۱۲-۱

حل تمرینات قبل :

$$* \; y = ۴x^{۳} + ۷ - e^{x}$$

$$\Rightarrow y' = ۱۲x^{۲} + ۰ - e^{x}$$

$$* \; y = ۳x^{-۲} e^{x}$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{-۶x^{-۳}}_{} \cdot \underbrace{e^{x}}_{} + \underbrace{۳x^{-۲}}_{} \cdot \underbrace{e^{x}}_{}$$

$$* \; y = ۳^{x} \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{۳^{x} \times Ln\, ۳}_{} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{} + \underbrace{۳^{x}}_{} \times \underbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}_{}$$

$$* \; y = \frac{Sin\, x}{Ln\, x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{Cos\, x \; Ln\, x - Sin\, x \times \frac{۱}{x}}{(Ln\, x)^{۲}}$$

$$* \; y = x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۳}{\sqrt{x}} - ۲\sqrt[۵]{x^{۳}} \; \overset{ابتدا}{=\!=\!=} \; x^{\frac{۲}{۳}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}} - ۲x^{\frac{۳}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲}{۳} x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۳}{۲} x^{-\frac{۳}{۲}} - \frac{۶}{۵} x^{-\frac{۲}{۵}}$$

یادآوری :

$$\boxed{\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}}$$

Scanned by CamScanner

۱۲-۲

$* \; y = \arcsin(tg\, x)$

$$(1+tg^{۲} x) =$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - tg^{۲} x}} \times \sec^{۲} x$$

$* \; y = \sqrt{\sec(x^{۳}-1)}$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{1}{۲\sqrt{\sec(x^{۳}-1)}}}_{\text{مشتق رادیکال}} \times \underbrace{\sec(x^{۳}-1)\, tg(x^{۳}-1)}_{\text{مشتق سکانت}} \times \underbrace{(۳x^{۲}-۰)}_{\text{مشتق زاویه سکانت}}$$

$* \; y = tg^{۲/۳}(۴x+\sqrt{x})$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲}{۳}\, tg^{-۱/۳}(۴x+\sqrt{x}) \times \sec^{۲}(۴x+\sqrt{x}) \times \left(۴ + \frac{1}{۲\sqrt{x}}\right)$$

$* \; y = \sin^{۲} x + \cos^{۲} x$

راه اول $\Rightarrow y' = ۲\sin^{۱} x \times \cos x + ۲\cos x \times (-\sin x) = ۰$

راه دوم $\Rightarrow y \overset{\text{طبق فرمول‌های}}{\underset{\text{مثلثات}}{=}} 1 \Rightarrow y' = ۰$

۱۲-۳

$* \; y = (1 - x^{۶۲})(1 + x^{۶۲})$

راه اول $\Rightarrow (-۶۲ x^{۶۱})(1 + x^{۶۲}) + (1 - x^{۶۲})(۶۲ x^{۶۱}) = \dots = -۱۲۴ x^{۱۲۳}$

راه دوم $\Rightarrow y \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=\!=} 1 - x^{۱۲۴} \Rightarrow y' = -۱۲۴ x^{۱۲۳}$

Scanned by CamScanner

مشتقات مراتب بالاتر :

با مشتق‌گیری متوالی از یک تابع می‌توان مشتقات مراتب بالاتر آن تابع را محاسبه نمود :

مثال : سه نوع نتیجه متفاوت و جالب از مشتقات :

* $y = ٤x^۲ + ۷x - ۱۰$

$\Rightarrow y' = ۸x + ۷$

$\Rightarrow y'' = ۸$

$\Rightarrow y''' = y^{(۳)} = ۰$

$\Rightarrow y^{(n)} = ۰ \quad , \quad \forall n \geq ۳$

درجه چندجمله‌ای = ۲

مشتق مرتبه دوم (۸)، عدد ثابت شد (درجه x ضریب بزرگترین جمله) و مشتق‌ها مرتبه سوم (درجه+۱) به بعد صفر شدند.

* $y = \sin x + ۱۰۳ \Longrightarrow$ سؤال : $y^{(۱۰۳)} = ?$

حل : $y = \sin x + ۱۰۳$

$\Rightarrow y' = \cos x + ۰ = y^{(۵)} = y^{(۹)} \dots = y^{(۱۰۱)}$

$\Rightarrow y'' = -\sin x = y^{(۶)} \quad \vdots \quad = y^{(۱۰۲)}$

$\Rightarrow y^{(۳)} = -\cos x = y^{(۷)} \quad = y^{(۱۰۳)}$

$\Rightarrow y^{(٤)} = +\sin x = y^{(۸)} = y^{(۱۰۰)}$

$\Rightarrow \dots$

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۳ & ٤ \\ \hline \boxed{۳} & ۲۵ \end{array}$$

حالت تکرار شونده :

$y^{(۱۰۳)} = -\cos x$.

تمرین : مشتق مرتبه ۱۳۹۹، یا $y^{(۱۳۹۹)}$ تابع $y = ۱٤e^{x}$ را بیابید.

