سوالات و جواب های فیزیک ۱ ----------- مهندسی برق

فصول :

۱ – کار و انرژی

۲ – بقای انرژی

۳ – دینامیک دورانی

۴ – تعادل اجسام صلب

وب سایت : Arshadebargh.blog.ir

ای میل : messi۲۲aval@gmail.com

kalashibagher@yahoo.com

---

(1)

کار و انرژی

- جسمی به جرم $0.675kg$ روی یک میز بدون اصطکاک به ریسمانی متصل شده است. ریسمان از سوراخی واقع بر میز که مرکز دایره افقی می‌گذرد و جسم در روی این دایره با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر شعاع دایره $0.5m$ و سرعت جسم $10m/s$ باشد کشش ریسمان را حساب کنید. ب) معلوم شده است که اگر ریسمان را از داخل سوراخ پایین بکشد، $0.2m$ پایین بکشیم به گونه‌ای که شعاع دایره به $0.3m$ کاهش یابد، کشش ریسمان 4.63 برابر کشش اولیه می‌شود. کل کار انجام شده توسط ریسمان روی جسم دوران کننده را در خلال کاهش شعاع دوران محاسبه کنید.

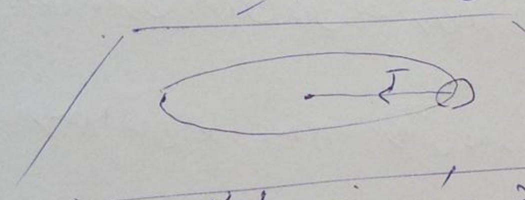
پاسخ:

الف)

$r_1 = 0.5m$

$v_1 = 10 m/s$

$T_1 = ?$



نیروی کشش که تامین کننده شتاب مرکزگرا $(a = \frac{v^2}{r})$ است.

بنابراین:

$$F = ma \rightarrow T_1 = m\frac{v^2}{r}$$

$$T_1 = 0.675 \times \frac{100}{0.5} = 135N$$

ب)

$$r_2 = 0.5 - 0.2 = 0.3m \qquad T_2 = 4.63 T_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_2 = 4.63 \times 135 = 625.05 N = \frac{m v_2^2}{r_2}$$

$$\rightarrow v_2^2 = \frac{r_2}{m} \times 625.05 \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{0.3}{0.675} \times 625.05}$$

$$v_2 = \sqrt{277.8} = 16.6 m/s$$

$$\rightarrow W = \Delta K = 1/2 m v_2^2 - 1/2 m v_1^2 = 60J$$

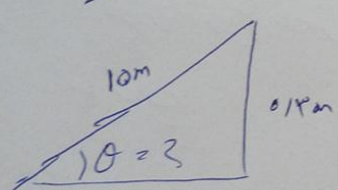
کار و انرژی

توان : سرعت انجام کار ⟸ $P = \frac{dw}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(\vec F \cdot \vec{dl}) \overset{\text{اگر F ثابت}}{\underset{\text{باشد}}{=}} \vec F \cdot \underbrace{\frac{d\vec l}{dt}}_{\vec v} = \vec F \cdot \vec v$$

- کامیونی می‌تواند در جاده‌ای که در هر ۱۵m ارتفاعش به اندازه ۰/۳m افزایش می‌یابد، با سرعت ۲۴ km/h بالا برود. نیروی مقاوم برابر با ۱/۲۵ وزن کامیون است. این کامیون با همان توان با چه سرعتی از جاده پایین می‌آید؟!

پاسخ : در هر ۱۵m ارتفاع به اندازه ۰/۳m افزایش می‌یابد ⟸ θ را داریم



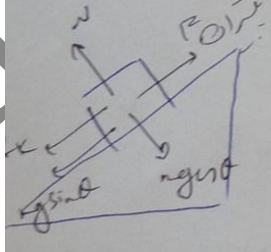
$$\sin\theta = \frac{0/3}{15} = \frac{1}{50}$$

بالا رفتن :

کامیون با سرعت ثابت ۲۴ km/h از جاده بالا می‌رود.

چون سرعت ثابت است برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است:

$$\sum F_x = ma = m\frac{\overset{\text{ثابت می‌ی}}{dv}}{dt} = m \times 0 = 0$$



$\sum F_x = 0 \longrightarrow$ برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است.

بنابراین :

$$F_{\text{پیشران}} = f_k + mg\sin\theta$$
$$= 1/25\,mg + mg\sin\theta$$
$$= 1/25\,mg + mg \times 1/50 = mg\left(1/25 + \frac{1}{50}\right)$$

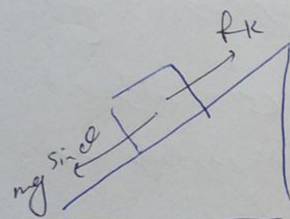
$$F_{\text{پیشران}} = mg\,\frac{3}{50}$$

$$P_{\text{بالا رفتن}} = P_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 = F_{\text{پیشران}} \times 24\ \mathrm{km/h}$$

$$= mg\,3/50 \times 24 \times \frac{10}{36}\ (\mathrm{m/s})$$

$$P_1 = 2/5\ mg$$

پایین آمدن :



