه ذاتی انتخاب ساختارهایی که به دلایلی کاملاً خارجی نسبت به این رهیافت، اهمیت زیادی دارند، هویدا می‌شود. محتوای ساختاری نتایج ریاضی نشان داده نشده است. همچنین یک ناسازگاری اساسی وجود دارد، بدین معنی که در حد کلمات، نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها به عنوان زیربنا در نظر گرفته می‌شود ولی در عمل، تحقیقات گوناگونی که در زمینهٔ مبانی ریاضیات صورت می‌گیرد مورد بی‌اعتنایی واقع می‌شوند. این ایده هنگامی با طرز فکر متداول مطابقت بیشتری می‌داشت که عدد، مجموعه و تابع از طریقی شهودی‌تر مطرح می‌گردیدند و در این صورت حداقل در بیان واقعیت کار ریاضی‌دانان امروز موفقیت بیشتری به دست می‌آورد.

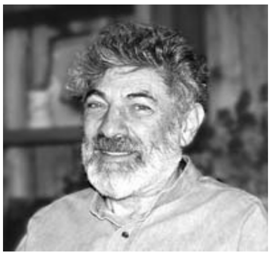
۴- ریاضیات سرعت بخشیدن به محاسبات است. در این تعریف، محاسبات تنها به نوع عددی آن محدود نمی‌شود. اعمال جبری و کار با عبارات منطقی (همچون در نظریه کلیدها) نیز مشمول در این تعریف است. یک دیدگاه وسیع‌تر این است که بگوییم هر بخش مهم از ریاضیات باید دارای محتوای الگوریتمی باشد. یک ایده متفاوت ولی مربوط می‌تواند این باشد که تمام ریاضیات برای کمک به علوم و کمک به ما برای فهمیدن، و کنترل طبیعت است. به نظر می‌رسد که در این دیدگاه‌ها نمی‌توان توضیح داد که، مثلاً، چرا ما اغلب برهان‌های ظریف‌تر ولی با موانع بلندتر را بیشتر می‌پسندیم و یا چرا از اثبات عدم امکان چیزی بسیار لذت می‌بریم. ممکن است گفته شود که در فعالیت‌های ریاضی عنصری به نام انسان نیز وجود دارد، و بنابراین مهم است که حتی در کاربردها نیز وضعیت قابل فهمی داشته باشیم. بنابراین یک برهان ظریف‌تر را بهتر درک می‌کنیم، و از این طریق به طور غیرمستقیم، خواهیم توانست در جستجوی الگوریتم‌های کارآمدتری باشیم؛ و نتایج حاکی از عدم امکان که محدودیت‌های روش‌های داده شده را آشکار می‌سازند، سرانجام ما را در یافتن نتایجی مثبت یاری خواهند کرد. اما، این نوع بحث یادآور فلاسفه‌ای است که برای انطباق واقعیت‌های ناخواسته، موضوع را بیش از حد کش می‌دهند.

فصل چهاردهم

عدد چه نوع چیزی است؟

گفتگوی جان براکمن با روبن هرش

ریاضیات چیست؟ نه فیزیکی و نه ذهنی است، بلکه اجتماعی است. قسمتی از فرهنگ و تاریخ است. شبیه قانون، مذهب، پول و همه چیزهای دیگری است که خیلی حقیقی‌اند اما فقط بخشی از آگاهی انسان اجتماعی را تشکیل می‌دهند و این دقیقاً همان چیزی است که ریاضیات است.



روبن هرش

به نظر *روبن هرش* ریاضی‌دان، ریاضیات فقط به عنوان قسمتی از فرهنگ انسان وجود یا واقعیت دارد. با وجود این‌که ریاضیات بی‌زمان و لغزش‌ناپذیر به نظر می‌رسد ولی پدیده‌ای اجتماعی- فرهنگی- تاریخی است.

او دیدگاه وسیعی دارد و در مورد مسائل کهن بسیار فکر می‌کند: اعداد چیستند؟

مثلث، مربع و دایره چیستند؟ مجموعه‌های نامتناهی چیستند؟ بعد چهارم چیست؟ معنا و ماهیت ریاضیات چیست؟ او ضمن زیاد اندیشیدن، نظریه‌های قدیم و جدید در مورد ماهیت ریاضیات را توضیح داده و مورد نقد قرار می‌دهد. هدف اصلی او روبرو شدن با مسائل فلسفی است: اشیا ریاضی به چه مفهومی وجود دارند؟ چگونه می‌توانیم نسبت به آن‌ها آگاهی کسب

کنیم؟ چرا ریاضی‌دانان فکر می‌کنند که اعیان ریاضی مستقل از دانش ریاضی و عمل ریاضی وجود دارند و جاودانه‌اند؟

جان (براکمن): روبن، یک سؤال جالب مطرح کن!

هرش: عدد چیست؟ مثلاً دو چیست؟ این یک سؤال کودکستانی است و البته یک بچهٔ کودکستانی جوابی این چنین می‌دهد: سه (سه انگشتش را بالا می‌برد). دو (دو انگشتش را بالا می‌برد). این یک جواب خوب و در عین حال یک جواب بد است.

در واقع برای بیشتر مقاصد، این جواب به قدر کافی خوب است ولی فراتر از کودکستان، تا حد جسارت در پرسیدن سؤالات عمیق‌تر، سؤال فوق به صورت زیر در می‌آید: یک عدد چه نوع چیزی است؟

حال وقتی می‌پرسید «یک عدد چه نوع چیزی است؟»، می‌توانید راجع به دو جواب اصلی فکر کنید:

یکی این‌که عدد در مکان خارجی است، شبیه یک صخره یا یک روح؛ یا آن‌که در داخل است، اندیشه‌ای در ذهن یک شخص. فلاسفه از یکی از این دو جواب دفاع کرده‌اند. این واقعیت رقت‌انگیز است زیرا هر کسی که کوچکترین دقتی بکند می‌تواند دریابد که هر دو جواب کاملاً اشتباه هستند. عدد چیزی خارجی نیست، مکانی برای حضور و یا چیزی برای عدد بودن، وجود ندارد.

همچنین فقط یک فکر نیست، زیرا با این همه، چه بدانید یا ندانید، دو و دو، چهار می‌شود. به این ترتیب در می‌یابید که سؤال مذکور بر خلاف آن‌چه در ابتدا به نظر می‌رسید، نه آن قدرها ساده و نه آن قدرها بدیهی است. یکی از فلاسفهٔ بزرگ ریاضی یعنی *گوتلوب فرگه*، مقالهٔ کاملی مبنی بر این حقیقت که ریاضی‌دانان قبل از او معنی یک را نمی‌دانستند منتشر کرد. یک چیست؟ هیچ کس به طور دقیق نمی‌تواند جواب دهد. البته *فرگه* به سؤال اخیر جواب داد ولی جوابش نه تنها بهتر نبود بلکه از پاسخ‌های قبلی هم بدتر بود و این چنین بود که این سؤال به عنوان یک سؤال عجیب و باور نکردنی تا امروز باقی ماند. ما همه چیز را درباره آن همه ریاضیات می‌دانیم، ولی نمی‌دانیم ریاضیات واقعاً چیست؟ البته وقتی می‌پرسیم «یک عدد چیست؟» چنین سؤالی در مورد یک مثلث، یک مربع، یک دایره، یک تابع دیفرانسیل‌پذیر یا یک عملگر

خودالحاق نیز دقیقاً قابل طرح است. شما در مورد عدد، زیاد می‌دانید؛ اما عـدد چیسـت؟ چـه نـوع چیزی است؟ به هر حال سؤال من این است، یک جواب طولانی به سؤال کوتاه شما.

جان: و جواب سؤال شما چیست؟

هرش: هوم، شما پاسخ را خیلی سریع می‌خواهید. باید بـرای یـافتن جـواب قـدری تـلاش کنید! من تدریجاً به جواب خواهم رسید.

هنگامی که می‌گویید یک چیز، شئ یا وجود ریاضی کاملاً خارجی است یعنی مسـتقل از فکر یا عمل انسان می‌باشد، و یا داخلی است یعنی یک اندیشه در ذهن شما است- شما نه در مورد اعداد، بلکه تنها در مورد وجود صحبت می‌کنید- در این صورت منظورتان این است کـه فقـط دو نوع هستی وجود دارد. هر چیزی یا خارجی و یا داخلی اسـت و هـیچ یـک از ایـن دو انتخـاب (دو قطب یا ثنویت) مناسب اعداد نیست، و این دلیل معما بودن آن است.

موضوع با این پیش فـرض اشـتباه کـه فقـط دو نـوع چیـز پیرامـون مـا وجـود دارد شـکل پیچیده‌ای به خود گرفته است. اما اگر وانمود کنید که یک فیلسوف نیستید و فقط یک انسان واقـع بین هستید و از شما سؤال شود آن‌چه که در پیرامونتان می‌باشد چیست، مـثلاً بـرگ جریمـه‌ای کـه باید آن را بپردازید، اخبار در تلویزیون، یک مراسم ازدواج که مجبور به شرکت در آن هسـتید یـا یک صورت حساب که باید پرداخت کنید، خوب هیچ یک از این چیزها صرفاً اندیشه‌ای در ذهن شما نیست و هیچ یک از آن‌ها نسبت به فکر یا عمل انسان، خارجی نیسـت. آن‌هـا نـوع دیگـری از واقعیت هستند و مشکل همین جاست. این نوع واقعیت با وجود این‌که به خوبی شناخته شده اسـت و از متافیزیک و هستی‌شناسی مستثنی گردیده است، ولی علوم انسان‌شناسی و جامعه‌شناسـی بـا آن سر و کار دارند. اما وقتی از منظر فلسفه نگاه می‌کنید، این نوع سوم به هـیچ‌گونـه مطمـح نظـر قـرار نمی‌گیرد و حتی رد می‌شود.

حال که جواب را عرضه کرده‌ام از آن آگاهید. ریاضیات نـه فیزیکـی و نـه ذهنـی اسـت بلکه اجتماعی است. قسمتی از فرهنگ و تاریخ است. شبیه قـانون، مـذهب، پـول و همـه چیزهـایی است که خیلی حقیقی‌اند، اما فقط بخشی از آگاهی انسان اجتماعی را تشکیل می‌دهند.

هم درونی و هم بیرونی است زیرا قسـمتی از جامعـه و فرهنـگ اسـت. درونـی نسـبت بـه جامعه و فرهنگ به عنوان یک کل، بیرونی نسبت به فردی که مجبور به یادگیری آن از کتاب‌هـا و در مدرسه است. این چیزی است که ریاضیات است.

اما برای بعضی از ریاضی‌دانان افلاطونی این موضـوع بـه قـدری سـنگین اسـت کـه حتـی شروع به درک مطلب تلاش زیادی می‌طلبد.

جان: روبن به نظر می‌رسد که شما در شرف واردکردن بعضی مباحث سیاسی در ایـن‌جـا هستید چیزی که در خط مشی جمهوری‌خواهان نیست.

هرش: می‌گویید که فلسفهٔ من ممکن است تحت نفوذ سیاستم در آمده باشد. خـوب ایـن درست است! این یکی از چیزهای بسیار جدید در کتابم است که به همبستگی بین عقیده سیاسی و اعتقاد در مورد ماهیت ریاضیات توجه دارد.

جان: آیا شما نامی برای این راه حل دارید؟

هرش: من آن را فلسفهٔ انسان‌گرایانه ریاضیات می‌نامم. این واقعاً یک مکتب نیسـت، هـیچ کس دیگری با این نام وارد این بحث نشده است، اما افراد دیگری نیز هسـتند کـه بـه طریـق مشـابه فکر می‌کنند و نام‌های گوناگونی به آن‌ها داده‌اند. من در این‌جا «یک گرگ تنها نیستم، مـن یکـی از ماوریک‌هایم، به همان معنایی که آن‌ها را می‌نامیم، گرگ‌هـایی کـه در خـارج از حیطـهٔ فلسـفه زوزه می‌کشند.»

در هر صورت به سؤال دیگرمان برگردیم. من دریافتم که با تقسیم فلاسفه ریاضـی بـه دو گروه توضیح بهتری ارائه می‌شود. یک گروه که آن‌را عمده‌گرا و دیگری که آن‌را انسان‌گراها یـا ماوریک‌ها می‌نامیم. انسان‌گراها یـا ماوریـک‌هـا ریاضـیات را بـه صـورت یـک فعالیـت انسـانی، و گرایش عمده آن‌را به صورت چیزی غیر انسانی و فوق انسانی می‌بینند. در هر حال در طول تاریخ، انسان‌گراها وجود داشته اند، که ارسطو یکی از آن‌ها بود. نمی‌دانم آیا در آن زمان نیـز ارتبـاطی بـا سیاست وجود داشت یا خیر.

بنابراین سعی کردم که با توجه به موقعیت زمانی، این مردان را به صـورت راسـت‌گـرا یـا چپ‌گرا معرفی کنم. *افلاطون* خیلی راست، *ارسـطو* تـا حـدی لیبـرال، *اسـپینوزا* انقلابـی و *دکـارت* سلطنت طلب بودند. این‌ها حقایق معلومی هستند. مردانی هـم وجـود دارنـد کـه در ایـن رده‌بنـدی نمی‌گنجند.

چنین به نظر می‌رسد که شما فقط به این موضوع توجه می‌کنید که انسـان‌گراهـا بـه طـور برجسته چپ‌گرا و عمده‌گراها به طور برجسته راست‌گرایند. هر تبیینی از ایـن مطلـب یـک گمانـه خواهد بود با این حال به طور شهودی با معنی است. برای مثال یک نمونه واقعی از فلسفه ریاضیات

عمده‌گرا، افلاطون‌گرایی است. افلاطون‌گراها می‌گویند که همهٔ اشیا و اعیان ریاضی، چه آن‌هایی که ما هنوز کشف نکرده‌ایم و چه آن‌هایی که هرگز کشف نخواهند شد، همه از ازل وجود داشته‌اند. هیچ تغییری در حیطهٔ ریاضیات وجود ندارد، ما چیزها را کشف می‌کنیم و به این ترتیب دانشمان افزایش می‌یابد. اما دنیای ریاضی واقعاً به طور کامل ایستا است، همواره وجود داشته است و همواره خواهد بود.

می‌دانید این نوعی محافظه کاری است؟

درست متناسب با افکار شخصی که عقیده دارد رسوم اجتماعی نباید تغییر کند. بنابراین چنین همانندهایی وجود دارد البته استثناهایی نیز وجود دارد. برای مثال *برتراند راسل* افلاطون‌گرا و سوسیالیست بود. یکی از فلاسفهٔ محبوب من یعنی *ایمره لاکاتوش* از نظر سیاسی راست‌گرا اما از نظر فلسفی بسیار رادیکال بود. این همبستگی‌ها بسیار سست بوده و از روی آمار به دست آمده‌اند و به صورت یک حکم قطعی نیستند. شما نمی‌توانید راجع به فلسفهٔ کسی از روی گرایش‌های سیاسی‌اش قضاوت کنید و بر عکس. من برای نام‌گذاری ایده‌هایم جستجو کردم و چندین نام که برای نقطه نظرهای مشابه به کار می‌رود یافتم: ساخت‌گرایی اجتماعی، خطاپذیری، شبه‌تجربه‌گرایی، طبیعت‌گرایی. مایل نبودم نام دیگری از کسی اخذ کنم، زیرا من راه خود را روشن ساخته‌ام و نمی‌خواهم خود را در زمرهٔ مکتب شخص دیگری قرار دهم. نامی که دقیق‌ترین و صحیح‌ترین باشد، مفهوم‌گرایی اجتماعی بود.

ریاضیات متشکل است از مفاهیمی که به طور جنبی و انفرادی وضع شده‌اند. شاید من انسان‌گرایانه فکر کنم. زیرا متعلق به گروهی هستم که شبکه ریاضیات انسان‌گرا نامیده می‌شود. انسان‌گرایی مناسب است زیرا می‌گوید ریاضیات چیزی انسانی است. هیچ ریاضیاتی بدون آدمیزاد وجود ندارد. بسیاری از مردم فکر می‌کنند که بیضی‌ها و اعداد و غیره وجود دارند، خواه مردم دربارهٔ آن‌ها بدانند یا ندانند، این چیزی است که من فکر می‌کنم اشتباه است.

جان: به نظر می‌رسد که در این‌جا دربارهٔ یک اصل انسان‌شناسانه از ریاضیات صحبت می‌کنیم.

هرش: شاید این‌طور باشد. هرگز در مورد آن فکر نکرده‌ام. روزی بحثی جدی در دانشگاه نیومکزیکو با یکی از دوستانم که یک فیلسوف علم بود داشتم. او می‌گفت: اکنون ۹

سیاره وجود دارد و قبل از این‌که انسانی وجود داشته باشد ۹ سیاره وجود داشت. پس عدد ۹ وجود داشته است قبل از این‌که هیچ انسانی وجود داشته باشد.

در این‌جا اشکالی وجود دارد که مجبورم آن‌را مشخص کنم. ما اشیا ریاضی شبیه اعداد کوچک را واقعیت ریاضی می‌بینیم و این مطلب متناقض با این ایده که اعداد اعیانی اجتماعی هستند به نظر می‌رسد. شیوهٔ حل این مشکل توسط دیگران نیز تذکر داده شده است.

