

به نام خدای حسابرس

بخش اول

جامعه آماری

جامعه ای که افراد آن حداقل یک صفت مشترک دارند. (کشور ایران)

صفت متغیر

صفتی که از فردی به فرد دیگر منتقل می شود که بر دو نوع زیر می باشد
کمی و کیفی

پیوسته } کلیه اعداد حقیقی (قد ، سن)
کمی }
گسسته } اعداد صحیح (تعداد فرزندان، تعداد اتاق های خانه)

کیفی (جنسیت و دین)

مراحل انجام تحقیق آماری

سرشماری
(۱) جمع آوری اطلاعات
نمونه گیری

پرسش نامه
(۲) جمع آوری داده ها
غیر پرسش نامه

دستی
(۳) استخراج داده ها
ماشینی

معیارهای مرکزی (میانگین، میانه، چارکها و)
(۴) آمار توصیفی*
معیارهای پراکندگی (واریانس، دامنه تغییرات، انحراف معیار، ضریب
تغییرات، چولگی، کشیدگی)

فواصل اطمینان }
آمار استنباطی (تامین نتایج نمونه به جامعه)
آزمونهای فرضی }

*آمار توصیفی (توصیف داده ها)

جدول توزیع فراوانی

جدولی که بر اساس فراوانی مشاهدات تهیه می شود.

فراوانی ساده یا مطلق (f_i)

فراوانی نسبی (f_c) فراوانی ساده ÷ کل
$$f_c = \frac{f_i}{n}$$

فراوانی تجمعی (F_i) فراوانی ساده هر مشاهده + فراوانی مشاهده قبلی

فراوانی تجمعی نسبی (F_c) فراوانی تجمعی ÷ تعداد کل مشاهدات
$$F_c = \frac{F_i}{n}$$

درصد فراوانی نسبی $\%F_c \times 100$ درصد فراوانی تجمعی نسبی $\%F_c \times 100$

• مثال

نمره شش دانش آموز در جدول زیر آمده است. مطلوبست جدول توزیع فراوانی و محاسبه کلیه فراوانی ها

نمره	کد دانش آموزان
12	1
18	2
17	3
18	4
12	5
10	6

• حل

i	fi	Fi	fc	Fc	%fc×100	%Fc×100
10	1	1	1.6	1.6		
12	2	3	2.6	2.6		
17	1	4	1.6	4.6		
18	2	6	2.6	6.6		
57	6		1		100	100

نکات

(۱) همیشه جمع ستون فراوانی ساده برابر تعداد کل مشاهدات است.

(۲) جمع ستون فراوانی نسبی برابر یک است.

(۳) آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی برابر تعداد کل مشاهدات است.

(۴) آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی نسبی برابر یک است.

(۵) جمع ستون درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است.

(۶) آخرین عدد ستون درصد فراوانی تجمعی نسبی برابر ۱۰۰ است.

جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

روش طبقه بندی فقط برای داده هایی که ماهیت پیوسته دارند انجام میشود.

معمولا کمترین تعداد طبقه را ۵ و بیشترین آن را ۲۰ می گیرند.

۱) تعیین تعداد طبقات

$$K = 1 + \frac{3}{3} \log n$$

فرمول استورگس

تعداد طبقات

تعداد مشاهدات

* اگر جواب مثلا ۳/۲۳ در آمد حتما باید آنرا رو به بالا رند کنیم که می شود ۴

۲) تعیین دامنه تغییرات

$$D = X_{\max} - X_{\min}$$

$$X_{\min} = S - \text{کمترین داده}$$

$$X_{\max} = S + \text{بیشترین داده}$$

$$S = \frac{\text{واحد گرد شده}}{2}$$

$$2$$

۳) تعیین عرض (طول، فاصله) طبقه

$$W = \frac{D}{K}$$

عرض طبقه

اگر اعشار نداشته باشد، به بالا رند می کنیم.

• مثال

وزن های ۴۰ قالب کره که نزدیک ترین عدد صحیح گرد شده اند به قرار زیر است:

الف) یک جدول فراوانی بر اساس طبقه بندی مشاهدات انجام دهید.

ب) چند درصد قالب های کره دارای وزنی بین ۳۵/۵-۳۰/۵ می باشد.

ج) چند درصد قالب های کره کمتر از ۳۰/۵ می باشد.

ح) مطلوبست محاسبه پارمترهای مرکزی (میانگین، میانه، مد، چارک)

د) مطلوبست محاسبه پارمترهای پراکندگی (واریانس، انحراف معیار، متوسط انحراف)

۵۲،۲۵،۲۴،۴۷،۳۶،۵۱،۳۴،۳۸،۴۶،۳۳،۴۷،۳۶،۳۸،۵۰،۴۷،۳۴،۴۱،۴۰،۴۲،۴۰،۲۶،۲۹،۳۰

۳۲،۳۰،۳۵،۳۷،۳۷،۴۱،۲۱،۳۱،۳۰،۲۶،۳۵،۴۵،۲۳،۴۳،۳۱،۳۴،۴۳

• حل

۱) تعیین تعداد طبقه

$$K = 1 + \frac{3}{3} \log 40 = 1 + \frac{3}{3} \times 1.6 = 6.0 \sim 7$$

۲) تعیین دامنه تغییرات

$$S = \frac{1}{2}$$

$$X_{\max} = 52 + 0.5 = 52.5$$

$$X_{\min} = 21 - 0.5 = 20.5$$

$$d = 52.5 - 20.5 = 32$$

۳) تعیین عرض طبقه

$$W = \frac{d}{K} = \frac{32}{7} = 4.5 \sim 5$$

	fi
20/5-25/5	3
25/5-30/5	6
30/5-35/5	10
35/5-40/5	8
40/5-45/5	6
45/5-50/5	5
50/5-55/5	2
	40

$$\text{ب) } \frac{10}{40} \times 100 = 25\%$$

$$\frac{19}{40}$$

← جمع ۳ عدد اول در ستون دوم

$$\text{ج) } \frac{19}{40} \times 100 = 47.5\%$$

• مثال

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲، ۲۷/۳، ۲۰/۶، ۲۵/۴، ۳۶/۹، ۲۸/۳، ۳۳/۷، ۲۹/۵، ۳۴/۱، ۲۴/۶، ۲۷/۱، ۲۹/۴، ۲۱/۸، ۲۷/۵

۲۸/۹، ۲۵/۲، ۲۱/۹، ۳۷/۵، ۹/۶، ۲۴/۸، ۳۲/۷، ۲۹/۳، ۳۳/۵، ۲۲/۲، ۲۸/۱، ۲۹/۵، ۱۷/۳، ۲۹/۶، ۲۲/۷

۲۵/۴، ۳۰/۲، ۲۹/۸، ۳۳/۳، ۳۴/۵، ۲۳/۹، ۳۶/۸، ۲۸/۷، ۳۳/۲، ۲۳/۶، ۲۳/۲، ۳۴/۸، ۳۷

۳۸/۴، ۲۶/۴، ۲۳/۵، ۱۸/۶، ۲۸/۳، ۲۴

مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

• حل

(۱) تعیین تعداد طبقه

$$K = 1 + \frac{3}{3} \log 50 = 1 + \frac{3}{3} \times 1.69 = 6.69 \sim 7$$

(۲) تعیین دامنه تغییرات

$$S = \frac{0/1}{2}$$

$$X_{\min} = 17/3 - 0.5 = 16.5$$

$$X_{\max} = 38/4 + 0.5 = 38.5$$

$$d = 38.5 - 16.5 = 22$$

۳) تعیین عرض طبقه

$$W = \frac{D}{K} = \frac{21/2}{7} = 3/0.2 \sim 3/1$$

چون ۲ صدم است و تبدیل به دهم شده ولی اگر ۳/۲ بود می شد ۴

	fi
17/25-20/35	2
20/35-23/45	7
23/45-26/55	10
26/55-29/65	17
29/65-32/75	3
32/75-35/85	6
35/85-38/95	5
	50

• تمرین

داده های زیر قطر ۵۰ بلبرینگ ساخته شده توسط یک کارخانه بر حسب اینچ می باشد

0/731	0/738	0/743	0/740	0/736
0/736	0/728	0/737	0/736	0/735
0/733	0/745	0/736	0/742	0/740
0/739	0/733	0/730	0/732	0/739
0/741	0/735	0/732	0/745	0/727
0/725	0/733	0/738	0/734	0/732
0/742	0/725	0/728	0/736	0/737
0/732	0/735	0/744	0/729	0/739
0/727	0/736	0/734	0/735	0/736
0/734	0/730	0/728	0/724	0/741

الف) مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

ب) مطلوبست محاسبه پارامترهای مرکزی

ج) مطلوبست محاسبه پارامترهای پراکندگی

معیارهای مرکزی

۱) میانگین

اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد (جدول توزیع فراوانی نداشته باشیم)

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

اگر جدول توزیع فراوانی داشته باشیم (چه طبقه بندی باشد چه نباشد)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$$

* در صورتیکه طبقه بندی نداشته باشیم X_i خود مشاهده است.

* در صورتیکه طبقه بندی داشته باشیم X_i نشان دسته است، یعنی

حد بالا + حد پایین $\div 2$



• مثال

مطلوبست میانگین نمره ها

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{87}{6} = 14.5 \quad \text{میانگین نمره ها}$$

X_i	f_i	$f_i x_i$
10	1	10
12	2	24
17	1	17
18	2	36
	6	87

صورت مثال ها در جلسات قبل مطرح شده است.

$$\bar{X} = \frac{\sum xifi}{n} = \frac{1475}{40} = 36.875 \approx 36.9$$

$$X_i = \frac{20/5 + 25/5}{2} = 23$$

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

۲) میانه

الف) اگر طبقه بندی نداشته باشیم

تعداد مشاهدات

$$m = \frac{n+1}{2}$$

موقعیت داده میانه ها

داده m ام میانه است.

ب) اگر طبقه بندی داشته باشیم (*ابتدا طبقه میانه را پیدا کن)

$$med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

L حد پایین طبقه میانه

$\frac{n}{2}$ تعداد مشاهدات

f_i فراوانی بازده طبقه میانه

F_{i-1} فراوانی تجمعی ماقبل میانه

I عرض طبقه

*میانۀ نقطه ای است که نصف مشاهدات سمت راست آن و نصف دیگر مشاهدات سمت چپ آن قرار گیرد.

• مثال برای الف

میانۀ داده های زیر را بدست آورید.

مرتب  ۵ ۸ ۰ ۲ ۳ ۱۲
۰ ۲ ۳ ۵ ۸ ۱۲

$$m = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

موقعیت میانۀ

$$\frac{3+5}{2} = 4 \quad \leftarrow$$

داده شماره ۳/۵ میانۀ است

• مثال برای ب

	f_i	x_i	$x_i f_i$	F_i
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

$$med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$35/5 + \frac{\frac{40}{2} - 19}{8} \times 5 = 36/125$$

میانۀ

(۳) چارکها

الف) اگر داده ها طبقه بندی نباشد.

$$Q_1 \text{ (موقعیت } Q_1 \text{ (صدک ۲۵م))} = \frac{1}{4} \times N$$

N = تعداد کل مشاهدات

$$Q_3 \text{ (موقعیت } Q_3 \text{ (صدک ۷۵م))} = \frac{3}{4} \times N$$

ب) اگر داده ها طبقه بندی باشد.

ابتدا طبقه چارک اول و طبقه چارک سوم را پیدا می کنیم.

