۱) یکی از بهترین سوالاتی بود که می شد برای مرحله ی دوم از آن استفاده کرد. تنها مشکل آن نبود ثوابت مورد نیاز در جدول ثوابت آزمون می باشد.

$$\Delta E = n.\Delta m \quad , \quad n = \frac{5.49}{238.05}\ MeV.amu^{-1} \simeq 2.2\times 10^{12}\ J.Kg^{-1}$$

$$\Delta m \propto -m.\Delta t \longrightarrow m = m_0 e^{-\lambda t}\ ,\ \lambda = -\frac{\ln 0.5}{\tau(\text{نیمه عمر})} \longrightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\ln 0.5}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln 0.5}{\tau}t}$$

$$\text{توان}(1) = \left|\frac{\Delta E}{\Delta t}\right| = -\frac{\ln 0.5}{\tau}.r.n.m_0 e^{\frac{\ln 0.5}{\tau}t} \quad , \quad r = \text{بازده مولد رادیو گرمایی}$$

$$\text{توان}(2) = \frac{\Delta E}{\Delta t} = p'.\left(\frac{1}{d_{AU}}\right)^2.\left(\frac{S}{S'}\right) \quad , \quad p' = \text{توان ایستگاه فضایی} \quad , \quad S' = \text{مساحت ایستگاه فضایی}$$

$$\text{توان}(1) = \text{توان}(2) \longrightarrow \boxed{S = -\frac{\ln 0.5}{\tau}.\frac{r.n.{d_{AU}}^2.S'}{p'}.m_0 e^{\frac{\ln 0.5}{\tau}t}}$$

$$t = 1358{,}6{,}5 - 1356{,}5{,}30 = 2\ \text{سال}\ 6\ \text{روز} \longrightarrow \boxed{S \simeq 842\ m^2}$$

۲) یک سوال بسیار ساده که شاید باعث می شد وقت برای سوالات دیگر زیاد باشد. از فرض های مساله استفاده کنیم.

$$L_{\text{درخشندگی}} \propto M_{\text{جرم}} \quad , \quad L_{\text{درخشندگی}} \propto R^2_{\text{شعاع کهکشان}} \quad , \quad V^2_{const} \propto \frac{M}{R} \longrightarrow L \propto V^4_{const}$$

$$M_{\text{قدر مطلق}} = -\frac{5}{2}\log L + cte. \longrightarrow \boxed{M_{\text{قدر مطلق}} = -10\log V_{const} + const}$$

۳) سوالی که باعث شد عده ای به خاطر جمله بندی آن پاسخی برای آن نداده باشند ولی در هر حال یکی از کوتاه ترین و ساده ترین سوالات هم بود.

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = 0 \longrightarrow \text{شار مغناطیسی} = \phi = cte. \longrightarrow B.r^2 = B_0.{r_0}^2 \longrightarrow \boxed{B = (\frac{r_0}{r})^2.B_0}$$

$$\longrightarrow B = (\frac{r_\odot}{r_\oplus})^2.B_0 \longrightarrow \boxed{B = 2.4\ \text{تسلا}}$$

۴) جالب بود این سوال از مکانیک کلپنر کپی شده بود ولی با حذف قسمت هایی از سوال آن را نا مفهوم ساخته بودند. تمرین یک کتاب نمی تواند سوال مرحله دوم باشد. به هر حال برای حل این سوال مقدار تاخیر زمانی رسیدن نور را برای هر دو مسیر به صورت کلاسیکی حساب می کنیم. سرعت نور را c و ضریب شکست آب را n در نظر می گیریم.

$$\Delta t = 2\ell\left(\frac{1}{\frac{c}{n}-v} - \frac{1}{\frac{c}{n}+v}\right) \approx \frac{4\ell n^2 v}{c^2}$$

جابجایی فریز تعداد طول موج های جاگرفته در جابجایی نورهای رسیده است.

$$\boxed{N = \frac{4\ell.n^2.v}{c.\lambda}}$$

۵) این سوال هم یکی از سوالات تکراری آزمون بود. می توانید در متن کتاب مکانیک سماوی 'تاتوم' دقیقا با همین داده ها آن را ببینید. چیزی که به ذهن می آید این است که پنج معادله و پنج مجهول را نوشته و مجهولات را پیدا کرد ولی راهی که بنظر من راهی شاید آسان تر است این است که از معادله ی خطوط گذرنده از دوبه دوی نقاط استفاده کرد.

معادله خطی که از نقطه ی $A\,,B$ می گذرد برابر $\alpha = 0$ ، معادله خطی که از نقطه ی $A\,,C$ می گذرد برابر $\beta = 0$ ، معادله خطی که از نقطه ی $D\,,B$ می گذرد برابر $\gamma = 0$ و معادله خطی که از نقطه ی $C\ ,\ D$ می گذرد برابر $\delta = 0$ است. معادله خطوطی(نه خط راست) که از نقطه ی $A\,,B,C,D$ می گذرد برابر $\alpha.\delta = 0$ و $\beta.\gamma = 0$ و معادله خطی که از نقطه ی $A\,,B,C,D,E$ می گذرد برابر $\alpha.\delta + \lambda(\beta.\gamma) = 0$ است.