ما واژگان عددی را به دو منظور متفاوت به کار می‌بریم: به عنوان اسامی و به عنوان صفات. این ملاحظه مهم است. وقتی می‌گوییم ۹ سیب، ۹ یک صفت است. اگر این که ۹ سیب روی میز وجود دارد، حقیقتی خارجی (عینی) باشد آن‌گاه این که سیب‌ها قرمزند یا آن‌ها رسیده‌اند یا هر چیز دیگری در مورد آن‌ها نیز، به همان اندازه حقیقت خارجی (عینی) است و در این حالت واقعاً هیچ مشکل خاصی درباره آن‌ها وجود ندارد. اشیا مشکل ساز می‌شوند وقتی ما ناآگاهانه و بدون دقت بین تعبیر صفت‌گونه واژگان ریاضی این جهان حقیقی (مانند عدد ۹) و تجرد محض که درباره‌اش در کلاس ریاضی صحبت می‌کنیم، ارتباطی ایجاد می‌کنیم. این واقعاً همان ۹ نیست، البته یک بستگی متقابل و یک ارتباط وجود دارد. اما عدد ۹ به عنوان یک شئ مجرد و به عنوان قسمتی از یک دستگاه عددی یک ملک انسانی و یک مخلوق آدمی است و بدون ما وجود ندارد. وجود ممکن گردآیه‌هایی از اشیا ۹ تایی یک چیز فیزیکی است که مطمئناً بدون وجود ما وجود دارد. این دو نوع ۹ متفاوتند. به طور مشابه می‌توانیم بگوییم که یک سیاره گرد است، یک حقیقت عینی، اما مفهوم گردی (گردی ریاضی)، چیز دیگری است. متأسفم از این‌که فلسفه قطعاً یک فعالیت دل بخواه است. اکثر مردم حتی ریاضی‌دانان نمی‌دانند که آیا آن‌ها دارای فلسفه هستند یا نه، یا فلسفهٔ آن‌ها چیست. مسلماً آن‌چه آن‌ها انجام می‌دهند تحت تأثیر بحث‌های فلسفی قرار نمی‌گیرد. این مطلب در بسیاری از زمینه‌های دیگر درست است. وکیل کاری بودن یک چیز است و فیلسوف بودن چیز دیگر. برای توجیه فعالیت فلسفی باید به سطح عمیق‌تری رفت، برای مثال همچون گفتهٔ *سقراط* در مورد زندگی تجربه نشده. رقت‌انگیز است در تمامی زندگیتان ریاضی‌دان باشید ولی هرگز در نگرانی، در اندیشه یا در بیم آن‌چه به ریاضیات معنی می‌دهد نباشید. بسیاری از مردم چنین‌اند. من این را با شنای روی آب یک ماهی قزل‌آلا مقایسه می‌کنم. او می‌داند چطور در سطح آب شنا کند اما نمی‌داند چه کاری انجام می‌دهد و چرا.

هرش: فلسفه ریاضیات به تدریس ریاضیات بسیار وابسته است. نادرستی‌های تدریس ریاضیات خاص این کشور (آمریکا) نیست. این روزها مردم ایالات متحده در مورد تدریس ریاضیات بسیار خرده گیرند، گو این‌که این، فقط یک مسألهٔ آمریکایی است. گرچه بعضی از کشورهای دیگر رتبه‌های سنجش بالاتری به دست آورده‌اند ولی اساس تدریس بد ریاضیات، بین‌المللی است و این موضوعی استاندارد است.

در بعضی از جهات ما به بدی کشورهای دیگر نیستیم. با این حال نمی‌خواهم بگویم همه چیز رو به راه است.

اجازه دهید سه طرز تلقی فلسفی از ریاضیات را بیان کنم:

افلاطون‌گرایی می‌گوید ریاضیات در مورد ماهیت‌های مجردی است که مستقل از انسان هستند. صورت‌گرایی می‌گوید که ریاضیات چیزی جز محاسبات نیست، در کل هیچ معنایی ندارد و با پیروی از قوانین، پاسخ‌های درست (به سؤالات مطرح شده) به دست می‌آید.

انسان‌گرایی به ریاضیات به عنوان بخشی از فرهنگ و تاریخ انسان می‌نگرد. رسیدن به نتایج دقیق در مورد این نوع چیز، دشوار است. اما احساس می‌کنم تقریباً بدیهی است که افلاطون‌گرایی و صورت‌گرایی، ضد آموزشی هستند و با فهم در تعارضند و حداقل انسان‌گرایی صدمه‌ای وارد نمی‌کند و می‌تواند سودمند باشد.

صورت‌گرایی به عادت مربوط است. روشی سنتی که هنوز در بخش‌های زیادی از جهان مرسوم است. این‌جا الگوریتمی موجود است این مسلماً چیزی است که بسیاری از مردم را از ریاضیات متنفر می‌کند (منظورم این نیست که ریاضی‌دانانی که صورت‌گرایند از تدریس مبتنی بر عادت دفاع می‌کنند، اما باید اذعان کرد که به طور طبیعی تصور صورت‌گراها از ریاضیات متناسب با روش تعلیم بدون تفکر است).

انواع گوناگونی از افلاطون‌گرایی وجود دارد. بعضی افراد معلم خوبی هستند و بعضی بد. اما این ایده افلاطونی (به بیان دوستم *فلیپ دیویس*) که π در آسمان است، ریاضیات را ترسناک و دور از دسترس می‌سازد و این می‌تواند دلیل عدم موفقیت یک دانش‌آموز در یادگیری یا دلیل موجه برای این سخن یک معلم باشد که «بعضی متوجه ریاضیات نمی‌شوند». فلسفهٔ انسان‌گرایی ریاضیات را از آسمان به زمین می‌آورد، آن‌را از نظر روانی قابل دسترس می‌سازد و این احتمال را که کسی بتواند یاد بگیرد، افزایش می‌دهد. زیرا این درست یکی از چیزهایی است

که مردم انجام می‌دهند. این صرفاً یک عقیده است. هیچ داده و آزمونی وجود ندارد، اما اعتقاد دارم که چنین است.

جان: شما چگونه ریاضیات انسان‌گرایانه را تدریس می‌کنید؟


فیلیپ دیویس

هرش: قصد دارم از پاسخ به این سؤال قدری طفره بروم. به شما مقصودم را از تدریس خوب ریاضی می‌گویم. این‌که چگونه این مطلب با فلسفه مرتبط می‌شود ممکن است کم اهمیت باشد.

مسأله اساسی، تأثیر و تأثر متقابل و ارتباط است. فقط در ریاضیات است که شما نمونه‌ای دارید که توسط *نوربت واینر* به طور فرضی معرفی شده است: او به داخل کلاس می‌آید به دانش‌آموزان نگاه نمی‌کند، نوشتن روی تخته را شروع می‌کند، وقتی ساعت به اتمام می‌رسد از نوشتن دست می‌کشد و باز هم بدون نگاه به دانش آموزان از کلاس خارج می‌شود.

یک معلم ریاضی خوب درسش را با مثال شروع می‌کند او به جای این‌که جوابی به سؤال مطرح نشده بدهد، ابتدا سؤالی را مطرح می‌کند و سپس جواب آن‌را ارائه می‌کند او به مکالمات و حرکات چشم دانش‌آموزان کلاس توجه دارد. اگر دانش‌آموزان چشمانشان را به اطراف بگردانند و یا لم دهند، او اثبات یا محاسبه‌اش را متوقف می‌کند و آن‌ها را یک جوری حتی با گفتن «متوجه این نکته نمی‌شوم»، وادار می‌کند از خود حساسیت نشان دهند. در کل هیچ کلاس ریاضی بد نیست، در صورتی که دانش‌آموزان آزادانه صحبت کنند و هیچ سخنرانی ریاضی علی‌رغم زیبایی آن خوب نیست، هر گاه به شنوندگان فقط اجازه دهند که منفعل باشند. بعضی از این‌ها در تدریس هر چیزی به کار می‌رود، اما متأسفانه ریاضیات، ناقل تدریس بد است.

خیلی عجیب است که قضایای ریاضی واقعاً می‌توانند بسیار مفید باشند، اما هیچ کس این‌را نمی‌داند. معلم این مطلب را بیان نمی‌کند و دانش‌آموزان هم آن‌را نمی‌دانند. تمام آن‌چه که آن‌ها می‌دانند این است که ریاضیات بخشی از دروسشان است. این چیزی غیر انسانی است، آیا چنین نیست؟

حکایتی دارم. به کلاسی درس می‌دهم که خودم آن‌را به نام حل مسأله برای معلمان دبیرستان و مدارس راهنمایی و معلمان آینده طرح ریزی کرده‌ام، هدف این کلاس مشغول داشتن آن‌ها به حل مسأله، داشتن شوخ طبعی در حل و داشتن اطمینان نسبت به آن است. به این امید که

وقتی معلم شدند، بعضی از آن‌ها را در کلاسشان پیاده سازند. دانشجویان وظایفی داشتند: آن‌ها باید روی موضوعی کار می‌کردند و سپس در کلاس راجع به آن صحبت می‌کردند. یک روز داوطلب خواستم. هیچ داوطلبی نبود. انتظار کشیدم، انتظار. سپس با شجاعت به عقب کلاس رفتم، نشستم و هیچی نگفتم. و لحظه‌ای بعد یک دانشجو به پای تخته رفت. کلاس به کلاسی خوب بدل شد. کلید این بود که خواستم سکوت کنم، چیز ساده‌ای که صدها بار آن را انجام داده بودم گفتن این جمله بود:«بسیار خوب من آن را به شما نشان خواهم داد.»

زیاد صحبت کردن شاید بزرگترین مشکل برای اکثر یا تقریباً همهٔ معلم‌ها باشد. ساکت باشید فکر نکنید اگر دو تا سه دقیقه سکوت کنیم، دنیا به آخر می‌رسد.

جان: شما قبلاً کلمهٔ زیبایی را به زبان آوردید، زیبایی چیست؟

هرش: خوشبختانه پاسخی برای این سؤال دارم. دوستم *جیان‌کارلوروتا* به این موضوع در کتاب جدیدش «اندیشه‌های ناگسسته» پرداخته است. او می‌گوید تمایل به گفتن «چقدر زیبا» با یک بصیرت همراه است. زیبایی وقتی است که چیزهایی غیر واضح یا مغشوش ناگهان با هم در تناسب قرارمی‌گیرند. شاید وضعیت‌های دیگری موجود باشد که شما آن‌را زیبا بنامید. اما احساس می‌کنم وقتی کتاب مزبور را خواندم احساس کردم که او (نویسنده) حقیقتاً چیزی برای گفتن دارد. زیرا ما مدام دربارهٔ زیبایی صحبت می‌کنیم بدون این‌که منظورمان از آن روشن باشد. این کار کاملاً ذهنی است. اما روتا خیلی به آن نزدیک شد. نظم حاصله از اغتشاش، سادگی حاصله از پیچیدگی و فهم حاصله از عدم درک، زیبایی ریاضی است.

فصل پانزدهم

شهود چهار بعدی

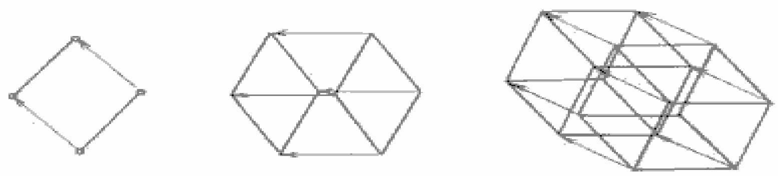
روبن هرش

خط یک بعدی است. یک سطح صاف دو بعدی است. مواد جامد سه بعدی هستند. اما چهارمین بعد چیست؟

بعضی از مردم می‌گویند که زمان، چهارمین بعد است. در نسبیت *اینشتین*، یک هندسه چهار بعدی به کار می‌رود که در آن از ترکیب یک فضای سه بعدی و یک مختصات زمانی یک بعدی یک پیوستار چهار بعدی حاصل شده است. اما نمی‌خواهیم درباره نسبیت و فضا- زمان صحبت کنیم. فقط می‌خواهیم بدانیم که آیا با معنی است در فهرست ابعاد هندسی یک قدم جلوتر رویم. برای مثال در بعد دو شکل‌های آشنای دایره و مربع را داریم. مشابه سه بعدی آن‌ها کره و مکعب است. آیا می‌توانیم دربارهٔ ابرکره یا ابرمکعب صحبتی ارائه کنیم؟

می‌توانیم در سه مرحله از نقطه به یک مکعب برسیم. در اولین مرحله، دو نقطه را که به فاصله یک سانتی‌متر از یکدیگرند به یکدیگر وصل می‌کنیم تا پاره‌خط، یعنی یک شکل یک بعدی به دست آوریم. سپس هر زوج از نقاط پایانی دو پاره خط یک سانتی‌متری را که به فاصله یک سانتی‌متر و به موازات هم قراردارند، به یکدیگر متصل می‌کنیم تا به یک مربع یک سانتی‌متری، یعنی یک شکل دو بعدی برسیم. در مرحلهٔ بعد، گوشه‌های متناظر دو مربع یک

سانتی‌متری را که موازی یکدیگرند، و مثلاً اولی به فاصلهٔ یک سانتی‌متر بالای دومی قرار دارد، به هم وصل می‌کنیم تا یک مکعب سه بعدی حاصل شود.



پس برای بدست آوردن یک ابرمکعب یک سانتی‌متری، باید دو مکعب یک سانتی‌متری را که به فاصلهٔ یک سانتی‌متر و به موازات هم قرار دارند در نظر بگیریم و سپس رأس‌های متناظر را به هم وصل کنیم. به این شیوه باید یک ابرمکعب یک سانتی‌متری، یعنی یک شکل چهار بعدی حاصل شود.

مشکل این است که باید در هر مرحله در یک جهت جدید حرکت کنیم. این جهت جدید باید عمود بر جهت های قبلی باشد. اما تمام جهاتی که برای ما قابل دسترسند با حرکت به جلو و عقب، راست و چپ و بالاخره بالا و پایین قبلاً استفاده شده‌اند. ما موجوداتی سه بعدی هستیم که قادر نیستیم از فضای سه بعدی به چهارمین بعد گذرکنیم. در حقیقت تصور چهارمین بعد فیزیکی شاید در حد یک تخیل و یک دست آویز برای داستان‌های علمی تخیلی باشد. تنها نکته راجع به آن این است که ما می‌توانیم آن‌را تصور کنیم و این‌که هیچ چیز غیرمنطقی و ناسازگار در مورد تصورمان وجود ندارد.

اگر ابرمکعبی چهار بعدی وجود داشته باشد، می‌توانیم بسیاری از خواص آن‌را کشف کنیم. می‌توانیم تعداد رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌های آن‌را بشماریم. چون ابرمکعب از اتصال دو مکعب سه بعدی که هر کدام ۸ رأس دارند ساخته شده است، باید ۱۶ رأس داشته باشد. علاوه بر همه یال‌هایی که آن دو مکعب دارند، یال‌های جدیدی نیز دارد، یک یال به ازای هر زوج از رأس‌هایی که به هم وصل می‌شوند، پس ۳۲ = ۸ + ۱۲ + ۱۲ یال دارد. با قدری فکر می‌توان دید که ابرمکعب ۲۴ وجه (مربعی) و ۸ ابروجه (مکعبی) دارد.

جدول زیر تعداد «قسمت‌های» پاره خط، مربع، مکعب و ابرمکعب را نشان می‌دهد این اکتشافی شگفت انگیز است که مجموع این قسمت‌ها همیشه توانی از سه است.

بعد	شئ	وجه ۰ بعدی (رأس)	وجه ۱ بعدی (رأس)	وجه ۲ بعدی (رأس)	وجه ۳ بعدی (رأس)	وجه ۴ بعدی (رأس)
۰	نقطه	۱	–	–	–	–
۱	پاره خط	۲	۱	–	–	–
۲	مربع	۴	۴	۱	–	–
۳	مکعب	۸	۱۲	۶	۱	–
۴	ابرمکعب	۱۶	۳۲	۲۴	۸	۱

در یک درس حل تمرین برای معلم‌های دبیرستان و محصلین، کشف تدریجی این حقایق در مورد ابر مکعب معمولاً یک یا دو هفته طول می‌کشد. حقیقت این است که این همه اطلاعات روشن دربارهٔ ابرمکعب گویای این است که به مفهومی، ابرمکعب وجود دارد.

البته این ابرمکعب از نظر فیزیکی وجودی خیالی است. وقتی که از تعداد رأس‌های یک ابرمکعب می‌پرسیم، منظورمان این است که اگر یک چنین چیزی وجود می‌داشت، چه تعداد رأس می‌توانست داشته باشد. این شبیه این لطیفهٔ قدیمی است که «اگر شما برادری می‌داشتید، آیا شاه ماهی دوست می‌داشت؟» تفاوت این است که سؤال در مورد برادری که وجود ندارد احمقانه است در حالی که سؤال دربارهٔ رأس‌های مکعبی که وجود ندارد چنین نیست، زیرا دارای جواب معینی است.

در حقیقت با به کار بردن روش‌های جبری، یعنی با تعریف یک ابرمکعب به کمک مختصات، می‌توانیم به هر سؤال در بارهٔ آن پاسخ دهیم. می‌توانیم آن‌را به جبر تحویل کنیم، دقیقاً چنان‌که هندسهٔ تحلیلی معمولی سؤالات مربوط به شکل‌های دو یا سه بعدی را به جبر تحویل می‌کند. جبر چهار متغیره اساساً مشکل‌تر از جبر دو یا سه متغیره نیست، پس می‌توانیم پرسش‌های مربوط به ابر مکعب‌ها را به همان سادگی سؤالات مربوط به مربع‌ها و مکعب‌ها پاسخ دهیم. به این طریق، ابرمکعب یک مثال خوب برای چیزی است که وجود ریاضی خوانده می‌شود. این شئ فرضی یا تصوری است ولی هیچ شکی دربارهٔ تعداد رأس‌ها، یال‌ها، وجه‌ها و ابروجه‌های آن وجود ندارد!

اشیاء هندسه دو یا سه بعدی معمولی اشیایی ریاضی‌اند که گرچه فرضی یا تصوری هستند ولی به واقعیت فیزیکی نزدیک‌اند، بر خلاف ابرمکعب که ما نمی‌توانیم آن‌را بسازیم. مکعب سه بعدی یک شئ ایده آلی است. اما می‌توانیم با نگاه به یک مکعب چوبی خواص مکعب سه بعدی را معین کنیم. تعداد یال‌های مکعب سه بعدی ۱۲ است چنان‌که تعداد یال‌های یک حبه قند نیز ۱۲ است. می‌توانیم با رسم تصاویر یا ساختن مدل‌ها و سپس بررسی آن‌ها اطلاعات زیادی دربارهٔ هندسهٔ دو یا سه بعدی به دست آوریم. ممکن است با درست استفاده نکردن از یک تصویر یا مدل به اشتباه بیافتیم، اما کمتر چنین چیزی پیش می‌آید. توصیف موقعیتی که در آن فردی به این طریق اشتباه کند، به مهارت نیاز دارد. علی‌القاعده، کاربرد تصاویر و مدل‌ها سودمند است، حتی برای درک هندسهٔ دو یا سه بعدی ضروری می‌نماید. استدلال مبتنی بر مدل‌ها و شکل‌ها، خواه واقعی خواه تصاویر ذهنی آن‌ها، استدلال شهودی نامیده می‌شود که در برابر استدلال دقیق یا صوری قرار دارد.

