

"به نام خدا"

ارشمیدس

مینا نوری

مهدی بابایی

محسن رحمتی

2000 سال پیش بود که ارشمیدس مطالعاتش را روی مطالبی آغاز کرد که درگیر با محیط ها ، مساحتها و حجم ها بود علاوه بر این روش های او در تفکر (برای مثال، استفاده از مفهوم های دیفرانسیل، مکانیک و راه حل برای معادلات مکعبی) یکتا و پیشگام بوده است.

هدف این مقاله این است که روی دستاوردهای ریاضی و روش های ارشمیدس بحث کند، که هریک از این عنوان ها در یک بخش جداگانه بحث شده است.

ارشمیدس در هر کتابش، به بعضی مسائل جالب ریاضی پرداخته است که هر کدام به نوبه خود به سوی مسائل بیشتری سوق می دهد. در بخش دستاوردهای ریاضی، بحث هایی با جزییات در مورد کتاب های ارشمیدس و دستاوردهایش خواهد شد در بخش روش شناسی هم در روش های تفکر او بحث خواهد شد.

تاریخچه

ارشمیدس (287-212 B.C) در شهر سیراکیوز واقع در سیسیل، به دنیا آمد که او فرزند ستاره شناس Pheidias بود. گفته می شود که ارشمیدس یکی از بستگان Hieron، پادشاه سیراکیوز، بوده است.

ارشمیدس وقتی جوان بود از شاگردان ریاضیدان بزرگ، اقلیدس آموخت. هنگام تحصیل در Alexanderia (اسکندریه)، با Conon (از اخلاف اقلیدس) و Eratosthenes (کتابدار دانشگاه) و خیلی های دیگر دوست شد، که بسیاری از کشفیاتش خطاب به این افراد نوشته شده است. او حتی وقتی به سیراکیوز بازگشت با آموزشگاه Alexanderia در ارتباط ماند.

ارشمیدس به خاطر همکاریهایش در مکانیک معروف است. این احتمالاً به دلیل داستان های شگفت انگیز بسیاری است. [3] او گفته بود که: " اگر یک نقطه ثابت به من بدهید، می توانم زمین را تکان بدهم" ... و این نظریه اهرم او بود. در واقع او یک کشتی را خودش به تنهایی به کمک یک اهرم تکان داد!

داستان دیگر آن است که او خاصیت شناوری را وقتی که در حمام بود، کشف کرد و آنقدر شگفت زده بود که عریان به خیابان رفت در حالی که فریاد می زد: "Eureka! Eureka!" یعنی: "یافتم! یافتم!"

وقتی که کشورش توسط رومانی ها مورد حمله واقع شد، او تمام مطالعات و تحقیقاتش را کنار گذاشت و به طرز موفقیت آمیزی شماری اسلحه قوی اختراع کرد. نقل شده که دشمن او گفته است که: " ارشمیدس در ساحل نشسته بود و به راحتی قایق های ما را به پس و پیش پرتاب می کرد درحالیکه تنها داشت با چند سکه بازی می کرد... او حتی از هیولاهای افسانه ها هم قوی تر است که توانست بسیاری بمب را به سوی ما پرتاب کند. "([6], P68). سرانجام توسط چند سرباز رومانی، درحالی که در حال کشیدن نموداری روی شن ها بوده است، به قتل می رسد.

اما!

دستاوردهای ارشمیدس در ریاضیات از اهمیت کمتری برخوردار نبوده است! وقتی با مسئله های سخت روبرو می شده است، ایده های نو و اثبات های منطقی ارائه می داده است، که این دلیل این است که او به عنوان یکی از سه ریاضیدان بزرگ یونان باستان با اقلیدس و آپولونیوس اهل پرگا مورد احترام واقع شود، هم چنین که به اندازه دو ریاضیدان بزرگ، نیوتن و گاوس تاکنون شناخته شده است.

دستاوردهای ریاضی

با توجه به کتاب " The Works of Archimedes " [6]، کارهای ارشمیدس شامل: "در باب کره و استوانه"، "اندازه گیری دایره"، "در باب شبه مخروط ها و شبه کره ها"، "در باب مارپیچ ها"، "در تعادل های صفحه"، "ماسه شمار"، "تربیع سهمی"، "در باب اجسام شناور"، "کتاب لم ها" و "روش" می باشد.

هر یک از کارهای او روی بعضی مسایل خاص در ریاضی یا فیزیک تمرکز کرده است. غالباً او در حل کردن مسایل مذکور به مسایل جالب دیگری رسیده است. بنابراین سهم او بسیار بزرگتر از آنی است که عنوان این کتاب ها ممکن است به نظر آید. روی دستاوردهای او که در ریاضیات پایین بحث خواهیم کرد. برای مشخص نشان دادن سهم های او در بسیاری از شاخه های ریاضیات، طبقه بندی دستاوردهایش ممکن است از ترتیبی که کشفیات در کارها ذکر شده اند، پیروی نکند.

"در باب کره و استوانه"

" On the sphere and cylinder"

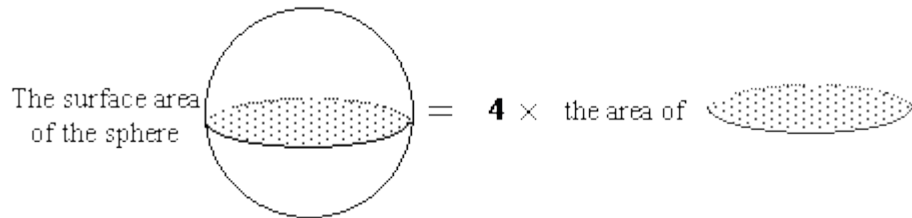
ارشمیدس این مقاله را با شش تعریف و پنج فرضیه شروع کرد؛ پنجمین فرضیه اش بعدها اصل معروف ارشمیدس شد:

" برای هر دو پاره خط با طول a و b اگر $a < b$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که $na > b$."

در مجموع 44 عبارت (حکم) بوده است که با توجه به نامه اش به دوست⁴ سه نتیجه ی اصلی وجود داشته است که به صورت سه عبارت زیر بیان می شود:

عبارت 33: حجم یک کره برابر است با 4 برابر مساحت بزرگترین دایره ای که کره شامل آن است.

1. Dositheus
2. The Method
3. Cubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains



عبارت 34 بیان می کند که: "حجم یک کره 4 برابر حجم مخروطی است با ارتفاعی برابر با شعاع کره و قاعده ای برابر با بزرگترین دایره ای که کره شامل آن است." به نظر می رسد که این دلالت بر این دارد که عبارت 34 تعمیمی از عبارت 33 است اما با توجه به مقاله "روش" [4,page339-340] در واقع عبارت 33 از عبارت 34 می آید. این به این معناست که ترتیبی که عبارات در مقاله های هندسه دان های یونانی ظاهر شده اند به همان ترتیبی نیست که کشف شده اند!

ارشمیدس این عبارت (عبارت 34) را در مقاله "روش" اینگونه اثبات کرده است: [“The Method”.proposition2]

فرض ABCD بزرگترین دایره در کره باشد و AC و BD قطرهای عمود بر هم باشند. یک دایره به قطر BD در صفحه ای عمود بر AC بکشید و روی این دایره مخروطی با رأس A رسم کنید. فرض سطح این مخروط ساخته شود و سپس با یک صفحه گذرنده از C و موازی با پایه اش قطع شود. مقطع حاصل یک دایره به قطر EF است. روی این دایره به عنوان پایه یک استوانه با ارتفاع AC و محور AC رسم کنید و CA را تا H ادامه بدهید که $AH=CA$.