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$\frac{N}{4} \text{ تعداد کل مشاهدات} \quad F_{i-1} \text{ فراوانی طبقه ما قبل } Q_1$$

L حد پایین طبقه چارک اول

$$I \text{ عرض طبقه} \quad f_i \text{ فراوانی ساده طبقه } Q_1$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$F_{i-1} \text{ فراوانی طبقه ما قبل } Q_3 \quad f_i \text{ فراوانی ساده طبقه } Q_3$$

$$L \text{ حد پایین طبقه چارک سوم} \quad I \text{ عرض طبقه}$$

• مثال

طبقه Q_1

	f_i	x_i	$x_i f_i$	F_i
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه Q_3

$$\frac{3}{4} \times 40 = 30$$

سی امین داده کدام طبقه است؟

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$Q_3 = 40/5 + \frac{\frac{3}{4} \times 40 - 27}{6} \times 5 = 43$$

$$\frac{1}{4} \times 40 = 10$$

دهمین داده کدام طبقه است؟

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$Q_1 = 30/5 + \frac{\frac{1}{4} \times 40 - 9}{10} \times 5 = 31$$

٤) صدکها

الف) اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد.

$$P \text{ موقعیت صدک } m \times p = n$$

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد.

$$\text{صدک } p = L + \frac{Np - F_i - 1}{f_i} \times I$$

N تعداد کل مشاهدات

I عرض طبقه

f_i فراوانی ساده طبقه صدک

F_{i-1} تجمعی ماقبل صدک

L حد پایین طبقه صدک

• مثال

طبقه صدک بیستم

	f_i	x_i	$x_i f_i$	F_i
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه صدک هشتادم

محاسبه صدک بیستم و هشتادم؟

• حل

$$\text{صدک بیستم} = L + \frac{N \times 0/2 - F_i - 1}{f_i} \times I$$

$$0/2 \times 40 = 8$$

داده هشتم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدک بیستم} = 25/5 + \frac{40 \times 0/2 - 3}{6} \times 5 = 29/5$$

$$\text{صدك هشتادم} = L + \frac{N \times 0/8 - F_i - 1}{f_i} \times I$$

$$0/8 \times 40 = 32$$

داده سی و دوم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدك هشتادم} = 40/5 + \frac{40 \times 0/8 - 27}{6} \times 5 = 44/6$$

(۵)مد(نما)

الف) اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد

در جدول توزیع فراوانی داده ای که دارای بیشترین فراوانی است مد می باشد.

www.pnu-m-s.com

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد

ابتدا طبقه مد را معلوم می کنیم.

$$مد = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

I فاصله طبقه d_1 اختلاف فراوانی طبقه مد از طبقه قبلی

$d_1 + d_2$ اختلاف فراوانی طبقه مد با طبقه بعدی L حد پایین طبقه مد

www.pnu-m-s.com

• مثال

طبقه مد

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

• حل

$$مد = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

$$مد = 30/5 + \frac{4}{4+2} \times 5 = 33/8$$

۶) میانگین هندسی (GM)

$$G_i M = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} x_k^{f_k}}$$

n تعداد کل مشاهدات

• مثال

رشد سالانه اشتغال در جامعه ای بین سال های ۶۷-۵۹ به صورت زیر است:

۳،۳/۱،۳/۲،۳/۵،۳/۶،۳/۸،۳/۸،۳/۹،۴

• حل

$$GM = \sqrt[9]{3 \times 3/1 \times 3/2 \times 3/5 \times 3/6 \times 3/8^2 \times 3/9 \times 4} = x^{\frac{1}{9}} = 3/53$$

(۷) میانگین همساز (هارمونیک)

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}}$$

• مثال

تعداد ۵ نفر از کارکنان یک موسسه کاری را به ترتیب در مدت ۶، ۱۰، ۸، ۱۲، ۱۶ روز تمام می کنند. متوسط تعداد روزهایی که این کار تمام شود چقدر است (میانگین هارمونیک)

• حل

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}}$$

$$\overline{X}_H = \frac{5}{\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}} = 9/3$$

۸) میانگین پیراسته

برای محاسبه این میانگین ابتدا چارک اول و چارک سوم را بدست می آوریم؛ سپس داده های کمتر از چارک اول و داده های بیشتر از چارک سوم را حذف می کنیم و میانگین داده های باقیمانده را بدست می آوریم.

۹) میانگین ویزوری

ابتدا چارک اول و سوم را بدست می آوریم. به جای داده های کمتر از چارک اول ، خود چارک اول و به جای داده های بیشتر از چارک سوم ، خود چارک سوم را قرار می دهیم؛ سپس میانگین کل اعداد را بدست می آوریم.

• مثال

۹ کارگر صنعتی تحت آزمون قرار گرفته اند و اندازه های زیر بدست آمده:

۱۳۶/۷، ۱۰۵/۸، ۱۳۲/۱، ۱۲۵، ۱۵۲/۴، ۱۱۶/۴، ۹۳/۹، ۱۰۶/۵، ۱۲۸/۳

مطلوبست محاسبه میانگین پیراسته و ویزوری؟

• حل

مرتب می کنیم

۹۳/۹، ۱۰۵/۸، ۱۱۶/۴، ۱۳۲/۱، ۱۲۵، ۱۲۸/۳، ۱۳۲/۱، ۱۳۶/۷، ۱۵۲/۴

$$۰/۲۵ \times ۹ = ۲/۲۵ \sim ۳ \quad Q_1$$

$$۰/۷۵ \times ۹ = ۶/۷۵ \sim ۷ \quad Q_3$$

$$\text{میانگین پیراسته} = \frac{106/5 + 116/5 + 125 + 128/3 + 132/1}{5} = 121/66$$

$$\text{میانگین ویزوری} = \frac{106/5 + 106/5 + 106/5 + 116/4 + 125 + 128/3 + 132/1 + 132/1 + 132/1}{9} = 120/61$$

معیارهای پراگندگی

(۱) دامنه تغییرات

$$D = X_{\max} - X_{\min}$$

(۲) انحراف متوسط

$$AD = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |X_i - \bar{X}|}{n}$$

(۳) واریانس

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2}{n} - (\bar{X})^2$$



توصیه استاد

(۴) انحراف معیار

جذر واریانس

- * در صورتی که داده ها طبقه بندی نشده باشد X_i خود مشاهده است.
- * در صورتی که داده ها طبقه بندی شده باشد X_i نماینده هر طبقه است.

• مثال

f_i	x_i	$x_i f_i$	F_i	$f_i x_i - \bar{x} $	$x_i^2 f_i$
3	23	69	3	$3 \times 23 - 36/9 = 41/7$	$(23^2) \times 3 = 1587$
6	28	168	9	$6 \times 28 - 36/9 = 53/4$	4704
10	33	330	19	39	1089
8	28	304	27	8	11552
6	43	258	33	36/6	11094
5	48	240	38	55/5	11520
2	53	106	40	32/2	5618
40		1475		267/2	56965

• حل

$$AD = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |X_i - \bar{X}|}{n} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{267/2}{40} = 6/8$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2}{n} - (\bar{X})^2 \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = \frac{56965}{40} - (36/9)^2 = 1424/25 - 136/61 = 62/51$$

$$\delta = \sqrt{62/51} \Rightarrow \delta = 7/9$$

$$\bar{X} = 36/9$$

(۵) پراکندگی نسبی (ضریب تغییرات)

برای مقایسه دو جامعه ای که هم میانگین و هم انحراف معیارشان متفاوتند از ضریب تغییرات استفاده می کنند.

$$c.v = \frac{\delta}{\bar{X}}$$

• مثال

یک تولید کننده لامپ تصویر ۲ نوع لامپ تولید می کند. نوع A و نوع B ; عمر متوسط A برابر ۱۴۹۵ و انحراف معیار آن برابر ۲۸۰ ساعت است. عمر متوسط B برابر ۱۸۷۵ و انحراف معیار آن برابر ۳۱۰ ساعت است. تولید کننده در تولید کدام یک از این دو لامپ موفق تر بوده (محاسبه ضریب تغییرات)

• حل

$$c.v_A = \frac{280}{1495} = 0.187$$

$$c.v_B = \frac{\delta_B}{X_B} = \frac{320}{1875} = 0.165$$

$$\%C.V_A = 0.187 \times 100 = 18.7\%$$

$$\%C.V_B = 0.165 \times 100 = 16.5\%$$

*تولید کننده در تولید لامپ B موفق تر بوده است.

۶) کشیدگی

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{\delta^4}$$

* کشیدگی توزیع نرمال ۳ است.

۷) چولگی

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{\delta^3}$$

$$skp = \frac{\bar{X} - \text{مد}}{\delta} \Rightarrow \text{پیرسون}$$

$\alpha = 0$ توزیع نرمال؛ چولگی ندارد

$|\alpha| < 0.1$ توزیع به طور تقریبی نرمال؛ قابل چشم پوشی؛ چولگی کم دارد

$0.1 < \alpha < 0.5$ توزیع چولگی دارد

$|\alpha| > 0.5$ توزیع شدیداً چولگی دارد

• مثال

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲، ۲۷/۳، ۲۰/۶، ۲۵/۴، ۳۶/۹، ۲۸/۳، ۳۳/۷، ۲۹/۵، ۳۴/۱، ۲۴/۶، ۲۷/۱، ۲۹/۴، ۲۱/۸، ۲۷/۵
 ۲۸/۹، ۲۵/۲، ۲۱/۹، ۳۷/۵، ۹/۶، ۲۴/۸، ۳۲/۷، ۲۹/۳، ۳۳/۵، ۲۲/۲، ۲۸/۱، ۲۹/۵، ۱۷/۳، ۲۹/۶، ۲۲/۷
 ۲۵/۴، ۳۰/۲، ۲۹/۲، ۲۶/۸، ۳۳/۳، ۳۴/۵، ۲۳/۹، ۳۶/۸، ۲۸/۷، ۳۳/۲، ۲۳/۶، ۲۳/۲، ۲۹/۲، ۳۴/۸، ۳۷
 ۳۸/۴، ۲۶/۴، ۲۳/۵، ۱۸/۶، ۲۸/۳، ۲۴

الف) محاسبه پارامترهای مرکزی ب) محاسبه پارامترهای پراکندگی

• حل

x	fi	Fi	xi fi	xi	fi xi - x̄	fi x²i	(Xi - x̄³)
17/25-20/35	2	2	37/6	18/8	18/6	706/8	804/357-
20/35-23/45	7	9	153/3	21/9	43/4	3357/2	238/328-
23/45-26/55	10	19	25	25	31	6250	29/79-
26/55-29/65	17	36	477/7	28/1	0	13423/3	0
29/65-32/75	3	39	93/6	31/2	9/3	2920/3	29/7
32/75-35/85	6	45	205/8	34/3	37/2	7058/9	238/32
35/85-38/95	5	50	187	37/4	46/5	6993/8	804/3
	50		1405		186	40710/5	0

$$۱) \text{ میانگین } x_i = \frac{17/25 + 20/35}{2} = 18/8, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{1405}{5} = 28/1$$

$$۲) \text{ میانه } med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I, \quad med = 26/55 + \frac{\frac{50}{2} - 19}{17} \times 3/1 = 27/64$$

$$۳) \text{ چارک اول } Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I, \quad Q_1 = 23/45 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{10} \times 3/1 = 24/53$$

چارک اول $\Rightarrow$

$$\frac{50}{4} = 12.5$$

$$4) \text{ چارک سوم } Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I, \quad Q_3 = 29/65 + \frac{\frac{3}{4} \times 50 - 36}{3i} \times 3/1 = 31/2$$

چارک سوم $\Rightarrow$

$$\frac{3}{4} \times 50 = 13.75$$

$$5) \text{ صدک } p = L + \frac{Np - F_i - 1}{f_i} \times I, \quad n \times p = 0.31 \times 50 = 15.5$$

$$\text{صدک } 31 = 23/45 + \frac{15.5 - 9}{10} \times 3/1 = 25/46$$

$$6) \text{ مد } = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I, \quad 26/55 + \frac{17 - 10}{7 + 17 - 3} \times 3/1 = 27/58$$

$$7) \text{ متوسط انحرافات } AD = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{186}{50}$$

$$8) \text{ واریانس } \delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2}{n} - (\bar{X})^2, \quad \delta^2 = \frac{40710/5}{50} - (28/1)^2 = 24/6$$

$$9) \text{ انحراف معیار } \delta = \sqrt{24/6} = 4/96$$

$$\text{۱۰) چولگی پیرسون } skp = \frac{\overline{X} - \text{مد}}{\delta}, \quad skp = \frac{28/1 - 27/58}{4/96} = 0.104 \approx 0.1$$

مقدار چولگی کم است.

$$\text{۱۱) ضریب تغییرات } c.v = \frac{\delta}{\overline{X}}, \quad c.v = \frac{4/96}{28/1} = 0.17$$

$$\text{درصد ضریب تغییرات } 0.17 \times 100 = 17\%$$

$$\text{۱۲) چولگی عادی } \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{\delta^3}, \quad \alpha_3 = \frac{0}{50 \times (4/96)^3} = 0$$

توزیع نرمال؛ چولگی ندارد

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

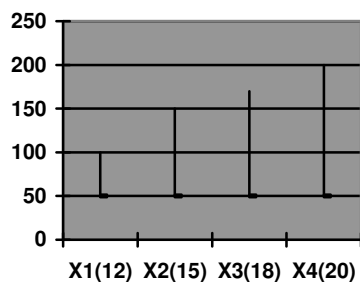
www.m-sanati.ir

نمودارهای آماری

۱) میله ای

محور X (افقی)، محور مشاهدات (یا خود مشاهده یا نشان دسته) و محور Y (عمودی)، محور فراوانی است.

x_i	f_i
12	2
15	1
18	2
20	1

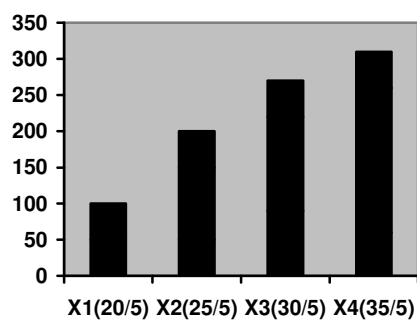


۲) مستطیلی (هیستوگرام)

این نمودار فقط برای داده های طبقه بندی شده به کار می رود.