نیروهای وارد بر جسم در پایین آمدن ⇐

آیا کامیون برای پایین آمدن نیاز به نیروی پیشران دارد؟ اگر $mg\sin\theta$ کوچکتر از f_k باشد، به نیروی پیشران برای پایین آمدن نیاز داریم :

$$f_k = \frac{1}{25} mg \qquad mg\sin\theta = mg/50$$

$mg\sin\theta < f_k \longrightarrow$ نیروی پیشران نیاز داریم

$$\Rightarrow F_2 + mg\sin\theta = f_k \longrightarrow F_2 = f_k - mg\sin\theta$$

$$= \frac{mg}{25} - \frac{mg}{50}$$

$$F_2 = \frac{mg}{50}$$

$$P_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{mg}{50} v_2$$

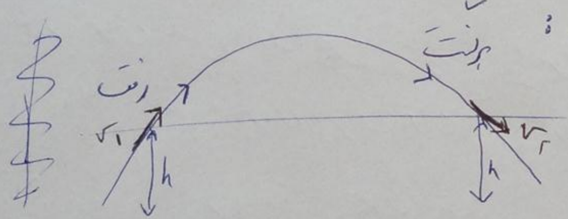
$$P_2 = P_1 \Longrightarrow \frac{mg}{50} v_2 = P_1 = 2/5\ mg$$

$\Rightarrow$ ~~v~~ $v_2 = 20\ m/s$

- بازیکنی توپ بسکتبال را با سرعت اولیه ۱۸ m/s پرتاب می‌کند. بازیکن دیگری در همان سطح توپ مزبور را هنگامی که سرعت آن به ۱۲ m/s کاهش یافته است می‌گیرد. چه مقدار کار برای غلبه بر مقاومت هوا انجام شده است؟ جرم توپ بسکتبال ۲۵۰g است.

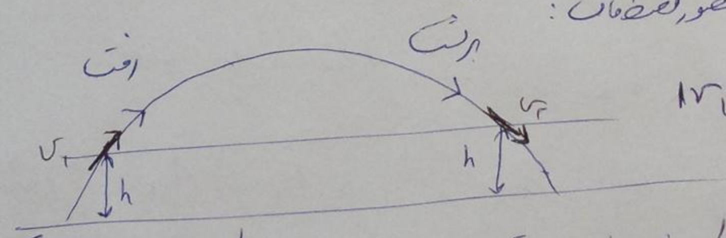
پاسخ: در حرکت پرتابی سرعت توپ در رفت و برگشت در یک ارتفاع مشخص از نظر اندازه یکی است مگر اینکه یک نیروی مقاوم مثل نیروی اصطکاک هوا، به توپ وارد شود و باعث اتلاف انرژی آن شود:

بدون اصطکاک:



$|v_1| = |v_2|$

در حضور اصطکاک:



$|v_1| \neq |v_2|$

مقدار کار انجام شده را می‌توان از طریق قضیه کار و انرژی بدست آورد:

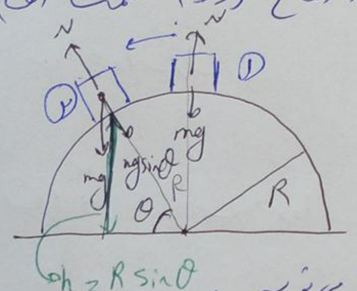
$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(250 \times 10^{-3}) \times [12^2 - 18^2] = -22.5\ J$$

①

بقای انرژی

- پسربچه ای بالای یک تپه یخی با شکل نیمکره نشسته است. بچه در اثر فشار خیلی کمی شروع به لغزیدن می کند. الف) نشان دهید که اگر یخ بدون اصطکاک باشد، پسربچه در نقطه ای که ارتفاع آن $2/3\,R$ است از یخ جدا می شود. ب) اگر میان یخ و پسربچه اصطکاک وجود داشته باشد، آیا از ارتفاعی بیشتر (بالاتر) از ارتفاع مربوط به قسمت الف، از نیمکره جدا می شود؟



پاسخ:

الف) قانون بقای انرژی را برای نقاط ① و ② می نویسیم:

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = K_1 + U_1 = \tfrac{1}{2} m \cancel{v_1^2} + mgR$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgR\sin\theta$$

$$\longrightarrow E_1 = E_2 \longrightarrow \boxed{mgR = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgR\sin\theta} \quad (1)$$

حال ما باید v_2 را داشته باشیم تا بتوانیم مقدار θ را بیابیم. با داشتن θ، ارتفاعی که پسربچه از نیمکره جدا می شود نیز مشخص می شود.

برای پیدا کردن v_2 از دینامیک مسأله کمک می گیریم: در نقطه ② نیروی تامین کننده شتاب مرکزگرا، بر نیمکره عبارت است از:

$$F = ma \longrightarrow F = m v_2^2 / R \longrightarrow mg\sin\theta - N = \frac{m v_2^2}{R}$$

در نقطه ای که پسربچه از سطح جدا می شود، $N=0$ است، پس داریم:

بقای انرژی

$$mg\sin\theta = m\frac{v_2^2}{R} \longrightarrow \boxed{mv_2^2 = Rmg\sin\theta} \quad (۲)$$

س

$$(۲) \rightarrow (۱) \Longrightarrow \boxed{mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mgR\sin\theta}$$

$$\longrightarrow 1 = \frac{3}{2}\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$h = R\sin\theta \longrightarrow \boxed{h = \tfrac{2}{3}R} \longrightarrow$$ ارتفاع جدا شدن

ب) اگر اصطکاک وجود داشته باشد، قانون بقای انرژی معتبر نخواهد بود، پس داریم :

$$E_2 \neq E_1$$

$$E_1 = E_2 + W_{f_k} \longrightarrow$$ مقداری از انرژی کل اولیه (E_1 یا) صرف غلبه بر نیروی اصطکاک شده است.