فرض CH محور تعادل باشد و A نقطه وسط آن.

یک خط راست مثل MN در صفحه دایره ABCD و موازی با BD بکشید و فرض MN دایره را در O و P قطع کند و قطر AC را در S و خطهای راست AE و AF را بترتیب در Q و R قطع کند. A را به O وصل کنید. از وسط MN یک صفحه عمود بر AC رسم کنید؛ این صفحه استوانه را در دایره ای به قطر MN قطع خواهد کرد و کره را در دایره ای به شعاع OP و مخروط را در دایره به شعاع QR. حال ، چون داریم $MS=AC$ و $QS=AS$:

$$MS.SQ=CA.AS$$

$$=AO^2$$

$$=OS^2+SQ^2$$

و چون داریم $HA=AC$:

$$HA/AS=CA/AS$$

$$=MS/SQ$$

$$=MS^2/MS.SQ$$

$$=MS^2/(OS^2+SQ^2)$$

$$=MN^2/(OP^2+QR^2)$$

$$=(\text{circle, diam MN})/(\text{circle, diam OP} + \text{circle, diam QR}).$$

که هست :

(دایره در مخروط + دایره در کره) / (دایره در استوانه) = HA/AS

بنا بر این دایره در استوانه، جایی که هست، حول A با دایره کره و مخروط، در تعادل است اگر مرکز ثقل دو دایره اخیر در H قرار گرفته باشد. به طور مشابه، برای سه مقطع مشابهی که با صفحه عمود بر AC که از خط راست دیگری می گذرد و در متوازی الاضلاع LF موازی با EF ساخته می شوند، تعادل اینگونه برقرار است.

بنابراین، وقتی K مرکز ثقل استوانه باشد،

(AEF مخروط + کره) / (استوانه) = HA/AK

(AEF مخروط + کره) = 2 استوانه $\rightarrow HA = 2AK$ اما

[10 . XII . اقلیدس] (AEF مخروط) = 3 استوانه : داریم

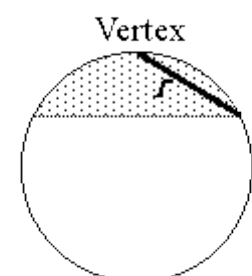
(کره) = 2 (AEF مخروط) : بنابراین

اما چون $EF = 2BD$

(ABD مخروط) = 8 (AEF مخروط)

(ABD مخروط) = 4 کره $\rightarrow$

عبارت 42 و 43: سطح خمیده یک کلاه کروی برابر است با مساحت یک دایره با شعاعی برابر با فاصله بین راس سطح خمیده و پایه کلاه کروی.



The cross-section
of a spherical cap

Curved surface area (shaded) = Area of circle of radius r

عبارت 42 و 43 روی موقعیت هایی که کلاه کروی به ترتیب از نیم دایره بزرگتر و کوچکتر است، بحث می کنند.

نتیجه ای از عبارت 34 :

حجم استوانه ای با پایه ای برابر با بزرگترین دایره کره و ارتفاع برابر با قطر کره، $\frac{3}{2}$ حجم کره است.

که ارشمیدس آن را با کمک عبارت 34 در کتاب "روش" اثبات کرده است :

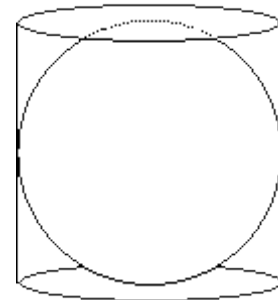
اثبات: از میان B و D ، VBW و XDY را موازی با AC بکشید و یک استوانه با محور AC و دایره هایی با قطرهای VX و WY را به عنوان پایه تصور کنید. داریم:

$$VY = 2(VD \text{ استوانه})$$

$$[10. XII. اقلیدس] \text{ (مخروط ABD) } 6$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (کره) } \text{ (باعتبار 34)}$$

شاید این کشفی باشد که ارشمیدس به خاطر آن احساس غرور کرد: او امر کرده بود که این عبارت روی سنگ قبرش باشد. در حقیقت مهاجمان رومانی او را مطابق ارزشش به خاک سپردند.



$$\text{Volume of the cylinder} = \frac{3}{2} \times \text{Volume of the sphere}$$

$$\text{Surface area of cylinder (including both ends)} = \frac{3}{2} \times \text{Surface area of sphere}$$

اندازه گیری دایره:

تقریباً هر تمدن یونانی از میان مسئله ی دایره ها خواهد آمد. در این عنوان ارشمیدس کتاب "در باب اندازه گیری دایره" را نوشته که بیشتر محتوایش گم شده (page 50, [2]) و تنها 3 عبارت آن باقی مانده است:

ارزیابی مساحت های دایره ها:

عبارت 1 بیان می کند که "مساحت یک دایره با مساحت یک مثلث قائم الزاویه که اضلاع قائمه اش، محیط و شعاع دایره هستند، برابر است."

در کتاب "The 9 chapters of mathematical art" یک عبارت هست که می گوید: "ضرب نصف محیط در شعاع دایره با مساحت دایره برابر است." ([6],page50). اگرچه هر دو عبارت فرمول محاسبه مساحت دایره را می دهند، اما احتمالاً ارشمیدس زودتر از چینی ها به این نتیجه رسیده بوده است.

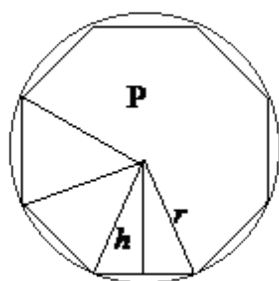
اثبات ارشمیدس از عبارت 1:

فرض A مساحت دایره، C محیط آن و T مساحت مثلث فوق الذکر است. فرض $A > T$ ، می توانیم یک چندوجهی منتظم با تعداد وجه های کافی بسازیم بطوریکه در دایره محاط شود و $A - P < A - T$ که یعنی $P > T$.

اما این ممکن نیست زیرا: می توان P را به مثلث های مشابهی تقسیم کرد که ارتفاعشان کمتر از r است و بنابراین محیط P کمتر از C است که دلالت بر این دارد که $P < T$. که این تناقض است.

بطور مشابه نمی شود که $A < T$. بنابراین $A = T$.

این روش اثبات عبارات "اثبات با تناقض"، اکنون یک ابزار معمول است.



نسبت محیط به قطر دایره (π):

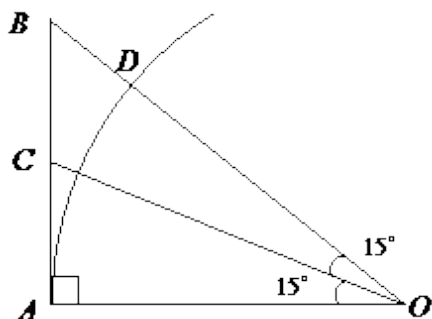
در "Elements" اقلیدس روی بسیاری از ویژگی های دایره ها بحث کرده است اما شامل ارزیابی نسبت محیط و قطر دایره، مساحت دایره و طول محیط، نیستند. ([6],page81)

در عین حال، ارشمیدس پیشگام شد که از تکنیک محدود کردن استفاده کند که تقریبی از کمیت بیابد و شرایط خطا را ارزیابی کند. ([6],p81)

تمام این کارها در عبارت 3 ذکر شده: "نسبت محیط به قطر هر دایره ای بین $10/71$ و $3 \frac{1}{7}$ است."