محور X محور مشاهدات است (حدود پایین طبقات را روی محور X قرار می دهیم)

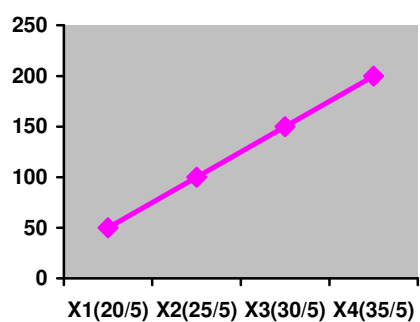
x_i	f_i
20/5-25/5	2
25/5-30/5	3



۳) چند ضلعی (پلی گون)

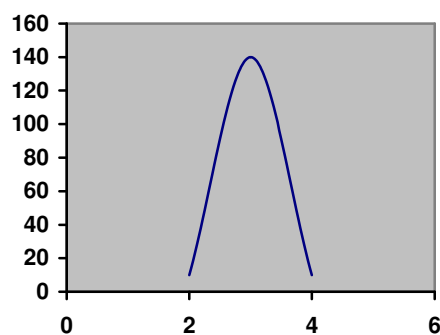
از روی نمودار میله ای و مستطیلی ساخته می شود.

کافی است در نمودار میله ای سر نمودار را به هم وصل کنیم و در نمودار مستطیلی وسط اضلاع را به هم دیگر وصل کنیم.



۴) منحنی فراوانی

در صورتی که تعداد مشاهدات زیاد باشد. تعداد مستطیل ها زیاد می شود و به دنبال آن نمودار پلی گون هم از نقاط شکسته زیادی تشکیل خواهد شد که ظاهر شکل منحنی مانند است.



۵) دایره ای

این نمودار بیشتر برای داده های کیفی به کار می رود.
به این ترتیب که نسبت هر مشاهده کیفی را روی دایره نشان مدهد.

$$d_i = \frac{f_i}{n} \times 360$$

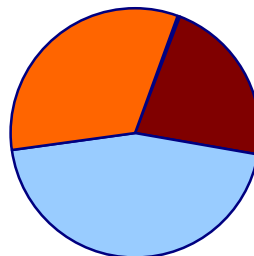
• مثال

در کارخانه ای کالاها بر اساس کیفیت توزیع شده اند.

مطلوبست نمودار دایره ای

* صورت سوال

کیفیت	f_i	f_c	d_i (درجه)
بد	10	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \times 360 = 45$
متوسط	30	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} \times 360 = 135$
خوب	40	$1 \div 2$	$1 \div 2 \times 360 = 180$
	80		



نارنجی (متوسط) قرمز (بد) آبی (خوب)

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

احتمال

آزمایش جمع آوری داده هایی که پیشامد های آن متفاوتند.

فضای نمونه (S) مجموعه ای است از تمام حالت های ممکن یک آزمایش.

پیشامد ساده (e) تک تک اعضای فضای نمونه را پیشامد ساده می گویند.

پیشامد مرکب (E) مجموعه ای است از تعدادی پیشامد ساده، بزرگترین پیشامد مرکب فضای نمونه است.

$$S = \{\text{ش، خ}\} \quad \text{آزمایش پرتاب یک سکه}$$

$$E = \{\text{خ}\}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{آزمایش پرتاب یک تاس}$$

$$E = \{1, 3, 5\}$$

$$S = \{(\text{ش، ش}) (\text{ش، خ}) (\text{خ، ش}) (\text{خ، خ})\} \quad \text{آزمایش پرتاب دو سکه}$$

$$E = \{(\text{ش، ش}) (\text{خ، خ})\}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{آزمایش پرتاب سه سکه} \\ \text{(خ ش ش) (خ ش خ) (ش خ خ) (خ خ ش) (خ خ خ) (ش ش ش) (ش ش خ) (ش ش ش)} \end{array} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \text{(خ ش ش) (خ ش ش)} \end{array} \right\}$$

تعداد اعضای فضای نمونه N_s

روش اول

$$\left. \begin{array}{l} N_s = 2^n \quad \text{در صورتیکه هر آزمایش دو حالتی باشد.} \\ N_s = 3^n \quad \text{در صورتیکه هر آزمایش سه حالتی باشد.} \\ N_s = m^n \quad \text{در صورتیکه هر آزمایش } m \text{ حالتی باشد.} \end{array} \right\} N_s \text{ (تعداد اعضای فضای نمونه)}$$

روش دوم

قاعده ضرب: هرگاه چندین آزمایش پی در پی انجام شود، به طوریکه آزمایش اول به

n_1 طریق، آزمایش دوم به n_2 طریق در این صورت فضای نمونه برابر با صورت حاصل ضرب

$$N_s = n_1 \times n_2 \times \dots$$

• مثال

در آزمایش پرتاب یک سکه و تاس تعداد فضای نمونه و خود فضای نمونه را بنویسید.

$$\left\{ (خ\ ۱) (خ\ ۲) (خ\ ۳) (خ\ ۴) (خ\ ۵) (ش\ ۱) (ش\ ۲) (ش\ ۳) (ش\ ۴) (ش\ ۵) (ش\ ۶) \right\}$$

محاسبه احتمال در حل مثال ها

۱) حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی باشد.

e

در آزمایش ----- احتمال ----- ؟

$$E = \left\{ \text{-----} \right\}$$

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s}$$

N_e تعداد اعضای پیشامد مرکب E ، تعداد حالات مساعد

N_s تعداد اعضای فضای نمونه ، تعداد حالات ممکن

• مثال

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد روی وجه حداقل ۴ باشد.

$$E = \left\{ ۴, ۵, ۶ \right\}$$

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

• مثال

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه وجه فرد باشد.

$$E = \{1, 3, 5\}$$

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

• مثال

در آزمایش پرتاب ۲ سکه

الف) احتمال اینکه هر دو سکه یک جور بیاید ب) احتمال اینکه سکه اول همیشه شیر بیاید

$$N_s = 2^2 = 4 \quad P(E) = \frac{N_e}{N_s} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \left\{ (خ\ خ) (ش\ ش) \right\} \text{ الف)}$$

$$P(E) = \frac{N_e}{N_s} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \left\{ (خ\ ش) (ش\ ش) \right\} \text{ ب)}$$

۲) حالیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی نباشد.

e

در آزمایش ----- احتمال ----- ؟

$$E = \{e_1, e_2, \dots\}$$

$$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + \dots$$

www.pnu-m-s.com

• مثال

در خانواده‌های ۳ فرزندی در صورتیکه شانس دختر بودن هر فرزند $0/7$ باشد.

الف) احتمال اینکه هر سه فرزند یک جنس باشند چقدر است؟

$$E \left\{ (پ پ پ) (د د د) \right\}$$

$$P(E) = P(د د د) + P(پ پ پ) = 0/7 \times 0/7 \times 0/7 + 0/3 \times 0/3 \times 0/3 = 0/37$$

ب) احتمال اینکه حداقل ۲ پسر داشته باشیم؟

$$E \left\{ (پ پ پ) (پ پ د) (پ د پ) (د پ پ) (د پ پ) (پ پ د) \right\}$$

$$P_E = P(پ پ پ) + P(پ پ د) + P(پ د پ) + P(د پ پ)$$

$$0/3 \times 0/3 \times 0/7 + 0/7 \times 0/3 \times 0/3 + 0/3 \times 0/7 \times 0/3 + 0/7 \times 0/3 \times 0/3 = 0/21$$

ج) احتمال آنکه حداکثر یک پسر داشته باشیم؟

$$E \left\{ (د د د) (پ د د) (د پ د) (د د پ) \right\}$$

$$P_E = P(د د د) + P(پ د د) + P(د پ د) + P(د د پ)$$

$$0/3 \times 0/7 \times 0/7 + 0/7 \times 0/3 \times 0/7 + 0/7 \times 0/7 \times 0/3 + 0/7 \times 0/7 \times 0/3$$

• مثال

دو تاس را پرتاب می کنیم در صورتیکه شانس آمدن هر وجه فرد ۲ برابر وجه زوج باشد.

(الف) احتمال اینکه هر دو تاس یک جور بیا یند.

(ب) احتمال اینکه تاس اول عدد یک و تاس دوم بیشتر از ۴ باشد.

(ج) احتمال اینکه جمع اعداد روی دو تاس حداکثر ۴ باشد.

۱،۲،۳،۴،۵،۶

$$2a+a+2a+a+2a+a=1$$

$$9a=1 \quad a=\frac{1}{9}$$

$$P(\text{هر وجه فرد}) = \frac{2}{9} \quad P(\text{هر وجه زوج}) = \frac{1}{9}$$

(الف)

$$E \left\{ (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) \right\}$$

$$P_E = P(1,1) + P(2,2) + P(3,3) + P(4,4) + P(5,5) + P(6,6)$$

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{15}{81}$$

(ب)

$$E\left\{(۱,۵) (۱,۶)\right\}$$

$$P_E = P(۱,۵) + P(۱,۶) \quad \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{6}{81}$$

(ج)

$$E\left\{(۱,۳) (۳,۱) (۲,۲) (۲,۱) (۱,۲) (۱,۱)\right\}$$

$$P_E = P(۱,۳) + P(۳,۱) + P(۲,۲) + P(۲,۱) + P(۱,۲) + P(۱,۱)$$

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{17}{81}$$

اجتماع و اشتراك پيشامدهای مرکب

• مثال

در خانواده ای ۳ فرزندی اگر پيشامد G کمتر از ۲ دختر و H همه از یک جنس باشند.
احتمال $G \cup H$ و $G \cap H$

• حل

$$G\left\{(پ پ پ) (پ د پ) (د پ پ) (پ پ د)\right\}$$

$$H \left\{ (د د د) (پ پ پ) \right\}$$

$$G \cup H \left\{ (د پ پ) (پ پ پ) (پ د پ) (پ پ پ) (د د د) \right\}$$

$$P(G \cup H) = \frac{N_{G \cup H}}{N_s} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

$$G \cap H \left\{ (پ پ پ) \right\}$$

$$P(G \cap H) = \frac{N_{G \cap H}}{N_s} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

قانون جمع احتمالات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قانون متمم

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

دو پیشامد ناسازگار

A و B ناسازگارند اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد.

در این صورت $P(A \cap B) = 0$ و بنابر این

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

• مثال

۵ نفر در کنکور شرکت کنند، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها قبول شود چقدر است؟

• حل

$$\bar{E} = \left\{ (rrrrr) \right\}$$

$$P(\bar{E}) = \frac{N_E}{N_s} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$P(E) + \frac{1}{32} = 1$$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

اگر می خواست حداقل رو پیدا کنه خیلی طول می کشید. بنابر این حداکثر رو پیدا کرد که در اون همه کوچکتر از یک می شد. که همه رد بودند و $\bar{E}$ متمم E است.

• مثال

در دانشکده پسران به نسبت‌های زیر در رشته‌های ورزشی مختلف فعالیت دارند.

فوتبال ۶۰٪ از تمام پسران ، بسکتبال ۵۰٪ ، فوتبال و بسکتبال هر دو ۳۰٪

اگر پسری به تصادف انتخاب شود.

الف) فوتبال یا بسکتبال بازی کند (احتمال اینکه حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد)

ب) احتمال اینکه هیچ ورزشی نکند.

• حل

$$p(f) = 0.6 \leftarrow$$

فوتبال (f) ۶۰٪ از تمام پسران

$$p(b) = 0.5 \leftarrow$$

بسکتبال (b) ۵۰٪ از تمام پسران

$$p(f \cap b) = 0.3 \leftarrow$$

فوتبال و بسکتبال ($f \cap b$) از تمام پسران

$$p(f \cup b) = ? \quad \text{الف)}$$

$$p(f \cup b) = p(f) + p(b) - p(f \cap b)$$

$$p(f \cup b) = 0.6 + 0.5 - 0.3$$

$$p(f \cup b) = 0.8$$

ب) $p(E)=?$

$\bar{E}$ ورزش کند (حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد) $(f \cup b)$

$$P(f \cup b) = P(\bar{E})$$

$$P(\bar{E}) = 0/8$$

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$P(E) + 0/8 = 1$$

$$P(E) = 1 - 0/8 = P(E) = 0/8$$

www.pnu-m-s.com

احتمال شرطی

در آزمایش _____ پیشامد _____ رخ داده احتمال _____؟

B A

$$P(B:A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

• مثال

در خانواده ای که سه فرزند دارد فرض کنید معلوم شده است تعداد دختران کمتر از ۲ تا است.