(س)

$$\Longrightarrow mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mgR\sin\theta + W_f$$

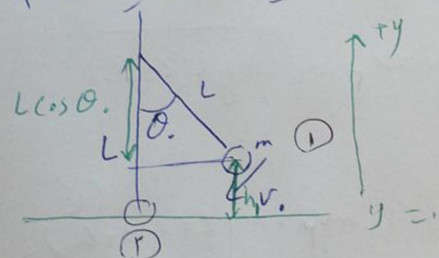
$$\longrightarrow 1 = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{W_f}{mgR}$$

$$\longrightarrow \sin\theta = \frac{2}{3} - \frac{2W_f}{3mgR} \longrightarrow$$ بنابراین θ در حضور نیروی اصطکاک

کوچکتر از θ در عدم حضور آن خواهد بود. با توجه به شکل وقتی θ کاهش یابد ارتفاع جدا شدن نیز کاهش می یابد. به عبارت دیگر در حضور نیروی اصطکاک سرسره زودتر از سطح جدا می شود :

تعادل انرژی

- آونگ ساده‌ای به طول L دارای گلوله‌ای به جرم m است. وقتی نخ این آونگ مطابق شکل با امتداد قائم زاویه θ_0 می‌سازد $(0<\theta_0<\pi/2)$ سرعت گلوله v_0 است. برحسب g و کمیتهای داده شده بالا مطلوبست الف) v_1 سرعت گلوله هنگامی که در پایین ترین وضعیت خود قرار دارد. ب) v_2 کمترین مقداری که v_0 می‌تواند داشته باشد تا نخ در حین حرکت به حالت افقی درآید. ج) v_3 سرعت گلوله بطوری که به ازای $v_0 > v_3$ آونگ بجای حرکت نوسانی، حرکت دایره‌ای روی یک صفحه قائم انجام دهد.



پاسخ:

الف) قانون تعادل انرژی:

$$E_1 = K_1 + U_1 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + m g h_1$$

$$h_1 = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta_0)$$

$$\rightarrow E_1 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + m g L(1-\cos\theta_0)$$

$$E_2 = U_2 + K_2 = 0 + \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

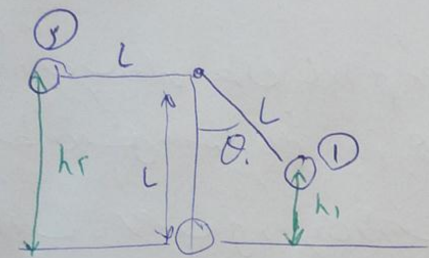
$$\rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow \tfrac{1}{2} m v_1^2 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + m g L(1-\cos\theta_0)$$

$$\rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2 g L(1-\cos\theta_0)$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 g L(1-\cos\theta_0)}$$

(۲)

بقای انرژی



ب)

$E_1 = K_1 + U_1$

$= \frac{1}{2} m v_3^2 + mgh_1$

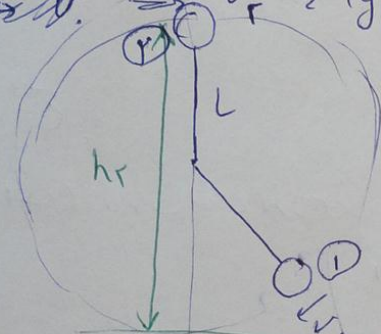
$= \frac{1}{2} m v_3^2 + mgL(1 - \cos\theta_0)$

$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mg\overset{L}{h_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgL$

$v_2 = 0 \longrightarrow$ حداقل v_3 خواسته شده

$E_1 = E_2 \longrightarrow \frac{1}{2} m v_3^2 + mgL(1 - \cos\theta_0) = mgL$

$v_3^2 = 2gL\cos\theta_0 \longrightarrow v_3 = \sqrt{2gL\cos\theta_0}$



ج)

$E_1 = \frac{1}{2} m v_3^2 + mgL(1 - \cos\theta_0)$

$E_2 = K_2 + U_2$

$= \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2$

$v_2 = 0$ چون حداقل v_3 خواسته شده است ⇐

$E_2 = mgh_2 = mg\,2L$

$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2} m v_3^2 + mgL(1 - \cos\theta_0) = 2mgL$

$\longrightarrow v_3 = \sqrt{gL(3 + 2\cos\theta_0)}$

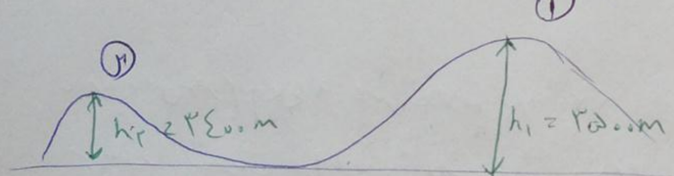
(۵)