اثبات: (ارشمیدس در اثباتش تقریبی از $\sqrt{3}$ را داده است)

با توجه به شکل:



$$OB/AB = 2 \quad (\sin 30^\circ = 1/2) \quad , \quad OA/OB = \sqrt{3}/2$$

$$\rightarrow OA/AB = \sqrt{3} > 265/153$$

(کسی نمی داند که ارشمیدس چگونه این تقریب را برای $\sqrt{3}$ پیدا کرد، اما بعداً در مبحث "سایر دستاوردهای حساب" روی آن بحث خواهیم کرد.)

با جمع دو معادله بالا :

$$(OB+OA)/AB > (571/153)$$

به راحتی می توان ثابت کرد که $\triangle ODC \approx \triangle OAC$.

بنابراین: مساحت $\triangle OBC$ به ترتیب برابر است با $\frac{1}{2} OA \cdot BC$ و $\frac{1}{2} OB \cdot AC$. بنابراین : $OB/OA = BC/AC$. به هر دو طرف یک را اضافه می کنیم:

$$(OA+OB)/OA = AB/AC \rightarrow (OA+OB)/AB = OA/AC > 571/153 \quad \text{یا} \quad AC/OA < 153/571$$

و این کران بالای قطر شش ضلعی منتظم را می دهد.

ارشمیدس هم چنین ابعاد 12 ضلعی منتظم تا 96 ضلعی منتظم را با استفاده از همین روش بدست آورده است. بطور مشابه کوانهای پایین را هم حساب کرد و محدوده ها را در عبارت بدست آورد.

تربیع سهمی، شبه مخروط ها و شبه کره ها:

آپولونیوس اهل Perga ریاضیدان معاصر ارشمیدس است که برای مطالعاتش روی مخروطات معروف است. روش "coordinates" او به فرما الهام بخشید که شاخه هندسه تحلیلی را توسعه دهد. ([8]) در مقایسه با مطالعه های ارشمیدس از سهمی ها، جسم محدود شده توسط یک شبه سهمی* یا شبه هذلولی* و یک صفحه، و شبه کره ها، مطمئناً قبلی بهتر شناخته شده است. اگرچه استفاده از نسبت ها و مکانیک در مطالعات ارشمیدس همچنین برجسته بود. ([4], p332-338, p27-34) .

*Paraboloid : سطحی که در اثر گردش جسم سهموی به دور خود تشکیل می گردد.

*Hyperboloid : هذلولی دوران یافته.

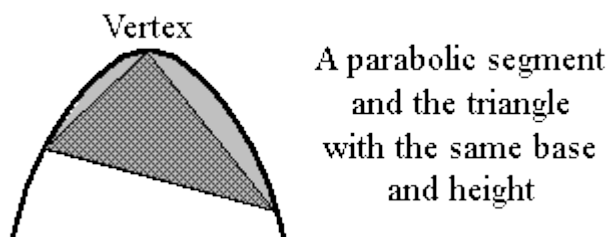
بسیاری از این کارها به کمک روش "Exhaustion" انجام شده بودند.

در اینجا روی مطالعات ارشمیدس بحث خواهیم کرد و روی روش هایش بعداً بحث خواهد شد:

یک مجموعه از 24 عبارت در کار "تربیع سهمی" ارشمیدس وجود دارد که تأثیرگذارترین آنها عبارت 24 است:

1. Dositheus
2. The Method
3. Qubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains

"مساحت یک قطعه سهموی از یک سهمی، $\frac{4}{3}$ برابر مساحت یک مثلث با همان پایه و ارتفاع است."



اثبات ارشمیدس از این عبارت : ("The Method", proposition 1.)

فرض ABC یک قطعه از یک سهمی باشد که توسط خط راست AC و سهمی ABC محدود شده است و D نقطه میانی AC باشد. خط راست DBE را موازی با محور سهمی بکشید و AC و BC را وصل کنید. در این صورت قسمت ABC باید $\frac{4}{3}$ مثلث ABC باشد.

اثبات: از A ، AKF را موازی با DE بکشید و فرض مماس بر سهمی در C ، DBE را در E و AKF را در F قطع کند. CB را امتداد دهید که AF را در K قطع کند و CK را تا H امتداد دهید که $CK=KH$.

CH را به عنوان محور تعادل در نظر بگیرید که K نقطه میانی آن است.

فرض MO یک خط راست موازی با ED باشد و AC و CK ، CF را در O و N ، M قطع کند و خم را در P . حال چون CE یک مماس بر سهمی است و CD نیمه محور عرض، $EB=BD$. (این در "Elements [of conics]" اثبات شده است).

چون FA و MO موازی ED اند $\leftarrow MN=NO, FK=KA$.

حال با ویژگی سهمی (اثبات شده در "Lemma") :

$$MO/OP=CA/AO \quad [CF. \text{ Quadrature of parabola prop.5}]$$

$$=CK/KN \quad [Eucl.VI.2]$$

$$=HK/KN \quad [CK=HK].$$

یک خط راست TG را برابر با OP بگیرید و آن را با مرکز ثقل H در H قرار دهید بطوریکه $TH=HG$. سپس چون N مرکز ثقل خط راست MO است و $MO/TG = HK/KN$ این نتیجه را می دهد که TG در H و MO در N ، حول K در تعادل خواهند بود.

[On the Equilibrium of planes, I.6,7]

بطور مشابه برای هر خط راست دیگری موازی با DE که کمان سهمی را قطع می کند، (1) بخش حایل شده بین FC و AC با نقطه میانی اش روی KC و (2) طولی برابر با محل تقاطع بین خم و AC ، با خطی که مرکز ثقل H در H قرار گرفته حول K در تعادل خواهد بود.

بنابراین K مرکز ثقل کل مجموعه ای است که شامل (1) همه خطهای راست مثل MO ، حایل شده بین FC و AC ، قرار گرفته مانند شکل و (2) هر خط راست که در H قرار گرفته و برابر است با خطهای راستی مثل PO که بین خم و AC حایل شده اند.

و چون مثلث CFA از همه خطهای موازی مثل MO تشکیل شده و قسمت CBA از همه خطهای راستی مثل PO در خم تشکیل شده، این نتیجه را می دهد که : مثلث در جایی که در شکل قرار گرفته، حول K با قسمت CBA که با مرکز ثقل اش در H قرار گرفته، در تعادل است.

KC را در W تقسیم کنید بطوریکه $CK=3KW$ ؛ در این صورت W مرکز ثقل مثلث ACF است ؛ "این در کتاب های در مورد تعادل اثبات شده [On the equilibrium of planes I,15]"

بنابراین $\Delta ACF / \text{segment ABC} = HK/KW = 3/1$

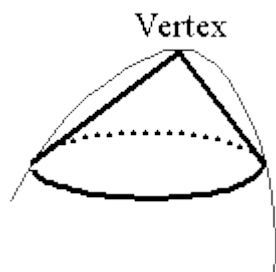
بنابراین بخش $ABC = 1/3 \Delta ACF$

اما $\Delta ACF = 4 \Delta ABC$

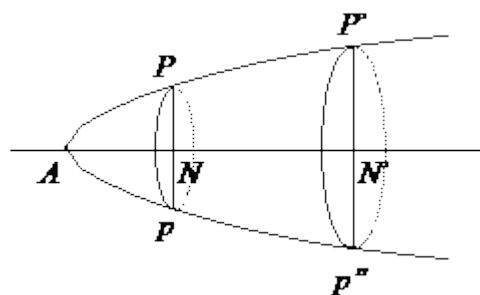
بنابراین بخش $ABC = 4/3 \Delta ABC$.