وقتی به هندسهٔ چهار بعدی می‌رسیم، به نظر می‌رسد که چون ما موجوداتی سه بعدی هستیم، براساس سرشت خود، امکان استدلال شهودی دربارهٔ اشیا چهار بعدی نداریم. ولی چنین نیست، در واقع درک شهودی اشیا چهار بعدی غیر ممکن نیست.

در دانشگاه براون، *توماس بنکاف* که یک ریاضی‌دان و *چارلز اشتراس* که یک دانشمند کامپیوتر است، تصاویر متحرک کامپیوتری از یک ابرمکعب که به درون و بیرون فضای سه بعدی ما حرکت می‌کند تهیه کرده‌اند.

برای درک آن‌چه انجام داده‌اند موجود دو بعدی مسطحی را تصور کنید که در سطح یک استخر زندگی می‌کند و فقط می‌تواند اشیا روی این سطح (ولی نه بالا یا پایین سطح) را ببیند.

این موجود مسطح به دو بعد فیزیکی محدود است دقیقاً همچون ما که به سه بعد فیزیکی محدود هستیم. او می‌تواند از اشیا سه بعدی فقط از طریق مقاطع دو بعدی آن‌ها با جهان مسطحش آگاه شود. اگر یک مکعب صلب از هوا به داخل آب عبور نماید، او مقاطع عرضی را که مکعب با سطح آب هنگام ورود به سطح، گذر از آن و بالاخره ترک سطح می‌سازد، می‌بیند.

در صورتی که مکعب مکرراً تحت زوایا و جهات مختلف از سطح مزبور گذر کند، موجود دو بعدی سرانجام اطلاعات کافی برای درک مکعب، حتی اگر نتواند از جهان دو بعدی خود بگریزد، خواهد داشت.

فیلم‌های اشتراس- بنچاف نشان می‌دهد که ما چه خواهیم دید، اگر یک ابرمکعب از فضای سه بعدی ما تحت یک یا چند زاویه عبور کند. ما شکل‌های کم و بیش پیچیده‌ای از رأس‌ها و یال‌ها خواهیم دید. توصیف آن‌چه ما به کمک یک فرمول ریاضی تصور می‌کنیم یک چیز است و دیدن تصویری از آن و حتی بهتر دیدنش در حال حرکت، یک چیز کاملاً متفاوت با آن است. وقتی که فیلم بنچاف- اشتراس را دیدم تحت تأثیر موفقیت بزرگ آن‌ها و لذت بصری حاصل از تماشای آن قرار گرفتم. اما کمی احساس ناامیدی به من دست داد، زیرا من هیچ احساس شهودی از ابرمکعب به دست نیاوردم.

چند روز بعد در مرکز محاسبه دانشگاه براون، اشتراس چگونگی عمل با سیستم گرافیکی که تولید چنین فیلمی را ممکن ساخت به من نشان داد. کاربر، پشت دستگاه کنترل در جلوی صفحه یک تلویزیون می‌نشیند. سه کلید به او اجازهٔ چرخش یک شکل چهار بعدی روی هر زوج از محورها در فضای چهار بعدی را می‌دهد و به این ترتیب وی روی صفحه، اشکال سه بعدی مختلفی را که حاصل تلاقی شکل چهار بعدی با فضای سه بعدی است می‌بیند.

کنترل دستی دیگری این امکان را فراهم می‌کند که این برش سه بعدی را به دلخواه به اطراف بچرخانیم. دکمهٔ دیگری اجازه می‌دهد که تصویر را منبسط یا منقبض کنیم، جلوهٔ حاصل این است که بیننده فکر می‌کند در حال پرواز، از تصویر دور می‌شود یا به سوی (در واقع به توی) تصویر روی صفحه نمایش حرکت می‌کند (در فیلم جنگ ستارگان بعضی از جلوه‌های پرواز در نبرد ستاره‌ای به همین شیوه با گرافیک‌های کامپیوتری خلق شده است). در مرکز کامپیوتر، اشتراس نشان داد چطور این کنترل‌ها می‌توانند برای به دست آوردن تصاویر سه بعدی گوناگون از ابرمکعب به کار روند.

من تماشا کردم و تمام سعی خودم را کردم تا آن‌چه را نگاه می‌کردم دریابم. او سپس بلند شد و پیشنهاد کرد روی صندلی، جلوی دستگاه بنشینم. سعی کردم ابرمکعب را بچرخانم، آن‌را دور یا نزدیک کنم یا به طرق دیگر بچرخانم. ناگهان توانستم آن‌را احساس کنم! وقتی یاد گرفتم چگونه با آن کار کنم ابرمکعب، تحت احساس قدرت در نوک انگشتانم برای تغییر آن‌چه می‌دیدم و بازگشت به حالت قبل، به وجودی حس شدنی تبدیل شد. کنترل فعال در میز فرمان کامپیوتر اتحادی از حرکات جسمی و تفکر بصری به وجود آورد که در نتیجه، ابرمکعب را تا سطح درک شهودی پیش راند.

در این مثال، می‌توانیم کار را فقط با درک مجرد یا جبری آغاز کنیم که برای طراحی یک سیستم کامپیوتری به کار می‌رود. سیستمی که برای ابرمکعب انواع تجارب شامل کنترل کردن، حرکت دادن و دیدن مکعب‌های سه بعدی واقعی را به اجرا می‌گذارد و شهود سه بعدی آن‌را به ما می‌دهد. بنابراین شهود چهار بعدی برای کسانی که خواهان یا محتاج به آنند قابل دسترس است.

وجود این امکان امیدهای جدیدی را برای تحقیق در مورد شهود ریاضی نوید می‌دهد. به جای کار با اطفال، تشریح نژادها یا مواد تاریخی که در مکتب *پیاژه* برای مطالعه تکوین شهود هندسه مقدماتی باید صورت پذیرد، می‌توانیم با بزرگسالان کار کنیم، خواه آنان که تربیت ریاضی یافته‌اند خواه آنان که به طور طبیعی رشد یافته‌اند، و تلاش کنیم با آزمون‌های روانشناختی، تکامل شهود چهار بعدی را، احتمالاً با جداسازی نقشی که با شهود صرف و کارکردن فعال بازی می‌شود، مستند سازیم.

تحت چنین مطالعه‌ای درک ما از شهود ریاضی بالا می‌رود و بهانهٔ کمتری برای کاربرد شهود به صورت یک اصطلاح مبهم برای توضیح چیزهای سری یا مشکوک وجود خواهد داشت.

با توقف در موضوع معرفت‌شناسی، انسان در می‌ماند که آیا واقعاً اختلافی اساسی بین بعد چهار و بعد سه وجود دارد یا خیر. می‌توانیم مفهوم شهود را گسترش دهیم تا با شئ تصوری چهار بعدی ما جور در آید. وقتی این کار انجام شد، به نظر نمی‌رسد که خیلی موهومی‌تر از اشیا واقعی همچون منحنی‌های مسطح و رویه‌های فضایی باشد. این‌ها همه اشیا ایده آلی هستند که ما قادریم هم به طور شهودی و هم به طور منطقی در اختیار بگیریم.

فصل شانزدهم

نظری به ریاضیات پست‌مدرن

پست‌مدرنیسم (پُمُ) یک حرکت علیه بنیان‌های فکری است که امروزه هنر، سیاست، اقتصاد، علم، فن‌آوری و فرهنگ را تحت تأثیر خود قرار داده است. این مقاله (با زبان مدرنیستی) به توصیف دیدگاه فلسفی پم راجع به علم (با تکیه بر ریاضیات) و پیامدهای آموزشی آن می‌پردازد.

پست‌مدرنیسم

پست‌مدرنیسم (پم) برای هیچ چیز از قبل تعیین شده‌ای تکوین نیافته است و هیچ خط مشی مشخص و تغییرناپذیری ندارد. با این حال، در همهٔ فعالیت‌های بشری ظاهر شده است. پم جنبشی علیه خردباوری است و به همین دلیل تبیین آن امری غامض است.

پم در ابتدا حرکتی در معماری بود و با تقلید از الگوهای سنتی، معماری مدرن را نفی کرد. در هنر، پست‌مدرنیست‌ها با نمادها و علائم فاقد معنا، با تأکید روی اشکال ناقص، و با استفاده از رنگ‌ها، مواد و روش‌های ناهمگن به توصیف جهان پرداختند. موسیقی‌دان‌های پست‌مدرن از ملودی و هارمونی اجتناب کردند. همچنین نویسندگان پست‌مدرن داستان‌های خود را با چیزهایی غیر از پدیدارها، با راویان متعدد و به صورت ناتمام ارایه کردند.

این‌که پم توسط چه کسی یا از چه زمانی شروع شده است نامشخص است. با این حال از متفکران معاصر پیرو پم می‌توان از *میشل فوکو*، *ژاک دریدا*، *ژان فرانسوا لیوتار*، *ژان بودریار* و *فلکس گتاری* نام برد.

به زعم اکثر پست‌مدرنیست‌ها، پست‌مدرنیسم نقد مدرنیسم و یا عکس العملی نسبت به آن است.

در این‌جا مدرنیسم اشاره به دوره تاریخی بین قرن هفدهم و اوایل قرن بیستم دارد که از دیدگاه فلسفهٔ علم بر موارد ذیل تأکید می‌ورزد:

الف) واقعیت (غایی). چیزی قائم به ذات، مستقل از ادراک آدمی و فراسوی چارچوب زمان و مکان، موسوم به واقعیت، وجود دارد که تجربیات و مشاهدات ما (موسوم به نمود) مشعر به آن است. به علاوه انسان با به کار بردن علم و به شیوه‌ای خاص که روش علمی خوانده می‌شود می‌تواند فاصلهٔ بین نمود و واقعیت را کاهش دهد. منظور از روش علمی یک مطالعه نظام‌مند طبیعت، یک بررسی تجربی، کنترل‌شده و با دید انتقادی از پدیدارها است که در آن بعد از طرح مسأله، در مورد وجود چیزی یا رابطهٔ بین چند چیز، به کمک مشاهده و تفکر، حدس‌هایی با عنوان فرضیه زده می‌شود و سپس نتایجی آزمودنی از آن اخذ می‌شود و پیش‌بینی‌هایی صورت می‌پذیرد. اینک تجربه، مشاهده یا آزمایش آن‌ها را تأیید یا ابطال می‌کند. تأییدات نوعی جواز موقت برای استفاده از فرضیه به دست می‌دهد و آن‌را به نظریه (به زعم استقراگرایان کلاسیک) تبدیل می‌کند و ابطال‌ها راه را برای حدس بهتر دیگری (به زعم ابطال‌گرایان) هموار می‌سازد.

ب) حقیقت (مطلق). آن‌چه توسط علم به عنوان یک حکم درست (یا حقیقت) معرفی می‌شود عینی و بی‌طرفانه است و انسان می‌تواند آن‌ها را برای تسلط بر طبیعت و کنترل امور به کار برد.

ج) عقلانیت. استدلال، مبتنی بر عقل است و قاضی برای آن چیزی است که حقیقت دارد، خوب است یا زیباست.

د) شفافیت زبان. زبان واضح است. واژه‌ها مشعر به اشیاء عینی اند و بین دال و مدلول ارتباطی مستحکم وجود دارد.

ه) نظم. جهان منظم است. علم به دنبال یافتن نظم است و این کار را بـه کمـک عقلانیـت انجام می‌دهد. بی‌نظمی محصول خطای مشاهده‌گر، ضعف ابزارهای مشاهده و اندازه‌گیـری، و نیـز فرضیهٔ نامناسب است.

اما پم با چندین مؤلفه نشان داده می‌شود:

۱. طرد واقعیت غایی. پم این ایدهٔ مدرنیستی و آرامش‌بخـش کـه واقعیـت وجـود دارد و قابل شناخت است را طرد می‌کند. بنا به پم، واقعیـت ماننـد موسـیقی، خرافـه و شـعر یـک سـاختار فرهنگی دارد که با زمان و گذر از جامعه‌ای به جامعه‌ای دیگر تغییر می‌کند و مـی‌توانـد مـورد نقـد قرار گیرد؛ انسان واقعیت را برای خودش و برمبنای احتیاج‌ها، علایق، پـیش‌داوری‌هـا و سـنت‌هـای فرهنگی‌اش می‌سازد.

در پم فقط دلالت‌کننده (واژه) وجود دارد، بدون دلالت‌شونده (واقعیت عینی)؛ به عبارت دیگر و بنا به نظر ژان بودریار، هیچ چیز اصیلی کـه واژه‌هـا مشـعر بـه آن باشـند وجـود نـدارد. ایـن واقعیت ساخت انسان، مشابه یا کپی خوانده می‌شود. هم‌چون لوح‌های فشـرده یـا نوارهـای کاسـت موسیقی، که هیچ نسخهٔ اصلی از آن وجود ندارد. به علاوه همهٔ آن‌ها دارای ارزش یکسـان هسـتند. نمونهٔ دیگر، واقعیت مجازی است که از طریق شبیه سازی (مانند آن‌چه در بـازی‌هـای کـامپیوتری مشاهده می‌شود) خلق می‌شود. هم‌چنین فتوشاپ، نمونه‌ای از یک نرم‌افزار پسـت‌مـدرن اسـت کـه می‌تواند تصاویری مختلف خلق نماید به طوری کـه تمیـز واقعیـت و مجـاز، بـه معنـای کلاسـیک، ناممکن گردد.

۲. نفی حقیقت مطلق. پم می‌گوید هیچ طبیعت ذاتی در ورای اشیا وجود ندارد که بتواند به صورت حقیقت مطلق ارائه شود. به زعـم میشـل فوکـو هـر ادعـایی بـه نـام حـق در نژادپرسـتی، جنسیت‌گرایی یا جاه‌طلبی ریشه دارد و فایده‌اش حفظ ساختار قدرت است و لذا باید نسـبت بـه آن تردید روا داشت.

دانش نیز چنین پنداشته می‌شود؛ یعنـی پسـت‌مدرنیسـت‌هـا معتقدنـد کـه دانـش و قـدرت نمی‌توانند از یکدیگر منفک شوند؛ به ویژه لیوتار تأکید داشت که تمام دانش به دست آمـده بایـد مورد شک قرار گیرد.

۳. ساختارشکنی. ساختارشکنی یعنی شکستن مرزها، قالب‌هـای سـنتی، باورهـا، نظـم‌هـای موروثی، و قـوانین؛ و یـا تجزیـه یـک مـتن بـرای دریافـت معـانی چندگانـهٔ آن، کشـف تضـادها و

حوزه‌های ناشناخته و بازنگری نظام‌ها؛ و سرانجام فرار از هر نوع تعریف و اصل. ساختارشکنی بر این‌که نمی‌توان همه چیز را به یک بار و برای همیشه تعریف کرد تأکید دارد، زیرا چنان‌که دریدا متذکر می‌شود مجموعه‌ای پیچیده از روابط مبهم میان گوینده، شنونده و بستر تاریخی- فرهنگی که معنادادن در آن انجام می‌شود، وجود دارد که تسلط کامل بر معنا را از بین می‌برد.

پم با طرد نظم مدرنیستی، روایات کبیر را که ایده‌های بزرگی مانند تنازع، تضاد و ناخودآگاه، و داستان‌هایی مانند داروینیسم و فرویدیسم هستند و برای معنادادن به زندگی و نظم‌دادن به عالم معنا به کار می‌روند طرد می‌کند؛ چرا که آن‌ها را نقابی بر بی‌ثباتی‌ها و تناقض‌هایی می‌داند که در هر جامعه‌ای وجود دارد. در عوض پم استفاده از روایات صغیر را که مفاهیم و داستان‌هایی موضعی، شخصی و موقتی هستند و ضمناً نیازی به ارائه دلیل برای درستی آن‌ها به کسی وجود ندارد، پیشنهاد می‌کند.

برای پست‌مدرنیست‌ها جهان بی‌معنا است آن‌ها می‌گویند نباید تظاهر کنیم که علم، هنر و ... می‌تواند معنایی به آن ببخشد، بلکه باید با نامعقول سرگرم شد. پم دنیا را به مثابه یک پیاز می‌بیند که وقتی تمام لایه‌های آن را یکایک بشکافیم ، در انتها به هیچ می‌رسیم.

علم پست‌مدرن

علم پست‌مدرن با نظریه‌های متعددی هم‌چون نظریهٔ نسبیت (که بنابه آن چگونگی دیدن عالم به نقطه‌ای که از آن‌جا این عمل انجام می‌شود وابسته است)، نظریهٔ کوانتوم (که جهان را شامل امور متضاد فرض می‌کند) و نظریهٔ آشوب (که به مطالعهٔ رابطه متغیر بین نظم و بی‌نظمی به کمک دستگاه‌های غیرخطی می‌پردازد) هم‌خوانی دارد. ریاضیات پست‌مدرن بیشتر بر دستگاه‌های غیرخطی به عنوان یک شاخهٔ جدید در ریاضیات تجربی نگاه‌می‌کند و رایانه‌ها نیز به مطالعه بهتر این دستگاه‌ها کمک می‌نمایند.

پم به دنبال یک توضیح نهایی برای جهان پیچیدهٔ ما نیست. در عوض انسان با علم پست‌مدرن و از طریق ارائهٔ فرضیه‌های روشن و موقتی به دنبال حل مشکلات خود است. در مدرنیسم، علم، عینی و خردمآبانه است و به علاوه پیش‌فرض‌های آن حقایقی آشکار (بدیهی) فرض می‌شوند، در حالی که در پم تمام بنیان‌های علوم، ذهنی فرض شده‌اند و فقط برای گروهی از مردم درست هستند و از یک جامعه به جامعه‌ای دیگر تفاوت می‌کنند. هم‌چنین این اعتقاد

وجود دارد که چون کلمات به کار رفته در یک پارادایم (به معنای مجموعه باورها و روش‌های به کاررفته توسط دانشمندان در یک جامعه و یک زمان) نمی‌تواند به زبان پارادایم دیگری ترجمه شود (مانند واژهٔ جرم در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی) این پارادایم‌ها غیر قابل قیاس هستند و لذا نمی‌توانیم بگوییم که یکی از آن‌ها واقعیت را دقیق‌تر یا صحیح‌تر از بقیه توصیف می‌کند.

