

به نام خدا

گروه برق
وقت: 125 دقیقه

استاد: دکتر محمدرضا رضانی
1393/10/7

آزمون میان ترم کنترل غیرخطی مقطع ارشد
نام و نام خانوادگی:

سئوال 1- سیستم غیرخطی زیر معادله آشوبی لورنز را نشان می دهد.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= s(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

که s ، r و b همگی ثابتهای مثبت هستند. برای این سیستم: الف) تمام نقاط تعادل را بدست آورید. ب) سیستم را حول نقطه صفر خطی نمایید و تعیین نمایید که به ازای چه مقادیری از این ثوابت این نقطه تعادل به صورت مجانبی سراسری پایدار است؟

سئوال 2- سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{\pi}{8} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{\pi}{8} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\end{aligned}$$

آیا این سیستم دارای سیکل حدی است؟ چند سیکل حدی دارد؟ با استدلال پایداری آنها را بررسی نمایید.

سئوال 3

سیستم غیرخطی درجه دو زیر

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x_2)\end{aligned}$$

را که $g_1(\cdot)$ و $g_2(\cdot)$ توابع لیب شیتز محلی بوده، به طوری که در یک ناحیه D حول مبدا در شرایط زیر صدق می کنند

$$|g_1(x)| \leq k \|x\|_2^2, \quad |g_2(x)| \leq k \|x\|_2^2$$

را در نظر بگیرید. ابتدا نشان دهید که نقطه صفر نقطه تعادل سیستم است و سپس با انتخاب تابع لیاپانوف $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ و قسمت الف ثابت کنید که مبدا ناپایدار است.

سئوال 4- سیستم غیرخطی $\dot{x}_1 = x_2$
 $\dot{x}_2 = -4(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2)$ را در نظر بگیرید. که تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در شروط زیر صدق می کند:

$$h(0) = 0; \quad uh(u) \geq 0, \quad |u| \leq 1$$

با استفاده از روش گرادیان متغیر، نشان دهید که تابع لیاپانوف این سیستم به صورت $V(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ است.