احتمال اینکه هر سه فرزند از یک جنس باشند چقدر است؟

(الف) شانس پسر بودن ۰/۵ (ب) شانس دختر بودن ۰/۴

• حل

$$P(E:H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

(الف) $P(پ) = ۰/۵$ $P(د) = ۰/۵$

$$H = \left\{ (پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د) \right\}$$

$$P(H) = \frac{N_H}{N_S} = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$E = \left\{ (پ پ پ) (د د د) \right\}$$

$$E \cap H = \left\{ (پ پ پ) \right\}$$

$$P(E \cap H) = \frac{N_{E \cap H}}{N_S} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(E:H) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(d) = 1/4 \quad P(p) = 1/6 \quad (b)$$

$$H = \left\{ (d, p, p), (p, d, p), (p, p, d), (p, p, p) \right\}$$

$$P(H) = \frac{N_H}{N_S} = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$E = \left\{ (d, d, d), (p, p, p) \right\}$$

$$E \cap H = \left\{ (p, p, p) \right\}$$

$$P(H) = P(d, p, p) + P(p, d, p) + P(p, p, d) + P(p, p, p)$$

$$= 1/4 \times 1/6 \times 1/6 + 1/6 \times 1/4 \times 1/6 + 1/6 \times 1/6 \times 1/4 + 1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/36$$

$$P(E \cap H) = P(p, p, p)$$

$$P(E:H) = \frac{1/216}{1/36} = 1/6$$

$$P(E \cap H) = 1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/216$$

• مثال

در آزمون وکلا از بین ۵ نفر اعلام کردند که حداکثر یک نفر قبول می شود؛ احتمال اینکه همه در این آزمون رد شوند چقدر است؟

• حل

$$A = \{ (ر ر ر ر ر) \}$$

$$B = \{ (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) (ر ر ر ر ر) \}$$

$$A \cap B = \{ (ر ر ر ر ر) \}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{6}{32}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(B) = \frac{6}{32}$$

فرمول کاربرد احتمال شرطی

$$P(A:B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A:B)$$

$$P(B:A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A) \times P(B:A)$$

در صورتیکه دو پیشامد A و B از هم مستقل نباشند به عبارتی به یکدیگر وابسته باشند احتمال اشتراک آنها را از یکی از دو فرمول بالا به دست می آید.

www.pnu-m-s.com

• مثال

سه لامپ معیوب به طور غیر عمدی با ۶ لامپ سالم مخلوط شده اند. اگر برای چراغ سقف ۲ لامپ به تصادف انتخاب شود/

الف) احتمال اینکه هر دو سالم باشد؟

ب) احتمال اینکه اولی سالم و دومی معیوب باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه یکی معیوب و یکی سالم باشد چقدر است؟

• حل

۶ لامپ سالم، ۳ لامپ معیوب = ۹ لامپ

الف)
$$E \left\{ (س\ س) \right\}$$

$$P(E) = P(س\ س) = P(اولی\ س) \times P(دومی\ س | اولی\ س) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8}$$

دومی س) چون از ۶ لامپ سالم یکی را قبلا کم کرده است.

ب)
$$E \left\{ (س\ س) \right\}$$

$$P(E) = P(\text{دومی س اولی س}) = P(\text{اولی س}) \times P(\text{دومی م} | \text{اولی س}) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$E \left\{ \begin{matrix} \text{س م} \\ \text{م س} \end{matrix} \right\}$$

ج

$$P(E) = P(\text{س م}) + P(\text{م س})$$

$$P(\text{اولی م} | \text{دومی س}) \times P(\text{اولی س}) + P(\text{اولی م}) \times P(\text{دومی س} | \text{اولی م})$$

$$\frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{6}{8}$$

www.pnu-m-s.com

• مثال

ظرفی حاوی ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. مهره ای را به طور تصادف از ظرف خارج می کنیم و به جای آن ۲ مهره به رنگ دیگر در داخل ظرف می اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می آوریم؛ هر یک از این احتمالات را به دست آورید؟
(الف) احتمال اینکه هر دو مهره هم رنگ باشد.
(ب) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد در صورتی که بدانیم هر دو هم رنگ هستند.

• حل

$$P(E) = P(\text{اولی ق} | \text{دومی ق}) \quad \text{(الف)}$$

$$P(\text{اولی ق} | \text{دومی ق}) \times P(\text{اولی ق}) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{13} = 0/12$$

$$P(E) = P(\text{دومی س} | \text{اولی س})$$

$$P(\text{اولی س} | \text{دومی س}) \times P(\text{اولی س}) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{13} = 0/26$$

$$P(\text{اولی س} | \text{دومی س}) \times P(\text{اولی س}) + P(\text{اولی ق} | \text{دومی ق}) \times P(\text{اولی ق}) \\ = 0/26 + 0/12 = 0/38$$

(ب)

$$P(E) = P(\text{دومی س} | \text{اولی س}) = 0/26$$

$$P(\text{ق} | \text{ق}) + P(\text{س} | \text{س}) = 0/38$$

$$\frac{0/26}{0/38} = 0/68$$

جایگشتها

ترتیب (ترتیب مهم است)

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$$

راه اول

راه دوم

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(انتخاب r شی از n شی)

• مثال

سه نفر را به چند طریق می توان از بین ۵۰ نفر انتخاب کرد به طوری که روی ۳ صندلی بنشینند.

• حل

$$50 \times 49 \times 48$$

راه اول

راه دوم

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{47!} = 50 \times 49 \times 48$$

• مثال

پانزده نفر در یک مسابقه دوچرخه سواری شرکت می کنند. به چند طریق می توان جوایز اول، دوم، سوم را بین افراد شرکت کننده در مسابقه اهدا کرد؟

• حل

$$15 \times 14 \times 13$$

راه اول

$$P_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!} = 15 \times 14 \times 13$$

راه دوم

ترکیب (ترتیب مهم نیست)

$$\text{ترکیب انتخاب } r \text{ شی از } n \text{ شی} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

• مثال

از بین ۵ مهندس عمران، ۴ مهندس مکانیک چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ مهندس عمران و ۲ مهندس مکانیک میتوان تشکیل داد؟

• حل

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \Rightarrow \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} \Rightarrow 10 \times 6 = 60$$

• مثال

به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در یک قفسه چید بطوری که کتاب های سال اول سمت چپ کتاب های دوم باشد؟

• حل

$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{4} \times 3! \times 4!$$

• مثال

درون ظرفی ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سفید ، ۴ مهره سبز وجود دارد. از این ظرف ۴ مهره با هم و بدون جایگذاری خارج می کنیم.

(الف) احتمال اینکه دو مهره سیاه خارج شده باشد.

(ب) احتمال اینکه دو مهره سفید و یک مهره سبز خارج شود.

(ج) احتمال اینکه دو تای اول سیاه باشد.

(د) احتمال اینکه دو تای اول سفید و آخری سبز باشد.

• حل

$$(الف) \quad P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{6}{2}}{\binom{9}{4}} \Rightarrow \frac{\frac{3 \times 2!}{2! \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!}}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!}} = \frac{3 \times 15}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{15}{42}$$

$$(ب) \quad P(E) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}}$$

$$\text{ج)} \quad P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{P_2^3 \times P_2^6}{P_4^9} \Rightarrow \frac{\frac{3!}{1!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!}}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} \Rightarrow \frac{6 \times 6 \times 5}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{180}{3024}$$

$$\text{د)} \quad P(E) = \frac{P_2^2 \times P_1^3 \times P_1^4}{P_4^9} \Rightarrow \frac{1 \times 3 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{252}$$

• مثال

یک کمیته مشورتی که درباره اصلاح وضع زندان ها مطالعه می کند مرکب از ۱۵ عضو است. درباره برنامه خاصی ۹ نفر موافق، ۴ نفر مخالف و ۲ نفر بی طرف هستند.

خبرنگاری علاقه مند است ۳ نفر را به طور تصادفی از این کمیته برگزیند.

الف) احتمال اینکه دو نفر اول موافق و نفر سوم مخالف باشند.

ب) احتمال اینکه دو نفر مخالف و یک نفر موافق باشند.

ج) احتمال اینکه هر سه نفر موافق باشند.

د) احتمال اینکه هر سه نفر بیطرف باشند.

ه) احتمال اینکه حداقل دو نفر موافق برنامه باشند چقدر است.

• حل

$$\text{الف)} \quad P(E) = \frac{\binom{9}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{9!}{7!} \times \frac{4!}{3!}}{\frac{15!}{12!}}$$

$$\text{ب)} \quad P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{9}{1}}{\binom{15}{3}} \Rightarrow \frac{\frac{4!}{2!(2!)} \times \frac{9!}{1 \times (8!)}}{\frac{15!}{3 \times 12!}} =$$

$$ج) P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} \Rightarrow or \frac{P_3^9}{P_3^{15}}$$

www.pnu-m-s.com

$$د) P(E) = \frac{N_E}{N_S} = 0$$

۵) به طور کلی آزمایشهایی که از هم مستقل نباشند یعنی به هم وابسته باشند (استخراج بدون جایگذاری) را می توان به ۲ طریق حل کرد

$$P(A \cap B) = p(A) \times P(B|A) \quad (۱) \text{ از راه فرمول کاربرد احتمال شرطی}$$

۲) از راه $P(E) = \frac{N_E}{N_S}$ که N_S و N_E را می توان با توجه به مسئله از فرمول های ترتیب و ترکیب استفاده کرد.

انتخاب ۳ نفر (احتمال حداقل ۲ نفر موافق و نفر سوم مخالف نباشد)

۹ موافق، ۴ مخالف، ۲ بی طرف = ۱۵ نفر

راه اول

$$P(\text{۳ نفر موافق}) + P(\text{۲ نفر موافق}) = P(\text{حداقل ۲ نفر موافق})$$

$$\frac{\binom{9}{2} \binom{4}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}$$

$$\frac{\frac{9 \times 8 \times 7!}{2!7!} \times \frac{4 \times 5!}{1!5!}}{\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 12!}} + \frac{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3!6!}}{\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3!2!}} \Rightarrow \frac{3 \times 9 \times 8 \times 4}{15 \times 14 \times 13} + \frac{9 \times 8 \times 7}{15 \times 14 \times 13} = \frac{3 \times 9 \times 8 \times 4 + 9 \times 8 \times 7}{15 \times 14 \times 13}$$

راه دوم

$$E \left\{ \begin{array}{l} \text{(موافق موافق موافق)} \text{ (موافق مخالف موافق)} \text{ (موافق موافق مخالف)} \text{ (مخالف موافق موافق)} \\ \text{(موافق موافق موافق)} \text{ (موافق مخالف موافق)} \text{ (موافق موافق مخالف)} \text{ (مخالف موافق موافق)} \end{array} \right\}$$

$$P(\text{موافق موافق موافق}) + P(\text{موافق مخالف موافق}) + P(\text{موافق موافق مخالف}) + P(\text{مخالف موافق موافق})$$

$$= \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{4}{13} + \frac{4}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{9}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{3 \times 9 \times 8 \times 4 + 9 \times 8 \times 7}{15 \times 14 \times 13}$$

مخرج مشترک گرفته است. $15 \times 14 \times 13$

• مثال

فرض کنیم ۶ کارت وجود دارد که شماره های ۱ تا ۶ روی آنها نوشته شده با قرار دادن این کارتها به ترتیبهای مختلف شماره های ۶ رقمی ساخته می شود.

(الف) احتمال اینکه این عدد ۶ رقمی زوج باشد.

(ب) احتمال اینکه بزرگتر از ۳۰۰ باشد. (در صورتی که عدد سه رقمی باشد)

• حل

www.pnu-m-s.com

(الف)

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = N_E = 360$$

$$P(E) = \frac{N_E}{N_S}$$

$$P(E) = \frac{360}{6!}$$

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$\begin{array}{r} _ _ _ \\ 1 \times 1 \times 5 = 5 \end{array} \quad 300$$

$$20 + 5 = 25$$

$$\begin{array}{r} _ _ _ \\ 1 \times 5 \times 4 = 20 \end{array} \quad 310$$

n^* نفر به $n!$ طریق کنار هم می نشینند.

n^* نفر به $(n-1)!$ طریق می توانند دور یک میز بنشینند.

• مثال

۳ نفر به چند طریق می توانند دور یک دایره بنشینند؟

• حل

(۳-۱!) طریق یعنی ۲!