پم چنان که *فایرآبند* گفته است به علم به مثابه جادو می‌نگرد که تخیل در آن نقشی اساسی بازی می‌کند. پم هیچ فرقی بین فرضیه‌های علمی و افسانه نمی‌گذارد و قوانین را به مثابهٔ باورهای خرافی می‌نگرد، چرا که معتقد است در ورای اشیاء هیچ واقعیت نهانی که سرشت اشیاء را تشکیل دهد و مستقل از فاعل شناسایی باشد، وجود ندارد. بنابراین مریضی به دلیل ویروس و مریضی به دلیل ارواح خبیثه هر دو به یک اندازه معتبر هستند (شاید گفته شود که باکتری کاملاً قابل رؤیت است؛ ولی باید توجه نمود که یک طبیب سنتی چینی نیز معتقد است که می‌تواند ارواح خبیثه را ببیند).

پم می‌گوید که علم کشف شدنی نیست، بلکه توسط انسان ساخته و پرداخته می‌شود. ظهور فناوری‌های رایانه‌ای از ۱۹۶۰ به بعد که شیوه‌های تولید، توزیع و کاربرد دانش را در جامعه دچار دگرگونی نموده است با ویژگی‌های پم سازگارتر است. علم پست‌مدرن تمایزهای متافیزیکی بین علت و اثر، بین عین و ذهن، بین عقلانیت و دیوانگی، و بین قطعیت و احتمال را ویران کرده است. پم قائل به خلطی از نظم و بی‌نظمی در هر دستگاهی است و ادعا می‌کند که بر خلاف آموزه‌های مدرنیستی، نظم پایهٔ دانش و بی‌نظمی دشمن حقیقت نیست.

از دیدگاه پم، علم یک فرآوردهٔ اجتماعی بوده و تمام نظریه‌های آن نسبی است. برای مثال نمی‌توان گفت که فقط هندسهٔ اقلیدسی بیانگر خواص فضا است. در واقع این هندسه همچون هندسه‌های نااقلیدسی، یک دستگاه قیاسیِ مبتنی بر اصول انتخابی است و هیچ مبنایی برای درستی یا بدیهی بودن این اصول وجود ندارد. هر دو هندسه به یک نسبت درست هستند و نوع کاربرد، تعیین‌کنندهٔ نظریهٔ مطلوب است.

پم می‌گوید علم از منطق استفاده می‌کند؛ اما منطق حاصل تعامل‌های اجتماعی است که انسان‌ها برای ایجاد توافق، تفاهم و هم‌زیستی در جامعه به وجود آورده‌اند. استدلال منطقی آن

است که دیگران را به قبول حکمی متقاعد کند و آن‌ها را مطیع گرداند (اما آیا این کار با ارعـاب و تطمیع نیز انجام شدنی نیست؟)

در مدرنیسم روش علمی موجد پیشرفت و کمال است. اما پم منکر هر تعبیری از پیشرفت است. می‌توان از تغییر و حرکت صحبت کرد ولی پیشرفت معنایی ندارد. یک دانشمند پست‌مدرن علاقه‌مند به آن چیزی است که می‌تواند (یا ممکن است) درست باشد.

مکتب انسان گرایی و ریاضیات پست‌مدرن

بعضی از مکاتب فلسفی ریاضی، از جمله منطق‌گرایی و صورت‌گرایی، مطلق‌گرایند؛ به این معنا که معتقدند واقعیت و حقایق ریاضی، کامل و لایتغیر هستند.

در مقابل این‌ها مکاتب پویایی وجود دارند که ریاضیات را خطاپذیر، اصلاح‌پذیر و بخشی از فرهنگ و فعالیت بشری می‌دانند و به ویژه حقایق ریاضی را مطلق و حتمی نمی پندارند. یکی از این مکاتب انسان‌گرایی است.

انسان‌گرایی، ریاضیات را یک پدیدهٔ اجتماعی- تاریخی- فرهنگی می‌داند و، چنان‌که *پاتنام* عقیده دارد، آن‌را یک علم شبه‌تجربی که بر اساس احتیاجات علوم و زندگی شکل می‌گیرد تلقی می‌نماید. به علاوه چنان‌که *لاکاتوش* متذکر شده است برهان‌های ریاضی روی مفروضاتی بنا می‌شوند که توسط انسان‌های خطاپذیر وضع شده‌اند. لذا قطعیت ریاضی به مفهوم مکاتب مطلق‌گرا نفی می‌گردد.

امروزه رایانه‌ها راه‌های کشف و اثبات ایده‌های ریاضی را دگرگون کرده‌اند و برهان‌های مبتنی بر محاسبات رایانه‌ای و احتمالات جای خود را در ریاضیات باز کرده‌اند. در علم مدرن، قوانین منطق ارسطویی به کار می‌روند که بر طبق آن‌ها هر گزاره‌ای یا درست و یا غلط است. در یک جهان پیچیده و به منظور کنترل سیستم‌های غیرخطی و طراحی الگوهایی برای سیستم‌های مبهم، از منطق فازی استفاده می‌شود که در آن ارزش درستی یک گزاره، عددی بین صفر و یک است و نه لزوماً (همچون منطق کلاسیک) فقط یکی از دو عدد صفر و یک.

پیامدهای آموزشی دیدگاه پست‌مدرن

آموزش پست‌مدرن در دبستان، چنان‌که *رورتی* بیان کرده است، بر آموزش حقوق شهروندی به کودکان و چگونه زیستن تأکید دارد و در مراحل بالاتر به ارائه دیدگاه‌های مختلف راجع به یک موضوع، به ویژه با به کار بردن اینترنت و نرم افزارهای رایانه‌ای می‌پردازد؛ بدون این‌که از دانش‌آموختگان بخواهد از یکی از دیدگاه‌های مورد نظر معلم تبعیت کنند.

علم پست‌مدرن کاربردی است، یعنی ما علم را نه برای دانستن حقایق قطعی و قوانین عام بلکه برای به کار بردن آن فرا می‌گیریم.

مدرسه جایی است که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند چه طور فکر کنند. کلاس‌های درس محلی برای بحث آزاد است. در آن‌جا دانش‌آموزان یاد می‌گیرند به عقاید و ارزش‌های دیگران احترام بگذارند. آموزش نیز یک طرفه نیست به این معنی که معلم و شاگرد از یکدیگر درس می‌گیرند.

به علاوه در آموزش ریاضیات، پست‌مدرنیسم بر تدریس مواد و روش‌های زیر تأکید دارد: هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، نرم افزارهای رایانه‌ای، فراکتال‌ها، نظریهٔ آشوب، حل مسأله، نظریهٔ فاجعه، تکیه بر توضیحات و مشاهدات به‌جای روش‌های صوری، دستگاه‌های غیرخطی، منطق فازی، نظریهٔ رسته به جای روش‌های بوربارکی، شانس، احتمال، شهود به جای تجرید و ....

و سرانجام،

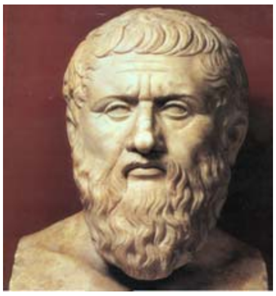
به نظر می‌رسد این نوع ریاضیات در بارهٔ زندگی ما و بخشی از آن است که نه تنها قابل دسترس است بلکه هرکس می‌تواند آن‌را یادبگیرد و دوست بدارد.

فصل هفدهم

ریاضیات از دیدگاه افلاطون

مفهوم دنیای مُثُل

افلاطون، فیلسوف قدیمی یونان، ۴۲۷ سال قبل از میلاد در یک خانوادهٔ سرشناس آتنی دیده به جهان گشود. در ایام جوانی شور سیاست در سرداشت؛ اما به زودی به واسطهٔ برخورد با حکومتی که استادش *سقراط* را به قتل رساند سرخورده شد. *افلاطون* آکادمی خود را در ۳۸۴ قبل از میلاد بنیاد گذارد. تحت رهبری و هدایت او این مؤسسهٔ آتنی به مرکزی برای پژوهش در ریاضیات، علوم و سیاست مبدل شد. سهم *افلاطون* در این پژوهش‌ها ارائهٔ گفتگوها و محاوراتی بود که به تمام قلمرو دانش بشری مربوط می‌شد. وی حدود سال ۳۴۷ قبل از میلاد دارفانی را وداع گفت.


افلاطون

سقراط معتقد به عقل فطری بود که فرد با سود جستن از آن و به کمک عقل با راهیابی به درون خویشتن می‌توانست به واقعیت مکنون در محسوسات پی‌ببرد. اما *افلاطون* معتقد بود که واقعیت باید چیزی در یک جهان ایده آلی باشد، نه لزوماً در خود اشیاء؛ و به همین خاطر به زعم وی فلسفه از تلاش برای ارتقاء از علم پدیده‌ها یا نمودها، به جوهره یا واقعیت‌ها تشکیل شده است.

افلاطون، جهان را به دو قسمت متمایز تقسیم می‌کرد. اول جهان محسوسات که چون با حواس ناقص ما شناسایی می‌شود، جزیی و تقریبی است؛ جهانی که در آن همه چیز می‌آیند و می‌روند، اما هیچ وقت واقعاً وجود ندارند. دوم جهانی قابل فهم و معقول که عالم مثال نامیده می‌شود. برای *افلاطون* مثال یا صورت، واقعیت غایی غیر قابل تغییر، مستقل از ذهن و کاملاً مجردی تلقی می‌شد که فقط قابل درک با عقل است نه با قوای حسی. به علاوه هر چیزی در دنیای قابل مشاهده، فقط نسخه‌ای ناقص و انعکاس یا تقریبی از یک حقیقت اصلی (مثال) است. نمونه‌های زیادی از مُثُل می‌توان یافت، مثلاً اسب‌ها موجودیت خود را از «اسب» می‌گیرند و ما آن‌ها را به عنوان اسب‌ها تلقی می‌کنیم، زیرا آن‌ها در صورت «اسب» موجود هستند.

افلاطون، متاثر از *سقراط*، معتقد بود قبل از آن‌که متولد شویم ارواح ما در عالم مثال زندگی می‌کنند و سپس این ارواح همراه با مفاهیم مُثُل متولد می‌شوند و ما آن‌چه را که روحمان در دنیای مُثُل آموخته است، به یاد می‌آوریم؛ و این تعلیمات و اصول نوعی یادآوری است. به همین دلیل *افلاطون* به عنوان یکی از اولین عقلیون شناخته شد. وی آموزه‌های *فیثاغورس* را در ایتالیا مطالعه نمود و عمیقاً تحت تاثیر آن‌ها قرار گرفت و به ریاضیات فیثاغورسی تمایل پیدا کرد. به‌ویژه به نظریهٔ اعداد علاقه‌مند شد چنان‌که مثال (صورت) را برحسب هارمونی عددی در رساله تیمائوس تعبیر کرد. وی آموزش داد که هر چیزی در جهان فیزیکی از مثلث‌ها به جای اعداد (برخلاف آن‌چه فیثاغورسیان عقیده داشتند) ساخته شده است.

افلاطون کشف مهمی در ریاضیات نداشته است، گرچه اعتقاد او دراین‌باره که «ریاضیات بهترین تمرین برای ذهن است» مهم می‌باشد. همچنین سهم *افلاطون* در گسترش فلسفهٔ ریاضیات- هر چند بیشتر مربوط به واقع‌گرایی هستی‌شناختی است- بیان این مطلب است که اشیاء ریاضی مستقل از ذهن بشر موجودیت دارند.

افلاطون معتقد بود که ۲ سیب، تخمینی از مثال «۲» است و همچنین یک صفحهٔ گرد تصوری از مثال «گرد بودن» است. ارتباط بین ریاضیات محض و کاربردی، همچون ارتباط بین ۴=۲+۲ و «۲ سیب و ۲ سیب می‌شود ۴ سیب» مانند ارتباط بین مُثُل و نمودها است. بعلاوه تمامی قضایای ریاضی مانند ۴=۲+۲ لزوماً درست می‌باشند زیرا به موجودات ثابت و روابط تغییرناپذیر بین آن‌ها را بیان می‌کنند و از انسان و زبانی که این قضایا با آن بیان می‌شوند مستقل می‌باشند.

ارسطو، شاگرد *افلاطون*، تمایزی را که *افلاطون* بین دنیای ظواهر و دنیای مثل قائل شده بود، رد نمود. آموزهٔ او این بود که مثال اسب در حقیقت عبارت خلاصه‌ای از چیزی است که اسب را می‌سازد و این مثال، حقیقت معنایی خود را از «اسب ها» می‌گیرد. وی همچنین ادعا کرد که یک شی ریاضی مانند یک مربع هندسی، جنبهٔ با معنا از یک شی مادی از قبیل یک تکه آجر مربع شکل است که می‌تواند فقط با نادیده گرفتن جنبه‌های بی‌ربطی همچون مواد سازندهٔ آجر درک گردد.

هندسه، کلید فهم جهان برای افلاطون

ممکن است سؤال شود که جهان از چه ساخته شده است؟ *افلاطون* در رسالهٔ تیمائوس چگونگی خلق عالم را شرح داد. وی «خاک، باد، آتش و آب» را عناصر سازندهٔ عالم ذکر کرد و همچنین ذراتی که هر یک از این عناصر چهارگانه از آن‌ها درست شده‌اند را به دست داد. به زعم او ذرات، اجسام هندسی منتظم زیر می‌باشند: هرم، مکعب، هشت وجهی و بیست وجهی (موسوم به اولین اجسام چهار گانهٔ افلاطونی). وجوه این اجسام به ترتیب فقط از دو نوع مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف ساخته شده‌اند (بر خلاف اتم‌های *دموکریت* که از انواع و اندازه‌های مختلف بودند). مثلث نوع اول، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است که از بریدن یک مربع در راستای قطر آن به دست آید. مثلث نوع دوم، مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف‌الاضلاع است که از نصف کردن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود. *افلاطون* از این دو مثلث برای ساختن وجوه اجسام چهارگانهٔ خود استفاده کرد. درحقیقت او اعتقاد داشت هر سطحی قابل تجزیه به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است (یک عبارت نادرستِ جالب) که اهمیت هندسه را برای *افلاطون* نشان می‌دهد.

از دیدگاه افلاطون :

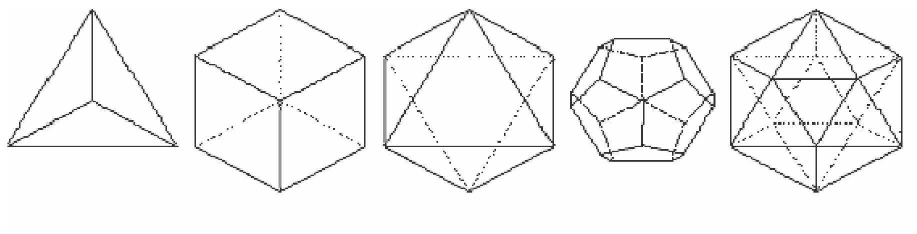
عنصر آتش، هرم منتظم است (زیرا در بین عناصر، آتش نافذترین آن‌هاست و در میان اجسام منتظم، هرم تیزترین گوشه‌ها را دارد) و از ۸ مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف‌الاضلاع ساخته شده است .

عنصر هوا، هشت وجهی است و از ۱۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف‌الاضلاع ساخته شده است .

عنصر خاک، شش وجهی است (زیرا خاک صلب‌ترین عناصر است و واژگون کردن مکعبی که بر قاعده قرار گرفته است مشکل‌تر از سایر اجسام منتظم است) و از ۱۲ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ساخته شده است.

عنصر آب، بیست وجهی است و از ۴۰ مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف‌الاضلاع ساخته شده است.

جسم افلاطونی پنجم، ۱۲ وجهی است که از دیدگاه *افلاطون* مدلی برای کل جهان هستی است، *افلاطون* در واقع جزئیات چگونگی ساخته شدن ۱۲ وجهی را توضیح نمی‌دهد



فصل هجدهم

آیا «واقعیت» خصلت ریاضی دارد؟

طرح مسأله: نمود و واقعیت

رنگ یک شیء، مثلاً یک تکه پارچه، هنگام طلوع آفتاب با رنگ آن در هنگام ظهر متفاوت است. کدام یک «واقعی» است؟

اندازهٔ خورشید برای مردمان زمان بطلمیوس با اندازهٔ آن برای ما فرق می‌کند (و شاید این اندازه برای مردمان دو هزار سال دیگر متفاوت با ما باشد). کدام یک «واقعی» است؟

یک دست را در آب سرد و دست دیگر را در آب گرم قرار داده و سپس هر دو دست را در آب ولرم فرومی‌بریم. آب به دست در آب سرد، گرم و به دست در آب گرم، سرد می‌نماید. کدام یک « واقعی» است؟

لیلی به دیدهٔ مجنون زیباست. آیا به دیدهٔ ما نیز چنین است؟ آیا ما صفات اشیاء را به آن‌ها می‌بخشیم؟ اگر این صفات را از آن‌ها جدا کنیم چه برجای می‌ماند؟

بعضی از مردم به بیماری بی‌رنگ بینی مبتلایند، یعنی هیچ رنگی را درک نمی‌کنند و دنیا را سیاه- سفید می‌بینند. اگر همهٔ ما این بیماری را می‌داشتیم، آیا رنگی «وجود » می‌داشت؟

اگر ما انسان‌ها نمی‌توانستیم هیچ چوبی را که در ظرفی از آب فرو برده‌ایم از آن بیرون آوریم، آیا می‌توانستیم بفهمیم چوب در آب شکسته «به نظر می‌رسد» یا «واقعاً» شکسته است؟

...

شالودهٔ سؤالات فوق این سؤال کهن و در عین حال کنجکاوانه و زندهٔ فلسفه است که آیا اشیاء آنگونه‌اند (واقعیت) که به نظر ما می‌آیند (نمود). در این‌جا نمود چیزی است که به تجربه (ادراک) حسی ما (مستقیم یا غیرمستقیم) درمی‌آید و «وجود» آن‌را «باور» داریم و واقعیت یا بود، چیزی است «قائم به ذات»، که خارج از فاعل شناسایی، متمایز از ادراک (تأثرات و تصورات) ما، وسائل مشاهده و فراسوی چارچوب زمان و مکان وجود دارد و به علاوه از سرشت آن کسی با خبر نیست ودر عین حال، نمود مشعر به آن است.

در این فصل به بحث پیرامون دو سؤال بنیادی «آیا نمود و واقعیت از یکدیگر منفک هستند؟» و «آیا واقعیت خصلت ریاضی دارد؟» می‌پردازیم.

