# ۳ جبر ماتریسی و سیمپلکس اصلاح شده

## ۳ـ۱ـ بردار و فضای برداری

فضای برداری: اگر مجموعه‌ای از بردارها را داشته باشیم به طوری که حاصل جمع هر دو بردار دلخواه و هر ضربی دلخواه از هر بردار، در آن مجموعه باشد آن مجموعه را فضای برداری می‌گویند.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=c \\ d=\lambda a \end{array}\right\} \Rightarrow c\,,\, d \in \text{فضای برداری}$$

تذکر: هر فضای برداری حتماً شامل بردار صفر خواهد بود وگرنه فضای برداری حاصل نخواهد شد.

## ۳ـ۲ـ استقلال بردارها

در یک فضای $n$ بعدی، بردارهای $(a_1, \ldots, a_k)$ مستقل خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مخالف صفر باشد. $|A| \neq 0$

ب) در رابطه $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ همه $\lambda_i$ ها صفر باشد.

ج) آنها را نتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

## ۳ـ۳ـ وابستگی بردارها

در یک فضای $n$ بعدی، بردارهای $(a_۱, \dots, a_k)$ دارای وابستگی خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مساوی صفر باشد. $|A| = ۰$

ب) در رابطه $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i a_i = ۰$ همه $\lambda_i$ ها مساوی صفر نباشد (حداقل یکی از $\lambda_i$ ها مخالف صفر باشد)

ج) آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

☜ **نکته:** هرگاه بردار $b$ داخل فضای برداری بردارهای ستونی ماتریس ضرایب قرار گیرد در اینصورت مسئله جواب دارد و در غیر اینصورت مسئله جواب نخواهد داشت.

## ۳ـ۴ـ ماتریس‌ها

یک ماتریس $m \times n$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود که در آن:

$$A = \left\| \, a_{ij} \, \right\|_{m \times n}$$

سطر ستون تعداد سطرها تعداد ستون‌ها

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots\cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots\cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

☜ **نکته:** هر بردار یک ماتریس است ولی هر ماتریس یک بردار نیست.

**مجموع دو ماتریس:** دو ماتریس وقتی جمع می‌شوند که تعداد سطرها و ستونهای مساوی با هم داشته باشند در اینصورت درایه‌های نظیر یکدیگر با هم جمع می‌شوند.

$$A+B=C \Rightarrow a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$
$$i=j=۱,۲,\dots,n$$

### ۳ـ۴ـ۱ـ ضرب عدد اسکالر $\lambda$ در ماتریس

عدد $\lambda$ در کلیه درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

### ۳ـ۴ـ۲ـ ضرب ماتریس

دو ماتریس در صورتی با یکدیگر ضرب می‌شوند که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. اگر $A$ ماتریس $m{\times}n$ و $B$ ماتریس $n{\times}p$ باشد آنوقت داریم:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

که در آن $C$ یک ماتریس $m\times p$ می‌باشد و تعریف می‌شود:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{اگر} \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,p$$

## ۳ـ۵ـ ماتریس‌های خاص

**ماتریس مربع** : ماتریسی که تعداد سطر و ستونهایش مساوی باشد $m=n$

**ماتریس سطری** : ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

**ماتریس ستونی** : ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

**ماتریس واحد** : ماتریس مربعی که تمام قطرهایش یک و بقیه عناصر آن صفر باشد و با $I$ نمایش می‌دهند.

**ماتریس قطری** : ماتریس مربعی که عناصر غیرقطری آن صفر باشد.

**ماتریس اسکالر** : ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی آن یکسان باشد.

**ماتریس ترانسپوز (ترانهاده)** : ماتریسی که جای سطر و ستونهای آن عوض شده باشد. اگر ماتریس $A_{m\times n}$ با $a_{ij}$ عنصر مفروض باشد ترانسپوز ماتریس $A$ بصورت یک ماتریس $A^T_{n\times m}$ با عناصر $a_{ji}$ تعریف می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**ماتریس متعامد** : ماتریسی که اگر در ترانسپوزش ضرب شود برابر ماتریس واحد شود.

$$A\,.\,A^T=A^T A=I_n$$

**ماتریس متقارن** : ماتریسی که مساوی با ترانسپوزش گردد. $A=A^T$

**ماتریس شبه متقارن** : ماتریسی که مساوی قرینه ترانسپوزش گردد. $A=-A^T$

**ماتریس مثلثی** : یک ماتریس مربع $m\times n$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد، و پائین مثلثی است اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد.

## ۳ـ۶ـ اعمال سطر و ستونی ماتریس

ماتریس $A_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان بعضی از اعمال سطری یا ستونی مقدماتی را روی ماتریس $A$ انجام داد که در حل معادلات خطی مفید باشد.