بقای انرژی

- دو قله پوشیده از برف، به ارتفاع های ۳۵۰۰ و ۲۴۰۰m، بوسیله دره ای از هم جدا شده اند. یک پیست اسکی به طول ۳۰۰۰m از بالای قله مرتفع تر تا بالای قله کم ارتفاع کشیده شده است. الف) یک اسکی باز از حالت سکون از روی قله مرتفع تر شروع به اسکی می کند. اسکی باز با چه سرعتی به بالای قله کم ارتفاع خواهد رسید؟ از اصطکاک صرفنظر شود. ب) تخمین بزنید که بزرگی نیروی اصطکاک میان اسکی با برف تا چه حد می تواند باشد بدون آنکه مانع رسیدن اسکی باز به قله کم ارتفاع شود؟ (جرم اسکی باز ۷۰kg است)

پاسخ:

الف)



$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + mgh_1 \qquad E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_2$

$E_1 = E_2 \rightarrow \cancel{m}gh_1 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gh_2$

$\rightarrow v^2 = 2g(h_1 - h_2) \rightarrow v = \sqrt{2g\Delta h} = ۴۶/۴۷\ m/s$

ب)

$E_1 = E_2 + W_{f_k} \qquad E_1 = mgh_1$

$E_2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2$

$\rightarrow mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 + W_{f_k}$

$W_{f_k} = mg(h_1 - h_2) - \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow$ حداکثر W_{f_k} وقتی است که $v=0$ باشد

$\xRightarrow{v=0} W_{f_k} = mg\Delta h \Rightarrow f_k d = mg(h_1 - h_2) \rightarrow f_k = \frac{mg(h_1-h_2)}{d}$

(۶)

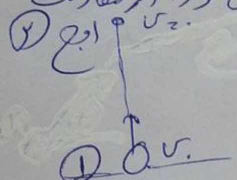
بقای انرژی

[illegible]

$$f_k = \frac{mg(h_1-h_2)}{l} = \frac{۷۰ \times ۹/۸ \times (\overset{۱۰۰}{\cancel{۳۵۰۰-۳۴۰۰}})}{۳۰۰۰}$$

$= ۲۳N$

- پرتابه‌ای به جرم ۹/۴kg با سرعت اولیه ۴۷۰ m/s در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. مقاومت هوا باعث اتلاف $۶۸ \times ۱۰^۵ J$ انرژی می‌شود. اگر مقاومت هوا وجود نداشت پرتابه چقدر بالاتر می‌رفت؟



پاسخ: در عدم حضور اصطکاک:

$E_1 = E_2 \qquad E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$

$E_2 = K_2 + U_2 = 0 + mgh \longrightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$

$\longrightarrow \boxed{h = v_0^2 / 2g} \longrightarrow$ در عدم حضور اصطکاک

در حضور اصطکاک:

$E_1 = E_2 + W_{f_k} \qquad W_{f_k} = ۶۸ \times ۱۰^5 J$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh' + W_{f_k} \longrightarrow h' = \frac{\frac{m v_0^2}{2} - W_{f_k}}{mg}$

$\longrightarrow \boxed{h' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{W_{f_k}}{mg}} \longrightarrow$ در حضور اصطکاک

دینامیک دورانی

- فرض کنید قرص یکنواختی به شعاع R و جرم M روی محوری نصب شده است. محور نیز روی پایه یا قابهای ثابت بدون اصطکاکی مطابق شکل قرار دارد. ریسمان سبکی بدون جرم پیچیده شده است و نیروی کشش یکنواخت T به طرف پائین به ریسمان وارد می‌شود. شتاب زاویه‌ای و شتاب مماسی نقطه‌ای از کناره آن را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\tau = I\alpha$$

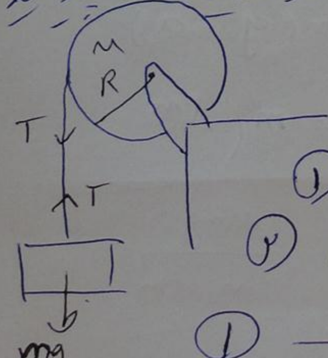
$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2T}{MR}} \longrightarrow \text{شتاب زاویه‌ای}$$

$$\boxed{a = R\alpha = \frac{2T}{M}} \longrightarrow \text{شتاب خطی (مماسی)}$$

- فرض کنید به همان شکل جسمی به جرم m را به ریسمان آویزان می‌کنیم. شتاب زاویه‌ای قرص و شتاب مماسی نقطه‌ای واقع بر کناره آن را در این حالت پیدا کنید.