آیا نمود و واقعیت از یکدیگر منفک هستند؟

سقراط معتقد بود که مردم، زندگیشان را در جهان نمود صرف می‌کنند و فقط عدهٔ کمی، یعنی فلاسفه، از این جهان گذر کرده و با به کار بردن تعقل به واقعیت می‌رسند. *افلاطون* اعتقاد داشت که جهان از دو چیز تشکیل شده است: جهان نمود که شامل انسان‌ها و همه محسوساتی است که دائم دستخوش تغییر و فناپذیرند و صورت‌ها یا مُثُل که تغییرناپذیر و جاودانی‌اند. وی اعتقاد داشت که این صورت‌ها با حواس ادراک نمی‌شوند بلکه فقط با تعقل می‌توان آن‌ها را دریافت و به‌علاوه جهان طبیعی انعکاسی از آن‌ها است.

عده‌ای، مانند *جان لاک*، *تامس هابز*، *فرانسیس بیکن* و *گالیله*، معتقد به تمایز نمود و واقعیت نیستند. آن‌ها به چیزی فراسوی عالم مشهود قائل نیستند یا آن‌را غیر قابل تعریف و یا غیر قابل اثبات (یا ابطال) می‌دانند و از این‌رو به دنبال واقعیت رفتن را کاری عبث و بی‌فایده می‌دانند.

جان لاک در کتاب «پژوهش در فاهمهٔ بشر» می‌گوید:

«بدیهی است که ذهن انسانی اشیاء را نه مستقیماً بلکه فقط به واسطهٔ تصوراتی که از آن‌ها دارد می‌شناسد و در نتیجه شناسایی ما تا آن‌جا درست است که این تصورات با واقعیت اشیاء مطابق باشد، اما ملاک ما در این‌جا چیست؟ و چگونه ذهن، که چیزی جز تصورات خود را ادراک نمی‌کند، می‌تواند بشناسد که آن تصورات مطابق عین اشیاء است یا نه؟»

و *هابز* گفت که آن‌چه در بیرون از ماست نه گرم است و نه سرد، نه زشت است و نه زیبا، بلکه چیزی است تاریک، بیرنگ و ساکت. اگر در جهان چشمی نبود و نسج‌های حساسی وجود

نداشت رنگ و روشنی نبود و اگر ما گوش نداشتیم، صوت وجود نداشت، این قوس و قزح زیبا تنها در دیدهٔ ماست نه در آسمان.

او می‌گوید ما چه نیازی به فرض واقعیت فرجامین داریم و چرا نگوییم واقعیت همان است که احساس و ادراک می‌کنیم. لذا واقعیت امری نسبی است که نه تنها به افراد، بلکه به زمان و مکان و زبان وابسته است. شاید بتوان گفت هر انسان در دنیای متغیری زندگی می‌کند که فقط خودش در مرکز آن قرار دارد و فقط برای خود وی شناخته شده است. هر کس جهان را از پشت عینکی که به چشم زده است نگاه می‌کند که اغلب ویژگی‌های این عینک از دنیای خصوصی (زمینهٔ نمودی یا تجربی) فرد ناشی می‌شود. به همین ترتیب وقتی فردی یک جعبه گچ را کبوتر می‌بیند و حتی بال، پر و هیأت او را توصیف می‌کند، یا در ساعتی از روز صدای اژدهای هفت سری را می‌شنود، واقعیت برای او همین است؛ ضمن این‌که واقعیت اجتماعی از ادراکاتی تشکیل شده است که از درجهٔ عمومیت بیشتری در بین افراد برخوردار است.

اما عده‌ای معتقدند که نمود و واقعیت منفک هستند و سرشت اشیاء چیزی است که وجود دارد، بر خلاف ظواهر و البته بر اساس آموزه‌ای قرون وسطایی، قابل دیدن نیست و به علاوه واژه‌های نظری که پل‌هایی بین نمود و واقعیت و ابزارهایی برای پژوهش هستند مشعر به این واقعیت نهانی‌اند. (البته فردی مانند *ماخ* واژه‌های نظری مانند اتم را ساختارهای مصنوعی یا علائم زبانی می‌دانست که برای تنظیم داده‌های تجربی به‌کار می‌روند و نمایشگر موجوداتی واقعی نیستند.) واقعیت پنهان است و داده‌های تجربی و شعور دو انعکاس آن هستند. ما به‌کمک علم مدل‌هایی را بعنوان تقریبی از این جهان نادیدنی ارائه می‌دهیم، توصیفی خطاپذیر، اصلاح‌پذیر و در حال تکامل. این توصیف که به صورت نظریه ارائه می‌شود، گرچه کامل، قطعی، کلی، تردیدناپذیر و خلاصه انعکاس صرف واقعیت نیست، ولی چیزی است که می‌توانیم بر مبنای آن عمل کنیم، زیرا می‌دانیم چه کار می‌کنیم و اساسا آیا چیزی بهتر از آن در دست داریم؟ علم سعی در کم کردن فاصلهٔ نمود و واقعیت دارد و ملاک قاطع در انتخاب نظریه نیز تأیید تجربی یا در جهت مخالف، به گفتهٔ *پوپر*، ابطال پذیری آن‌ها است.[۲۸]

۲۸- به عقیدهٔ پوپر تأیید تجربی به نظریه‌های علمی اعتبار می‌بخشد ولی آن‌ها را اثبات نمی‌کند و اساساً ملاکی برای صدق احکام علمی وجود ندارد و ما فقط می‌توانیم به حقیقت از طریق وضع نظریه‌های ابطال‌پذیرتر نزدیک شویم.

واقعیت و ریاضیات

عـده‌ای از اندیشـمندان اعتقـاد داشـتند کـه واقعیـت خصـلتی ریاضـی دارد و موضـوع ریاضیات، یافتن، توصیف و درک واقعیت به صورت قطعیتی بی‌چون و چرا است:

فیثاغورسیان معتقد بودند که طبیعت از عـدد سـاخته شـده اسـت و اعـداد موجـب ایجـاد کیفیات گوناگون در جهان می‌شوند و لذا می‌توان با آگاهی از روابط بـین مفـاهیم ریاضـی دنیـای اطراف خود را شناخت. مثلاً می‌گفتند چون کره کامل‌ترین اشکال است، پـس بایـد زمـین کـروی باشد. این استراتژی فیثاغوری در فیزیک نوین نیز قابل مشاهده است: معادلهٔ E تحت مفروضات A به دست آمده است. این معادله جواب‌هایی دارد که A با آن‌ها در تضاد است، امـا دقیقـاً بـه علـت این‌که جواب‌های E هستند، ما آن‌ها را در طبیعت جستجو می‌کنیم. مثالی از این وضعیت، اجتنـاب *پال دیراک* برای دور انداختن جواب‌های ظاهراً غیرفیزیکی «انرژی- منفی» به معادله‌ای موسـوم بـه دیراک است که منجر به کشف «پاد ماده» شد.

افلاطون در کتاب جمهورش ریاضیات را کاربردپذیر قلمداد مـی‌کنـد، زیـرا ایـن دنیـا را صرفاً تقریبی از واقعیت ریاضی متعالی‌تر می‌پنداشت. چنان‌که حتی حرکـت سـیارات را نسـبت بـه حرکت ریاضی محض در رتبهٔ پایین‌تری قرار می‌داد. وی معتقد بود خداوند همواره به کار هندسـه مشغول است.

کپرنیک آفریدگار را یک ریاضی‌دان می‌دانست و اعتقـاد داشـت کـه طبیعـت را بایـد بـا ریاضیات تبیین کنیم. *کپلر* سرشت واقعی اشیاء را ریاضی و به علاوه قابل اسـتنتاج و تبیـین از عـالم مشهود می‌دانست. *گالیله* عقیده داشت که ریاضیات بهترین کلید گشودن رازهای طبیعت و معقـول نمودن محسوسات و اساساً زبان علم است. *دکارت* معتقد بود که ریاضیات بنیان همهٔ علوم اسـت و اساساً تجربه به ما معرفت یقینی نمی‌دهد. *ادینگتون* اعیان ریاضی را اجزای سازندهٔ عالم، خداوند را ریاضی‌دان و آفرینش را نوعی فعالیت ریاضی می‌دانست. (اما چرا باید خداوند را یک ریاضـی‌دان فرض کنیم، آیا خداوند با ریاضیات محدود شده است یا آن‌را آفریده است؟)

اینشتین معتقد به دنیای خارجی مستقل از ذهن بود و راز ابدی جهان را قابـل درک بـودن آن می‌دانست. وی طبیعت را مصـداق سـاده‌تـرین اندیشـه‌هـای ریاضـی قابـل تصـور مـی‌دانسـت و می‌گفت:

«می‌توان به کمک ابزارهای صرفاً ریاضی مفاهیم و قوانین مرتبط کننده را که کلید شناخت طبیعت است، به دست آورد... آزمایش ممکن است الهام بخش مفاهیم ریاضی مناسب باشد، اما به‌طور قطع نمی‌توان این مفاهیم را از تجربه استنتاج کرد. البته آزمایش همچنان یگانه معیار مفید بودن ساختارهای ریاضی خواهد بود، اما خلاقیت در جنبهٔ ریاضی مطلب است. بنابراین به یک اعتبار، من عقیده دارم، همان طور که قدما تصور می‌کردند، فکر محض می‌تواند به درک واقعیت نائل شود.»

در مقابل این‌ها عده‌ای چنین نقش بنیادینی برای ریاضیات قایل نبودند:

ارسطو ریاضیات را نظامی صوری ولی مأخوذ از تجربه، یعنی انعکاس دنیای بیرون از ذهن در آن، می‌دانست. به زعم وی اشیاء ریاضی به وسیلهٔ خرد از جهان فیزیکی تجرید می‌شوند. (اما آیا این مجردات در ذهن افراد مختلف با یکدیگر متفاوت است یا یکی است؟ و مهم‌تر این‌که چرا؟) وی دیدگاه فیثاغورسیان را رد کرده بود. *نیوتن* به ریاضیات به عنوان زبانی برای توصیف طبیعت و نه کشف آن می‌نگریست. وی می‌گفت که دستگاه‌های ریاضی زیادی وجود دارند که خدا می‌تواند برای راه انداختن جهان از آن‌ها استفاده کرده باشد و فقط مشاهدهٔ طبیعت آن‌را معین می‌کند، نه یک انتخاب ذهنی مقدم بر تجربه. به زعم *نیوتن* خدا جهان را بر اساس یک انتخاب آزاد درست کرده است، نه یک ضرورت ریاضی.

تلاش‌های انجام شده در قرن ۱۹ توسط *لباچفسکی*، *گاوس* و دیگران نشان داد که می‌توان هندسه‌هایی (موسوم به نااقلیدسی) به همان «درستی» هندسهٔ اقلیدسی ولی با ویژگی‌های بسیار متفاوت با آن ساخت. *کانت* می‌گفت: «مفهوم فضای اقلیدسی به هیچ وجه منشأ تجربی ندارد، بلکه لازمهٔ اجتناب‌ناپذیر فکر ماست»، یعنی فضای سه بعدی اقلیدسی صورت ذاتی همهٔ ادراکات ما از اشیاء است. اما *هرمان هلمهولتز* پرسید که آیا ممکن است *کانت* اشتباه کرده باشد و خودش جواب داد که بلی، دنیا را که در یک آینهٔ کوژ منعکس شده است در نظر بگیرید.

بعدها با کارهای *ریمان* و *کلیفورد* معلوم شد که این سؤال که کدام هندسه (اقلیدسی یا نااقلیدسی) دنیا را توصیف می‌کند دیگر موضوعی از مقولهٔ شهود نیست، بلکه موضوعی تجربی است. اما این مطلب چه تأثیری بر رابطهٔ ریاضیات و جهان داشت؟ در واقع این عقیده، ریاضیات را از دنیای فیزیکی جدا کرد. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی اولین مثال تاریخی واضح از دو گونهٔ هندسهٔ متضاد یکدیگر هستند که هر یک می‌توانند جلوه‌گر بخشی از جهان باشند.

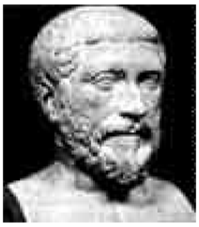
دیدگاه صورت‌گرایان مبنی بر این که چنین نیست اصول موضوع ریاضیات لزوماً و صرفاً از جهان مادی مشتق شوند، ریاضیات را از آن مقام مهمی که (مثلاً نزد افلاطون) داشت دور کرد.

در واقع ریاضیات مجموعه‌ای از الگوهای متفاوت برای صورت‌بندی جهان تجربه آدمی (اما نه جانشینی برای مشاهده و آزمایش) فراهم نمود. این دیدگاه که می‌گوید علوم مستقیماً به واقعیات اشاره نمی‌کنند (و مثلاً لزومی ندارد که هر مفهوم ریاضی راجع به یک موجود مشهود باشد) در علوم اجتماعی نیز همانند علوم طبیعی نفوذ کرد و فلسفهٔ علم را تحت تأثیر خود قرار داد.

فصل نوزدهم

فلسفه فیثاغوریان

دربارهٔ زندگی *فیثاغورس* اساساً اطلاعات مغشوش و نادقیقی در دست است. این فیلسوف و ریاضی‌دان در حدود سال ۵۷۲ قبل از میلاد در جزیرهٔ ساموس واقع در دریای اژه چشم به جهان گشود. پدرش تاجری به نام منسارخوس و مادرش یک یونانی به نام پتیاس بود. او دو یا سه برادر داشت.


فیثاغورس

احتمالاً او در تماس با *فرکیدس*، *تالس* و *آناکسیمندر* بود. وی چنگ می‌نواخت، شعر می‌سرود و همهٔ اشعار *هومر* را از بر می‌خواند. او بعد از سفرهایی که به مصر و ناحیهٔ بین‌النهرین نمود و تحت تأثیر آموزه‌های مذاهب آن نواحی در حدود سال ۵۳۰ قبل از میلاد به کروتونا واقع در خلیج تارنتوم در جنوب ایتالیا رفت و در آن‌جا همزمان با تعلیمات *بودا* در هند و *کنفسیوس* در چین مذهب عددی خود را به صورت یک انجمن برادری و در قالب یک مدرسه تأسیس کرد. اما بعد از تعطیل شدن مدرسه‌اش به دست عصیان‌گران ایتالیای جنوبی به بین‌النهرین گریخت و در حدود هشتاد سالگی فوت کرد[۲۹].

۱- بنا به روایتی فیثاغورس در راه فرارش، با یک مزرعه لوبیا روبرو شد. پس توقف کرد تا آن حبوبات را، که به خاطر جنینی بودن مقدس شمرده می‌شدند، لگد نکند و لذا به چنگ دشمنان افتاد و کشته شد.

انجمن برادری، یک انجمن سری با حدود ۶۰۰ عضو بود که عوام را لایق دسترسی به رازهای جهان نمی‌دانست و به این دلیل آن‌چه در درون انجمن می‌گذشت، برای دیگران روایت نمی‌شد. عضویت در آن برای مرد و زن یکسان بود و تجرد اجباری نبود. اعضا با پای برهنه راه می‌رفتند و بر مبنای زندگی اشتراکی و با حضور شبانه‌روزی در مدرسه روزگار را سپری می‌کردند. تقسیم کار وجود داشت و علی‌رغم فرهنگ برده‌داری مرسوم در یونان باستان، هر کس باید کارش را خودش انجام می‌داد. البته انجمن علاوه بر این اعضای داخلی که ریاضیون نامیده می‌شدند دارای اعضای دیگری نیز بود که در خانه‌های خود زندگی می‌کردند و فقط در طول روز به انجمن می‌آمدند و از خود مالکیت شخصی داشتند. این اعضا را سماعیان می‌نامیدند. خود *فیثاغورس* در انجمن درس می‌داد و تمرینات سختی را برای اعضا تدارک می‌دید تا به آن‌ها بیاموزد که به جای داشتن زندگی مادی، زندگی معنوی داشته باشند. یکی از این تمرینات کنترل نفس بود:

«آن‌ها برای خود غذاهای لذیذ و متنوعی که در باشکوه‌ترین میهمانی‌ها گذارده می‌شد فراهم می‌کردند و به مدت طولانی به آن‌ها خیره می‌شدند تا هوای‌نفسشان تحریک شود. سپس سفره جمع می‌شد و آن‌ها بدون این‌که مزهٔ چیزی را چشیده باشند، آن‌جا را ترک می‌کردند.»

تعلیمات انجمن شفاهی بود و هیچ عضو انجمن نسبت به آن‌چه خود کشف می‌کرد، حقی نداشت. دانش متعلق به همهٔ اعضا بود. معلوم نیست که چه مقدار از کارهای فیثاغورسیان توسط خود *فیثاغورس* ارائه شده است. برای آن‌ها فیثاغورس یک شخصیت نیمه خدایی داشت که با کلامی جادویی می‌توانست یک خرس را رام کند. حرف او حجت بود. کلمهٔ رمز فیثاغورسیان این بود: «استاد چنین گفت.»

آن‌چه در مورد این انجمن می‌دانیم اساساً از کتابی است که توسط *فیلولائوس فیثاغورسی* در سدهٔ پنجم قبل از میلاد نگاشته شده است، همان کتابی که افلاطون از طریق آن با فلسفهٔ فیثاغورس آشنا شد. انجمن به علت تمایل به قدرت مطلقه اشراف برای اصلاح، مورد تنفر مردم قرار گرفت و لذا عده‌ای از مردم ایتالیای جنوبی به مدرسهٔ او هجوم آورده و آن‌جا را ویران کردند. ولی انجمن تا دو قرن دیگر به حیات خود ادامه داد. بعضی از احکام انجمن فیثاغورسی چنین بود: به خروس سفید دست نزن، مگذار پرستوها در سقف خانه‌ات آشیانه کنند، در سفر عبادت مکن، لوبیا مخور، در کنار چراغ به آینه نگاه نکن، آن‌چه را افتاده است برندار، تاج گل را

نچین، در جاده راه نرو، آتش را با آهن هم نزن و بعد از برخواستن از رختخواب اثر بدن خود را روی آن صاف نکن.

