این یادداشت در سه قسمت تدوین شده است. در قسمت اول به کلیات پرداخته می‌شود، در قسمت دوم ساختار نحوی و معنایی منطق گزاره‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد، و در قسمت سوم ساختار نحوی و معنایی منطق محمولات مرتبه‌ی اول (و چون در این یادداشت اصولاً با منطق محمولات مرتبه‌ی دوم کاری نداریم، منطق محمولات مرتبه‌ی اول را به اختصار «منطق محمولات» خواهیم نامید).

قسمت اول: کلیات

منطق جدید یا منطق ریاضی (در مقابل منطق ارسطویی) که با کتابِ «مفهوم نگاری» فرگه در سال ۱۸۷۹ پایه‌ریزی شد با تکیه بر روش‌ها و نمادهای ریاضی به مطالعه استدلال‌ها، استنتاج‌ها و تشخیص درستی و نادرستی آنها می‌پردازد.

در تبیین منطق جدید از سه روش می‌توان بهره گرفت: «روش اصل موضوعی»، «روش استنتاج طبیعی» و «روش نموداری». در این یادداشت به روش نموداری پرداخته نخواهد شد.

در روش اصل موضوعی، منطق را بر پایه‌ی تعداد محدودی اصول موضوعه و قواعد استنتاج پی‌ریزی می‌کنند.

در روش استنتاج طبیعی، منطق را بر پایه‌ی تعداد محدودی از قواعد استنتاج (قواعد حذف و معرفی) پی‌ریزی می‌کنند.

برای ادامه‌ی کار نیازمند پرداختن به چند اصطلاح فنی هستیم:

- زبان طبیعی: همان است که با آن سخن می‌گوییم و نیازهای اجتماعیِ خود را برطرف می‌سازیم.
- زبان صوری: همان است که با توجه به نیازهای علمیِ گوناگون ساخته می‌شود و دارای این عناصر تشکیل دهنده است: واژگان، قواعدِ ساخت، تعاریف
- سیستم صوری: این را می‌توان با عناصر تشکیل دهنده‌اش معرفی کرد: ۱- زبان صوری ۲- دستگاه استنتاج شامل اصول موضوعه و قواعد استنتاج.
- ساختار نحوی: ساختار نحوی یک زبان صوری مطالعه واژگان و روابط صوری بین فرمول‌ها و تفکیک آنها از دیگر عبارات زبان صوری است بدون توجه به معنای آنها.
- ساختار معنایی: مطالعه و بررسی روابط معین بین اشیای زبانی (فرمول‌ها) و اشیای غیرزبانی است؛ یعنی تعیین مدلول و معنای این اشیای زبانی.
- زبان موضوعی: زبانی که مورد مطالعه است.
- فرا زبان: زبانی که مطالعه زبان موضوعی در آن صورت می‌گیرد.
- منطق گزاره‌ها: آن بخش از منطق جدید که تنها به بررسی و نمادگذاری جمله‌ها و استدلال‌های مبتنی بر آنها می‌پردازد.
- منطق محمولات: آن بخش از منطق جدید که علاوه بر جملات به اجزای داخلیِ جمله و فرمول‌بندی و نمادگذاریِ آنها و همچنین به استدلال‌های مبتنی بر این فرمول‌بندی‌ها می پردازد.

قسمت دوم: منطق گزاره‌ها

قسمت دو-یک: ساختار نحوی

قسمت دو-یک-یک: سیستم اصل موضوعی

سیستم اصل موضوعی منطق گزاره‌ها را با S_A نشان می‌دهیم.

واژگان S_A عبارتند از: ۱- جمله نشانه‌ها ۲- ادات منطقی: $\sim, \supset$ ۳- نشانه‌های نقطه‌گذاری: $(,)$

قواعد ساخت S_A عبارتند از: ۱- هر جمله نشانه یک فرمول است. ۲- اگر ϕ یک فرمول است، $\sim\phi$ نیز یک فرمول است. ۳- اگر ϕ و ω دو فرمول باشند، $(\phi \supset \omega)$ نیز یک فرمول است.

تعاریف S_A عبارتند از (برای تعریف از نمادِ $:=$ استفاده می‌کنم): ۱- $(\phi \wedge \omega) := \sim(\phi \supset \sim\omega)$ ۲- $(\phi \vee \omega) := (\sim\phi \supset \omega)$ ۳- $(\phi \equiv \omega) := \sim((\phi \supset \omega) \supset \sim(\omega \supset \phi))$

اصول موضوعه‌ی S_A (بر مبنای سیستم فرگه-هیلبرت) عبارتند از: ۱- $\phi \supset (\omega \supset \phi)$ ۲- $(\phi \supset (\omega \supset \theta)) \supset ((\phi \supset \omega) \supset (\phi \supset \theta))$ ۳- $(\sim\phi \supset \sim\omega) \supset (\omega \supset \phi)$

قواعد استنتاج S_A: این سیستم دارای یک قاعده‌ی استنتاج به نام «وضع مقدم» است:

$$\frac{\phi \supset \omega \qquad \phi}{\omega}$$

قسمت دو-یک-دو: سیستم استنتاج طبیعی

سیستم استنتاج طبیعی منطق گزاره‌ها را با S_N نمایش می‌دهیم.