در کتاب دیگر، کتاب "در باب شبه مخروط ها و شبه کره ها" ارشمیدس 32 عبارت داده است. یک شبه مخروط حجم تشکیل شده با چرخش یک سهمی یا یک هذلولی است. بطور مشابه یک شبه کره با چرخش یک بیضی ایجاد می شود. مطالعات ارشمیدس روی حجم این فرم ها تمرکز یافته و در اینجا 2 تا از مهم ترین عبارت های کتابش هست:

(i) عبارت 21 و 22 : حجم هر قطعه از یک شبه سهمی، $3/2$ حجم یک مخروط (یا یک قطعه از یک مخروط) با همان پایه و محور است.



(ii) عبارت 24 : نسبت دو قطعه که با بریدن یک جسم محدود شده با یک سهمی وار، توسط دو صفحه، ایجاد می شوند (بریدن بطور دلخواه) برابر است با مربع طول محورهای آنها.



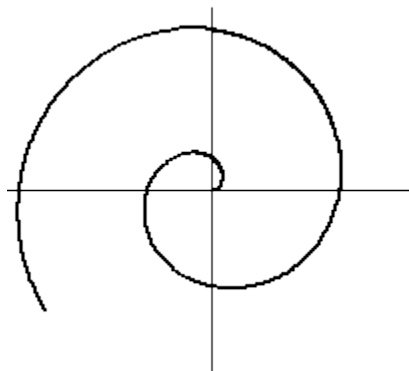
$$APp / AP'p' = AN^2 / AN'^2$$

در باب مارییج ها: On Spirals

1. Dositheus
2. The Method
3. Qubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains

یک ویژگی مطالعات هندسه ی یونان باستان این است که اشیا معمولا محدود به آنهایی بودند که قابل کشیدن بودند. این نشان می دهد که بعضی خم ها که فرم های خاصی داشته اند همواره از دست می رفته اند. این تا زمانی ادامه داشت که در زمان Alexanderian این قانون شکسته شد و ارشمیدس یکی از این قانون شکن ها بود ([5], P125).

او در کتاب "On spirals" نوعی خاص از خم را بررسی کرد- مکان هندسی نقطه انتهایی یک قطعه خط که بطور یکنواخت در حال چرخش است و نقطه انتهایی دیگرش (مبدأ) ثابت است و طول خط با نسبت یکنواختی افزایش می یابد- این چیزی است که ما به آن مارپیچ یا مارپیچ ارشمیدس می گوئیم. در حالت قطبی، معادله یک مارپیچ بصورت $p=a\theta$ است.



معلوم نیست که چرا ارشمیدس این نوع از خم را کشید؛ یک حدس کلی این است که او از مفهوم مکانیک استفاده کرد و دو سرعت را بصورت برداری ترکیب کرد که مارپیچ را بدست آورد. این اولین مفهوم دیفرانسیل در تاریخ است ([1], P150). دومین باری که این مفهوم ظاهر شد در 1629 بود که توسط فرما معرفی شد.

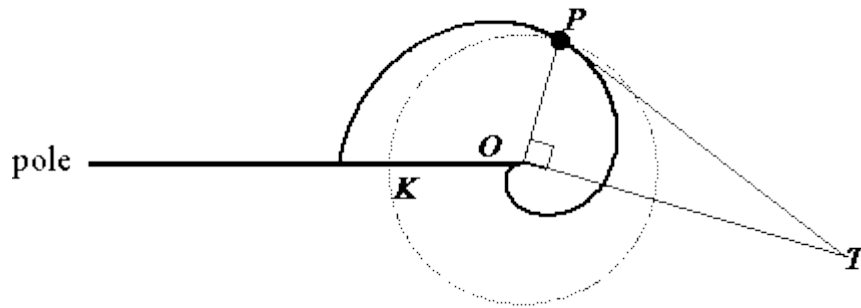
از این رو این تقریبا حیرت انگیز بوده است که ارشمیدس توانست در مقاله "On Spirals" تکنیک هایی برای ساختن مماس ها بر یک مارپیچ، پیشنهاد کند!!

در این مقاله 28 عبارت هست که 9 تای اول درباره نسبت های بین دایره ها و مماس هایشان است و 9 تا 12 درباره ی تصاعد حسابی بوده، شامل

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3} > 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$$

که بعدا بحث روی مارپیچ ها را آسان کند. 13 تا 20 مماس ها بر مارپیچ ها را بررسی می کند. به طور خاص در عبارت 20 یک روش ساخت مماس ذکر شده است :

برای هر نقطه P در چرخش اول، OT را عمود بر OP بسازید. سپس مماس در P، OT را در T قطع خواهد کرد. اگر O بعنوان مرکز و OP شعاع باشد، دایره کشیده شده قطب را در K قطع خواهد کرد، در این صورت طول OT برابر است با طول قوس بین K و P. سپس او روشهایی را برای استفاده برای یک نقطه در چرخش n-ام (برای یک n دلخواه) بررسی کرد.



از عبارت 21 به بعد، او موضوع را روی مساحت با استفاده از روش "Exhaustion" بررسی کرد، او متذکر شد که :

اگر یک مارپیچ شکل $\rho = a\theta$ باشد، در این صورت مساحت محدود شده توسط چرخش اول مارپیچ و قطب برابر است با:

$$\frac{1}{3} \pi (2\pi a)^2$$

نمادگذاری اعداد

یک درک اشتباه میان بعضی یونانیان باستان وجود داشته که : تعداد ذره های شنی در جهان بی نهایت است و نمی توان آن را با یک عدد نشان داد. برای برطرف کردن این درک اشتباه، ارشمیدس در تنها کتاب خود در مورد حساب "حساب دانه های شنی" یک راه جدید برای علامت گذاری اعداد بزرگ پیشنهاد کرد و تعداد دانه های شنی در جهان را حساب کرد.

در آن زمان بزرگترین واحد در دستگاه اعداد "M" بود که به معنی ده هزار بود. برای نشان دادن بیست هزار "M²" را استفاده کردند که β نماینده 2 بود. بنابراین بزرگترین عدد که می توانست نشان داده شود ده هزار x ده هزار بود یعنی 10^8 .

دستگاه جدید از مفهوم اندیس استفاده کرد: اعداد از 1 تا 10^8 در رده اول قرار داده شدند، اعداد از 10^8 تا 10^{16} در رده دوم و ... و اعداد از $10^{(10^8-1)}$ تا $10^{(10^8)}$ در رده (10⁸)-ام قرار داده شدند و تمام این اعداد در دوره اول قرار گرفتند.

$10^{(10^8)}$ با P نشان داده شد. در دوره دوم، رده اول از $P * 1$ تا $P * 10^8$ مرتب شد و ... و رده 10⁸-ام از $P * 10^{(10^8-1)}$ تا $P * 10^{(10^8)}$ دسته بندی شد. در این صورت، رده اول دوره 10⁸-ام از $1 * 10^{10^8-1}$ تا $10^8 * 10^{10^8-1}$ دسته بندی شد و رده 10⁸-ام از $10^{(10^8)}$ تا $10^{(10^8+1)}$ رده بندی شد.