• مثال

به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز نشاند به طوری که دو نفر خاص همیشه کنار هم باشند؟

• حل

$$(4-1!) \times 2! = 3! \times 2!$$

• مثال

به چند طریق می توان ۳ ایرانی، ۴ آلمانی و ۲ انگلیسی را کنار هم قرارداد به طوری که هم ملیت ها کنار هم بنشینند؟

• حل

$$3! \times 2! \times 4! \times 3!$$

*n شی داریم که به k گروه تقسیم شده اند ، به طوری که r_1 شی مثل هم، r_2 شی مثل هم،.....
و r_k شی مثل هم باشند.تعداد کل حالات قرار گرفتن n شی به صورت زیر می باشد

$$\frac{n!}{r_1!r_2!.....r_k!}$$

• مثال

چند علامت مختلف که هر کدام شامل ۱۲ پرچم که در یک خط راست قرار گرفته و شامل ۴ پرچم سبز، ۵ پرچم قرمز و ۳ پرچم سفید می باشد.
می توان تهیه نمود که پرچمهای هم رنگ یکسان هستند؟

• حل

$$\frac{12!}{4!3!5!}$$

• مثال

چند کلمه سه حرفی با حروف کلمه کتاب می توان نوشت. به طوریکه
(الف) تکرار حروف مجاز نباشد. (ب) تکرار حروف مجاز باشد.

• حل

$$(الف) \quad P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(ب) \quad \frac{\begin{matrix} \times & \times & \times \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}}{4 \ 4 \ 4} = 4^3$$

تحلیل بیز

$$P(C_k | E) = \frac{P(C_k) \times P(E | C_k)}{P(C_1) \times P(E | C_1) + P(C_2) \times P(E | C_2) + \dots + P(C_k) \times P(E | C_k)}$$

• مثال

فرض کنید از نیروی کار جامعه ای ۴۰٪ فارغ التحصیل دبستان (C_۱)، ۵۰٪ فارغ التحصیل دبیرستان (C_۲) و ۱۰٪ فارغ التحصیل دانشکده (C_۳) باشند.
در بین فرغ التحصیلان دبستان ۱۰٪ بیکار، در بین دبیرستانی ها ۵٪ بیکارند و در بین دانشکده ها ۲٪ بیکارند. اگر از نیروی کار فردی به تصادف انتخاب شود:
(الف) احتمال اینکه بیکار باشد.
(ب) اگر فرد انتخاب شده بیکار باشد احتمال اینکه او فارغ التحصیل دانشکده باشد.

• حل

$P(C_1) = 40\%$	← ۱۰٪ بیکار	$P(E C_1) = 10\%$
$P(C_2) = 50\%$	← ۵٪ بیکار	$P(E C_2) = 5\%$
$P(C_3) = 10\%$	← ۲٪ بیکار	$P(E C_3) = 2\%$

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

بیکار = E

(الف)

$$\begin{aligned}P(E) &= P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2) + P(E \cap C_3) \\&= P(C_1) \times P(E : C_1) + P(C_2) \times P(E : C_2) + P(C_3) \times P(E : C_3) \\&= 0/4 \times 0/1 + 0/5 \times 0/05 + 0/1 \times 0/02 = 0/067\end{aligned}$$

(ب)

$$P(C_3 : E) = \frac{P(C_3 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C_3) \times P(E : C_3)}{P(E)} = \frac{0/1 \times 0/02}{0/067} = 0/029$$

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

• مثال

فرض کنید در شهر تهران ۳ کارخانه تولید یخچال به رقابت پرداخته اند. تولید کارخانه اول در هفته دو برابر تولید کارخانه دوم و تولید کارخانه سوم در هفته سه برابر تولید کارخانه اول است. می دانیم از یخچالهای تولیدی در کارخانه اول ۲٪، در کارخانه دوم ۵٪ و در کارخانه سوم ۴٪ معیوب هستند. همچنین همه یخچال های تهران از این سه کارخانه تولید و مصرف می شود. مطلوبست:

احتمال اینکه یخچالی که به تصادف خریداری شده و معیوب است از تولیدات کارخانه اول باشد؟

• حل

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\text{کارخانه اول}) = 2P(\text{کارخانه دوم}) = 2a \\ P(\text{کارخانه اول}) = 3P(\text{کارخانه سوم}) = 3 \times 2a = 6a \\ P(\text{کارخانه اول}) + P(\text{کارخانه دوم}) + P(\text{کارخانه سوم}) = 1 \\ 2a + a + 6a = 9a = 1 \quad a = \frac{1}{9} \\ P(\text{کارخانه اول}) = \frac{2}{9} \quad P(\text{کارخانه دوم}) = \frac{1}{9} \quad P(\text{کارخانه سوم}) = \frac{6}{9} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(M|1) = 0.02 \quad \leftarrow 0.02 \text{ معیوب } (M) \quad \frac{2}{9} = P(1) \text{ محصولات از کارخانه اول} \\ P(M|2) = 0.05 \quad \leftarrow 0.05 \text{ معیوب } (M) \quad \frac{1}{9} = P(2) \text{ محصولات از کارخانه دوم} \\ P(M|3) = 0.04 \quad \leftarrow 0.04 \text{ معیوب } (M) \quad \frac{6}{9} = P(3) \text{ محصولات از کارخانه سوم} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(1:M) &= \frac{P(1 \cap M)}{P(M)} = \frac{P(1 \cap M)}{P(M \cap 1) + P(M \cap 2) + P(M \cap 3)} = \\ &= \frac{P(1) \times P(M:1)}{P(1) \times P(M:1) + P(2) \times P(M:2) + P(3) \times P(M:3)} = \\ &= \frac{\frac{2}{9} \times 0/02}{\frac{2}{9} \times 0/02 + \frac{1}{9} \times 0/05 + \frac{6}{9} \times 0/04} \end{aligned} \right.$$

• مثال

فرض کنید ۳ جعبه موجود است در جعبه اول ۱۰ مهره قرمز، ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید موجود است. در جعبه دوم ۵ مهره قرمز، ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه موجود است. در جعبه سوم ۴ مهره قرمز، ۱ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. مهرهای به تصادف از یکی از جعبه ها بر می داریم:

(الف) احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد.

(ب) احتمال اینکه مهره انتخابی سفید باشد.

(ج) احتمال اینکه مهره انتخابی سیاه باشد.

(د) اگر مهره انتخاب شده قرمز باشد احتمال اینکه از جعبه دوم انتخاب شده باشد.

• حل

(الف) قرمز (G)

$$P(G) = P(G \cap 1) + P(G \cap 2) + P(G \cap 3)$$

$$P(1) \times P(G:1) + P(2) \times P(G:2) + P(3) \times P(G:3)$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{10}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{12} = \frac{93}{72} = 0/53$$

ب) سفید (S)

$$P(S) = P(S \cap 1) + P(S \cap 2) + P(S \cap 3)$$

$$P(1) \times P(S:1) + P(2) \times (S:2) + P(3) \times P(S:3)$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{8}{45} = 0.7$$

ج) سیاه (B)

$$P(B) = P(B \cap 1) + P(B \cap 2) + P(B \cap 3)$$

$$P(1) \times P(B:1) + P(2) \times (B:2) + P(3) \times P(B:3)$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = 0.29$$

د)

$$P(2:G) = \frac{P(2 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(2) \times P(G:2)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{8}}{0.53}$$

• مثال

۲۵٪ از ماشینهای شهر دودزا هستند. و ۷۵٪ از ماشینهای شهر دودزا نیستند. ۵٪ از ماشینهایی که دودزا هستند دارای اشکال فنی نیستند و ۲۵٪ از ماشینهایی که دودزا نیستند دارای اشکال فنی نیستند. ماشین به تصادف انتخاب می شود:

(الف) احتمال اینکه دارای اشکال فنی نباشد چقدر است؟

(ب) اگر بدانیم ماشین انتخاب شده دارای اشکال فنی نیست. چقدر احتمال دارد که دودزا باشد؟

• حل

(الف)

E دارای اشکال فنی نباشد.

C_1 دودزا باشد.

C_2 دودزا نباشد.

$$P(E) = P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2)$$

$$P(C_1) \times P(E : C_1) + P(C_2) \times P(E : C_2)$$

$$P(E) = 0/25 \times 0/05 + 0/75 \times 0/25$$

$$P(E) = 0/2$$

(ب)

$$P(C_1 : E) = \frac{P(C_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C_1) \times P(E : C_1)}{P(E)} \Rightarrow \frac{0/25 \times 0/05}{0/2} = 0/06$$

متغیر تصادفی (X) $\left\{ \begin{array}{l} \text{گسسته} \\ \text{پیوسته} \end{array} \right.$

متغیر تصادفی گسسته

تابع احتمال گسسته $(P(X))$

تابع احتمال تجمعی $(F(x))X \iff F(x) = P(X \leq x)$

✓ تابع احتمال تجمعی برابر است با احتمال هر مشاهده + احتمال مشاهدات قبلی

www.pnu-m-s.com

• مثال

در خانواده سه فرزندی اگر X تعداد پسران باشد.

(الف) تابع احتمال X (ب) تابع تجمعی X

• حل

X	$P(X)$	$F(x)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$
	1	

جدول توزیع احتمال X ($P(X)$)



$$P(X=0) = p(د د د) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P\left\{ (د د پ) (د پ د) (پ د د) \right\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P\left\{ (پ پ د) (پ د پ) (د پ پ) \right\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = P\left\{ (پ پ پ) \right\} = \frac{1}{8}$$

• مثال

اگر جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد.

(الف) مقدار a را بیابید.

(ب) میانگین و واریانس X را بدست آورید.

• حل

X	$f(x)$
1	a^2
2	$2a$
3	3
	4
4	1
	4
	1

$$a^2 + 2a + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$a^2 + 2a + 1 = 1$$

$$a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a + 2) = 0$$

$$a = 0$$

ق

(الف)

$$a = -2$$

غ ق ق

میانگین و واریانس متغیر گسسته

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \rightarrow \bar{X} = \sum f P(x_i) \times X_i$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \rightarrow \delta^2 = \sum f P(x_i) \times (X_i - \bar{X})^2$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} \rightarrow \delta^2 = \sum f P(x_i) \times X_i^2 - \bar{X}^2$$

(ب)

X	f(x)	x×f(x)	X ² ×f(x)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	3	9	27
	4	4	14
4	1	4	16
	4	4	4
		13	43
		14	4

$$\delta^2 = \sum p(x_i)(x_i^2) - \bar{X}^2$$

$$\delta^2 = \frac{43}{4} - \left(\frac{13}{4}\right)^2$$

$$\delta^2 = \frac{3}{16}$$

• مثال

شخصی ۲ سکه سالم را پرتاب می کند اگر یک شیر بیاید یک تومان و اگر دو شیر بیاید دو تومان بگیرد. اگر شیر ظاهر نشود ۵ تومان می دهد. امید ریاضی (میانگین) این شخص را حساب کنید.

• حل

X(سود)	P(x)	X×P(x)
1	1	1
	2	2
2	1	2
	4	4
-5	1	-5
	4	4
		-1
		4

$$P(X=1) = P(\text{یک بار شیر}) = P\left\{ \begin{matrix} \text{ش خ} \\ \text{خ ش} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(\text{دو بار شیر}) = P\left\{ \begin{matrix} \text{ش ش} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=-5) = P(\text{اصلاً شیر نیاید}) = P\left\{ \begin{matrix} \text{خ خ} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4}$$

• مثال

فرض کنید ۲ ظرف داریم که درون هر کدام ۴ مهره با شماره های ۱،۲،۳،۴ وجود دارد.
از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. متغیر تصادفی X را قدر مطلق تفاضل شماره مهره های خارج شده در نظر می گیریم. میانگین و واریانس X را بدست آورید؟

• حل

 X قدر مطلق تفاضل شماره مهره ها

$$P(X=0) = p \left\{ (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) \right\} = \frac{4}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = p \left\{ (1,2) (2,1) (3,2) (2,3) (3,4) (4,3) \right\} = \frac{6}{16}$$

$$P(X=2) = p \left\{ (1,3) (3,1) (2,4) (4,2) \right\} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=3) = p \left\{ (1,4) (4,1) \right\} = \frac{2}{16}$$

X	P(X)	XP(X)	x ² P(X)
0	4	0	0
	16		
1	6	6	6
	16		
2	4	8	16
	16		
3	2	6	8
	16		
	1	20	40
		16	16

$$\bar{X} = \sum xP(x)$$

$$\frac{40}{16} - \left(\frac{20}{16}\right)^2 = 0.94$$

دو جمله ای
 فوق هندسی
 پواسن

توزیعهای احتمال گسسته

www.pnu-m-s.com

توزیع احتمال دو جمله ای

فرمول

$$P(X = x) = \binom{n}{x} P^x (1 - P)^{n-x}$$

- * آزمایشها از هم مستقل
- * دو حالت پیروزی و شکست
- * احتمال پیروزی P
- * احتمال شکست $1-P=q$
- * n تعداد آزمایشها
- * X تعداد پیروزیها

• مثال

در آزمایش پرتاب سه سکه احتمال اینکه ۲ تا شیر داشته باشیم؟ شانس شیر آمدن $\frac{1}{3}$

• حل

$$P = \frac{1}{3}$$

$$n = 3$$

$$x = 2$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2!}{2!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} E &= \left\{ (\text{ش خ ش}) (\text{ش ش خ}) (\text{خ ش ش}) \right\} \end{aligned} \right.$$

$$P(E) = P(\text{ش خ ش}) + P(\text{ش ش خ}) + P(\text{خ ش ش})$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$$

• مثال

شخصی ۰/۴ اوقات تیرش به هدف اصابت می کند. اگر او ۱۵ تیر به سوی هدف شلیک کند.