یک عمل سطری مقدماتی ماتریس $A$ به سه حالت زیر انجام می‌پذیرد :

۱ـ تعویض سطر $i$ با سطر $j$

۲ـ ضرب سطر $i$ در یک اسکالر غیرصفر $\lambda$

۳ـ اضافه نمودن $\lambda$ برابر سطر $j$ به سطر $i$

یک عمل ستونی مقدماتی ماتریس $A$ نیز به سه حالت زیر انجام می‌گیرد :

۱ـ تعویض ستون $k$ با ستون $l$

۲ـ ضرب ستون $k$ در یک اسکالر غیرصفر $\lambda$

۳ـ اضافه نمودن $\lambda$ برابر ستون $l$ به ستون $k$

## ۳ـ۷ـ دترمینان ($det$ یا $|\ |$)

تابعی است که به هر ماتریس مربعی یک عدد منحصر به فرد را نسبت می‌دهد. در صورتی‌که این عدد صفر باشد حداقل یک بردار وابسته سطری یا ستونی در این دترمینان وجود دارد. و اگر مخالف صفر باشد تمام بردارهای سطری و ستونی آن مستقل خطی از یکدیگر می‌باشند.

دترمینان ماتریس $A_{n \times n}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i+۱} a_{i۱} |A_{i۱}|$$

که در آن $|A_{i۱}|$ از حذف سطر $i$ و ستون اول بدست می‌آید. دترمینان یک ماتریس ۱×۱ خود همان عنصر می‌باشد.

### ۳ـ۷ـ۱ـ مینور (Minor)

مینور هر عنصر عبارتست از دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون آن عنصر از ماتریس اصلی

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad M_{۲۲} = \begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۱(۲) - ۵(۱) = -۷$$

### ۳ـ۷ـ۲ـ خواص دترمینان

۱ـ اگر ماتریس $B$ از جابجایی دو سطر یا دو ستون ماتریس $A$ بدست آید در اینصورت:

$$|A| = -|B|$$

۲ـ دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانسپوز آن برابر است:

$$|A| = |A^T|$$

۳ـ اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس $A$ صفر باشد در اینصورت: $|A| = ۰$

۴ـ دترمینان یک ماتریس که دارای دو سطر یا ستون مساوی باشد، صفر است.

۵ـ حاصل ضرب هریک از عناصر یک سطر یا یک ستون از ماتریس مربع $A$ در عدد اسکالر $\lambda$، دترمینان $A$ را در $\lambda$ ضرب خواهد کرد.

۶ـ دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربع هم مرتبه برابر حاصلضرب دترمینانهای آنها است:

$$|AB| = |A| . |B|$$

**ماتریس منفرد**: ماتریسی که دترمینان آن برابر صفر باشد.

**ماتریس غیر منفرد**: ماتریسی که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

## ۳ـ۸ـ رتبه ماتریس (Rank)

اگر $A$ یک ماتریس $m\times n$ باشد دراینصورت همیشه $Rank\, A \le Min(m,n)$ که اگر $Rank\, A = Min(m,n)$ باشد $A$ را رتبه کامل گویند. بنابراین رتبه ماتریس عبارتست از مرتبه یا بعد بزرگترین زیر ماتریس که دترمینان آن صفر نباشد.

**نکته**: سیستم معادلات $Ax=b$ و ماتریس افزوده $(A|b)$ با $m$ سطر و $n+1$ ستون در نظر بگیرید. حالتهای ممکن برای جوابهای سیستم عبارتست از:

۱) اگر $Rank\,(A|b) > Rank\,(A)$ در اینصورت سیستم $Ax=b$ جواب ندارد چون $b$ را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی از $A$ نوشت.

۲) $Rank\,(A|b) = Rank\,(A) = n$ آنگاه، $Ax=b$ جواب منحصر به فرد دارد.

۳) $Rank\,(A|b) = Rank\,(A) < n\ ,\ n < m$ آنگاه، $Ax=b$ بی‌نهایت جواب دارد.

۴) اگر $R(A|b) = R(A)\ ,\ m < n$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب دارد.

۵) اگر $R(A|b) = R(A)\ ,\ |A| = 0$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب دارد.

۶) اگر $R(A|b) = R(A)\ ,\ |A| \ne 0$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب منحصر به فرد دارد.

## ۳ـ۹ـ ماتریس وارون (معکوس)

هرگاه ماتریس مربع $A$ در رابطه $AB = BA = I$ صدق کند، در اینصورت $B$ را ماتریس معکوس $A$ می‌گویند و به صورت $B = A^{-1}$ نمایش می‌دهند.