گفته شده است که فیثاغورسیان از خوردن گوشت امتناع می‌کردند. حتی به جای لباس پشمی، لباس کتانی می‌پوشیدند. زیرا آن‌ها قائل به تناسخ بودند که بر اساس آن با مرگ هر حیوان یا انسان و بعد از $۶^۳ = ۲۱۶$ روز، روح وی در کالبد حیوان یا انسان دیگری حلول می‌کند (توجه نمایید که می‌گویند ۲۱۶ روز بعد از انعقاد نطفه، جنین روح می‌یابد). به علاوه آن‌ها به قرابت انسان‌ها و چهارپایان معتقد بودند، بنابراین کشتن یک حیوان ممکن بود روحی را ناقص کند. *گزنوفن* نقل می‌کند که روزی *فیثاغورس* در حال عبور از جایی بود که سگ مریضی را دید. فریاد زد: «به او صدمه نزنید. این سگ، روح یک دوست است.»

بر خلاف این مطلب، بعضی از مورخین گفته‌اند که فیثاغورسیان هر اکتشاف خود را با قربانی کردن یک گاو نر به درگاه خدایان جشن می‌گرفتند. برای فیثاغورسیان دنیا بی‌هدف نبوده و انسان موجودی مقدس پنداشته می‌شده است.

آن‌ها روییدنی‌ها را محترم می‌دانستند و در موقع اعیاد نیز موها و ناخن‌های خود را کوتاه نمی‌کردند. جامهٔ سفید می‌پوشیدند زیرا آن‌را نشانهٔ خلوص اندیشه می‌دانستند.

ستارهٔ پنج پر منتظم نشان فیثاغورسی و علامت سلامتی بود. آن‌ها وقتی به هم می‌رسیدند، جهت آشنایی، یک ستارهٔ پنج پر روی زمین رسم می‌کردند.

فیثاغورسی‌ها اولین کسانی بودند که به فکر تبیین پدیده‌های طبیعی توسط ریاضیات افتادند. *فیثاغورس* به اشیاء ریاضی جنبهٔ الوهیت داد و با رجحان عقل بر حس اولین قدم را در عقلانی کردن الهیات برداشت. فیثاغورسیان معتقد بودند که موجودات ریاضی مشعر به اشیاء واقعی هستند درست همان‌گونه که اسامی مشعر به موجودات و به‌علاوه اعداد اساس آن‌چه را که هر روز تجربه می‌کنیم کنترل می‌کنند. بنابراین می‌گفتند که با شناخت اشیاء ریاضی و روابط بین آن‌ها می‌توان به شناخت عالم دست یافت. آن‌ها برای اعداد طبیعی اهمیت زیادی قائل بودند و آن‌را کلید فهم طبیعت می‌دانستند. از این‌رو از نظر فلسفی، حکمت فیثاغورسی که نوعی ادلهٔ عقلی را برای تبیین امور عالم به کار می‌برد قابل توجه است.

ایشان معتقد بودند که اعداد (و به ویژه زوجیت و فردیت آن‌ها) صورت پدیده‌ها را تعین می‌بخشند و در واقع عدد، ذات هر چیز مادی یا معنوی است و امور، حاصل نسبت‌های بین اعداد

است و خود اعداد وجودی مستقل از بشر دارند. در نزد آن‌ها ۱ نقطه،۲ خط، ۳ صفحه و۴ فضا بود و ۱۰ که حاصل جمع ۱،۲،۳و۴ است، عددی بی‌کم و کاست بود.

آن‌ها میان خلق جهان از هیچی و شروع اعداد از صفر و سپس ظهور یک در دنیای تهی و پیدایش بقیهٔ اعداد نوعی ارتباط می‌دیدند.

عدد ۱ نشانه آپولو برترین خدای فیثاغورسی و عدد استدلال و ۲ عدد عقیده بود و این دو خالق بقیه اعداد و اقانیم نر و ماده تلقی می‌شدند. ۳ اولین عدد به وجود آمده بود زیرا $۳ = ۲ + ۱$ و نشانهٔ هماهنگی بود. آن‌ها هنگام دیدن یکدیگر می‌گفتند:«سه بار خوشبختی بر تو باد.»

عدد مرد، ۲ و عدد زن، ۳ و لذا عدد ازدواج، ۵ بود. آن‌ها حتی خدا را عدد می‌انگاشتند و معتقد بودند که روح می‌تواند به خدا بپیوندد.

عددهای مربعی که از ضرب یک عدد در خودش به دست می‌آمدند مظهر عدالت و عدد ۶ که برابر مجموع مقسوم علیه‌های سره‌اش بود، یعنی $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ ، نشانهٔ کمال بود.

آن‌ها ۷ را عددی نازا تلقی می‌کردند. به این دلیل آن‌را سمبل آتنا (الههٔ بکارت) می‌دانستند. با این حال ۷ را تقدیر حاکم بر زندگی بشر تلقی می‌کردند، چرا که طفولیت در ۷ سالگی متوقف می‌شود، بلوغ از ۱۴ سالگی شروع می‌شود، ازدواج در ۲۱ سالگی صورت می‌گیرد و ۷۰ سالگی نیز پایان عمر است. ۸ نیز که اولین مکعب کامل بود (یعنی $۲^۳ = ۸$) علامت عشق بود.

اعداد متحابه ۲۲۰ و ۲۸۴ که هر یک برابر مجموع مقسوم علیه‌های سرهٔ دیگری بود نشانهٔ دوستی و عدد ۴ که حاصل جمعش با اعداد کوچکتر از آن برابر ۱۰ (نشانه بی‌کم و کاستی و نگهدارندهٔ یکپارچگی عالم) بود، عدد مقدس شناخته می‌شد که به آن قسم می‌خوردند. صفت زوج و فرد به وسیلهٔ فیثاغورسیان به اعداد داده شد. *فیلولائوس* می‌گوید: «عدد سه نوع است: زوج، فرد و زوج- فرد که از اختلاط دوتای اول حادث می‌شود، و از هر نوع اشکال زیادی وجود دارد». زوج و فرد در این‌جا معنای معمولی دارد ولی زوج- فرد، حاصلضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد است. ضمناً عدد ۲ زوج محسوب نمی‌شد. آن‌ها معتقد بودند که هر دو کمیت همجنس متوافق هستند یعنی کمیتی واحد وجود دارد که در هر دو به تعداد صحیح می‌گنجد یا به اصطلاح امروزی نسبت هر دو کمیت همجنس عددی گویا است. اما با کشف غیرمتوافق بودن ضلع و قطر یک مربع، این بنیان فکری فیثاغورسیان در هم ریخت.

فیثاغورسیان دوازده وجهی منتظم را کشف کردند و اعتقاد داشتند کـه عـالم از ایـن پـنج عنصر باد، خاک، آب، آتش و اثیر تشکیل یافته است و لـذا بـه‌ایـن اعتبـار تکثرگـرا بودنـد. آن‌هـا مردگان را نمی‌سوزاندند زیرا اعتقاد داشتند که این کار عنصر آتش را آلوده می‌کند.

فیثاغورسیان به تدوین هندسه نیز همت گماشتند و اولین بار برهانی برای قضیه‌ای موسـوم به فیثاغورس که می‌گوید مربع وتر هر مثلث قائم‌الزاویه بـا مجمـوع مربعـات دو ضـلع دیگـر برابـر اسـت، ارائـه کردنـد. البتـه بـر مبنـای یـک لـوح گلـی بـه نـام *پلیمپتـون* ۳۲۲ کـه در حفـاری‌هـای باستان‌شناسی در ناحیه بین‌النهرین به دست آمده است، باید متذکر شد که بابلیان باسـتان در حـدود ۱۹۰۰ قبل از میلاد از این قضیه آگاه بوده‌اند.

افلاطون متأثر از اندیشـه‌هـای *فیثـاغورس*، بـه ویـژه مالکیـت اشـتراکی، برابـری جنسـی و انضباط زیاد در جامعه و این‌که دنیای معقول (تفکر) از دنیای محسوس (عمل) واقعی‌تر، مهـم‌تـر و شریف‌تر است قرار گرفته بود. او می‌گفت: «خداوند هندسه را به کار می‌برد.»

اما بعد از *افلاطون*، عرفانِ عددی فیثاغورس کمرنگ شد ولی دوبـاره از قـرن اول قبـل از میلاد به بعد تحت تأثیر فرهنگ بـابلی و بـا ایـده‌هـای *نیکومـاخوس*، عرفـان فیثاغورسـی بـا عنـوان نوفیثاغورسی دوباره پا به عرصهٔ فلسفه گذاشت. این اندیشه بیشتر بر مبنای تعمـق و تفکـر بـود و بـه علاوه تلاش‌هایی نیز به منظـور مربـوط سـاختن آن بـه طـالع‌بینـی انجـام شـد و بعـدها نیـز گـرایش ضدمسیحی به خود گرفت.

فیثاغورسیان به کروی بودن زمین عقیده داشتند ولی دلیلی مبتنـی بـر تجربـه بـرای آن در دست نداشتند. در واقع می‌گفتند که کره کامل‌ترین شکل است و هر چیـزی چـون ریاضـی اسـت باید کامل باشد. پس همهٔ اجرام سماوی باید کروی باشند.

آن‌ها عقیده داشتند که زمین مرکز عالم نیست و به همراه ماه، خورشید و پنج سیاره دیگر به دور یک توده آتشی در مرکز عالم می‌چرخد که اولین گام در جهت ارائه جهـانی بـا مرکزیـت چیزی غیر از زمین محسوب می‌شد. می‌گفتند که زمین ضمن ایـن چـرخش در مـدارهای دایـره‌ای (یک شکل کامل دو بعدی) موسیقی می‌نوازد (آن‌ها نوعی تطابق بین ایـن هشـت جـرم سـماوی و هشت نت موجود در هر اکتاو قائل بودند) لیکن آن‌را نمی‌شنویم چون ما استعداد درکش را نداریم یا چون گوشمان از کودکی به آن عادت نموده است. *کپلر* با جدیت حدود ده سال هـارمونی‌هـای فیثاغورس را جستجو کرد ولی در نهایت به سه قانونش گردن نهاد.

فیثاغورسیان می‌گفتند چون ۱۰ = ۴ + ۳ + ۲ + ۱ پس باید ده جرم در آسمان باشد. لـذا علاوه بر خورشید، زمین، ماه، توده آتشی و پنج سیاره دیگر (که با چشم غیر مسلح دیده می‌شوند) یعنی مشتری، مریخ، زهره، عطارد و زحل، باید یک جرم سماوی دیگر که آن‌را «پاد زمین» نامیدند وجود داشته باشد، چیزی که به موازات زمین و با همان سرعت حرکت می‌کنـد و لـذا مـا قـادر بـه دیدن آن نیستیم.

فیثاغورسیان همچنین کشف کردند که ستارهٔ صبحگاهی و ستاره شامگاهی، هـر دو یـک چیز (یعنی سیارهٔ ناهید) هستند.

آن‌ها نیروهای محرک جهان را محصول تقابل اضداد دهگانه محدود و نامحـدود، فـرد و زوج، وحدت و کثرت، مربع و مستطیل، خیر و شر، نور و ظلمت، مذکر و مؤنث، راست و خمیده، سـکون و حرکـت، راسـت و چـپ و کشـمکش آن‌هـا مـی‌دانسـتند کـه تـوازنی زیبـا را داراسـت، اندیشه‌هایی که احیاناً از زرتشتیان وام گرفته شده بود.

فیثاغورسیان معتقد بودند که روح هر انسان دارای موسیقی است و لـذا وقتـی کـه روح از زندان جسم آزاد می‌شود می‌تواند با هارمونی‌هایش در موسیقی کیهانی و جهان معقول وارد شـود. به علاوه موسیقی حاصل از نواختن چنگ و نیز ریاضیات بـا منـزه کـردن روح و تصـفیه بـاطن هـر انسان، او را برای رهایی روحش آماده می‌سازند.

به نظر می‌رسد که *فیثاغورس* اولین کسی است که واژهٔ فیلسوف را به کار بـرد. یـک بـار در خلال بازی‌های ورزشی، لئون (شاهزاده *فیلوس*) از فیثاغورس خواست تا خودش را معرفی کند و فیثاغورس پاسخ داد: «من یک فیلسوف هستم.»

لئون که قبلاً هرگز چنین چیزی را نشنیده بـود از او خواسـت تـا مطلـب را توضـیح دهـد. فیثاغورس پاسخ داد: «شاهزاده لئون، زندگی می‌تواند با این بازی‌هایی که در آن عدهٔ زیادی جمـع شده‌اند مقایسه شود. چرا که بعضی برای خرید و فروش، بعضی برای شهرت و بعضی برای تماشا و درک آن‌چه این‌جا می‌گذرد گرد هم آمده‌اند. در مورد زنـدگی نیـز چنـین چیـزی صـادق اسـت. بعضی دوستداران سـودند (سـطح پـایین)، بعضـی دوسـتداران افتخارنـد (سـطح متوسـط) و بعضـی دوستداران عقلند (سطح عالی). این گروه سوم را من فیلسوف می‌نامم چرا که گرچه هیچ کس بـه طور کامل عاقل نیست ولی فیلسوف می‌تواند عقلانیت را به عنوان کلیدی برای حل معماها و رموز طبیعت دوست داشته باشد.

فصل بیستم (ضمیمه)

تاریخ مختصر
حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان)

اغلب گفته می‌شود که *نیوتن* و *لایبنیتز* حسابان را اختراع کردند تا مسائلی چند را در دنیای فیزیکی حل کنند. شاهدی برای این ادعا وجود ندارد. در واقع *نیوتن* و *لایبنیتز* همچون اسلاف خود کنجکاو شدند تا مسألهٔ «مماس» و مسأله «مساحت» را حل کنند، یعنی روش کلی برای یافتن مماس و مساحت به دست آورند؛ و پس از آن‌که حسابان به وجود آمد، در زمینه‌های مختلف به ویژه فیزیک به کار گرفته شد و موفقیت‌های شایانی به همراه آورد.


ارشمیدس

توابع، حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال نامعین و قضیهٔ اساسی حسابان (که دو مورد اخیر را به هم پیوند می‌دهد) شالودهٔ آن‌را تشکیل می‌دهند. البته این ترتیب ارتباط اندکی با نظمی که تحت آن این مفاهیم توسعه یافته‌اند دارد.

سرچشمهٔ حسابان به دو هزار سال قبل و به کار یونانیان بر روی مماس و مساحت بر می‌گردد. *ارشمیدس* به روش *افناء*، مساحت قطعه‌ای از یک سهمی را به دست آورد، کاری که بر حسب اصطلاحات امروزی ما، همان برآورد تقریبی $\int^{b} x^{2}dx$ است. وی همچنین مساحت یک بیضی و نیز حجم و مساحت سطح یک کره را به دست آورد. *آپولونیوس* دربارهٔ مماس‌های بر بیضی، سهمی و هذلولی مطالبی نوشت و *ارشمیدس* بحثی در مورد مماس‌های

بر منحنی $\rho = \theta$ موسوم به مارپیچ *ارشمیدس* ارائه کرد. آن‌ها انتظار اندکی داشتند که مسألهٔ «مساحت» و مسألهٔ «مماس» بتوانند چند قرن بعد به نقطهٔ مشترکی برسند.

با فروپاشی جهان یونانی که بسته شدن آکادمی هزار سالهٔ *افلاطون* در ۵۲۹ بعد از میلاد به دست *ژوستین* نشانه آن بود، جهان اسلام حافظ کارهای ریاضی‌دانان یونانی شد، در یک محیط آزاد طلبه‌های یهودی، مسلمان و مسیحی با یکدیگر کار می‌کردند، بر روی نوشته‌های قدیم شرح می‌نوشتند یا آن‌ها را ترجمه می‌کردند و گاهی نیز به آن‌ها شاخ و برگ تازه‌ای می‌دادند. به عنوان مثال *الهازن* حجم بعضی اجسام را محاسبه کرد و در واقع $\int_{0}^{b} x^{3}dx$ و $\int_{0}^{b} x^{4}dx$ را برآورد نمود.

مدرسیان قرن ۱۴ سؤال زیر را مطرح کردند:

«اگر جسمی با سرعت متغیر حرکت کند، چه مسافتی را در یک مدت معین طی خواهد کرد؟»

و در همان دوره عده‌ای از جمله *نیکول ارسم* به حل آن پرداختند. *گالیله* نیز بعدها به مطالعهٔ این مسأله همت گماشت.

به قرن هفدهم نکشید که چندین ایده به هم درآمیخت و حسابان را به وجود آورد. در سال ۱۶۳۷ *دکارت* و *فرما* هندسه تحلیلی را معرفی کردند. *دکارت* یک منحنی مفروض را به کمک روش‌های جبری مورد بررسی قرار داد، در حالی که *فرما* روشی برعکس را برگزید تا هندسهٔ نهان در یک معادلهٔ مفروض را کشف نماید. به عنوان مثال، فرما نشان داد که نمودار $ax^{2} + bxy + cy^{2} + dx + ey + f = 0$ همیشه یک بیضی، هذلولی، سهمی یا یکی از اشکال تباهیدهٔ آن‌هاست. در همین دوره، *کاوالیری* مساحت زیر منحنی $y = x^{n}$ را به ازای $n = 1,2,3,\ldots,9$ به روشی که طول محاسباتش وقتی نما افزایش می‌یافت به سرعت رشد می‌کرد، به دست آورد. سپس حدس زد که الگوی به دست آمده برای نماهای بزرگتر نیز برقرار است. در طی بیست سال بعد، چندین ریاضی‌دان حدس او را تأیید کردند. بنابراین حتی محاسبهٔ مساحت زیر منحنی $y = x^{n}$ به ازای یک عدد صحیح مثبت n، که اینک برای ما مسلم است، یک برگ برنده برای ریاضی‌دانان محسوب می‌شد. اما در مورد نماهای دیگر چه می‌توان گفت؟ قبل از سال ۱۶۶۵ نمای دیگری مطرح نبود. با این حال ممکن بود با تابعی که با ضابطهٔ $y = x^{\frac{p}{q}}$، به ازای اعداد صحیح مثبت p و q تعریف می‌شود به عنوان تابع y که $y^{q} = x^{p}$ کار شود (برای مثال تابع $y = x^{\frac{2}{3}}$ تابعی است که $y^{3} = x^{2}$).

والیس به وسیلهٔ روشی که بیشتر به جادو شباهت داشت تا ریاضیات، مساحت را پیدا کرد، با این حال *فرما* همین نتیجه را به کمک یک سری نامتناهی به دست آورد.

