

انتگرال معین

جملات مثلثاتی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی  آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی  آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 -  ساده جهت تثبیت مطالب
 -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
 -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

حاصل انتگرال معین زیر کدام است؟

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 \quad (۱) \qquad \frac{3}{2} - \frac{2\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad (۴) \qquad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \quad (۳)$$

۲ روش حل مسئله

🤔 پاسخ: در مواردی که انتگرال توان زوج تانژانت مورد نظر است، باید جمله $1 + \tan^2 x$ تولید شود تا در این صورت بتوان از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده کرد. در این مسئله با اضافه و کم کردن عدد یک می‌توان به این مهم دست یافت. ابتدا انتگرال به صورت نامعین و حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x dx &= \int (\tan^2 x)^2 dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x - 1)^2 dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^2 dx - 2 \int (1 + \tan^2 x) dx + \int dx \end{aligned}$$

انتگرال‌های دوم و سوم به سادگی حل می‌شوند. انتگرال اول به صورت زیر با تغییر متغیر $u = \tan x$ حل می‌شود:

$$u = \tan x, \quad \Rightarrow \quad du = (1 + \tan^2 x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 + \tan^2 x)^2 dx &= \int (1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int (1 + u^2) du \\ &= u + \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C \end{aligned}$$

با مشخص شدن انتگرال اول، می توان انتگرال داده شده را به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int (1 + \tan^2 x)^2 dx - 2 \int (1 + \tan^2 x) dx + \int dx \\ &= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x - 2 \tan x + x + C \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C\end{aligned}$$

با جایگذاری کران ها در پاسخ انتگرال، مقدار انتگرال معین بدست می آید:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx &= \left[\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

روش دوم برای حل این مسئله، دانستن انتگرال $\tan^2 x$ می باشد.

$$\int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

انتگرال مسئله مذکور به صورت زیر حل می شود:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx - \int \tan^2 x dx \\ &= \int u^2 du - \int \tan^2 x dx \\ &= \frac{1}{3} u^3 - (\tan x - x + C) \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C\end{aligned}$$

۳ مسائل مشابه

حاصل انتگرال نامعین زیر را بدست آورید:

$$\int \tan^6 x dx$$

پاسخ: برای حل این مسئله به دو انتگرال معلوم نیاز است. اول آنکه 

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

دوم آنکه

$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

برای حل انتگرال داده شده دو روش قابل استفاده است. در روش اول می‌توان عدد یک را به عبارت مورد انتگرال اضافه و از آن کم کرد که مانند مسئله قبل قابل ساده شدن می‌باشد. در روش دوم می‌توان $\tan^4 x$ را از عبارت جدا کرد و عدد یک را به $\tan^2 x$ اضافه یا از آن کم کرد:

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x dx &= \int \tan^4 x \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x) dx - \int \tan^4 x dx \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x - \left(\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \right) \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C \end{aligned}$$

آدهای منفی به پیچ و خم جاده
می‌اندیشند و آدهای مثبت به
زیبایی‌های امتداد مسیر، ممکن است
هر دو به مقصد برسند، اما یکی با
مسرت و دیگری با لذت!



 AvaEducation16.blog.ir

   @AvaEducation16

 AvaEducation16@gmail.com

 @AvaEducation16

  0935 210 4321