### ۳ـ۹ـ۱ـ خواص ماتریس معکوس

۱ـ شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس معکوس داشته باشد این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد به عبارت بهتر تمام سطرها و ستونهای آن برداری مستقل از هم باشند.

۲ـ اگر ماتریس $A$ دارای معکوس باشد این معکوس منحصر به فرد است.

۳ـ اگر $A$ و $B$ دو ماتریس غیرمنفرد همرتبه باشد، معکوس حاصلضرب، برابر معکوس دومی و معکوس اولی می‌باشد.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۴ـ اگر $A$ یک ماتریس غیرمنفرد باشد معکوس ترانسپوز آن برابر ترانسپوز معکوس آن است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

۵ـ اگر $A$ یک ماتریس غیرمنفرد باشد در اینصورت :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

### ۳ـ۹ـ۲ـ قضیه ماتریس معکوس

اگر ماتریس $A$ یک ماتریس مربعی غیرمنفرد باشد $(|A| \neq 0)$ و ماتریس $[A|I]$ توسط عملیات ابتدائی سطری به ماتریس $[I|A^{-1}]$ تبدیل شود در اینصورت $A$ و $A^{-1}$ معکوس یکدیگر می‌باشند.

مثال: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ چه ماتریسی می‌باشد؟

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

### ۳ـ۱۰ـ سیمپلکس اصلاح شده (ماتریسی)

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$L.P : Max\ Z = Cx$$

$$S.t \quad Ax=b$$
$$x \geq 0$$

$A$ یک ماتریس $m\times n$ می‌باشد؛

در اینصورت $X_B$ را متغیرهای اساسی (پایه) جدول سیمپلکس و $X_N$ را متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) در جدول در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم:

$X_B$: متغیرهای اساسی (پایه) $\quad X_B = (x_1,x_2,\dots,x_n) = B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N$

☜ **نکته:** جهت حل مسئله در حالت $Max$ اگر $X_B$ نامعلوم باشد، متغیرهایی را اساسی در نظر می‌گیریم که بیشترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

☜ **نکته:** میزان تغییر متغیرهای پایه $X_B$ نسبت متغیر غیر پایه‌ای $X_j$ به صورت $\dfrac{\partial x_B}{\partial x_j} = -B^{-1}.a_j$ تعریف می‌شود یعنی اگر $x_j$ به اندازه یک واحد افزایش یابد آنوقت $i$ امین متغیر پایه $X_{B_i}$ به اندازه $B^{-1}.a_{ij}$ کاهش می‌یابد.

$X_N$: متغیرهای غیر اساسی (غیرپایه) $\quad X_N = (x_1,\dots,x_p,s_1,s_m,R_1,\dots,R_k)$

☜ **نکته:** جهت حل مسئله در حالت $max$ اگر $X_N$ نامعلوم باشد متغیرهایی را غیراساسی در نظر می‌گیریم که کمترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

$B$: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

$N$: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

$B^{-1}$: ماتریس معکوس که همیشه در زیر متغیرهای پایه اولیه در جدول دلخواه قرار می‌گیرد.

$\overline{N}$: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در جدول دلخواه

$$\overline{N} = B^{-1}.N$$

$C_B$: عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در تابع هدف صورت مسئله

$\overline{C}_B$: عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در سطر تابع هدف، که حتماً صفر است.

$C_N$: عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه تابع هدف صورت مسئله

$\overline{C}_N$: عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر هدف جدول دلخواه

$$\overline{C}_N = C_B.B^{-1}.N - C_N$$

$b$: عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در صورت مسئله

$\bar{b}$: عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در جدول دلخواه

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$

$a_j$: عبارتست از بردار ستونی متغیر $j$ام در محدودیتهای صورت مسئله

$\bar{a}_j$: عبارتست از بردار ستونی متغیر $j$ام در محدودیتهای جدول دلخواه

$$\bar{a}_j = B^{-1}.a_j$$

$c_j$: عبارتست از ضریب متغیر $j$ام در سطر هدف صورت مسئله

$\bar{c}_j$: عبارتست از ضریب متغیر $j$ام در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{c}_j = c_B.B^{-1}.a_j - c_j = z_j - c_j$$

$Z$: تابع هدف:

$$Z = \underbrace{C_B.B^{-1}.b}_{Z_B} - \underbrace{(C_B.B^{-1}.N - C_N)}_{\bar{C}_N}X_N = Z_B - (Z_N - C_N)X_N$$

**نکته:** اگر تابع هدف $Max$ باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها مثبت باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد و اگر تابع هدف $Min$ باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها منفی باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد.