(الف) احتمال اینکه هیچ تیری به هدف نزنند.

(ب) احتمال اینکه دقیقاً سه تیر به هدف بزنند.

(ج) احتمال اینکه حداقل ۱۳ تیر به هدف بزنند.

(د) احتمال اینکه حداکثر ۲ تیر به هدف بزنند.

• حل

(الف)

$$n = 15 \quad x = 0 \quad p = 0/4$$

$$P(X = 0) = \binom{15}{0} (0/4)^0 (1 - 0/4)^{15-0} \Rightarrow \frac{15!}{0!15!} (0/6)^{15} \Rightarrow P(X = 0) = 0/6^{15}$$

از جدول بدست می آید که پیوست جزوه است از این به بعد برای مشخص شدن اینکه از جدول استفاده

شده از این علامت استفاده می کنیم ♠

$$♠ P(X = 0) = P(X \leq 0) = 0/0005$$

(ب)

$$n = 15 \quad x = 3 \quad p = 0/4$$

$$P(X = 3) = \binom{15}{3} (0/4)^3 (1 - 0/4)^{15-3} =$$

$$\frac{15!}{3!12!} (0/4)^3 (0/6)^{12} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 4 \times 12!} (0/4)^3 (0/6)^{12} \Rightarrow 5 \times 7 \times 13 \times (0/4)^3 (0/6)^{12}$$

$$♠ P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0/0905 - 0/0271 = 0/0634$$

(ج)

$$x \geq 13$$

$$P = 0/4$$

$$n = 15$$

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)$$

$$\binom{15}{13} (0/4)^{13} (1 - 0/4)^{15-13} + \binom{15}{14} (0/4)^{14} (1 - 0/4)^{15-14} + \binom{15}{15} (0/4)^{15} (1 - 0/4)^{15-15}$$

$$\spadesuit P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - 0/9997 = 0/0003$$

$$x \leq 2$$

$$n = 15$$

$$p = 0/4$$

(د)

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$\binom{15}{2} (0/4)^2 (1 - 0/4)^{15-2} + \binom{15}{1} (0/4)^1 (1 - 0/4)^{15-1} + \binom{15}{0} (0/4)^0 (1 - 0/4)^{15-0}$$

$$\spadesuit P(X \leq 2) = 0/0271$$

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

• مثال

یک آزمون شامل ۸ سؤال ۳ گزینه ای که تنها یک گزینه درست است.

(الف) احتمال اینکه شخصی دقیقاً به پنج سؤال پاسخ درست دهد.

(ب) احتمال اینکه به دو سؤال پاسخ غلط دهد.

(ج) احتمال اینکه به هفت سؤال پاسخ درست دهد.

• حل

(الف)

احتمال صحیح جواب دادن $P = \frac{1}{3}$ $n = 8$ $x = 5$

$$P(X = 5) \Rightarrow \binom{8}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{8-5}$$

(ب)

احتمال غلط جواب دادن $P = \frac{2}{3}$ $n = 8$ $x = 2$

$$P(X = 2) \Rightarrow \binom{8}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{8-2}$$

(ج)

$x \geq 7$ $n = 8$ $P = \frac{1}{3}$

$$P(x \geq 7) = P(x = 7) + P(x = 8)$$

$$P(X \geq 7) = \binom{8}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{8-7} + P(X \geq 8) = \binom{8}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{8-8}$$

توزیع فوق هندسی

فرمول

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

*K پیروزی

*N-K شکست

*n تعداد نمونه

*X تعداد پیروزی در نمونه

*آزمایشها از هم مستقل نیستند.

*استخراج n بدون جایگذاری است.

www.pnu-m-s.com

• مثال

۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کردند. امکان استخدام برای ۵ نفر وجود دارد. احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالات زیر بیابید.

(الف) ۳ زن و ۲ مرد (ب) حداقل ۴ مرد

• حل

(الف)

$$P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{5}{3} \binom{6}{2}}{\binom{11}{5}}$$

(ب)

$$P(\text{حداقل ۴ مرد}) = P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5)$$

$$P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{6}{4} \binom{5}{1}}{\binom{11}{5}} + \frac{\binom{6}{5}}{\binom{11}{5}}$$

• مثال

در جعبه ای ۲ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز موجود است. ۳ مهره با جایگذاری انتخاب می کنیم.

(الف) احتمال اینکه ۲ مهره قرمز داشته باشیم.

(ب) احتمال اینکه ۲ مهره سیاه داشته باشیم.

• حل

(الف)

$$P = \frac{4}{9} \text{ احتمال قرمز بودن} \quad x=2 \quad n=3$$

$$P(x=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{9}\right)^{3-2}$$

(ب)

$$\text{سیاه بودن} = \text{پیروزی} \quad P = \frac{3}{9} \text{ احتمال سیاه بودن} \quad x=2 \quad n=3$$

$$P(x=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{9}\right)^{3-2}$$

تقریب فوق هندسی به دو جمله ای

در صورتی که حجم جامعه نسبت به حجم نمونه بزرگ باشد. استخراج بدون جایگذاری و با جایگذاری به طور تقریبی معادل می شود. یعنی می توان مسأله را به جای حل فوق هندسی با استفاده از دو جمله ای حل نمود.

میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای

$$\begin{aligned}\bar{X} &= np \\ \delta^2 &= np(1-p)\end{aligned}$$

میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی

$$\begin{aligned}\bar{X} &= n \times \frac{K}{N} \\ \delta^2 &= n \times \frac{K}{N} \times \frac{N-K}{N}\end{aligned}$$

به طور کلی در مسائل احتمال آزمایش هایی که از هم مستقل باشند (آزمایش های مربوط به پرتاب سکه و تاس) و استخراج های با جایگذاری را از توزیع دو جمله ای می توان حل کرد و آزمایش هایی که به هم وابسته باشند (استخراج بدون جایگذاری) را می توان از توزیع فوق هندسی حل نمود.

• مثال

در یک منطقه که ۱۰۰۰ نفر جمعیت دارد. تعداد ۱۰۰ نفر مخالف با انتخاب شدن شخص معینی هستند.

یک نمونه ۱۰ تایی به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) ۳ نفر مخالف برنامه باشند . **ب)** حداقل ۹ نفر موافق برنامه باشد.

• حل

الف)

$$n=10$$

$$x=3$$

$$\text{احتمال مخالف بودن} \frac{100}{1000} = 0/1$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0/1)^3 (1 - 0/1)^{10-3}$$

$$\bar{X} = 10 \times 0/1 = 1$$

$$\delta^2 = 10 \times 0/1 \times 0/9 = 0/9$$

ب)

$$n=10$$

$$x \geq 9$$

$$\text{احتمال موافق بودن} \frac{900}{1000} = 0/9$$

$$P(x \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} (0/9)^9 (1 - 0/9)^{10-9} + \binom{10}{10} (0/9)^{10} (1 - 0/9)^{10-10}$$

$$\bar{X} = 10 \times 0/9 = 9$$

$$\delta^2 = 10 \times 0/9 \times 0/1 = 0/9$$

توزیع پواسن

فرمول

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

* λ متوسط تعداد وقایع در فاصله زمانی یا مکانی مشخص

* X تعداد وقایع در فاصله زمانی یا مکانی مشخص

$$\bar{X} = \lambda \quad *$$

$$\sigma^2 = \lambda \quad *$$

* از متوسط بودن می شود فهمید پواسن است.

• مثال

به طور متوسط در هر توپ پارچه ۳ زدگی وجود دارد . احتمال اینکه در یک توپ پارچه معین دقیقا ۵ زدگی وجود داشته باشد.

• حل

$$\lambda = 3$$

$$x = 5$$

$$P(x = 5) = \frac{e^{-3} 3^5}{5!}$$

$$\spadesuit P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) \Rightarrow 0/9161 - 0/8153 = 0/1008$$

• مثال

فرض کنید در هر ۱۰۰ متر پارچه به طور متوسط ۳ زدگی وجود داشته باشد. احتمال اینکه در ۱۳۰ متر از آن ۳ زدگی باشد چقدر است؟

• حل

زدگی متر

۳ ۱۰۰

$$۱۳۰ \quad \lambda = \frac{3 \times 130}{100} = 3.9$$

$$P(x=3) = \frac{e^{-3.9} 3.9^3}{3!}$$

$$\spadesuit P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) \Rightarrow 0.4335 - 0.2381 = 0.1954$$

www.pnu-m-s.com

تقریب دو جمله ای به پواسن

در صورتی که در توزیع دو جمله ای n خیلی زیاد و p خیلی کم باشد. به طوری که حاصلضرب n و p دارای حاصلضرب ثابتی باشد. توزیع دو جمله را به توزیع پواسن تقریب می زنیم.

$$\lambda = np$$

• مثال

فرض کنید شخصی ۵۰۰ بار به هدفی شلیک می کند و احتمال زدن به هدف برای او ۰/۰۱ باشد. مطلوبست احتمال اینکه دقیقاً ۲ بار به هدف زده باشد؟

• حل

چون $n=500$ زیاد و $p=0/01$ کم است توزیع دو جمله ای را به پواسن تقریب می زنیم.

$$\lambda = np$$

$$\lambda = 500 \times 0/01$$

$$\lambda = 5$$

$$P(x=2) = \frac{e^{-5} 5^2}{2!}$$

• مثال

فرض کنید میانگین تعداد تلفن هایی که به یک شرکت می شود. ۱۲۰ در ساعت است. مطلوبست احتمال اینکه در یک فاصله زمانی ۳۰ دقیقه حداقل یک تلفن زده شود؟

• حل

$$\lambda = \frac{120 \times 30}{60} = 60$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{e^{-60} (60)^0}{0!}$$

• مثال

۳٪ از ساعت های ساخت کارخانه A معیوب است. احتمال اینکه در یک بسته ۱۲۰ تائی از این ساعت ها خرابی وجود نداشته باشد چقدر است؟

• حل

$$\lambda = np$$

$$\lambda = 120 \times \%3 = 3/6$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3/6} 3/6^0}{0!}$$

• مثال

۸۰٪ لامپ های تولیدی یک کارخانه سالم می باشد . یک نمونه ۸ تائی از لامپ ها را به طور تصادف انتخاب می کنیم. (با جایگذاری) مطلوبست محاسبه

(الف) حداکثر ۳ لامپ سالم (ب) حداقل ۲ لامپ معیوب

• حل

(الف)

$$P(X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) =$$

$$\binom{8}{3} (0/8)^3 (1-0/8)^{8-3} + \binom{8}{2} (0/8)^2 (1-0/8)^{8-2} + \binom{8}{1} (0/8)^1 (1-0/8)^{8-1} + \binom{8}{0} (0/8)^0 (1-0/8)^{8-0}$$

$$\spadesuit P(X \leq 3) = ?$$

(ب)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$\binom{8}{1} (0/2)^1 (1-0/2)^{8-1} + \binom{8}{0} (0/2)^0 (1-0/2)^{8-0}$$

$$\spadesuit P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - ?$$

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

توزیع احتمال X و Y (توزیع توام X و Y) $P(x,y)$

• مثال

در خانواده سه فرزندی اگر X تعداد فرزندان پسر و Y تعداد فرزندان دختر باشد. مطلوبست :

(الف) توزیع احتمال توام X و Y

(ب) توزیع احتمال X (توزیع حاشیه ای X)

(ج) توزیع احتمال Y (توزیع حاشیه ای Y)

• حل

(الف)

$x \backslash y$	0	1	2	3	
0	0	0	0	1	1
1	0	0	3	0	3
2	0	3	0	0	3
3	1	0	0	0	1
	8	3	3	1	8
	8	8	8	8	

(ب)

جدول احتمال X

x	$p(x)$
0	1
1	3
2	3
3	1
	8

ج)

جدول احتمال y

y	$p(y)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

• مثال

فرض کنید X و Y توزیع توأم زیر را داشته باشد.