پاسخ:



قرص حرکت دورانی دارد $\longleftarrow$ ① $\tau = I\alpha$

جرم m حرکت خطی دارد $\longleftarrow$ ② $F = ma$

③ ① $\longrightarrow \tau = I\alpha = I\, a/R$

$$TR = I\, a/R \longrightarrow \boxed{T = \frac{Ia}{R^2}}$$

$(۲) \rightarrow F = ma$

$$\boxed{mg - T = ma} \quad (۴)$$

$(۳) \rightarrow (۴) \Rightarrow mg - T = ma$

$$mg - \frac{Ia}{R^2} = ma \rightarrow mg = \frac{Ia}{R^2} + ma$$

$$mg = a\left(\frac{I}{R^2} + m\right)$$

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m}$$

I قرص حول محور دوران که از مرکز آن می‌گذرد $= \frac{۱}{۲} MR^2$

$$a = \frac{mg}{\frac{\frac{۱}{۲}MR^2}{R^2} + m} = \frac{mg}{M/۲ + m} = \frac{۲mg}{M + ۲m}$$

$$\boxed{a = \frac{۲mg}{M + ۲m}}$$

$$(۳) \rightarrow T = \frac{Ia}{R^2} = \frac{Mmg}{M + ۲m} \rightarrow \boxed{T = \frac{Mmg}{M + ۲m}}$$

- با فرض آنکه قرص مثال قبل از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط گشتاور نیروی وارد بر قرص را در مدت $2s$ محاسبه کنید. همچنین مقدار افزایش انرژی جنبشی دورانی قرص را پیدا کنید.

پاسخ:

در حرکت خطی → $W = Fd$ کار

برآیند نیروها ؛ مقدار جابجایی انتقالی در اثر اعمال نیروها

در حرکت زاویه‌ای → $W = \tau \Delta\theta$

برآیند گشتاورها ؛ جابجایی زاویه‌ای

(باید از سینماتیک حرکت استفاده کنیم)

بنابراین اگر جابجایی زاویه‌ای را در مدت زمان $2s$ محاسبه کنیم می‌توانیم مقدار کار را با داشتن اندازه گشتاور زاویه‌ای بدست بیاوریم:

در حرکت خطی وقتی شتاب ثابت بود داشتیم: $\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$

شتاب خطی ؛ سرعت خطی اولیه

در حرکت زاویه‌ای وقتی شتاب زاویه‌ای ثابت است داریم: $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t$

شتاب زاویه‌ای ؛ سرعت زاویه‌ای اولیه

از مثال قبل α و ω را داریم:

$$a = \frac{2mg}{2m+M} \qquad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{2mg}{R(2m+m)}$$

دینامیک دورانی

$\omega_0 = 0$ (صورت مسئله)

$\Delta t = 2s$

$M = 2.5\,kg$, $mg = 5N$, $R = 0.2m$ } با فرض داشتن این مقادیر

$\rightarrow$ ~~Δt~~

$$\alpha = \frac{2mg}{R(M+2m)} = \frac{2\times 5}{0.2\left(2.5 + \frac{5}{9.8}\right)} = \boxed{14.3\ \frac{rad}{s^2}}$$

$$\rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \cancel{\omega_0 t} = \frac{1}{2}\times 14.3 \times 2^2 = \boxed{28.6\ rad}$$

$$W = \tau\Delta\theta = ? \rightarrow \tau = TR = \frac{Mmg}{M+2m}R$$

$$= \frac{2.5\times 5}{2.5 + 1}\times 0.2 = 0.72\,N.m$$

$$\rightarrow W = \tau\Delta\theta = 0.72 \times 28.6 = 20.5\,J$$

مقدار افزایش انرژی جنبشی دورانی قرص در مدت ۲s = ?

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$\omega = ? \longrightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$ ($v = at + v_0$ مشابه:) $\rightarrow \omega = 14.3\times 2 + 0 = 28.6\,rad$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\times 2.5 \times 0.2^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\times I(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{4}\times 2.5 \times 0.2^2 (28.6^2 - 0)$$

$$= 20.5\,J$$

تکانه زاویه ای چرخی با لختی دورانی آن برابر $0/125\ kg\,m^2$ است در مدت $1/5\ s$ از $3\ kg\,m^2/s$ به $2\ kg\,m^2/s$ کاهش می یابد. الف) گشتاور نیروی متوسط وارد بر چرخ در این مدت چقدر است؟ ب) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه ای چرخ در این مدت چند دور می زند؟ ج) کار انجام شده چقدر است؟ د) توان متوسط تولید شده توسط چرخ چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{نیرو}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{اندازه حرکت خطی} \to \text{تکانه خطی}) \qquad \equiv \qquad \underbrace{\vec{\tau}}_{\text{گشتاور}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{تکانه زاویه ای})$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2-3}{1/5} = -0/67\ N.m$$

ب) باید مقدار جابجایی زاویه ای را بدست آوریم $(\Delta\theta)$. از تقسیم کردن $\Delta\theta$ به 2π تعداد دورها مشخص می شود $\Longleftarrow$ $n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$ تعداد دور

از سینماتیک حرکت استفاده می کنیم تا $\Delta\theta$ را بدست آوریم:

$$\begin{cases} \text{حرکت خطی} \implies \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ \text{حرکت زاویه ای} \implies \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \end{cases}$$