ارشمیدس روی اندازه زمین ، فاصله بین زمین و ماه ، اندازه خورشید و اندازه فضا و تعداد ذره های شنی در یک دانه فرض کرد و تعیین کرد که تعداد خرده های شنی در جهان فقط می تواند 10^{51} باشد ، که بسیار کمتر بود از $10^{(10^8)} * 10^{10^8-1}$.

اگرچه ریاضیدانان با این راضی نشدند : او می توانست دستگاه را بیشتر توسعه دهد و بنابراین می توانست عدد بزرگ دلخواهی را نمایش دهد. اما ، درک اشتباه از بین رفت و احتمال داشت رومی ها به کشور حمله کنند ؛ و ارشمیدس دیگر بیشتر ادامه نداد ([6],P90)

تقریب ریشه دوم :

ارشمیدس دو دستاورد مهم و اصلی دارد؛ یکی مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ است و دیگری مقادیر تقریبی ریشه های مربعی بعضی اعداد بزرگ است.

مقدار تقریبی $\sqrt{3}$:

گفتیم ارشمیدس وقتی داشت اندازه گیری دایره را مطالعه می کرد مقدار تقریبی برای $\sqrt{3}$ بدست آورد. در واقع آن تقریب این بود:

$$265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$$

به طرز جالبی، این دو کسر با مخرج های نابیشتر از 153 و 780 نزدیکترین تقریب ها به $\sqrt{3}$ هستند. ([6],P81)

حدس های بسیاری برای اینکه ارشمیدس چطور این تقریب ها را بدست آورده است، وجود دارد:

خیلی ها بر این باورند که او از این نامساوی استفاده کرده است:

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}, \quad (a > b, a > 1)$$

به این دلیل که دوست او Heron به اینکه با این راه، تقریبی برای $\sqrt{50}$ ارائه داد، معروف بود.

Alkarkhi (قرن 11-ام) یک عرب، از تقریب $a + \frac{b}{2a+1} \approx \sqrt{a^2 + b^2}$ استفاده کرد. ([4], page 68)

اغلب مردم باور دارند که ارشمیدس تقریب را با مقدار $\alpha = \frac{5}{3}$ شروع کرد و $\alpha^2 = \frac{25}{9}$ را بدست آورد. درمقایسه با $3 = \frac{27}{9}$ ، داریم: $b = \frac{2}{27}$. با جایگذاری در $a + \frac{b}{2a}$ بدست می آوریم: $\frac{26}{15} (> \sqrt{3})$. از این بعنوان مقدار جدید a استفاده می کنیم و فرایند بالا را تکرار می کنیم، در آخر داریم: $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$.

با استفاده از تکنیک های مشابه بدست می آوریم $\sqrt{3} > \frac{1}{15}$ و بنابراین $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

در حقیقت او می توانسته از $7/4$ به جای $5/3$ ، بعنوان مقدار اولیه برای a، استفاده کند و می توانسته است تکرارهای بیشتری انجام دهد تا تقریب بهتری پیدا کند. به هر حال او این کار را نکرده است. ممکن است به این خاطر باشد که او فکر می کرده است تقریب به اندازه کافی به $\sqrt{3}$ نزدیک بوده و با استفاده از مقادیر بالا آسان تر خواهد بود که عوامل مشترک را در محاسبه های بیشتر استخراج کرد. ([4],P70)

مقادیر تقریبی بعضی اعداد بزرگ

او در کارش "اندازه گیری دایره" تقریب های زیر را نوشت:

1. Dositheus
2. The Method
3. Cubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains

- I. $3013\frac{3}{4} > \sqrt{9082321}$
- II. $1838\frac{9}{11} > \sqrt{3380929}$
- III. $1009\frac{1}{6} > \sqrt{1018405}$
- IV. $2017\frac{1}{4} > \sqrt{4069284\frac{1}{36}}$
- V. $1172\frac{1}{8} > \sqrt{1373943\frac{33}{54}}$
- VI. $2339\frac{1}{4} > \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$

این مقادیر اساساً با استفاده از قضیه اقلیدس، $(a+b)^2 = a^2 + 2ab$ و کسرهای با مخرج های 60 بدست آمده اند.

معادلات مکعبی

ریاضیدانان یونان باستان گاهی روی معادلات مکعبی بحث کرده اند اما فقط روی معادلاتی به فرم $Y=ax^3$. این هم چنین با این حقیقت هم دیده می شود که در عبارت های 1 و 5 از کتاب "در باب کره و استوانه" ارشمیدس با معادله $a^2/x = x/b$ سرو کار داشته است. اگرچه در عبارت 4 در مورد نسبت زیر صحبت کرده است:

$4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{px}{px + p}$

، که در آن a شعاع کره و m/n نسبت داده شده بین دو پاره خط با $m > n$ و x ارتفاع قطعه بزرگتر است. او در راه حل اش مسئله را تعمیم داد به:

'که قطعه a به دو قطعه a ، $(a-x)$ تقسیم شده و b و x هم بعنوان مساحت های دایره ها در نظر گرفته شده اند. او مسئله را با پیدا کردن اشتراک سهمی و هذلولی حل کرد.

بعلاوه به شرایطی که صفر هم دارد اشاره کرد، یک یا دو ریشه بین 0 و a . ([4], P116-117).

کارهای ارشمیدس روی معادلات مکعبی روی Al-Khazin (965)، Ibn Al-Haytham (965-1040) و Abu'l Jud (1000) تأثیر گذاشت که مطالعات را ادامه بدهند.

نهایتاً، راه حل های مخروطی برای همه انواع معادلات مکعبی توسط خیام (1048-1131) خلاصه شد. ([6], P80).

سایر دستاوردهای ریاضی

در این بخش روی بعضی از دستاوردهای مهم اما کمتر شناخته شده ارشمیدس بحث می کنیم.

فرمول برای مساحت یک مثلث

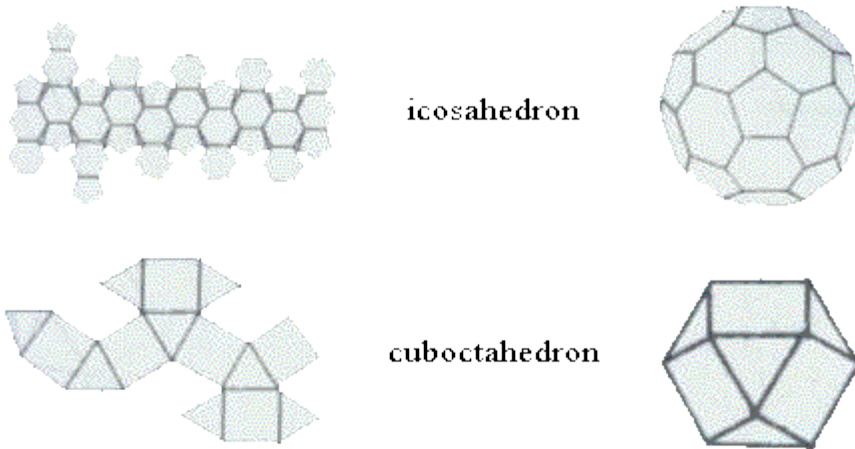
$$\text{مساحت یک مثلث} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

که s نصف محیط مثلث و a, b, c اضلاع مثلث هستند.