الف) p_Y ، میانگین و واریانس Y

ب) احتمال $p(y=20|x=40)$

ج) احتمال $p(y|x=20)$

$x \backslash y$	20	40	60	80	
20	0/04	0/08	0/08	0/05	0/25
40	0/12	0/24	0/24	0/15	0/75
	0/16	0/32	0/32	0/2	1

• حل

الف)

y	$p(y)$	$y p(y)$	$y^2 p(y)$
20	0/25	5	100
40	0/75	30	1200
		35	1300

$$\bar{y} = \sum y p(y) = 35$$

$$\delta^2 y = \sum y^2 p(y) - \bar{y}^2 \Rightarrow 1300 - (35)^2 = 75$$

(ب)

$$P(y = 20 : x = 40) = \frac{P(y = 20, x = 40)}{P(x = 40)} = \frac{0/08}{0/32} = 0/25$$

$$P(A:B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(ج)

y	p(y x)=20
20	0/25
40	0/75

$$P(y = 20 : x = 20) = \frac{P(y = 20, x = 20)}{P(x = 20)} = \frac{0/04}{0/16} = 0/25$$

$$P(y = 40 : x = 20) = \frac{P(y = 40, x = 20)}{P(x = 20)} = \frac{0/12}{0/16} = 0/75$$

• مثال

فرض کنید X و Y توزیع توأم زیر را داشته باشد؛ $R = X \times Y$ می باشد.

(الف) توزیع احتمال R

(ب) میانگین و واریانس R

• حل

$P(xy)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	0/1	0/1	0
2	0/1	0/4	0/1
4	0	0/1	0/1

$R = X \times Y$

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
2	0	2	4
4	0	4	8

توزیع احتمال R

R	$p(R)$	$R p(R)$	$R^2 p(R)$
0	0/3	2	0
2	0/4	0/8	1/6.
4	0/2	0/8	3/2.
8	0/1	0/8	6/4.
	1	2/4.	11/2.

$$\bar{x} = \sum xP(x)$$

$$\bar{R} = \sum RP(R)$$

$$\delta_R^2 = \sum R^2 P(R) - \bar{R}^2$$

$$\delta_R^2 = 11/2 - (2/4)^2 \Rightarrow 5/44$$

• مثال

تابع احتمال زیر مفروض است. میانگین و واریانس X را حساب کنید.

x	-2	1	3	5
P(x)	1/2	0/4	0/3	0/1

• حل

xP(x)	0/4	0/4	0/9	0/5
x ² P(x)	0/8	0/4	2/3	2/5

$$\bar{x} = \sum xP(x)$$

$$\delta^2 = \sum x^2 P(x) - \bar{x}^2$$

$$\delta = 6/4 - (1/4)^2 = 1/6$$

ضریب همبستگی

$$-1 \leq P \leq 1$$

$$P(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y}$$

• مثال

جدول توزیع احتمال X, Y به صورت زیر داده شده است. مطلوبست محاسبه ضریب همبستگی

$x \backslash y$	-1	0	1	
0	4 12	0 12	1 12	5 12
1	0 12	2 12	0 12	2 12
2	4 12	0 12	1 12	5 12
	8 12	2 12	2 12	1

• حل

x	$p(x)$	$x p(x)$	$x^2 p(x)$
-1	8 12	-8 12	8 12
0	0 12	0 12	0 12
1	2 12	2 12	2 12
		-6 12	10 12

$$\bar{x} = \frac{-6}{12}$$

$$\delta_x^2 = \frac{10}{12} - \left(\frac{-6}{12}\right)^2 = 0.58$$

$$\delta_x = 0.76$$

y	p(y)	y p(y)	y ² p(y)
0	5	0	0
	12		
1	2	2	2
	12	12	12
2	5	10	20
	12	12	12
		12	22
		12	12

$$\bar{y} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\delta_y^2 = \frac{22}{12} - (1)^2 = 0.83$$

$$\delta_y = 0.91$$

$$P(x,y) = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\frac{-6}{12} - \frac{-6}{12} \times 1}{0.76 \times 0.91} = \frac{0}{0.76 \times 0.91}$$

R=x.y جدول مقادير

x \ y	-1	0	1
0	0	0	0
1	-1	0	1
2	-2	0	2

R	p(R)	R p(R)
-2	4	-8
	12	12
-1	0	0
0	7	0
	12	
1	0	0
2	1	2
	12	12
		-6
		12

• مثال

جدول توزیع احتمال X, Y به صورت زیر داده شده است . مطلوبست محاسبه ضریب همبستگی

$x \backslash y$	-1	0	1	
1	0	1	1	2
		8	8	8
2	0	1	2	4
		8	8	8
3	0	1	1	2
		8	8	8
	1	3	4	1
	8	8	8	

• حل

x	$p(x)$	$x p(x)$	$x^2 p(x)$
-1	1	-1	1
	8	8	8
0	3	0	0
	8		
1	4	4	4
	8	8	8
		3	5
		8	8

$$\bar{x} = \frac{3}{8}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 0/485$$

$$\sigma_x = 0/69$$

y	$p(y)$	$y p(y)$	$y^2 p(y)$
1	2	2	2
	8	8	8
2	4	8	16
	8	8	8
3	2	6	18
	8	8	8
		16	36
		8	8

$$\bar{y} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\sigma_y^2 = 4/5 - (2)^2 = 0/5$$

$$\sigma_y = \sqrt{0/5} = 0/70$$

$$P(x,y) = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\frac{6}{8} - \frac{3}{8} \times 2}{0/69 \times 0/7} = \frac{0}{0/69 \times 0/7}$$

جدول مقادير $R=x.y$

$x \backslash y$	-1	0	1
1	-1	0	1
2	-2	0	2
3	-3	0	3

R	p(R)	R p(R)
-3	0	0
-2	1/8	-2/8
-1	0	0
0	3/8	0
1	1/8	1/8
2	2/8	4/8
3	1/8	3/8
	1	6/8

www.pnu-m-s.com

توزیعهای احتمال پیوسته

توزیع نرمال

$$P(X = x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2}$$

👉 M میانگین و δ انحراف معیار

$$-\infty < x < +\infty$$

$$P(X = 3) = \int_{-\infty}^3 \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2} \cdot dx$$

👉 حل این انتگرال مشکل است.

توزیع نرمال استاندارد

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{X-M}{\delta} = Z$ توزیع نرمال را تبدیل به نرمال استاندارد می کنیم.

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

$$P(Z \geq 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Z^2} \cdot dz$$

👉 جواب این انتگرال از جدول نرمال استاندارد بدست می آوریم.

• مثال

در صورتی که متغیر Z دارای توزیع نرمال باشد؛ مقادیر زیر را حساب کنید؟

• حل

♠ به وسیله جدول محاسبه می کنیم.

$$P(Z < 2/20) = 0/9861$$

$$P(Z < -1) = 0/1587$$

$$P(Z > 1/25) = 1 - P(Z \leq 1/25) = 1 - 0/8944 = 0/1056$$

$$P(Z < 1/25) = 0/8944$$

$$P(1/5 < Z < 2) = P(Z < 2/00) - P(Z < 1/50) = 0/9772 - 0/9332 = 0/044$$



احتمال اینکه یک متغیر پیوسته برابر با عدد ثابت باشد صفر است.

$$P(X=C)=.$$

C مقدار ثابت، X متغیر پیوسته

• مثال

$$(|Z| < 2)$$

• حل

$$♠ P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) \Rightarrow 0/9772 - 0/0228 = 0/9544$$

• مثال

اگر X متغیری نرمال با میانگین $M=100$ و انحراف معیار $\delta=5$ باشد. احتمال $P(X > 110)$ چقدر است؟

• حل

$$♠ P(X > 110) = P\left(\frac{X - M}{\delta} > \frac{110 - 100}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0/8869 = 0/1131$$

• مثال

پیچی به تصادف از خط تولید برداشته می شود. دارای طولی برابر X است. که به طور نرمال بر حسب میلی متر با میانگین $M=78/3$ و انحراف معیار $\delta=1/4$ توزیع شده است. اگر قرار باشد پیچهای بلندتر از ۸۰ میلی متر دور ریخته شود چه نسبتی از محصول ضایع می شود؟

• حل

$$P(X > 80) = P\left(\frac{X - M}{\delta} > \frac{80 - 78/3}{1/4}\right) = P(Z > 1/21) = 1 - P(Z \leq 1/21) = 1 - 0/8869 = 0/1131$$

• مثال

دستگاه پرکننده شیشه های نوشابه به طوری تنظیم شده که ۹۵۲ میلی لیتر نوشابه را به داخل شیشه می ریزند. این میزان نوشابه دارای توزیع نرمال با میانگین ۹۵۲ میلی لیتر و انحراف معیار ۴ میلی لیتر است. مطلوبست:

(الف) احتمال اینکه شیشه ای بین ۹۵۲ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه داشته باشد.

(ب) چند درصد از بطری ها حاوی ۹۴۸ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه هستند.

• حل

(الف)

$$P(952 < X < 956) = P\left(\frac{952 - 952}{4} < \frac{X - M}{\delta} < \frac{956 - 952}{4}\right) =$$

$$P(0 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < 0) \Rightarrow 0/8413 - 0/5 = 0/3413$$

(ب)

$$P(948 < X < 956) = P\left(\frac{948 - 952}{4} < \frac{X - M}{\delta} < \frac{956 - 952}{4}\right) =$$

$$P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) \Rightarrow 0/8413 - 0/1587 = 0/6826$$

استفاده معکوس از جدول نرمال استاندارد

• مثال

تقاضای هفتگی برای بنزین در پمپ بنزین به صورت نرمال با میانگین ۲۵۰۰۰۰ لیتر و انحراف معیار ۸۰۰۰۰ لیتر توزیع شده است. چه میزان لیتر بنزین در هفته باید در پمپ بنزین وجود داشته باشد که مطمئن شویم که احتمال تمام شدن بنزین فقط ۲٪ است؟

• حل

X تمام شدن بنزین

X تقاضای هفتگی

$$M = 250,000$$

$$\delta = 80,000$$

$$P(x) = 0/02$$

$$P(X > a) = 0/02$$

$$P\left(\frac{X - M}{\delta} > \frac{a - 250/000}{80/000}\right) = 0/02$$

$$P(Z > Z_0) = 0/02 \Rightarrow 1 - P(Z < Z_0) = 0/02 \Rightarrow P(Z < Z_0) = 0/98 \Rightarrow Z_0 = 2/06$$

$$\frac{a - 250/000}{80/000} = 2/06 \Rightarrow a - 250/000 = 80/000 \times 2/06 \Rightarrow a = 414/800 \cong 415$$

• مثال

یک دستگاه اتوماتیک پیچ هایی تولید می کند که قطر آن دارای توزیع نرمال است. با انحراف معیار ۰/۵ میلی لیتر دستگاه را باید بر روی چه میانگینی تنظیم کرد که فقط ۰/۴٪ پیچها دارای قطری معادل ۲۵ میلی لیتر یا کمتر باشد؟

• حل

X قطر پیچ

$$\delta = 0.5$$

$$M = ?$$

$$P(X \leq 25) = 0.04$$

$$P\left(\frac{X - M}{\delta} \leq \frac{25 - M}{0.5}\right) = 0.04$$

$$P(Z \leq Z_0) = 0.04 \Rightarrow Z_0 = -1.75 \Rightarrow \frac{25 - M}{0.5} = -1.75$$

$$25 - M = 0.5 \times 1.75 \Rightarrow M = 25.875 \approx 26$$

• مثال

اگر توزیع قد افراد جامعه دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ و انحراف معیار ۵ باشد. آنگاه ۲/۵٪ بلندترین افراد جامعه حداقل دارای چه قدی هستند؟

• حل

$$M = 170$$

$$\delta = 5$$

$$x = 2.5\%$$

www.pnu-m-s.com

$$P(x) = \%2/5$$

$$P(X \geq a) = 2/5$$

$$P\left(\frac{X - M}{\delta} \geq \frac{a - 170}{5}\right) = 2/5$$

$$P(Z \geq Z_0) = 2/5 \Rightarrow 1 - P(Z < Z_0) = 2/5 \Rightarrow P(Z < Z_0) = 0/975 \Rightarrow Z_0 = 1/96$$

$$\frac{a - 170}{5} = 1/96 \Rightarrow a - 170 = 1/96 \times 5 \Rightarrow a = 179/8$$

تقریب توزیع دوجمله ای به نرمال

در صورتیکه $n \times p > 5$ باشد؛ توزیع دوجمله ای را به نرمال تقریب می زنیم.

میانگین دو جمله ای $M = np$

واریانس $\delta^2 = np(1 - p)$

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \text{ دارای توزیع نرمال استاندارد است و } X = \text{نرمال}$$

• مثال

در یک بررسی از اهالی یک منطقه ۴٪ افراد بالغ معتاد به سیگار هستند ، احتمال اینکه در یک نمونه ۲۵ تایی حداکثر ۵ نفر معتاد به سیگار باشند چقدر است؟

• حل

$$n = 25$$

$$p = 0/4$$

$$n \times p = 25 \times 0/4 = 10 > 5$$

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \leq \frac{5 - 10}{\sqrt{25 \times 0/4 \times 0/6}}\right)$$

$$P(Z \leq \frac{-5}{\sqrt{2}}) = P(Z \leq -2/04) = 0/0207$$

• مثال

عمرنوعی دستگاه توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰۰۰ و انحراف معیار ۲۵۰۰ ساعت است.