واژگانِ S_N عبارتند از ۱- جمله نشانه‌ها: همانند S_A است. ۲- نشانه‌های نقطه‌گذاری: همانند S_A است. ۳- ادات منطقی: $\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

قواعد ساختِ S_N عبارتند از: ۱- هر جمله نشانه یک فرمول است. ۲- اگر ϕ یک فرمول باشد، $\sim\phi$ نیز یک فرمول است. ۳- اگر ϕ و ω فرمول باشند، عباراتِ $(\phi \equiv \omega), (\phi \wedge \omega), (\phi \vee \omega), (\phi \supset \omega)$ نیز فرمولند.

تعاریف S_N: مجموعه‌ی تعاریف در S_N تهی است.

اصول موضوعه‌ی S_N: مجموعه‌ی اصول موضوعه در S_N تهی است.

قواعد اصلی استنتاج در S_N:

- قاعده‌ی معرفی $\sim$: $\dfrac{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \omega \wedge \sim\omega\end{matrix}}{\sim\phi}$

- قاعده‌ی حذف $\sim$: $\dfrac{\sim\sim\phi}{\phi}$

- قاعده‌ی معرفیِ $\wedge$: $\dfrac{\phi \qquad \omega}{\phi \wedge \omega, \omega \wedge \phi}$

- قاعده‌ی حذفِ $\wedge$: $\dfrac{\phi \wedge \omega}{\phi, \omega}$

- قاعده‌ی معرفیِ $\vee$:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \omega, \omega \vee \phi}$$

- قاعده‌ی حذفِ $\vee$:

$$\begin{array}{l} \phi \vee \omega \\ \left| \begin{array}{l} \phi \\ \vdots \\ \theta \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} \omega \\ \vdots \\ \theta \end{array} \right. \\ \hline \theta \end{array}$$

- قاعده‌ی معرفیِ $\supset$:

$$\begin{array}{l} \phi \\ \vdots \\ \omega \\ \hline \phi \supset \omega \end{array}$$

- قاعده‌ی حذفِ $\supset$:

$$\begin{array}{l} \phi \supset \omega \\ \phi \\ \hline \omega \end{array}$$

- قاعده‌ی معرفیِ $\equiv$:

$$\begin{array}{l} \left\langle \begin{array}{l} \phi \\ \vdots \\ \omega \\ \omega \\ \vdots \\ \phi \end{array} \right. \\ \hline \phi \equiv \omega, \omega \equiv \phi \end{array}$$

- قاعده‌ی حذفِ $\equiv$:

$$\begin{array}{l} \phi \equiv \omega \\ \omega \\ \hline \phi \end{array} \qquad \begin{array}{l} \phi \equiv \omega \\ \phi \\ \hline \omega \end{array}$$

اکنون با ابزاری که در دست داریم می‌توانیم برای استدلال‌های درست در S_N برهان بنویسیم. لازم به ذکر است که فرمول ϕ از S_N قضیه نامیده می‌شود اگر بدون هیچ مقدمه‌ای و تنها با استفاده از قواعد استنتاج اثبات شود.

قسمت دو-دو: ساختار معنایی

زبان صوریِ منطق گزاره‌ها را با L_S نمایش می‌دهیم. تعبیر I از L_S عبارت است از اسناد مدلول‌هایی (دو ارزش صدق (T) و کذب (F)) به فرمول‌های L_S. اسناد به توسط یک تابع صورت می‌گیرد که به این تابع، «تابعِ تعبیر» گفته می‌شود و با V نمایش داده می‌شود. اگر تابعِ V در تعبیر I به فرمول ϕ از L_S ارزش T نسبت دهد آن را این‌طور می‌نویسیم: $\models_{\mathrm{I}} \phi$ و در غیر این صورت: $\not\models_{\mathrm{I}} \phi$. اگر ϕ و ω دو فرمول از L_s باشند قواعد معناشناسیِ L_S را می‌توان مطابق جدول زیر خلاصه کرد:

ϕ	ω	$\sim\phi$	$(\phi \wedge \omega)$	$(\phi \vee \omega)$	$(\phi \supset \omega)$	$(\phi \equiv \omega)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F

F	F	T	F	F	T	T

فرمول راستگو به فرمولی گفته می‌شود که در هر تعبیری صادق باشد. فرمول متناقض به فرمولی گفته می‌شود که در هر تعبیری کاذب باشد. دو یا چند فرمول نسبت به هم «هم ارز» نامیده می‌شوند اگر تمامی تعابیری که فرمول اول را صدق‌پذیر می‌کند دیگری را هم صدق‌پذیر کند و اگر فرمول اول را کذب‌پذیر می‌کند دیگری را هم کذب پذیر کند. استدلال معتبر استدلالی است که در کلیه‌ی حالاتی که مقدماتِ آن صادقند نتیجه نیز صادق باشد.