این فرمول بعنوان فرمول Heron شناخته شده اما در واقع توسط ارشمیدس کشف شده بود. ([5], P125)

چند وجهی نیمه منتظم (Semi-Regular polyhedron)

چند وجهی نیمه منتظم، یک جسم شکل گرفته از وجه های چندضلعی های منتظم با تعداد اضلاع متفاوت است. بعلاوه ، برای وجه های همسان ، ترتیب مجاور شدن وجه ها یکسان است. یک مجموعه از 13 نوع مختلف چندوجهی نیمه منتظم وجود دارد: ([7], P 14-15).



ساختن یک هفت ضلعی منتظم

یک نوشته درباره ساخت هفت ضلعی منتظم توسط ارشمیدس در یک کار ترجمه یک ریاضیدان عرب وجود داشته است ([4], P380).

مسئله گاو ها (گله گاوها)

ارشمیدس این مسئله را وقتی که Hieron ، پادشاه سیراکیوز را ملاقات کرد ، پیشنهاد کرد:

1. Dositheus
2. The Method
3. Qubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains

فرض:

W و w : به ترتیب تعداد گاوهای نر سفید و گاوها باشند.

X و x : به ترتیب تعداد گاوهای نر سیاه و گاوها باشند.

Y و y : به ترتیب تعداد گاوهای نر زرد و گاوها باشند.

Z و z : به ترتیب تعداد گاوهای نر خال خالی و گاوها باشند.

بطوریکه:

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Y, & X &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Z + Y, & Z &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Y, \\ w &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x), & x &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Z + z), & z &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Y + y), & y &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) \end{aligned}$$

در این صورت، مقادیر مجهولات چقدر است؟!

Hieron تلاش زیادی برای پیدا کردن جواب کرد. کوچکترین عدد دارای 7 رقم بود!

سپس ارشمیدس دو شرط بیشتر اضافه کرد:

$W + X =$ مربع کامل

$Y + Z =$ عدد مثلثی

Hieron در حل این مسئله ناتوان بود. کارشناسان تاریخ ریاضیات هم بر این باورند که خود ارشمیدس هم نتوانست مسئله را حل کند زیرا در سال 1965، با کمک کامپیوترها فهمیدند جواب مسئله 206500 رقم داشت. ([2], P97-98)

با این وجود، از راه حل قسمت اول مسئله و سختی قسمت دوم، می‌توان به توانایی ارشمیدس در جبر و مقابله پی برد.

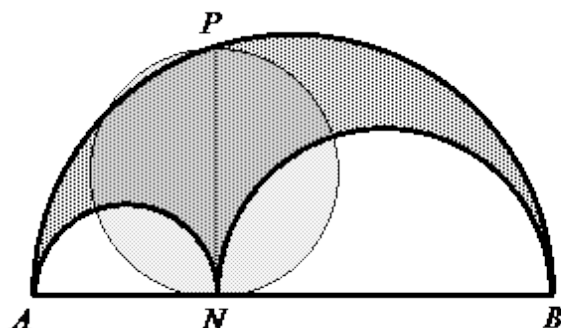
کتاب لم ها ("Book Of Lemmas")

در کتاب عربی "کتاب لم ها"، 15 مسئله در مورد دایره ها وجود داشته است. معتقدند که این مسئله ها توسط نوادگان ارشمیدس دوباره سازماندهی شده اند.

به نظر نمی رسد عبارات این کتاب، به یک زمینه کلی گرایش داشته باشند. این ها نه با روش "Exhaustion" حل شده اند و نه فقط بحث های کوچکی روی ویژگی های دایره ها هستند.

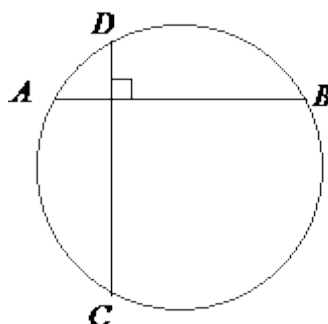
تعدادی مثال:

I) عبارت 4 : اگر AB قطر یک نیم دایره باشد و N نقطه دلخواهی روی AB ، در این صورت، مجموع مساحت های دو نیم دایره کشیده شده با قطرهای AN و BN ، برابر با مساحت دایره ای با شعاع PN ، که PN عمود AB از P روی نیم دایره است، خواهد بود.



II) عبارت 9 : اگر AB و CD قطر نباشند و در یک نقطه تقاطع بر هم عمود باشند، در این صورت:

$$(DB \text{ کمان}) + (AC \text{ کمان}) = (BC \text{ کمان}) + (AD \text{ کمان}) .$$



روش شناسی (Methodologies)

ارشمیدس در کارهایش استفاده خوبی از کارهای پیشینیان کرد، ایده های نوین پیشنهاد کرد و روی اثبات های دقیق پافشاری کرد. ([4], P26-27)

مانند کتاب "Elements" کارهای او با یک لیست از تعاریف و فرضیه ها شروع شده است. این در اقتباس ها و اثبات های عباراتش هم پیروی شده است.

در زیر روش هایی که او در اثباتش استفاده کرده است ، بحث خواهیم کرد.م چندین روی مسیرهایی که او ایده هایش را بدست آورد، در این بخش بحث می کنیم:

استفاده از تناسب

ارشمیدس در اثبات هایش و عباراتش از نسبت ها استفاده کرده است. در واقع ریاضیات یونان باستان اساسا در حل مسائل درگیر استفاده از مساحت ها و نسبت ها بوده اند. اقلیدس هر دو روش را بکار می برده است ، آپولونیوس اهل Perge ، اساسا از

1. Dositheus
2. The Method
3. Qubic equations
4. Arithmetic on Sand Grains

مساحت ها استفاده می کرده و ارشمیدس معمولا از نسبت ها استفاده می کرد ([4],P27). برای مثال آپولونیوس ، y^2 را بعنوان

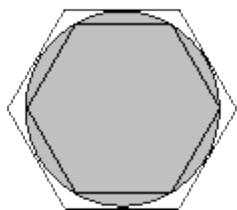
مساحت تفسیر کرد و روابط $y^2 = px$ در سهمی و $y^2 = px \pm \frac{p}{d} x^2$ در هذلولی و بیضی را متذکر شد. (که p محیط و d قطر است).

در حالی که ارشمیدس به سهمی بصورت $y^2 : (a^2 \pm x^2) = b^2 : a^2$ ([2],P139) نگاه کرد. از این رو آنها در مطالعاتشان با نتایج متمایز مطرح شدند.

روش "Exhaustion" و اثبات با تناقض

در عبارت دوم فصل 12 کتاب "عناصر" اقلیدس، یک استفاده از روش "Exhaustion" وجود داشته است. هم چنین ارشمیدس این روش را در اثبات بسیاری از عباراتش به کار گرفته است.

برای نمونه : دو مقدار دلخواه انتخاب کنید و نسبت آنها را R بنامید و چندضلعی های منتظم محاطی و محیطی یک دایره را بکشید. ارشمیدس ثابت کرد که اگر چندضلعی ها تعداد اضلاع مناسب داشته باشند، نسبت بین مساحت هایشان باید کمتر از R باشد. از این رو اگر R نزدیک 1 باشد، در این صورت نسبت مساحت چندضلعی ها هم نزدیک به 1 است. این گونه می توانیم مساحت دایره را تعیین کنیم.



در ابتدا این سخت بود که مساحت محدود شده توسط یک خم را محاسبه کرد. با ساختن چندضلعی ها ، می توانیم تخمین خود را از مساحت ، به طور دلخواه نزدیک به مقدار واقعی مساحت، تشکیل دهیم در واقع این روش می تواند برای مساحت های محدود شده توسط مخروطی ها و حجم های اجسام تشکیل شده از دورن ، به کار گرفته شود.