۴

دینامیک دورانی

$\omega_0 , \omega = ?$

حرکت خطی $\Rightarrow p = mv$

حرکت زاویه‌ای $\Rightarrow L = I\omega$

$$\begin{cases} L_0 = I\omega_0 \\ L = I\omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{L_0}{I} = \dfrac{3}{0/125} = 24\ \dfrac{rad}{s} \\[2ex] \omega = \dfrac{L}{I} = \dfrac{2}{0/125} = 16\ \dfrac{rad}{s} \end{cases}$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{16^2 - 24^2}{2\alpha} \qquad \alpha = ?$$

$$\tau = I\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{-0/67}{0/125} = -5/36\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\Delta\theta = \frac{16^2 - 24^2}{2\times(-5/36)} = 29/85\ rad$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 4/75$$

ج) کار انجام شده؟

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2}I(16^2 - 24^2)$$

$$= -20\ J$$

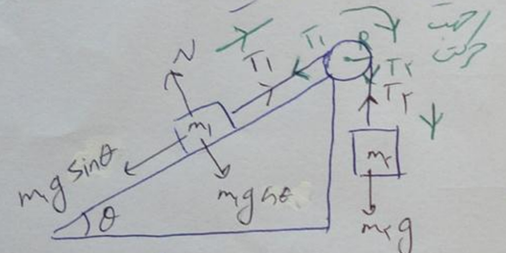
د) توان؟

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{-20}{1/5} = -13/33\ W$$

وات!

دینامیک دورانی

- جسمی به جرم $2/7kg$ روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ $30°$ می‌سازد، قرار گرفته است. این جسم بوسیلهٔ نخی که با سطح شیبدار موازی و از روی قرقره‌ای گذشته است به جسم دیگری به جرم $8/1kg$ (که آویزان است) متصل شده است. جرم قرقره $0/9kg$ و شعاع آن $1m$ است. از اصطکاک جسم با سطح صرفنظر کنید. الف) شتاب جسم آویخته شده. و ب) کشش نخ در هر طرف قرقره را بیابید. قرقره را قرص یکنواخت فرض کنید:



پاسخ:

$m_1 = 2/7kg$

$m_2 = 8/1kg$

$m_2 g > m_1 g \sin\theta \Rightarrow$

m_2 به سمت پایین و m_1 به سمت بالا بر روی سطح شیبدار حرکت می‌کند.

برای سه جسم باید معادلات حرکت را بنویسیم: ۱) m_1، ۲) m_2، ۳) قرقره

از جرم قرقره صرفنظر نشده است بنابراین معادلهٔ حرکت را برای قرقره نیز باید نوشت. خواهید دید که چون که جرم قرقره صرفنظر نشده است T_2 و T_1 با هم مساوی نخواهند بود.

m_1 معادلهٔ حرکت $\xrightarrow{\sum F = ma} T_1 - m_1 g \cos\theta = m_1 a$ ①

m_2 " " $\xrightarrow{\sum F = ma} m_2 g - T_2 = m_2 a$ ②

قرقره " " $\Longrightarrow \sum_i \tau_i = I\alpha \xrightarrow[\text{حرکت قرقره که در شکل نشان داده شده}]{\text{باتوجه به جهت}} T_2 R - T_1 R = I\alpha = I \frac{a}{R}$ ③

(برآیند گشتاورهای وارد بر قرقره)

٨

دینامیک دورانی

سه معادله داریم و سه مجهول

(a , T_2 , T_1)

$$\begin{cases} (1)\quad T_1 - m_1 g \sin\theta = m_1 a \\ (2)\quad m_2 g - T_2 = m_2 a \\ (3)\quad (T_2 - T_1) R = I \dfrac{a}{R} \end{cases}$$

$$(3) \Longrightarrow T_2 - T_1 = \frac{Ia}{R^2} \Longrightarrow T_1 = T_2 - \frac{Ia}{R^2} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow (1) \Longrightarrow T_2 - \frac{Ia}{R^2} - m_1 g \sin\theta = m_1 a \quad (5)$$

$$\begin{cases} (5)\quad \cancel{T_2} - m_1 g \sin\theta = m_1 a + \dfrac{Ia}{R^2} \\ (2)\quad m_2 g - \cancel{T_2} = m_2 a \end{cases} \quad +$$

$$m_2 g - m_1 g \sin\theta = (m_1 + m_2) a + \frac{Ia}{R^2}$$

$$(m_2 - m_1 \sin\theta) g = a \left[(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2} \right]$$

$$\rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

قرص حول مرکز جرم

$$\rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2 + \dfrac{1/2\, M R^2}{R^2}} = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}}$$

$$\boxed{a = \frac{2m_2 - 2m_1 \theta}{2(m_1 + m_2) + M}}$$

(۹)

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}}$$

$$(2): m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = m_2(g-a) = m_2\left(g - \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}\right)}$$

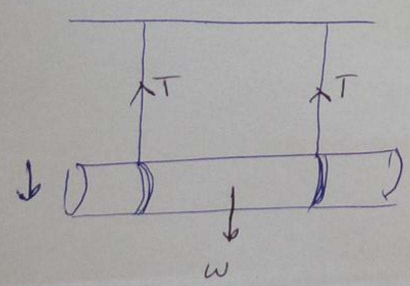
$$(4): T_1 = T_2 - \frac{Ia}{R^2} = T_2 - \frac{\frac{1}{2}M\cancel{R^2}a}{\cancel{R^2}}$$

$$= T_2 - \frac{Ma}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = m_2\left(g - \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}\right) - \frac{M}{2}\left(\frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}\right)}$$