مسألهٔ تعیین مماس بر یک منحنی نیز تا نیمهٔ اول قرن هفدهم در ابهام بود. *دکارت* نشان داد چگونه قائم بر یک منحنی در نقطه‌ای مانند p را (به کمک دایره‌ای که منحنی را فقط در p قطع می‌کند) می‌توان به دست آورد و بنابراین مماس، خطی است مار بر p و عمود بر آن خط. *فرما* مماس را به روشی مشابه روش کنونی ما به دست آورد و آن را در مسائل حداکثر- حداقل به کار برد.

اسحاق نیوتن

قدم بعدی در مورد ترکیب روش‌های «مماس» و «مساحت» برداشته شد. در واقع *بارو*، معلم *نیوتن* در کمبریج، نتیجه‌ای معادل قضیهٔ اساسی حسابان به دست آورد، اما آن را به شکلی سودمند بیان نکرد.

نیوتن در سال ۱۶۶۱ وارد کمبریج شد و در طی سال‌های ۱۶۶۵ و ۱۶۶۶ که در مزرعهٔ خانوادگیش به سر می‌برد تا از طاعون در امان باشد مبانی حسابان را تکامل بخشید. وی دریافت که یافتن مماس و محاسبه مساحت دو فرآیند عکس یکدیگرند. گرچه اولین جدول انتگرال که تدوین شد در یکی از دست نوشته‌های *نیوتن* در این دوره به دست آمده است ولی وی نیز در آن زمان نتایج کار خود را منتشر نکرد که شاید علت آن کسادی بازار کتاب بعد از آتش سوزی بزرگ لندن در سال ۱۶۶۵ بود. در طول آن دو سال با ارزش، وی نماهای منفی و کسری را معرفی کرد. در واقع وی نشان داد که عملیات گوناگونی همچون ضرب یک عدد a چندین بار در خودش، معکوس کردنش و پیدا کردن ریشهٔ بعضی از توان‌های آن عدد، دقیقاً موارد خاصی از یک تابع نمایی کلی a^x هستند که در آن به ترتیب x یک عدد صحیح مثبت، ۱- یا یک کسر است.

با این حال *لایبنیتز* به طور مستقل حسابان را ابداع کرد. او وکیل، سیاستمدار و فیلسوف بود و برای وی ریاضیات یک مشغلهٔ جدی به حساب می‌آمد، در سال‌های ۱۶۷۳ تا ۱۶۷۶ حسابان خود را طرح کرد و تحقیقاتش را در سال ۱۶۸۴ و ۱۶۸۶، واقعاً قبل از اولین انتشار *نیوتن* در سال ۱۷۱۱، منتشر کرد. وضع نمادهای dx و dy، اصطلاحات «حساب دیفرانسیل» و «حساب انتگرال»، علامت انتگرال و کلمهٔ تابع را مدیون *لایبنیتز* هستیم. $\dot{x}$ که برای نمایش

ویلهلم لایبنیتز

مشتق گیری نسبت به زمان در فیزیک کنونی استفاده می‌شود تنها نمادی است که از *نیوتن* باقی مانده است.

بیش از دو قرن طول کشید تا این حسابان به وضعیت فعلی خود از لحاظ دقت و صحت رسید. مفهوم تابع از «منحنی» به تدریج به «دستور» یا قاعده‌ای که مقداری را به مقدار دیگری نسبت می‌دهد، تبدیل شد. کتاب درسی بزرگ حسابان *اویلر* که در ۱۷۴۸ منتشر شد بر تعریفی از تابع که در آن ذکری از نمودار نشده بود تأکید می‌کرد.

کوشی در سال‌های ۱۸۲۰، «حد» و «تابع پیوسته» را به مفهومی که امروزه به کار می‌بریم تعریف کرد. او همچنین تعریفی از انتگرال معین ارائه داد که با تغییری اندک به وسیلهٔ *ریمان* در سال ۱۸۲۵ به تعریف استاندارد فعلی تبدیل شد و به این ترتیب بود که در اواسط قرن نوزدهم اکتشاف‌های *نیوتن* و *لایبنیتز* بنیانی محکم به خود گرفتند.

اوگوستن کوشی

در۱۸۳۳، *لیوویل* نشان داد که قضیهٔ بنیادی حسابان نمی‌تواند برای تعیین انتگرال همهٔ توابع مقدماتی به کار رود. در حقیقت او نشان داد که تنها مقادیر k که به ازای آن‌ها $\int\sqrt{1-x^{2}}\sqrt{1-kx^{2}}dx$ تابعی مقدماتی است صفر و یک هستند. هنوز بعضی از سؤال‌های اساسی باقی مانده بود. مانند این‌که «منظور از مساحت چیست؟» (برای مثال، آیا مجموعهٔ نقاط داخل یک مربع که مختصات گویا دارند، دارای مساحت است یا نه؟) سال ۱۸۸۷ بود که *پئانو* تعریف دقیقی از مساحت (کمیتی که ریاضی‌دانان پیشین به طور شهودی به آن می‌نگریستند) ارائه داد.

سرانجام مبانی حسابان با ارائهٔ یک پایهٔ استوار توسط *ددکیند* برای دستگاه اعداد حقیقی بر مبنای نظریهٔ مجموعه‌های (نامتناهی) *کانتور* مستحکم گردید.

بنابراین تاریخ حسابان شامل سه دوره است:

نخست این‌که برای مدت‌ها هیچ ملاحظه‌ای دال بر ارتباط مساحت و مماس وجود نداشت. در دورهٔ بعد، از اواخر قرن هفدهم تا پایان قرن هجدهم، کشف ارتباط بسیار نزدیک آن‌ها و بهره‌وری از این ارتباط را شاهد هستیم. سرانجام به دنبال این دوره قرنی آمد که در آن بنیان‌های سست محکم شدند.

قرن بیستم حسابان را درک کرده و در بسیاری از حوزه‌های جدید به‌کار برده است. زیرا حسابان زبانی طبیعی است که با فرآیندهای پیوسته از قبیل تغییرات همراه با زمان سر و کار دارد. حسابان به طور قطع زنده و همچنان باقوت در حال رشد است.

نام اشخاص

آتیا، مایکل	Micheal Atiya	-۱۹۲۹
آکرمن، ویلهم	Wilhem Ackermann	۱۹۶۲-۱۸۹۶
آیر، آلفرد	Alferd Ayer	۱۹۸۹-۱۹۱۰
ابن هیثم	Al-Haytham	۱۰۴۰-۹۶۵
اپیکور	Epicurus	۲۷۰-۳۴۱ ق.م
ادینگتون،آرتور	Arthur Eddingtin	۱۹۴۴-۱۸۸۲
ارسطو	Aristotel	۳۲۲-۳۸۳ ق.م
ارسم، نیکول	Nicole d' Oresme	۱۳۲۳-۱۳۸۲
ارشمیدس	Archimedes	۲۱۲-۲۸۷ ق.م
اسپینوزا، باروخ	Baruch Spinoza	۱۶۷۷-۱۶۳۲
استوارت، یان	Ian Stewart	-۱۹۴۵
اسکولم، آلبرت	Albert Skolem	۱۹۶۳-۱۸۸۷
اشر، مورینس	Maurits Escher	۱۹۷۲-۱۸۹۸
افلاطون	Plato	۴۲۷ ق.م
اقلیدس	Euclid	۲۶۵-۳۲۵ ق.م
اکویناس، توماس	Tomas Aquinas	۱۲۷۴-۱۲۲۵
امپدوکس	Empedocles	۴۳۲-۴۹۲ ق.م
انودوکسوس	Eudoxus	۳۵۵-۴۰۸ ق.م
اویلر،لئونهارد	Leonhard Euler	۱۷۸۳-۱۷۰۷
اینشتن، آلبرت	Albert Einstein	۱۹۵۵-۱۸۷۹
بارکلی،جورج	Gorge Berkeley	۱۷۵۳-۱۶۸۵
بارو،ایزاک	Isaac Barrow	۱۶۷۷-۱۶۳۰
باناخ، استفن	Stefan Banach	۱۹۴۵-۱۸۹۲
براؤور، لوئیتزن	Luitzen Brouwer	۱۹۶۶-۱۸۸۱
برنشتاین، فلیکس	Felix Bernstein	۱۹۵۶-۱۸۷۸
برنشویک، لئون	Leon Brunschwicg	۱۹۴۴-۱۸۶۹
بطلمیوس	Claudius Ptolemy	۸۵-۱۶۵ ق.م.

بلاگوئر، ژ.	Joaquín Balaguer	۲۰۰۲-۱۹۰۶
بوچفار، د.	D.A. Bochvar	منطقدان قرن بیستم
بور،نیلس	Niels Bohr	۱۹۶۲-۱۸۸۵
بول، جورج	George Boole	۱۸۶۴-۱۸۱۵
بولتزمان، لودویگ	Ludwig Boltzmann	۱۷۳۳-۱۶۶۷
بویویی، بانوش	Janos Bolayi	۱۸۶۰-۱۸۰۲
بویویی، فورکوش	Farkas Bolayi	۱۸۵۶-۱۷۷۵
بیشاپ، ارت	Errertt Bishop	۱۹۲۸-۱۹۸۳
بیکن، فرانسیس	Francis Bacon	۱۶۲۶-۱۵۶۱
پئانو، چوزپه	Giuseppe Peano	۱۹۳۲-۱۸۵۸
پارمیندس	Parmenides	۴۵۰-۵۴۰ ق.م.
پاش، موریتس	Moritz Pasch	۱۹۳۰-۱۸۴۳
پاتنام، هیلاری	Hilary Putnam	-۱۹۲۶
پاولینگ، لینس	Linus Pauling	۱۹۹۴-۱۹۰۱
پست، امیل	Emil Post	۱۹۵۴-۱۸۹۷
پلیفیر، جان	John Playfair	۱۸۱۹-۱۷۴۸
پوانکاره، هانری	Henri Poincare	۱۹۱۲-۱۸۵۴
پیرس، چالز	Charles Peirce	۱۹۱۴-۱۸۳۹
پیرون	Pyrrhon	۲۵۷-۳۶۵ ق.م.
تارسکی، آلفرد	Alfred Tarski	۱۹۸۳-۱۹۰۲
تالس	Thales	۵۴۷-۶۲۴ ق.م.
تام، رنه	Rene Thom	-۱۹۲۳
تامسون، ویلیام	William Thomson	۱۹۰۷-۱۸۲۴
تسرملو، ارنست	Ernst Zermelo	۱۹۵۳-۱۸۷۱
تورینگ، آلن	Alan Turinrg	۱۹۵۴-۱۹۱۲
تیلور، بروک	Brook Taylor	۱۷۳۱-۱۶۸۵
جیمز، ویلیام	William James	۱۹۱۰-۱۸۴۲
چرچ، آلنزو	Alonzo Church	۱۹۹۵-۱۹۰۳
چزاره، بورالی-فورتی	Cesare Burali-Forti	۱۹۳۱-۱۸۶۱
خیام، عمر	Omar Khayyam	۱۱۳۱-۱۰۴۸
ددکیند، ریچارد	Richard Dedekind	۱۹۱۶-۱۸۳۱
دکارت، رنه	Rene Descartes	۱۶۵۰-۱۵۹۶
دموکریت(ذیمقراطیس)	Democritus	۳۷۰-۴۶۰ ق.م.
دیددونه، ژان	Jean Dieudonne	۱۹۹۲-۱۹۰۶
دیراک، پال	Paul Dirac	۱۹۸۴-۱۹۰۲

دیویس، فیلیپ	Philip Davis	-۱۹۲۳
رابینسون، آبراهام	Abraham Rabinson	۱۹۷۴-۱۹۱۸
راترفورد، ارنست	Ernest Ratherford	۱۹۳۷-۱۸۷۱
راسل، برتراند	Bertrand Russel	۱۹۷۰-۱۸۷۲
رایشنباخ، هانس	Hans Reichenbach	۱۹۵۳-۱۸۹۱
روتا، جیان کارلو	Gian-Carlo Rota	۱۹۹۹-۱۹۳۲
ریمان، برنهارد	Bernhard Rieman	۱۸۶۶-۱۸۲۶
زنون ایلیایی	Zeno of Elea	۴۲۵-۴۹۰ ق.م
سارتر، ژان پال	Jean-Paul Sartre	۱۹۸۰-۱۹۰۵
ساکری، جیرلامو	Girolomo Saccheri	۱۷۳۳-۱۶۶۷
ساکسونی، آلبرت	Albert of Saxony	۱۳۹۰-۱۳۱۶
سقراط	Socrates	۳۹۹-۴۶۹ ق.م.
شاو، برنارد	Bernard Shaw	۱۹۵۰-۱۸۵۶
شوئنفلایز، آرتور	Arthur Schoenflies	۱۹۲۸-۱۸۵۳
طوسی، خواجه نصیر	Nasir al-Din-Tusi	۱۲۷۴-۱۲۰۱
فرانکل، آبراهام	Abraham Frankel	۱۹۶۵-۱۸۹۱
فرسن، باس ون	Bas C.Van Frassen	-۱۹۴۱
فرگه، گوتلوب	Gottlob Frege	۱۹۲۵-۱۸۴۸
فرما، پیر دو	Pier do Ferma	۱۶۶۵-۱۶۰۱
فن نیومن، جان	John Von Neumann	۱۹۵۷-۱۹۰۳
فن هلمهولتز، هرمان	Hermann Van Helmholtz	۱۸۹۴-۱۸۲۱
فیثاغورس	Phythagoras	۴۷۵-۵۶۹ ق.م.
کارناپ، رادولف	Rudolf Carnap	۱۹۷۰-۱۸۹۱
کانت، ایمانوئل	Imanuel Kant	۱۸۰۴-۱۷۲۴
کانتور، گئورگ	Georg Cantor	۱۹۱۸-۱۸۴۵
کاوالیری، فرانچسکو	Franchesco Cavalieri	۱۶۴۷-۱۵۹۸
کپلر، یوهان	Yohann Kepler	۱۶۳۰-۱۵۷۱
کلاین، موریس	Morris Kline	۱۹۹۲-۱۹۰۸
کلیفورد، ویلیام	William Clifford	۱۸۷۹-۱۸۴۵
کوؤن، تومای	Thomas Kuhn	۱۹۹۶-۱۹۲۲
کواین، ویلارد	Willard Quine	۲۰۰۰-۱۹۰۸
کوپرنیک، نیکلاس	Nicolaus Copernicus	۱۵۴۳-۱۴۷۳
کوشی، اوگستن	Augustin Cauchy	۱۸۷۵-۱۷۸۹
کونیگ، یولیس	Julius König	۱۹۱۳-۱۸۴۹
کوهن، پال	Paul Cohen	-۱۹۳۴

گالیله، گالیلیو	Galileo Galilei	۱۶۴۲-۱۵۶۴
گاوس، کارل	Carl Gauss	۱۸۵۵-۱۷۷۷
گلدباخ، کریستین	Christian Goldbach	۱۷۶۴-۱۶۹۰
گنتسن، گرهارد	Gerhard Gentzen	۱۹۴۵-۱۹۰۹
گودل، کورت	Kurt Gödel	۱۹۷۸-۱۹۰۶
لاک، جان	John Locke	۱۷۰۴-۱۶۳۲
لاکاتوش، ایمره	Imere Lakatos	۱۹۷۳-۱۹۲۲
لامبرت، هنریش	Heinrich Lambert	۱۷۷۷-۱۷۲۸
لایبنیتز، ویلهلم	Leibniz Wilhelm	۱۷۶۱-۱۶۴۶
لباچفسکی، ایوانوویچ	Ivanovitch Lobachevsky	۱۸۵۶-۱۷۹۳
لبگ، هانری	Hanri Lebesgue	۱۹۴۱-۱۸۷۵
لژاندر، ماری	Marie Legendre	۱۸۳۳-۱۷۵۲
لوکازیه ویچ، یان	Jan Łukasiewicz	۱۹۵۶-۱۸۷۸
لوونهایم، لئوپلد	Leopeld Lwenheim	۱۹۵۷-۱۸۷۸
لیوویل، ژوزف	Liouville	۱۸۸۲-۱۸۰۹
ماخ، ارنست	Ernest Mach	۱۹۱۶-۱۸۳۸
مکلورن، کالین	Colin Maclaurin	۱۷۴۶-۱۶۹۸
مولوی	Mulavi	۱۲۵۱-۱۱۸۳
میل، جان استوارت	John Stuart Mill	۱۸۷۳-۱۸۰۶
مینکوفسکی، هرمان	Hermann Minkowski	۱۹۰۹-۱۸۶۴
نیوتن، آیزاک	Isaac Newton	۱۷۲۷-۱۶۴۲
والیس، جان	John Wallis	۱۷۵۳-۱۶۵۶
وایتهد، آلفرد	Alfred Whiteead	۱۹۴۷-۱۸۶۱
وایرشتراس، کارل	Karl Weierstrass	۱۸۹۷-۱۸۱۵
ویتگنشتین، لودویگ	Ludwig Wittgenstein	۱۹۵۱-۱۸۸۹
ویگنز، اویگن	Wigner Eugene	۱۹۹۵-۱۹۰۲
ویل، هرمان	Herman Weyl	۱۹۵۵-۱۸۸۵
وینر، نوربرت	Norbert Wiener	۱۹۶۴-۱۸۹۴
هابز، توماس	Thomas Hobbes	۱۶۷۹-۱۵۸۸
هاردی، گادفری	Godfrey Hardy	۱۹۴۷-۱۸۷۷
الهازن	Alhazen	۹۶۵-۱۰۳۹
هالموس، پال	Paul Halmos	-۱۹۱۶
هایزنبرگ، ورنر	Werner Hisenberg	۱۹۷۶-۱۹۰۱
هرش، روبن	Reuben Hersh	-۱۹۲۷
هگل، گئورگ	Georg Hegel	۱۸۳۱-۱۷۷۰

هیتینگ، آرند	Arend Heyting	۱۹۸۰-۱۸۹۸
هیلبرت، داوید	David Hilbert	۱۹۴۳-۱۸۶۲

واژه نامه

اثبات پذیر	Provable
اثبات گرایی	Logic positivism
استقرایی	Inductive
اصطلاح اولیه	Primitive term
اصطلاح تعریف نشده	Undefined term
اصل انتخاب	Choice of axiom
اصل موضوع	Axiom
اعیان، ذوات	Entities
افلاطون گرایی	Platonism
افلاطون گرایی تمام عیار	Full-blooded Platonism
اقلیدسی	Euclidean
انسان گرایی	Humanism
اینهمانی	Identity
بسیط	Atomic
بی رنگ بینی	Achromatopsique
بی‌کاست، کامل	Perfect
پارادوکس	Paradox
پدیدار	Phenomenon
پراگماتیسم	Pragmatism
پیرا سازگار	Paraconsistent
تالی	Successor
تجربه گرایی	Empiricism
تحلیلی	Analytic
ترکیبی	Synthetic
تعبیر	Interpretation
تقلیل پذیر	Reducible
تک گرایی	Monism

Categorical	جازم
Entity	جوهر، هستی
Pluralism	چند گرایی
Calculus	حسابان
Arithmetization	حسابیدن
Statement	حکم
Idealism	ذهنی گرایی
True	راست، درست
Tautology	راستگو، همانگویی
Truth	راستی، ارزش، حقیقت، صدق
Constructivism	ساخت گرایی
Consistency	سازگاری
Intuitionism	شهود گرایی
Forms	صور
Formalism	صورت گرایی
Formal	صوری
Rationalism	عقل گرایی
Continuoum hypothesis	فرضیه پیوستار
Deductive	قیاسی
Model	الگو
Algorithm	الگوریتم
Turing machine	ماشین تورینگ
Meta language	ماوراء زبان
Commensurable	متوافق
Equipolent	متوافق
Abstract	مجرد
Predicate	محمول
Decision problem	مسأله تصمیم (قطع)
Epistemology	معرفت شناسی
Conceptualism	مفهوم گرایی
Many-valued logic	منطق چند ارزشی
Three-valued logic	منطق سه ارزشی
Fuzzy logic	منطق فازی
Log	منطقیدن
Non-Euclidean	نااقلیدسی

ناسازگار	Inconsistent
نام گرایی	Nominalism
نظاممند	Systematic
نظریه انواع	Type theory
نظریه تطابق	Correspondence theory
نظریه توافق	Coherence theory
نمود	Appearance
نمونه	Pattern
واژه مشاهده ای	Observation term
واژه نظری	Theoretical term
واقع گرایی	Realism
واقعیت	Reality
هندسه وقوع	Incidence geometry

منابع

فارسی

کتب

۱. ایوز، هاورد و. ، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، جلد اول، ۱۳۶۳.