در مقالات "در باب کره و استوانه" ، "اندازه گیری دایره" ، "تربیع سهمی" ، "در باب شبه مخروط ها و شبه کره ها" و "مارپیچ ها" ارشمیدس اغلب روش "Exhaustion" را برای حل مسائل استفاده کرده است.

در این روش ما نیازی نداریم هر دو چندضلعی محاطی و محیطی را بسازیم ، گاهی تنها به یکی از آنها نیاز داریم یک مثال ، عبارت 24 مقاله "تربیع سهمی" که قبلا بیان شده است ، که بیان می کند: " مساحت $\frac{1}{4}$ هر سهمی ، $\frac{4}{3}$ برابر یک مثلث با همان قاعده و ارتفاع است "

اثبات ([5],P119-120) از یک مجموعه از مثلث ها برای این که سهمی را تقریب بزنند استفاده می کند. ابتدا راس P سهمی را مشخص می کنیم و مثلث PQp را می سازیم. سپس رئوس R و r بین PQ و Pq را می یابیم و ΔPQR و ΔPqr را می سازیم. توجه کنید که عبارات قبلی در کتاب ثابت کرده اند که

$$\Delta PQR = \Delta Pqr = 1/8 \Delta PQp$$

از این رو :

$$\Delta PQp + 1/4 \Delta PQp = \text{مساحت سایه زده}$$

سپس او ثابت کرد که اگر فرایند بالا را در ΔPQR و ΔPqr تکرار کنیم ، می توانیم یک مجموعه از مثلث هایی که مجموع مساحت آنها با مساحت مقطع واقعی ، با یک مقدار کوچک دلخواه ، فرق می کند، تشکیل دهیم.

از این رو داریم:

$$PQp = \Delta PQp + \frac{1}{4} \Delta PQp + \frac{1}{4^2} \Delta PQp + \frac{1}{4^3} \Delta PQp + \dots + \frac{1}{4^n} \Delta PQp$$

روش "Exhaustion" فرمول محاسبه مساحت را به ما می دهد . هرچند، چون فرمول با دنیایه های نامتناهی درگیر بود و مفهوم بی نهایت وجود نداشت، مسئله هنوز تمام نشده بود. برای تمام کردن مسئله احتیاج داریم که با تناقض اثبات کنیم.

در این روش، ابتدا یک مقدار را بعنوان جواب پیشنهاد می کنیم که خلاف فرض است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که اگر مقدار واقعی کمتر یا بیشتر از مقدار پیشنهادی است، تناقض وجود دارد، در این صورت کار تمام است.

حال همان طور که ارشمیدس پیشنهاد کرد که مساحت ناحیه سایه زده $4/3 \Delta PQp$ است، ما می توانیم تصور کنیم که:

$$4/3 \Delta PQp > \text{مساحت مقطع سهمی}$$

چون اختلاف بین مساحت سهمی و مجموع مساحت های مثلث ها می تواند به طور دلخواه کوچک شود، داریم:

$$4/3 \Delta PQp > \text{مجموع مساحت مثلث ها} > \text{مساحت مقطع سهمی}$$

اما با توجه به عبارت 23 * ، اگر مجموع سری را تا جمله m-ام بنویسیم ($m > n$):

$$1/3 \left(\frac{1}{4^m} \Delta PQp \right) + \text{مجموع مساحت مثلث ها} = 4/3 \Delta PQp$$

و این می تواند منجر به تناقض شود زیرا نشان می دهد که

$$4/3 \Delta PQp < \text{مجموع مساحت مثلث ها}$$

به طور مشابه می توانیم ثابت کنیم که

$$4/3 \Delta PQp < \text{مساحت مقطع سهمی}$$

هم می تواند ما را به سوی تناقض پیش ببرد . بنابراین مقدار مساحت باید برابر با مقدار پیشنهادی باشد.

* در عبارت 23 ارشمیدس اثبات کرد که :

$$A+B+C+\dots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$$

که هر جمله 4 برابر جمله بعدی است.

و این منجر شد که او اعتقاد داشته باشد که مساحت محدود شده توسط سهمی PQP، $\frac{4}{3}$ است.

این عبارت از صفحه 251 از کتاب "The Works Of Archimedes" [4]، آمده است.

جمله Z دلخواه است ولی جمله 26-ام نباید باشد.

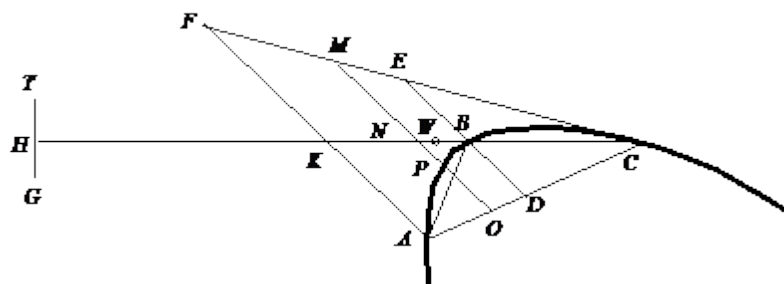
استفاده از مکانیک

چگونه ارشمیدس توانست با بسیاری ایده ی جدید مطرح شود؟؟

در واقع کارهای او آنقدر مرتب بوده است که کسی توانسته تنها تعاریف، فرایض، عبارات و اثبات ها را بیابد اما مسیرهای او را که بتواند ایده های او را جمع آوری کند نیافته است. حال می خواهیم نگاهی به این مسیرهای پنهان بیاندازیم.

در سال 1906، J.L.Heiberg(1854-1928)، در ترکیه یک کتاب که شامل بسیاری از کارهای ارشمیدس بود یافت که شامل "The Method" که توسط ارشمیدس برای بیان اینکه ایده های زیبایش از کجا آمده اند، نوشته شده بود، بود.

ارشمیدس برای مطالعاتش در مکانیک معروف است. در حقیقت، مکانیک او را بسوی بسیاری از کشفیات ریاضی اش سوق داد. به عنوان مثال، اولین عبارت در مقاله "The Method" در مورد مساحت های محدود شده توسط سهمی بوده که اثبات آن در بخش قبلی بحث شده است. در کتاب، او نوشته است که چگونه رابطه را پیدا کرده است:



در شکل، BD قطر مقطع و CF مماس در C و P یک نقطه دلخواه روی وتر (قوس) سهمی است. توجه کنید که AKF و OPNM موازی با BD هستند و H,K,N,B,C بر یک خط مستقیم واقع شده اند (هم خط اند) و KH و KC طول های برابر دارند. در حالی که B راس است، با استفاده از قضیه های قبل داریم:

$$EB = BD, MN = NP, FK = KA.$$

در عبارت 5 همچنین، اثبات شده است که

$$MO/OP = CA/AO = CK/KN = HK/KN$$

حال فرض کنید که مقطع ها وزن های متناسب با طول ها دارند. به K بعنوان محور HC نگاه کنید و یک پاره خط TG هموزن با OP در H بکشید. چون مرکز ثقل (نقطه میانی) MO ، که N است، روی KN قرار دارد ، دو طرف محور K در تعادل اند.

چون P دلخواه است ، OP می تواند هر خط موازی دلخواهی بین مقطع سهموی ABC و AC باشد و بنابراین MO می تواند هر خط موازی در ΔAFC با روابط ذکر شده اش با OP باشد.