λ ثابتی است که با تعیین آن مساله تقریبا حل شده می شود. با توجه به داده ها داریم:

$$\alpha = 3y - x - 23 = 0\,, \beta = y + 3x - 19 = 0\,, \gamma = y + x - 13\,, \delta = y - 2x + 8$$

$$\alpha.\delta = 2x^2 + 3y^2 - 7xy + 38x + y - 184 = 0\,, \beta.\gamma = 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 58x - 45y + 247 = 0$$

$$(2+3\lambda)x^2+(3+2\lambda)y^2-(7-5\lambda)xy+(38-58\lambda)x+(1-45\lambda)y-184+247\lambda=0$$

این باید در نقطه ی E صدق کند از آنجا : $\lambda=\frac{76}{13}$

پس معادله ای که از این پنج نقطه می گذرد چنین است:

$$\boxed{508x^2+382y^2+578xy-7828x-6814y+32760=0}$$

می توانید بسادگی اثبات کنید که برای تغییر شکل به استاندارد معادله ی بالا باید دورانی به این اندازه داد:

$$\tan 2\vartheta=\frac{578}{508-382}\longrightarrow \vartheta=128.8\,Deg.$$

$$x=x'\cos\vartheta-y'\sin\vartheta \quad , \quad y=x'\sin\vartheta+y'\cos\vartheta$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{(x'-1.33)^2}{25.46}+\frac{(y'+6.99)^2}{5.13}=1}\longrightarrow \boxed{a\simeq 5\,,e\simeq 0.89}$$

۶) هدف این سوال محاسبه ی لیبراسیون در طول جغرافیایی می باشد. اگر l اندازه ی حرکت زاویه ای مداری باشد به نظر من رابطه ی ای که به عنوان راهنمایی داده شده است مشکل تایپی دارد که بالاخره سوال طبق آن تصحیح خواهد شد ولی جالب اینکه در نتیجه تاثیر نخواهد داشت چون اگر در مساله فرض بر این باشد که $e^2=0$ که در یک طرف معادله در نظر گرفته و در طرف دیگر آن فراموش شده است در اینصورت تاثیری در جواب ندارد.

λ را در رابطه ی اول قرار دهید و با استفاده از رابطه ی روبرو(قانون دوم کپلر) به معادلات زیر برسید. $l=\frac{2\pi ma^2\sqrt{1-e^2}}{P}$

من در نظر می گیرم که رابطه اشتباهی ندارد و در اینصورت : $\frac{2\pi}{p}t=\theta-2e\sin\theta$

با رسم شکل می توان نتیجه گرفت زاویه ی افزایش دید چنین است : $\alpha:=\theta-\frac{2\pi}{p}t=2e\sin\theta$

از رابطه ی بالا براحتی می شود فهمید که در نصف تناوب به اندازه ی 2e بیشتر دیده می شود. پس در کل کسری از آن که دیده می شود برابر است با: $\boxed{n=\frac{\pi+4e}{2\pi}=\frac{1}{2}+\frac{2e}{\pi}}$

۷) باز هم حساب برداری ما را در حل این مساله ی زیبا کمک خواهد کرد. چون ستاره ی اول با افق مماس می شود می توان نتیجه گرفت که این ستاره در حال عبور پایین بود.

$$\delta_A=90-\varphi-\cos^{-1}\frac{R_\oplus}{R_\oplus+h}\longrightarrow \delta_A=27.97\longrightarrow \delta_B=9.97$$

در روی سوال از سرعت نسبت به سطح زمین صحبت شده است پس : $\omega_p=\frac{v+v_\oplus\cos\varphi}{R_\oplus+h}=0.294\ rad.h^{-1}$

دقت کنید که نقطه ی شروع نقطه ی برگشت مدار هواپیما است. دستگاه مختصات راستگردی بر روی مرکز زمین می نهیم. محور x را جهت گره مسیر هواپیما با استوا فرض می کنیم. بردار مکان ستاره ی دوم در این دستگاه ثابت خواهد بود بطوری که همیشه درصفحه ی xz خواهد بود (چرا؟)

$$\hat{r}(s)=\cos\delta_B\,\hat{\imath}+\sin\delta_B\hat{k}$$

در این دستگاه بردار مکان خلبان تابع زمان خواهد بود. واضح است که مدار هواپیما با استوا انحرافی به اندازه ی عرض جغرافیایی دارد (چرا؟). بنا بر این بردار یکه ی مکان هم چنین خواهد بود. زمان صفر را زمانی در نظر گرفته ایم که در شهر با عرض $\varphi=60$ هستیم.

$$\hat{r}(o)=\sin(\omega_p t)\hat{\imath}-\cos\varphi\cos(\omega_p t)\hat{\jmath}+\sin\varphi\cos(\omega_p t)\hat{k}$$

بردار مکان نسبی ستاره موازی بردار مکان آن است پس بهنگام غروب باید زاویه ی بین دو بردار بالا برابر $(180-\sin^{-1}\frac{R_\oplus}{R_\oplus+h})$ باشد. با ضرب داخلی دو بردار یکه و حل معادله ای می شود مقدار زمان را محاسبه کرد. پس از حل معادله ی جواب ها را تحلیل کنید. این معادله برای شما زمان طلوع را هم می دهد که لازم ندارید.

$$\boxed{t=11^h12^{min}}$$

با آرزوی توفیق روزافزون برای شما