بسمه تعالی

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم ریاضی عمومی ۱

شماره آزمون:

وقت : ۹۰ دقیقه

تاریخ : ۹۸/۸/۲۷

نام و نام‌خانوادگی:

شماره دانشجویی:

دانشکده:

رشته تحصیلی:

استاد درس:

سوال۱	سوال۲	سوال۳	سوال۴	سوال۵	جمع

توضیحات:

الف) به هیچ وجه برگه‌ها از محل دوخت جداً نشود.

ب) از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی برگه‌های پاسخ نامه جداً خودداری نمایید.

ج) پاسخ هر سوال بر روی برگه مربوط به همان سوال داده شود. در غیر این صورت از تصحیح برگه خودداری می‌شود.

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۱. فرض کنید z عددی مختلط است. مکان هندسی نقاطی که در رابطهٔ $Re\left(\frac{1}{z}+1\right)>2$ صدق می‌کنند را بیابید.(۱۴ نمره)

حل.
باتوجه به وجود عبارت z در مخرج کافیست صورت و مخرج عبارت $\frac{1}{z}$ را در $\bar{z}$ ضرب کنیم؛

$$\frac{1}{z}\times\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$\to Re\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2}+1\right)>2 \to Re\left(\frac{x^2+y^2+x+iy}{x^2+y^2}\right)>2$$

$$\to \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}>2 \to x^2+y^2+x>2x^2+2y^2 \to x^2+y^2-x<0$$

$$\to \boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}} \to$$ داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آبان ۹۸

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۲. فرض کنید $f(x) = \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b$ ، a و b را چنان بیابید که $\lim_{x\to 0} f(x)$ برابر باشد با:

الف) صفر ب) یک ج) ∞

(۱۵ نمره)

حل.

مخرج مشترک $\longrightarrow$ $$f(x) = \frac{\sin(3x) + ax + bx^3}{x^3}$$

بسط تیلور حول $x=0$ $\longrightarrow$ $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \xrightarrow{x\to 3x} \sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5 + ax + bx^3}{x^3}$$

$$\boxed{\begin{cases} a = -3 \\ b = 9/2 \end{cases}} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3^5}{5!}x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3^5}{5!}x^2 = \boxed{\text{صفر}}$$

$$\boxed{\begin{cases} a = -3 \\ b = 11/2 \end{cases}} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(1 + \frac{3^5}{5!}x^2\right)}{x^3} = \boxed{\text{یک}}$$

$$\boxed{\begin{cases} a \neq -3 \\ b = R \ (\text{دلخواه}) \end{cases}} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x + \beta x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\alpha + \beta x^2 + \frac{3^5}{5!}x^4\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{x^2} = \boxed{\text{بی‌نهایت}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آبان ۹۸

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۳. الف) نقاطی از نمودار $r=3+2\sin\theta$ را بیابید که مشتق در آنها صفر یا بینهایت شود.(۵ نمره)

ب) نمودار آن را با شرح کامل رسم کنید.(۸ نمره)

حل: (مشتق پارامتری) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$

$$\begin{cases} y=r\sin\theta=(3+2\sin\theta)\sin\theta \\ x=r\cos\theta=(3+2\sin\theta)\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos\theta\sin\theta+(3+2\sin\theta)\cos\theta}{2\cos\theta\cos\theta-(3+2\sin\theta)\sin\theta}$$

می‌توانستیم مستقیم هم از فرمول استفاده کنیم

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}}$$

نقاطی که مشتق برابر صفر است = ریشه‌های صورت

" " " " بینهایت " = " " مخرج

$\xrightarrow{\text{صورت}=0}$ $2\cos\theta\sin\theta+(3+2\sin\theta)\cos\theta=0$

$\xrightarrow{\text{فاکتور}}$ $\cos\theta(2\sin\theta+3+2\sin\theta)=0\to\cos\theta(4\sin\theta+3)=0$ $\begin{cases}\cos\theta=0\\ 4\sin\theta+3=0\end{cases}$

$\to\begin{cases}\boxed{\theta=k\pi\pm\pi/2}\\ 4\sin\theta=-3\to\sin\theta=-3/4\to\boxed{\theta=\sin^{-1}(-3/4)}\end{cases}$

بنابراین مماس در این نقاط افقی است (مشتق برابر صفر است)

ابراهیم شاه ابراهیمی - آبان ۹۸

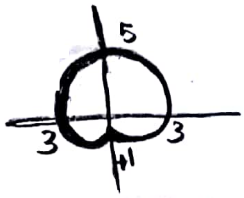
$\xrightarrow{\text{مخرج}=0}$ $2\cos\theta\cos\theta-(3+2\sin\theta)\sin\theta=0$