(الف) احتمال اینکه یک دستگاه خریداری شده بیش از ۲۶۰۰۰ ساعت عمر کند چقدر است؟

(ب) اگر مهندسین به خواهند با ثابت نگه داشتن انحراف معیار میانگین عمر را بالا ببرند به طوری که ۶۷٪ دستگاهها حداقل ۲۰۰۰۰ ساعت کار کنند. مهندسین باید به چه میانگینی دست یابند؟

• حل

$$P(X \geq 20000) = 0.67$$

$$P(Z \geq Z_0) = 0.33 \Rightarrow Z_0 = -0.44$$

$$\frac{20000 - M}{2500} = -0.44$$

$$20000 - M = -0.44 \times 2500 \Rightarrow 21100$$

$$P\left(\frac{X - M}{\sigma} \geq \frac{20000 - M}{2500}\right) = 0.67$$

$$P(Z \geq Z_0) = 0.67$$

$$1 - P(Z \leq Z_0) = 0.67$$

$$P(Z \leq Z_0) = 1 - 0.67$$

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir

فاصله اطمینان (برآورد فاصله ای)

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

www.pnu-m-s.com

* n تعداد نمونه

* X میانگین نمونه

* δ^2 واریانس

* M میانگین جامعه

* δ^2 واریانس جامعه

$$E = (\bar{X}) = \bar{\bar{X}} = M$$

$$Var = (\bar{X}) = \frac{\delta^2}{n}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < \bar{X} - M < \frac{\delta}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < -M < -\bar{X} + \frac{\delta}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \quad \leftarrow \text{فاصله اطمینان } \%(1-\alpha)$$

حالتی که واریانس جامعه معلوم است

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

حالتی که واریانس جامعه مجهول است

الف) $n > 30$

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ب) $n < 30$

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

✓ $d = n - 1$ درجه آزادی

☞ پس به طور کلی در حالتی که واریانس جامعه مجهول و حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد توزیع Z به توزیع t با درجه آزادی $d = n - 1$ تبدیل می شود.

• مثال

یک تولید کننده لامپ ، لامپی تولید می کند که انحراف معیار طول آنها ۴۰ ساعت است. اگر یک نمونه تصادفی ۳۶ تائی دارای متوسط عمر ۸۷۰ ساعت باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای متوسط عمر تمام لامپ های تولیدی این کارخانه به دست آورید؟

• حل

$$\begin{array}{c} n=36 \\ \bar{X} = 870 \\ \delta = 40 \end{array}$$

$$95\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/05$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

← اطمینان

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$870 - 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}} < M < 870 + 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}}$$

$$856/94 < M < 883/06$$

• مثال

اگر طول قد کارمندان یک اداره دارای توزیع نرمال باشد. یک نمونه ۵ تایی از کارمندان انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه ۱۷۰ و واریانس نمونه ۶۲/۵ می باشد. مطلوبست محاسبه فاصله اطمینان ۹۹٪ برای میانگین جامعه؟

• حل

$$\begin{array}{c} n=5 \\ \bar{X}=170 \\ \delta^2=62/5 \end{array}$$

در این جامعه مجهول ، $n < 30$ باید آماره Z تبدیل به t شود.

$$99\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/01$$

$$t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(5-1)} = t_{0/995}^{(4)} = 4/60$$

$$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$170 - 4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}} < M < 170 + 4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}}$$

$$153/49 < M < 186/5$$

فاصله اطمینان برای اختلاف میانگین دو جامعه $(M_1 - M_2)$

واریانس جامعه معلوم

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

واریانس جامعه مجهول

الف) $n_1, n_2 > 30$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

✓ درجه آزادی $d = n_1 + n_2 - 2$

www.pnu-m-s.com

واریانس جامعه مجهول و مساوی ($\delta_1^2 = \delta_2^2$)

الف) 30 n_1, n_2

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

ب) 30 n_1, n_2

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

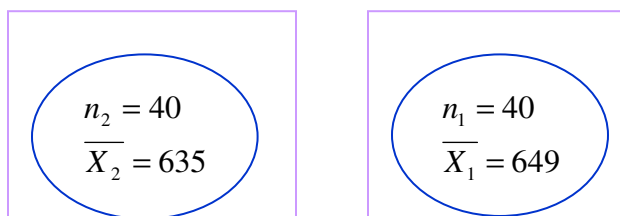
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \checkmark \text{درجه آزادی}$$

www.pnu-m-s.com

• مثال

دو شرکت A و B لامپ روشنایی تولید می کنند که به ترتیب دارای انحراف معیارهای ۲۷ و ۳۱ ساعت است. یک نمونه تصادفی ۴۰ تایی از لامپهای تولیدی هر شرکت انتخاب می کنیم و به ترتیب متوسط طول عمر لامپ ها برای این دو نمونه را ۶۴۹ و ۶۳۵ به دست می آوریم. مطلوبست فاصله اطمینان ۹۶٪ برای اختلاف متوسط طول عمر لامپ های دو شرکت؟

• حل



B

$$\delta_1 = 27$$

A

$$\delta_1 = 27$$

$$96\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/04$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/04}{2}} = Z_{0/98} = 2/06$$

← اطمینان

$$\begin{aligned} & \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \\ & 649 - 635 - 2/06 \sqrt{\frac{(27)^2}{40} + \frac{(31)^2}{40}} < M_1 - M_2 < 649 - 635 + 2/06 \sqrt{\frac{(27)^2}{40} + \frac{(31)^2}{40}} \\ & 0/64 < M_1 - M_2 < 27/36 \end{aligned}$$

• مثال

دو ماشین A و B جعبه های ۸ گرمی از یک ماده را بسته بندی می کنند.
 انحراف معیار وزن بسته های پر شده به وسیله ماشین A و B به ترتیب ۴٪ و ۵٪ گرم است.
 از جعبه های پر شده هریک از ماشینها ۱۰۰ جعبه به تصادف انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه جعبه
 $A=8/18$ و میانگین نمونه جعبه $B=8/15$ به دست آمده فاصله اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل میانگین وزنها
 پر شده با دو ماشین A و B را بدست آورید؟

• حل

$$99\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/01$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/01}{2}} = Z_{0/995} = 2/58$$

← اطمینان

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$8/18 - 8/15 - 2/58 \sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}} < M_1 - M_2 < 8/18 - 8/15 + 2/58 \sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}}$$

$$0/014 < M_1 - M_2 < 0/046$$

www.pnu-m-s.com

• مثال

در یک نمونه ۲۰ تایی از دانشجویان دختر میانگین و انحراف معیار درس آمار به ترتیب ۴،۱۲ و همین عناصر برای نمونه ۲۲ تایی دانشجو پسر ۲،۱۱ به دست آمده است. مطلوبست فاصله اطمینان ۹۰٪ برای اختلاف میانگین نمره ریاضی دانشجویان دختر و پسر؟

• حل

$$\begin{aligned} n_2 &= 22 \\ \overline{X}_2 &= 11 \\ \delta_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 20 \\ \overline{X}_1 &= 12 \\ \delta_1 &= 4 \end{aligned}$$

پسر

دختر

$$n_1, n_2 < 30$$

$$90\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 10\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0.1}{2}}^{(40)} = t_{0.95}^{(40)} = 1/64$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$12 - 11 - 1/64 \sqrt{\frac{4^2}{20} + \frac{2^2}{22}} < M_1 - M_2 < 12 - 11 + 1/64 \sqrt{\frac{4^2}{20} + \frac{2^2}{22}}$$

$$-0/6 < M_1 - M_2 < 2/6$$

• مثال

دو آزمایشگاه ۱ و ۲ به طور مستقل برای اندازه گیری چربی شیر پاستوریزه اقدام می نمایند.
 ۱۰ نمونه از آزمایشگاه یک با میانگین ۶ و واریانس ۴/۶۷ و ۸ نمونه از آزمایشگاه ۲ با میانگین ۷ و
 واریانس ۲/۵۷ به دست آمده با فرض نرمال بودن ۲ جمعیت و مساوی بودن واریانس ها یک فاصله
 اطمینان ۹۵٪ درصدی برای اختلاف میانگین چربی موجود در شیرهای دو کارخانه به دست آورید.
 واریانس جامعه مجهول و مساوی)

• حل

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 \\ \bar{X}_1 &= 7 \\ \delta_1^2 &= 2/57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= 10 \\ \bar{X}_2 &= 6 \\ \delta_2^2 &= 4/67 \end{aligned}$$

۲

۱

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{(10 - 1)4/67 + (8 - 1)2/57}{10 + 8 - 2} \Rightarrow S_p^2 = 3/75 = S_p = 1/937$$

$$95\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/05\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/05}{2}}^{(16)} = t_{0/975}^{(16)} = 2/12$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\begin{aligned} 6 - 7 - 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} &< M_1 - M_2 < 6 - 7 + 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} \\ - 2/35 &< M_1 - M_2 < 0/35 \end{aligned}$$

فاصله اطمینان برای ثبت جامعه

n_1 ثبت نمونه

P نسبت جامعه

الف) $n > 30$

$$P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < P < P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

ب) $n < 30$

$$P - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < P < P + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

✓ $d = n - 1$ درجه آزادی

فاصله اطمینان برای اختلاف نسبت دو جامعه

الف) $n_1, n_2 > 30$

$$P_1 - P_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} < P_1 - P_2 < P_1 - P_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} < P_1 - P_2 < P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

✓ $d = n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی

• مثال

از بین ۱۷۰ کودک دبستانی که به تصادف انتخاب شده اند ، ۳۰ نفر دارای دندانۀ شکسته است.
یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت کودکانی که دندان شکسته دارند بیابید؟

• حل

$$n = 170$$

$$P = \frac{30}{170} = 0.17$$

$$95\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < P < P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$0.17 - 1.96 \sqrt{\frac{0.17(1-0.17)}{170}} < P < 0.17 + 1.96 \sqrt{\frac{0.17(1-0.17)}{170}} \Rightarrow 0.11 < P < 0.23$$

www.pnu-m-s.com

• مثال

یک نمونه تصادفی ۲۰ نفره انتخاب و معلوم شده که ۱۵ نفر آنها به نوعی بیماری مبتلا هستند.
یک نمونه تصادفی ۱۰ نفره از جمعیت دیگری انتخاب و معلوم شده که ۲ نفر آنها به همان بیماری مبتلا هستند. فاصله اطمینان ۹۹٪ برای $P_1 - P_2$ پیدا کنید؟

• حل

$$n_1, n_2 \langle 30$$

$$99\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = \%0/01$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(28)} = t_{0/995}^{(28)} = 2/76$$

$$P_2 = \frac{2}{10} = 0/2$$

$$P_1 = \frac{15}{20} = 0/75$$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \langle P_1 - P_2 \langle P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$0/75 - 0/2 - 2/76 \sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}} \langle P_1 - P_2 \langle 0/75 - 0/2 + 2/76 \sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}}$$

$$0/12 \langle P_1 - P_2 \langle 0/98$$

www.pnu-m-s.com

تمرین

- ۱) ۶۵٪ از کل افرادی که به فروشگاه مراجعه می کنند خرید می کنند اگر در یک روز ۳۰ نفر به این فروشگاه مراجعه کنند؟
 الف) حداقل ۲۲ نفر خرید کنند.
 ب) کمتر از ۱۵ نفر خرید کنند.
 ج) دقیقاً ۲۰ نفر خرید کنند.

- ۲) توزیع نرمال با میانگین ۳۵ سال و انحراف معیار ۱۲ سال است. اگر خط مشی شرکت باز نشسته کردن تمام افرادی باشد که بیش از ۵۵ سال سن دارند چند درصد از کارگران بازنشسته می شوند.

- ۳) براساس تجربه مشخص شده که یک تلفنچی ۳٪ از تلفن ها را اشتباه وصل می کند. اگر امروز ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد. مطلوبست:
 الف) میانگین تلفنهایی که اشتباه وصل شده است.
 ب) احتمال اینکه ۳ تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.
 ج) احتمال اینکه بیش از یک تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.

- ۴) تابع احتمال توام دو متغیری y و x به صورت زیر است. ضریب همبستگی؟

$y \backslash x$	0	1	2
-5	0/3	0/03	0/08
10	0/1	0	0/5

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

www.pnu-m-s.com

وبسایت تخصصی مدیریت صنعتی

www.m-sanati.ir