۲. ایوز، هاورد و. ، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، جلد دوم، ۱۳۶۳

۳. استیوارت، یان، مفاهیم ریاضیات جدید، ترجمه جمشید پرویزی، انتشارات خوارزمی، ۱۳۶۹.

۴. اعتماد، شاپور، دیدگاه ها و برهان ها (مجموعه مقالات)، نشر مرکز، ۱۳۷۵.

۵. بارکر، استیفن، فلسفه ریاضی، ترجمه احمد بیرشک، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.

۶. بروئر، ژ. ، ورودی به نظریه مجموعه ها، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات پویش، ۱۳۵۹.

۷. برونفسکی، یاکوب، شناخت عمومی علم، ترجمه محمد علی پور عبدالله نژاد، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۶۸.

۸. پوپر، کارل ریموند، منطق اکتشاف علمی، ترجمه احمد آرام، انتشارات سروش، ۱۳۷۰.

۹. چالمرز، آلن اف، چیستی علم، ترجمه سعید زیبا کلام، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی، ۱۳۷۸.

۱۰. دورانت، ویل، لذات فلسفه، ترجمه عباس زریاب، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۲.

۱۱. راسل، برتراند، مقدمه ای بر فلسفه ریاضی، ترجمه ابوالقاسم لاله، انتشارات یاسین، ۱۳۷۶.

۱۲. رایشنباخ، هانس، پیدایش فلسفه علمی، ترجمه موسی اکرمی، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، چاپ اول، ۱۳۷۱.

۱۳. رنیی، آلفرد، گفت و شنودهایی در ریاضیات، ترجمه سعید قهرمانی، انتشارات خوارزمی، ۱۳۷۳.

۱۴. سروش، عبدالکریم، علم چیست؟ فلسفه چیست؟، انتشارات پیام آزادی، ۱۳۶۱.

۱۵. کاپالدی، نیکلاس، فلسفه علم، ترجمه علی حقی، انتشارات سروش، ۱۳۷۷.

۱۶. کارناپ، ردلف و دیگران، فلسفه ریاضی (مجموعه مقالات)، زیر نظر: حسین ضیایی، مرکز ایرانی مطالعه فرهنگ ها، تهران، ۱۳۵۹.

۱۷. کارناپ، ردلف، فلسفه علم، ترجمه یوسف عفیفی، انتشارات نیلوفر، ۱۳۶۳.

۱۸. گوردر، یوستین، دنیای سوفی، ترجمه حسن کامشاد، انتشارات نیلوفر، ۱۳۷۷.

۱۹. گرینبرگ، ماروین جی، هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه محمد هادی شفیعیها، نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳.

۲۰. گلشنی، مهدی، تحلیلی از دیدگاه های فلسفی فیزیک دانان معاصر، انتشارات امیر کبیر، ۱۳۶۹.

۲۱. گیلیس، دانالد، فلسفه علم در قرن بیستم، ترجمه حسن میانداری، سمت، ۱۳۸۱.

۲۲. فروغی، محمد، سیر حکمت اروپا، انتشارات زوار، ۱۳۶۸.

۲۳. فولکیه، پل، فلسفه عمومی، ترجمه یحیی مهدوی، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۴۷.

۲۴. مصاحب، غلامحسین، مدخل منطق صورت، انتشارات حکمت، ۱۳۶۸.

۲۵. مطهری، مرتضی، شناخت، انتشارات شریعت، ۱۳۶۱.

۲۶. موحد، ضیاء، از ارسطو تا گودل، انتشارات هرمس، ۱۳۸۲.

۲۷. ناگل، ارنست و دیگران، برهان گودل و حقیقت برهان، ترجمه محمد اردشیر، انتشارات مولی، ۱۳۶۴.

۲۸. واربرتون، نایجل، بنیان‌های فلسفه، ترجمه علی حقی،اهل قلم، ۱۳۷۹.

۲۹. ویتگنشتاین، لودویگ، رساله منطقی- فلسفی، ترجمه محمود عبادیان، انتشارت جهاد دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۳۰. هایزنبرگ، ورنر، جزء و کل، ترجمه حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۳۱. هال، لوئیس، تاریخ و فلسفه علم، ترجمه عبدالحسین آذرنگ، انتشارات سروش، ۱۳۶۹.

۳۲. هالموس، پ.ر. ، نظریه طبیعی مجموعه ها، ترجمه عبدالحمید دادالله، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲.

۳۳. هشترودی، محسن، سیر اندیشه بشر، ۱۳۶۲.

۳۴. همیلتن، آ.گ. ، منطق برای ریاضیدانان، ترجمه محمد علی پور عبد الله نژاد، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۷۱.

۳۵. همپل، کارل، فلسفه علوم طبیعی، ترجمه حسین معصومی همدانی، نشر دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۶۹.

۳۶. هنل، جیمز م. ، گذری بر نظریه مجموعه ها، ترجمه مریم امیاری، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، ۱۳۷۷.

مقالات

۱. اردشیر، محمد، شهودگرایی، نشر ریاضی، سال ۹، شماره ۱۰، ۱۳۷۶.

۲. اویلر، ه.، تاریخ ۵ = ۲ + ۲، ترجمه محمد صال مصلحیان، رشد آموزش ریاضی، شماره ۶۲، ۱۳۸۰.

۳. بارکر، استیفن ف.، واقع گرایی به عنوان فلسفه ریاضیات، ترجمه شرف الدین شرفی و منوچهر میثاقیان، پیک ریاضی، جلد دوم، شماره اول، ۱۳۶۶.

۴. براؤور، لوئیتزن، شهود گرایی و صورت گرایی، ترجمه محمد اردشیر، نشر ریاضی، سال ۹، شماره ۱۰، ۱۳۷۶.

۵. بناسراف، پال، صدق ریاضی، ترجمه ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۱۰، شماره ۱، ۱۳۷۷.

۶. تابش، یحیی، لاکاتوش: اثبات و ابطال، پیک ریاضی، شماره دوم، ۱۳۶۵.

۷. جمره، مریم، مکاتب فلسفی معاصر در ریاضیات، پایان نامه، دانشگاه فردوسی، ۱۳۸۴.

۸. جمره، مریم، مکاتب فلسفی معاصر در ریاضیات، پایان نامه، دانشگاه فردوسی، ۱۳۸۴.

۹. دیویس، فیلیپ، صداقت در مباحثات ریاضی: آیا یک و یک به راستی می شود دو؟، ترجمه علیرضا افشار محرابی، جنگ- ریاضی دانشجو، جلد سوم، ۱۳۶۸.

۱۰. روزنتهال، آرتور، ریشه های تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه ابراهیم محمد زاده، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره اول، ۱۳۶۱.

۱۱. سنپر، ارنست، قضایای ریاضی تحلیلی هستند یا ترکیبی؟، ترجمه ابوالقاسم لاله، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره اول، ۱۳۶۱.

۱۲. شهریاری، پرویز، می بینیم یا به نظرمان می رسد، آشتی با ریاضیات، شماره ۲۰، ۱۳۶۰.

۱۳. شهشهانی، سیاوش، سیر تاریخی فلسفه ریاضیات، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره اول، ۱۳۶۱.

۱۴. صال مصلحیان، محمد، ریاضیدانان ساخت گرا چه می گویند؟، پیک ریاضی، جلد ششم، شماره اول، ۱۳۷۳.

۱۵. صال مصلحیان، محمد، بحثی در مورد زیبایی در ریاضیات، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۱۴، شماره ۲، ۱۳۷۴.

۱۶. صال مصلحیان، محمد، مکاتب ریاضی، نامه فلسفه، سال ۴، شماره ۱، ۱۳۸۰.

۱۷. صال مصلحیان، محمد، نقش مکاتب ریاضی در آموزش ریاضیات، پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور (۱۳۷۹)، وزارت آموزش و پرورش ، ۱۳۸۳.

۱۸. کورانت، ر.، و، رابینز، ه.، ریاضیات چیست؟، ترجمه حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.

۱۹. محمدی جلالی، مهدی، پست‌مدرنیسم، پایان نامه، دانشگاه فردوسی، ۱۳۸۰.

۲۰. مندلکرن، مارک، ریاضیات ساختنی، ترجمه امیر اکبری مجد آبادنو، جنگ ریاضی دانشجو، جلد اول، ۱۳۶۶.

۲۱. هالموس، پال، چگونه یک ریاضیدان محسوب شویم؟، ترجمه محمد صال مصلحیان، رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۷، ۱۳۷۹.

۲۲. هرش، روبن، بیایید فلسفه ریاضی تدریس کنیم!، ترجمه محمد صال مصلحیان و بهزاد بوستانچی، نشر ریاضی، سال ۷، شماره ۱، ۱۳۷۴.

۲۳. هرش، روبن، تفکر مستقل، ترجمه فریدون رهبرنیا و محمد صال مصلحیان، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۲۱، شماره ۲، ۱۳۸۱.

۲۴. هنکین، لئون، آیا منطق و ریاضیات یکی هستند؟، ترجمه رضا کرمی، پیک ریاضی، شماره سوم و چهارم، ۱۳۶۵.

۲۵. وانگ، هائو، ریاضیات چیست؟، ترجمه محمد صال مصلحیان، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۱۷، شماره ۱، ۱۳۷۷.

۲۶. وحید، حمید، گرایش های موجود در فلسفه ریاضیات، نشر ریاضی، سال ۱۰، شماره ۲، ۱۳۷۸.

۲۷. ویلدر، ر.ل.، نقش روش اصل موضوعی، ترجمه ناصر بروجردیان، جنگ ریاضی جلد سوم، ۱۳۶۸.

همچنین بعضی از مقاله ها در شماره های مختلف مجله های فرهنگ و اندیشه ریاضی، پیک ریاضی، نشر ریاضی، جنگ ریاضی دانشجو، رشد آموزش ریاضی، یکان، آشتی(آشنایی) با ریاضیات، نامه فلسفه، ارغنون و . . . مورد استفاده قرار گرفته است.

انگلیسی

1. Abbott, Edvin A., Flatland, A Romance of Many Dimensions, 1884. Reprint, New York: Barnes & Noble, 1983.
2. Alexandre George (editor), Mathematics and Mind (1994), Oxford Univ. Press, 1994.
3. Balaguer, Mark, Platonism and Anti-Platonism in Mathematics, Oxford Univ. Press, 1998.
4. Benacerraf and, Paul and Putnam, Hilary, Philosophy of Mathematics, Bishop, Errett, Foundations of Constructive Analysis, McGraw-Hill, 1967.
5. Baudrillard, J., Simulations, Columbia Univ. Press, New York, Semiotext(e), 1983.
6. Booth . D . and Ziegler . R . (eds.), Finsler Set theory Platonism & Circularity, 1996.
7. Brigges, James M. and Schaffter, T., Measure and cardinality, Amer Math. Monthly, 1979, 852-855.
8. Colyvan, Mark, Is Platonism a bad bet?, Aust. J. of Phil. 76 (1998), No. 1, 115-119.
9. Colyvan, Mark, In deferce of indispensability, CambridgeUnivPress, 1983.
10. Dalas, H.G. and Oliveri, G. (eds), Truth in Mathematics, Oxford Univ. Press, 1998.
11. Davis, P. J. and Hersh, R., The Mathematical Experience, Birkhauser, 1981.
12. Diodorus Siculus . Diodorus of Sicily in Twelve Volumes with an English Translation by C. H. Old father. Vol.4-8. Cambrige, Mass.:Harvard University Press, 1989.
13. Enderton, H. B., A Mathematical Introduction to Logic, Acad. press, 1972.
14. Erickson, G. W. and Fossa, J. A. Dictionary of Paradox. Lanham, MD: University Press of America, 1998.
15. Ernest, Paul, Social constructivism as a philosophy of mathematics, Albany, NY: State University of New York Press, 1998.
16. Feyerabend, Paul, "How to defend society against science", in I. Hacking (ed.), Scientific Revolutions, Oxford Univ. Press, 1981, pp. 157-167
17. Field, H., Mathematical objectivity and mathematical objects, in Contemporary Readings in the Foundation of Metaphysics (1998), 387-403.
18. Foucault, Michel, The History of Sexuality, New York, 1990.
19. Friedman, H. M., The Mathematical Meaning of Mathematical Logic, Lecture, 2000.

20. Friedman, H. M., The Formalization of Mathematics, Lecture, 1997.
21. Glanzberg, Michael, The theory of truth and the theory of sets, to appear.
22. Grabiner, Judith V., The centrality of mathematics in the history of western thought, Math. Magazine, No 4, 61 (1988), 220-230.
23. Hersh, R., What is Mathematics, Really?, Oxford Univ. Press, 1999. Hierocles , The Golden Verses of Pythagoras, by Fabre D'Olivet and Nayan Louis Redfield (Translator), Kessinger Publishing Company,1997.
24. Kitcher, Philip, The Nature of Mathematical knowledge, Oxford Univ. Press, 1983.
25. Lakatos, I., Proofs and refutations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.
26. Lyotard, Jean-François, *The Postmodern Explained*, University of Minnesota Press, 1992.
27. Maddy, Penelop, Naturalism in Mathematics, Oxford Clarendon Press, 1997.
28. Maddy, P., A Platonist's lament, Acta Analytica 11 (1993), 7-26.
29. Moise, E.E. , Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley, 1974.
30. Moslehian, M. S., Let no one unversed in geometry enter here, The Examined Life, Vol. 3, No. 12, 2002.
31. Moslehian, M. S., Postmodern mathematics. Epistemologia, Vol. 25, No. 2, 2003.
32. Moslehian, M. S., What is mathematics in modern and postmodern views? Gazeta Matematica (Romanian Mathematical Society), No 4, 2003.
33. Moslehian, M. S., A glance at Postmodern pedagogy of mathematics, Philosophy of Mathematics Education Journal (UK), No. 17, 2003.
34. Moslehian, M. S., Postmodern view of humanistic mathematics, Philosophy of Mathematics Education Journal (UK), No. 18, 2004.
35. Ramsay Arlan and Robert Richtmyer, Introduction to Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, 1995.
36. Rorty, Richard, The Dangers of Over-Philosophication- Reply to Arcilla and Nicholson, Educational Theory 40, No. 1, 1990.
37. Shapiro, Stewart, Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics, Oxford: Oxford University Press, 2000.
38. Snapper, Ernst, The three crises in mathematics: logicism, intuitionism and formalism, Math magazine, No. 4, 52 (1979), 207-216.
39. Snapper, Ernst, What is mathematics, Amer. Math. Monthly, No. 7, 86 (1979), 551-557.

40. Simpson, S.G., Logic and Mathematics, Lecture, 2002.
41. Stanley, Thomas, Pythagoras, Philosophical Research Society, 1989.
42. Steiner, Mark, The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem, Harward Univ. Press, 1998.
43. V. Tasic, Mathematics and the Roots of Postmodern Thought, Oxford Univ. Press, 2001.
44. Tymoczko, Thomas (ed.), New Directions in the Philosophy of Mathematics, Birkhauser, 1986.
45. Tennant, Neil, The Necessary existence of numbers, Nous 31(1997), 307-336.

مراجع الکترونیکی:

1. American Philosophical Society, http://www.amphilsoc.org/
2. Brockman, John, What Kind Of Thing Is A Number? A Talk With Reuben Hersh, http://www.edge.org/3rd_culture/hersh/hersh_p1.html
3. Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics, http://www.cshpm.org/
4. FOM - Foundations of Mathematics, http://www.cs.nyu.edu/mailman/listinfo/fom/
5. Generation X, Definitive Influences on Today's Youth: http://www.youth.co.za/genxthesis/ch2.htm
6. Klages, Mary, Postmodernism, http://www.colorado.edu/English/ENGL2012Klages/pomo.html
7. NonEuclid, http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/
8. Paul Ernest's page, http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/
9. Famous Paradoxes, http://mathforum.org/isaac/problems/paradox.html
10. MathWorld, Paradox, http://mathworld.wolfram.com/Paradox.html
11. Philosophy of mathematics, http://en.wikipedia.org/wiki/Philosophy_of_mathematics
12. Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/
13. The Mac Tutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/
14. The Philosophy of mathematics, http://www.rbjones.com/rbjpub/philos/maths/index.htm