$\to 2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta=0$

$\to 2(1-\sin^2\theta)-2\sin^2\theta-3\sin\theta=0\to 2-4\sin^2\theta-3\sin\theta=0$

$\xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{\sin\theta=x}$ $-4x^2-3x+2=0\to x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+32}}{-8}=-\dfrac{3}{8}\pm\dfrac{\sqrt{41}}{8}$

$\to\sin\theta=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{41}}{8}\to\boxed{\theta=\sin^{-1}\left(-\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{41}}{8}\right)}$ بنابراین مماس در این نقاط قائم است (مشتق برابر بی‌نهایت است)



(دلگون)
(لیماسون)

شکل نمودار $r=a+b\sin\theta$ اگر $a>0$ و $a>b$

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۴. الف) قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ را بیان و اثبات کنید.(۷ نمره)

ب) فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[\circ, ۱]$ و مشتق پذیر بر $(\circ, ۱)$ است و $f(\circ) = \circ$ و $f(۱) = \frac{\pi}{۲}$. نشان دهید عدد c در $(\circ, ۱)$ وجود دارد بطوری که، (۷ نمره)

$$f'(c) \cos f(c) = ۱$$

حل.

قضیه مقدار میانگین : هرگاه تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

اثبات : تابع $g(x) = f(x) - rx$ را در نظر می‌گیریم که در آن r عددی ثابت است چون تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر است ، تابع g نیز همینطور است.

حال f را بگونه‌ای تعیین می‌کنیم که $g(a) = g(b)$

$$g(a) = f(a) - ra = f(b) - rb = g(b)$$

$$\to r(b-a) = f(b) - f(a) \to \boxed{r = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}} \to g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x$$

از طرفی $g(a) = g(b)$ ، بنابراین تابع $g(x)$ در شرایط قضیه رول صدق می‌کند:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \xrightarrow{x=c} g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \circ$$

$$\to \boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - آبان ۹۸

ب) $g(x) = \sin(f(x))$ $\begin{cases} g(1) = \sin(f(1)) = \sin(\pi/2) = 1 \\ g(\circ) = \sin(f(\circ)) = \sin(\circ) = \circ \end{cases}$

$$g'(x) = f'(x) \cos(f(x)) \xrightarrow{x=c} g'(c) = f'(c) \cos(f(c))$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار میانگین}} g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \to f'(c) \cos(f(c)) = \frac{g(1) - g(\circ)}{1 - \circ} = \frac{1 - \circ}{1 - \circ} = 1$$

$$\to \boxed{f'(c) \cos(f(c)) = 1}$$

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۵. نشان دهید $f(x)=\frac{\cos(x^2+1)}{3+2x+\cos x}$ در تمام $\mathbb{R}$ بجز در یک نقطه پیوسته است. (۱۴ نمره)

حل.

عبارت x^2+1 روی R پیوسته است، همچنین $\cos(x^2+1)$ روی R پیوسته است.
بنابراین نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ همان ریشه های مخرج است.

$$\xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} 3+2x+\cos x=0 \to g(x)=3+2x+\cos x$$

می‌توانیم بازه ای دلخواه پیدا کنیم که در آن $g(a)g(b)<0$ باشد تا بتوانیم نتیجه بگیریم که حداقل یک ریشه (a,b) در آن بازه دارد.

دلخواه $(-\pi,0)$
$$\begin{cases} g(-\pi)=3+2(-\pi)+\cos(-\pi)=(2-2\pi)<0 \\ g(0)=3+2(0)+\cos(0)=4>0 \end{cases}$$

با توجه به پیوستگی تابع $g(x)=3+2x+\cos x$ و اینکه $g(-\pi)g(0)<0$ طبق قضیه بولتزانو نتیجه می‌گیریم که $\exists c\in(-\pi,0)\to g(c)=0$

بنابراین حداقل در یک نقطه تابع $f(x)$ ناپیوسته است.

حالا فرض کنیم که تابع $g(x)$ بازهم ریشه دارد.

$$\begin{cases} g(\alpha)=0 \\ g(\beta)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه رول}} \exists c\in(-\pi,0)\to g'(c)=0$$

$$g'(x)=2-\sin x \xrightarrow{x=c} g'(c)=2-\sin(c) \xrightarrow{-1\leq\sin c\leq 1} g'(c)\neq 0$$

بنابراین فرض وجود ریشه اضافی باطل است و $g(x)$ همان یک ریشه را دارد،
بنابراین تابع $f(x)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است.

ابراهیم شاه ابراهیمی - آبان ۹۸