- وزن استوانه‌ای به طول L و شعاع R برابر w است. در نزدیکی هر سر استوانه ریسمانی به دور آن پیچیده شده است و انتهای دیگر ریسمانها به قلابهایی در سقف بسته شده است. استوانه را بوسیله این دو ریسمان در حالت افقی نگه داریم و سپس رها می‌کنیم. الف) کشش هر کدام از ریسمانها هنگام باز شدن، ب) شتاب خطی استوانه در حین سقوط آن؟

پاسخ:



$$(1)\ \sum F_y = ma$$

$$\Rightarrow w - 2T = \frac{w}{g} a \quad (3)$$

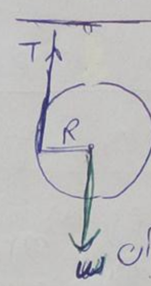
$$(2)\ \sum \tau_z = I\alpha$$

$$\Rightarrow TR + TR = I\alpha$$

دینامیک دورانی

$$۲TR = I\alpha = \frac{Ia}{R}$$

$$\longrightarrow ۲T = \frac{Ia}{R^۲} \quad (۴)$$



سطح مقطع استوانه وقتی از کنار آن نگاه می‌کنیم.

بازوی w برابر صفر است پس از طرف w گشتاوری به استوانه وارد نمی‌شود.

$$(۳) \quad w - ۲T = \frac{w}{g}a$$

$$(۴) \quad T = \frac{I}{۲R^۲}a = \frac{۱/۲\, MR^۲}{۲R^۲}a = \frac{Ma}{۴} = \frac{wa}{۴g}$$

$$\longrightarrow w - ۲T = \frac{w}{g}a \longrightarrow w - ۲\left(\frac{wa}{۴g}\right) = \frac{w}{g}a$$

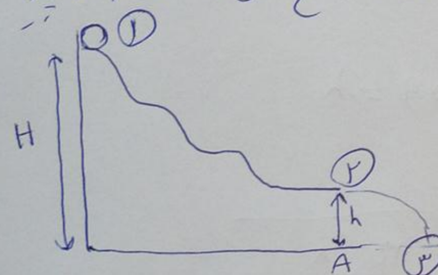
$$\cancel{w} - \frac{\cancel{w}a}{۲g} = \frac{\cancel{w}}{g}a \longrightarrow ۱ = a\left(\frac{۱}{۲g} + \frac{۱}{g}\right)$$

$$= \frac{a}{g}\left(\frac{۳}{۲}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{a = \frac{۲}{۳}g} \qquad T = \frac{w}{۴g}a = \frac{w}{\cancel{۴}\cancel{g}}\left(\frac{\cancel{۲}}{۳}\cancel{g}\right)$$

$$\boxed{\alpha = Ra = \frac{۲Rg}{۳}} \qquad \boxed{T = \frac{w}{۶}}$$

- کره‌ی همگنی از بالاترین قسمت مسیر نشان داده شده، در شکل از حالت سکون، بدون لغزش، شروع به غلتیدن می‌کند و تا انتهای سمت راست مسیر می‌غلتد و سپس بدون انجام حرکت دورانی سقوط می‌کند. اگر $H = 60m$ و $h = 20m$ و مسیر در انتهای سمت راست افقی باشد، فاصله نقطه برخورد کره با سطح افقی را تا نقطه A پیدا کنید.



پاسخ:

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + mgH$$

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

$$E_1 = E_2 \rightarrow mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m\cancel{R^2}}{5} \times \frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2$$

$$\cancel{m}g(H-h) = \frac{7}{10}\cancel{m}v^2 \longrightarrow v^2 = \frac{10}{7}g(H-h)$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}}$$

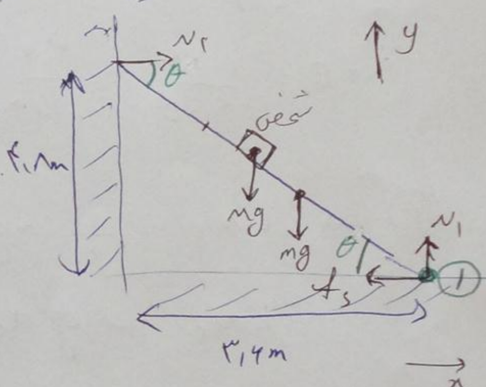
$$v = \sqrt{\frac{10}{7} \times 9.8(60-20)} = 23.66\,(m/s)$$

از نقطه‌ی ۱ تا ۲ حرکت علاوه بر حرکت انتقالی مرکز جرم شامل حرکت دورانی حول مرکز جرم نیز هست. اما از نقطه ۲ تا ۳ حرکت پرتابی و بدون دوران است. بنابراین از معادلات حرکت پرتابی می‌توان استفاده کرد:

①

تعادل اجسام صلب

- الف) نردبانی به طول ۶m و وزن ۴۰۰ N در نقطه ای به ارتفاع ۴٫۸m از زمین به دیوار تکیه دارد. مرکز جرم نردبان در فاصله یک سوم طول آن از سطح زمین واقع است. شخصی به وزن ۸۰۰ N تا وسط نردبان بالا می رود. با فرض اینکه دیوار (نه زمین) بدون اصطکاک است، نیروهای وارد بر زمین و دیوار از طرف نردبان را تعیین کنید.