ارشمیدس باور داشت که چون تعداد پاره خط های (OP,MO) در مقطع سهموی ABC و ΔAFC برابرند، برای محور K، مقطع سهموی ABC که از هرگونه OP شکل گرفته، می تواند ΔAFC شکل گرفته از هرگونه MO را متوازن کند و مرکز ثقل ΔAFC نقطه W روی CK است که $CW=2WK$.

از این رو :

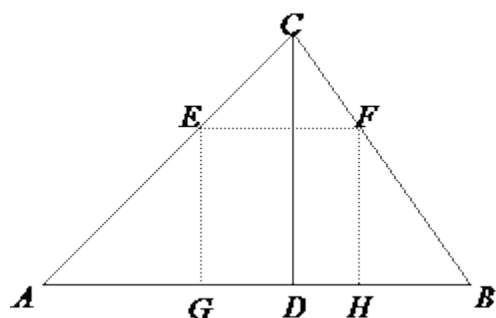
$$ABC / \Delta AFC = WK/KH = 1/3 \quad (CK=KH).$$

بنابراین ،

$$ABC = 1/3 \Delta AFC = 4/3 \Delta ABC \quad (\text{عبارت قبلی، رابطه 4 برابر را ثابت کرد}).$$

زمینه "The Method" اینگونه است که کمیت ناشناخته را به بسیاری کمیت کوچک تقسیم کند و از اهرم استفاده کند تا روابط تناسبی این کمیت ها را با بقیه کمیت های کوچک تعیین کند. مجموع گویه اخیر کمیت ها برای محاسبه کوچکتر است، (مثل مثلث AFC در بالا). این به ما اجازه می دهد که ناشناخته را بیابیم. ([6],P74-750) توجه کنید که این یک مفهوم مقدماتی از انتگرال گیری (یکی کردن و به هم پیوستن) است و ارشمیدس به طرز موفقیت آمیزی مطالعات مکانیک و ریاضیات را می آمیزد.

این روش حقیقتاً حیرت آور است. اما ارشمیدس متذکر شده است که این تنها راهی برای ایجاد حدس هاست، اما نه اثبات ها! این به این معنی است که ما هنوز بقیه ابزار را نیاز داریم (روش Exhaustion و اثبات با تناقض) که نتایج بدست آمده را ثابت کنیم . در واقع گاهی اوقات روش استفاده از مکانیک شکست می خورد. تصویر زیر را ملاحظه کنید: ([6],p75-76)



DC یک ارتفاع مثلث است. اگر $EF \parallel AB$ و $EG \perp AB$ و $FH \perp AB$ ، در این صورت $GE=HF$. اگر EF بین AB تا تغییر کند، در هر ارتفاعی می‌توانیم EG و FH متناظر را پیدا کنیم. این ما را به این نتیجه که مساحت ΔACD و ΔBCD برابرند، سوق می‌دهد، که نمی‌تواند درست باشد!

نتیجه

ارشمیدس، اقلیدس و آپولونیوس بزرگترین ریاضیدانان در یونان باستان هستند. البته ارشمیدس هم چنین بعنوان یکی از سه ریاضیدان بزرگ مثل نیوتن و گاوس تاکنون مطرح شده است.

درست شبیه نیوتن، ارشمیدس برای دستاوردهایش در مکانیک شهرت دارد. اما، دستاوردهایش در ریاضیات ممکن نیست نادیده گرفته شود.

بسیاری کارها توسط ارشمیدس نوشته شده اند؛ شامل: "در باب کره و استوانه"، "اندازه گیری دایره"، "در باب شبه مخروط ها و شبه کره ها"، "در باب مارپیچ ها"، "ماسه شمار"، "تربیع سهمی"، "کتاب لم ها" و "روش". این کارها اساساً در عنوان های هندسه هستند. در صفحه دویبعی، او روی دایره ها و سهمی ها، هذلولی ها و مماس ها بر مارپیچ ها کار کرد؛ در فضای سه بعدی، مساحت ها و حجم های استوانه ها، مخروط ها، کره ها، شبه کره ها و شبه مخروط ها و روی تقریب π ، کار کرد. سایر دستاوردها شامل فرمول Heron، ساخت هفت ضلعی منتظم، چندوجهی نیمه منتظم و بسیاری چیزهای دیگر است.

ارشمیدس ندرتا روی عنوان حساب کار کرد، همان طور که این حقیقت که او تنها یک قطعه کار در این مورد دارد، این حقیقت را بازگو می‌کند؛ "ماسه شمار". او یک سیستم جدید اختراع کرد که اعداد بزرگ را نمایش دهد. بعضی از همکاری هایش در این زمینه از اینکه برای حل مسائل هندسه به آنها احتیاج داشته، برخاسته است. برای مثال، او تقریب های $\sqrt{3}$ و ریشه های مربعی بعضی اعداد بزرگ را بدست آورد، که در راه حل های معادلات مکعبی و سری های حسابی دیده می‌شود.

برحسب روش شناسی ها در تحقیق، ارشمیدس هم چنین بسیار برجسته است. استفاده او از نسبت ها در عباراتش و مکانیک در کشف رابطه ها، پیشگام بوده است. اختراع مفهوم انتگرال و استفاده از روش Exhaustion و اثبات با تناقض، ابزارهای فوق العاده گران بهایی در اثبات ها به او تحویل دادند.

در اختتام، ارشمیدس کاملاً شایسته است که به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان نام نهاده شود.

V. References

* The Mathematical Achievements of Archimedes

- [1] John Stillwell (1989), *Mathematics and Its History*, Springer.
- [2] T. L. Heath (1965), *A History of Greek Mathematics, Volume II*, Oxford.
- [3] E.T. Bell (written in 1937), Jing Zhujun (translated in 1998). *Da shu xue jia* (translated from *Men of mathematics*). Publisher: Chiu Chang Publishing Company.
- [4] T. L. Heath (written in 1912), Zhu Enkuan, Li Wenming (translated in 1998). *Ajimide quan ji* (translated from *The Works of Archimedes*). Publisher: Shanxi ke xue ji shu chu ban she (Shanxi).
- [5] Morris Kline (written in 1908), Lin Yanquan, Hong Wangsheng, Yang Kang Jingsong (translated in 1983). *Shu xue shi : shu xue si xiang de fa zhan* (translated from *Mathematical thought from ancient to modern times*). Publisher: Chiu Chang Publishing Company.
- [6] Xie Enze, Xu Benshun (1994). *Shi jie shu xue jia si xiang fang fa*, p.61-99. Publisher: Shandong jiao yu chu ban she (Jinan).
- [7] Cai Zhiqiang, Sun Wenxian (199?). *Shu xue li ti mo xing zhi zuo : fu : duo mian ti yan jiu*. Publisher: Chiu Chang Publishing Company.
- [8] Hong Kong University of Science and Technology.
http://www.edp.ust.hk/math/history/5/5_5/5_34.htm
- [9] Archimedes. Heiberg (discovered in 1906). T.L. Heath, K.C.D., Sc.D., F.R.S. (Edited in 1912). *The Method Of Archimedes*. Publisher: Clay, Jhon, M.A. (Cambridge at the university press).
- [10] Howard W. Eves. *An Introduction to the mathematical history*. Fourth Edition, Holt, Rinehart and Winston, 1976, Printed in: U.S.A.

[11]