" : مشتق مرتبه سوم تابع $y = tg\, x$ را بیابید.

یادآوری (تابع ضمنی):

به توابع دارای فرم $f(x,y)=۰$ ، (نه فرم $y=f(x)$) ، توابع ضمنی می‌گوییم. به زبان ساده‌تر، توابعی که متغیرهای آن‌ها درهم مخلوط شده باشند توابع ضمنی هستند که گاهی می‌توان به راحتی متغیر وابسته را جدا کرد و گاهی این عمل به راحتی انجام پذیر نیست یا حتی غیرممکن است.

تابع (معمولی): $y=\frac{۱}{x}$ ؛ $y=۳\sin^{۲}x+\sqrt{\frac{۱}{x^{۳}}}$

تابع ضمنی: $xy=۱$ ؛ $y=۳\sin^{۲}x+\sqrt{y^{۳}+x}$

برای مشتق‌گیری از توابع ضمنی (به جای تبدیل آن‌ها به فرم معمولی که حتی شاید غیرممکن باشد) از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

مشتق ضمنی:

$$f(x,y)=۰ \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$$

نکته: در زمان مشتق‌گیری نسبت به یک متغیر، رفتار ما با متغیر دیگر همانند یک عدد خواهد بود.

مثال: مشتق بگیرید:

* $۵x^{۳}+x^{۲}y+xy^{۲}+y^{۳}=۱$

حل: $۵x^{۳}+x^{۲}y+xy^{۲}+y^{۳}-۱=۰$

مانند ضریب ــ در اینجا $y^{۳}$ عدد است

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{y \text{ '' ''}}=-\frac{۱۵x^{۲}+۲xy+y^{۲}+۰-۰}{۰+x^{۲}+۲xy+۳y^{۲}-۰}$$

در اینجا $۵x^{۳}$ عدد است ــ مانند ضریب

کاربرد مشتق (قاعده هوپیتال: H)

برای محاسبه حدهای با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد:

«فقط این دو حالت»

قاعده:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال:

$$* \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x-۲} \underset{H}{\overset{\text{حل}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}} \lim_{x \to ۲} \frac{۲x}{۱} = ۲\times۲=۴$$

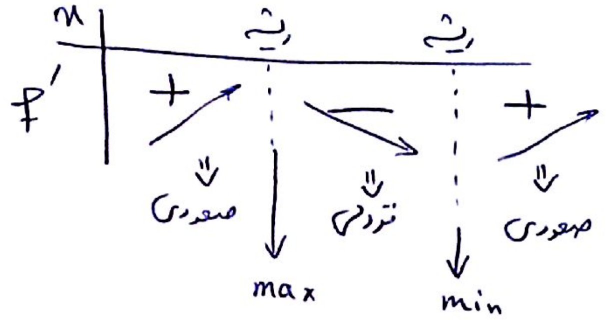
$$* \lim_{x \to -۱} \frac{۳x^{۳}+۳x^{۲}+x+۱}{x+۱} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to -۱} \frac{۹x^{۲}+۶x+۱}{۱} = ۹-۶+۱=۴$$

Scanned by CamScanner

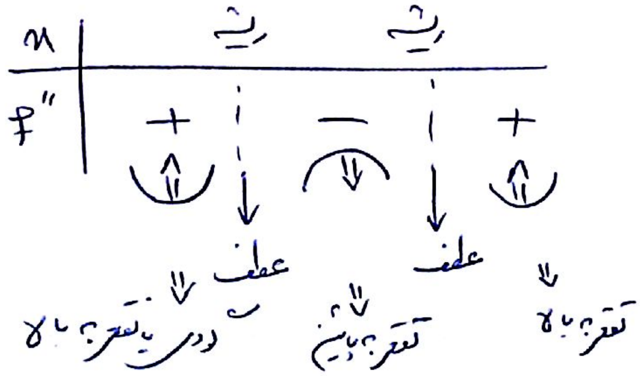
کاربرد مشتق (اطلاعات در رسم نمودار تابع) :

برای بدست آوردن اطلاعات راجع به: نقاط اکسترمم، یکنوایی، نقاط عطف و جهت تقعر تابع می توان از مشتقات اول و دوم استفاده نمود و نمودار آن را رسم کرد :

① محاسبه مشتق تابع (f') ← پیدا کردن ریشه ها $0 = f'$ ← تعیین علامت آن



② محاسبه مشتق دوم تابع (f'') ← پیدا کردن ریشه ها $0 = f''$ ← تعیین علامت



مثال : اطلاعات تابع مقابل را استخراج نموده و آن را رسم کنید.

$y = x^{۳} + ۳x^{۲}$

① $y' = ۳x^{۲} + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \end{cases}$

② $y'' = ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

x		-۲		-۱		۰	
f'	+	۰	−		−	۰	+
	↗	max	↘		↘	min	↗
f''	−		−	۰	+		+
		⌒ ⇓		عطف		∪ ⇑	
f		٤		۲		۰	
		⇓ (−۲,٤)		(−۱,۲)		(۰,۰)