**نکته:** عبارت $\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)$ میزان تغییرات (افزایش یا کاهش) تابع هدف $z$ نسبت به تغییرات (افزایش یا کاهش) متغیر غیرپایه‌ای $x_j$ را نمایش می‌دهد که به هزینه تقلیل یافته متغیر غیرپایه‌ای $x_j$ تعبیر می‌شود.

**نکته:** میزان تغییرات تابع هدف و مقدار متغیرهای پایه در اثر تغییر موجودی منابع از رابطه

$\frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1}$ حاصل می‌شود.

ماتریسها و بردارهای فوق بصورت زیر در جدول سیمپلکس جایگیری می‌نمایند. در این جدول، $I$ ماتریس واحد ناشی از متغیرهای پایه می‌باشد.

| متغیرهای پایه | $z$ | $x_B$ | $x_N$ | $RHS$ |
|---|---|---|---|---|
| سطر هدف $z$ | ۱ | $o$ | $C_B.B^{-1}.N-C_N$ | $C_B.B^{-1}.b$ |
| $x_B$ | $o$ | $I$ | $B^{-1}.N$ | $B^{-1}.b$ |

بنابراین مسئله $LP$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$Max\ \ Z=C_B.X_B+C_N.X_N=(C_N\ ,C_B)\begin{pmatrix}X_N\\X_B\end{pmatrix}$$

$$S.t\qquad BX_B+NX_N=b$$

$$X_B.X_N\geq 0$$

**نکته:** بردار $X_B$ وقتی بردار اساسی (پایه) می‌باشد که ماتریس ضرایب تشکیل دهندهٔ پایه ، معکوس‌پذیر بوده و دترمینان این ماتریس مخالف صفر گردد.

**نکته:** اگر در یکی از تکرارهای جدول سیمپلکس ، $x_j$ متغیر وارده به پایه باشد در اینصورت مقدارتابع هدف بصورت زیر تغییرمی کند.

$$Z_{\text{جدید}}=C_B.B^{-1}.b-(Z_j-C_j)x_j=Z_{\text{قدیم}}-[(Z_j-C_j)\times(\theta)]$$

که در آن $x_j$ از حداقل نسبتها $(\theta)$ بدست می‌آید و $(Z_j-C_j)$ نیز ضریب متغیر وارده به پایه در سطر $z$ می‌باشد.

**نکته:** اگر ماتریس ۲×۲ باشد معکوس ماتریس $B$ را داریم:

$$B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\rightarrow B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

مثال: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید در صورتی‌که پایه بهینه شامل متغیرهای $x_1$ و $x_2$ باشد جدول بهینه راکامل کنید.

$$Max\ Z=2x_1+3x_2+x_3\qquad X_B^*=(x_1,x_2)$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3=3$$

$(x_۱, x_۲, x_۳) \geq ۰$

$X_B = (x_۱, x_۲)$

$X_N = (x_۳, S_۱, R_۲)$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس معکوس $B$ را بدست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۳})(\frac{۴}{۳}) - (\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳})} \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = ۳ \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-۱} b = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$a_۳ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_۳ = B^{-۱} a_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\overline{N} = B^{-۱}.N = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ضریب متغیرهای پایه در سطر صفر جدول دلخواه حتماً صفر است.

$$C_B = [۲, ۳] \rightarrow \overline{C}_B = [۰, ۰]$$

$$C_N = [۱, ۰, -M] \quad R \rightarrow \begin{cases} Max \rightarrow -M \\ Min \rightarrow M \\ ۰ \rightarrow \text{روش دو مرحله} \end{cases}$$

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-۱} . N - C_N = [۲, ۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} - [۱, ۰, -M] = [۳, ۵, ۱+m]$$

$$\overline{C}_j = C_B B^{-۱} . N - C_j \rightarrow \overline{C}_۳ = [۲, ۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} - ۱ = ۳$$

$$Z = C_B . B^{-۱} b - (\overline{C}_N) X_N$$

چون جواب بهینه بوده پس جوابهای غیرپایه صفر خواهند بود. $X_N = ۰$

$$Z = C_B . B^{-۱} b = [۲, ۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۸$$

پس جدول بهینه مسئله فوق بصورت زیر حاصل می‌شود.

| Max | $x_۱$ | $x_۲$ | $x_۳$ | $S_۱$ | $R_۲$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | ۰ | ۰ | ۳ | ۵ | ۱+M | ۸ |
| $x_۱$ | ۱ | ۰ | -۱ | ۴ | -۱ | ۱ |
| $x_۲$ | ۰ | ۱ | ۲ | -۱ | ۱ | ۲ |