پاسخ:

تعادل انتقالی در راستای محور yها:

$$\boxed{N_1=(M+m)g}$$

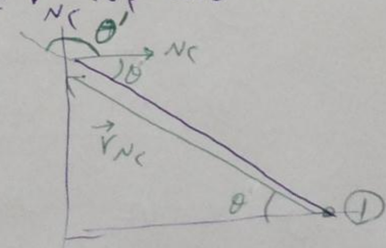
" " " " xها:

$$\boxed{N_2=f_s}$$

تعادل دورانی حول محوری که از نقطه شماره ① می گذرد:

$$\tau_{N_2}=\tau_{mg}+\tau_{mg} \quad ②$$

$$|\vec{\tau}_{N_2}|=|\vec{r}_{N_2}\times\vec{N}_2| \Rightarrow \tau_{N_2}=r_{N_2}N_2\sin\theta'$$

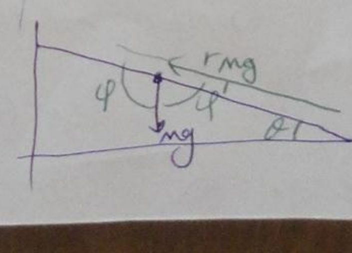


$r_{N_2}=L=6m$

$\sin\theta'=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$$\boxed{\tau_{N_2}=LN_2\sin\theta}$$

$\tau_{mg}=\frac{L}{2}mg\sin\varphi$



$\sin\varphi=\sin(\pi-\varphi')=\sin\varphi'=$

$=\cos\theta$

تعادل اجسام صلب

(۲) $\boxed{\tau_{mg} = \frac{L}{3} mg \cos\theta}$ $\boxed{\tau_{Mg} = \frac{L}{2} Mg \cos\theta}$

(۳) $\rightarrow \tau_{N_2} = \tau_{mg} + \tau_{Mg}$

$\div \sin\theta \left[L N_2 \sin\theta = \frac{L}{3} mg \cos\theta + \frac{L}{2} Mg \cos\theta \right]$ (۳)

باتوجه به شکل اول :

$\sin\theta = \frac{4.8}{L=6}$ $\cos\theta = \frac{3.6}{L=6}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{3.6}{4.8}$

(۳) $\rightarrow L N_2 = \frac{L}{3} mg \cot\theta + \frac{L}{2} Mg \cot\theta$

$\cancel{L} N_2 = \cancel{L} g \cot\theta \left(\frac{m}{3} + \frac{M}{2} \right)$

$N_2 = \cot\theta \left(\frac{mg}{3} + \frac{Mg}{2} \right)$

(٤) $\boxed{N_2 = \frac{3.6}{4.8} \left(\frac{400}{3} + \frac{800}{2} \right) = 400 N}$

(۵) $\boxed{N_1 = (M+m) g}$

(۶) $\boxed{N_2 = f_s}$

ب) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان زمین و نردبان $\mu_s = 0/4$ باشد، قبل از آنکه نردبان شروع به لغزیدن کند، شخص تا چه ارتفاعی می‌تواند از نردبان بالا برود؟

پاسخ :

$f_s = \mu_s N_1 \overset{(5)}{=} \mu_s (M+m) g$

تعادل انتقالی در راستای محورها :

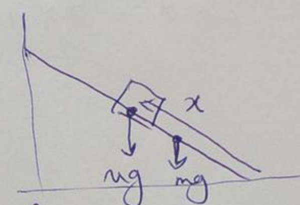
(۶) $N_2 = f_s$

(۳)

تعادل اجسام صلب

~~$N_1 ... \mu_s$~~ $f_s = N_2$ ~~$\rightarrow \mu_s (M+m) g \, ...$~~

$\Rightarrow \mu_s (M+m) g = N_2$ (۷)



$\tau_{N_2} = \tau_{Mg} + \tau_{mg}$

$\cancel{L} N_2 \sin\theta = Mg \cancel{L}(x) \cos\theta + \frac{\cancel{L}}{2} mg \cos\theta$

$\left[N_2 \sin\theta = Mg x \cos\theta + \frac{mg}{2} \cos\theta \right] \div \sin\theta$

$N_2 = Mg x \cot\theta + \frac{mg}{2} \cot\theta$

$N_2 = \left[Mg x + \frac{mg}{2} \right] \cot\theta$

(۷) $\rightarrow \mu_s (M+m) g = N_2 = \left[Mg x \cot\theta + \frac{mg}{2} \cot\theta \right]$

$\left[\mu_s (M+m) g = \left[Mg x + \frac{mg}{2} \right] \cot\theta \right] \times \tan\theta$

$\mu_s (M+m) g \tan\theta = Mg x + \frac{mg}{2}$

$Mg x = \mu_s (M+m) g \tan\theta - \frac{mg}{2}$

$\boxed{x = \frac{\mu_s (M+m) g \tan\theta}{Mg} - \frac{mg}{2Mg}} = ۰/۴۲$

بنابراین شخص تا ارتفاع $L\,x$ می‌تواند بالا برود :

$$L \times x = ۶ \times ۰/۶۴ = ۳/۸\,m$$

پایان

sms: 0938-829-9294