درستیِ یک استدلال را در منطق گزاره‌ها با قواعد استنتاج و با ارائه‌ی یک برهان صوری می‌توان نشان داد، اما نشان دادن نادرستی یک استدلال با قواعد استنتاج میسر نیست. با این حال در ساختار معناییِ این منطق هم اعتبار و هم عدم اعتبار یک استدلال را می‌توان به سادگی و از طریق جدول ارزش نشان داد. برای تشخیص عدم اعتبار یک استدلال کافی است نشان دهیم سطری از جدول ارزش وجود دارد که در آن مقدمات صادق و نتیجه کاذب است. در صورتیکه چنین سطری یافت نشود استدلال معتبر است.

قسمت دو-سه: فرانظریه

فرانظریه‌ی یک سیستم صوری مطالعه برخی از اوصاف و ویژگی‌های آن سیستم است. یافته‌های فرانظریه «فراقضیه» نامیده می‌شود. چهار فراقضیه‌ی اصلی منطق گزاره‌ها عبارتند از:

یک) فراقضیه‌ی صحت: هر استدلال درست (به لحاظ صوری)، استدلالی معتبر (به لحاظ معنایی) است.

دو) فراقضیه سازگاری: یک سیستم صوری را در صورتی سازگار گوییم که دو فرمول ϕ و $\sim\phi$ را نتوان با هم به عنوان قضیه در آن سیستم اثبات کرد. از این نظر منطق گزاره‌ها سازگار است.

سه) فراقضیه‌ی تمامیت: هر استدلال معتبر، استدلالی درست است.

چهار) فراقضیه‌ی تصمیم‌پذیری: منطق گزاره‌ها تصمیم‌پذیر است. یعنی سیستم صوریِ این منطق ۱- دستورالعمل‌های محاسباتی دقیق و متناهی دارد. ۲- این دستورالعمل‌ها کاملاً مکانیکی هستند. ۳- کاربرد این دستورالعمل‌ها نتایج قطعی به دست می‌دهد. ۴- با استفاده از این دستورالعمل‌ها بعد از طی مراحل متناهی می‌توان معین کرد که یک فرمول مشخص، قضیه است یا خیر.

قسمت سوم: منطق محمولات

قسمت سه-یک: ساختاری نحوی

قسمت سه-یک-یک: سیستم اصل موضوعی

سیستم اصل موضوعی منطق محمولات را با P_A نمایش می‌دهیم.

واژگان P_A عبارتند از جمله نشانه‌ها، محمول نشانه‌ها، ترم‌ها (شاملِ ثوابت فردی، متغیرهای فردی) و ثوابت منطقی که شامل اینها است: $\forall, (,), \supset, \sim$.

قواعد ساختِ P_A عبارت است از سه قاعده‌ی پیش‌گفته در منطق گزاره‌ها بعلاوه‌ی این دو قاعده: ۱- اگر φ_n یک محمول n موضعی (n>0) و $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ ترم باشند، $\varphi_{\beta_1,...,\beta_n}$ یک فرمول خواهد بود. ۲- اگر α یک متغیر فردی و ϕ فرمولی از زبان صوری منطق محمولات (L_P) باشد، $(\forall\alpha)\phi$ نیز فرمول است به شرط آنکه اولاً ϕ

شامل مورد آزادی از متغیر α باشد، و ثانیاً ϕ شامل سوری بر حسب α نباشد. (دامنه‌ی هر سور کوتاه‌ترین فرمول واقع در سمت راست آن سور است. موردی از متغیر α را در فرمولی مثل ϕ «مورد آزاد» آن متغیر گوییم هرگاه در دامنه‌ی سورِ $(\forall\alpha)$ و $(\exists\alpha)$ قرار نگیرد.)

تعاریف P_A عبارتند از سه تعریف پیش گفته در S_A بعلاوه‌ی این تعریف: $(\exists\alpha)\phi :=\sim (\forall\alpha) \sim \phi$.

اصول موضوعه‌ی P_A عبارتند از سه اصل موضوعه‌ی S_A بعلاوه‌ی دو اصلِ ۱- $(\forall\alpha)\phi_\alpha \supset \phi_\beta$ که β یک ترم است و جانشین هر مورد آزادی از α در ϕ_α می‌شود. ۲- $(\forall\alpha)(\phi \supset \omega) \supset (\phi \supset (\forall\alpha)\omega)$ که فرمولِ ϕ نباید شامل هیچ مورد آزادی از α باشد.

قواعد استنتاج P_A عبارتند از ۱- قاعده‌ی وضع مقدم ۲- قاعده‌ی تعمیم: $\dfrac{\mapsto \phi}{(\forall\alpha)\phi}$

قسمت سه-یک-دو: سیستم استنتاج طبیعی

سیستم استنتاج طبیعی منطق محمولات را با P_N نمایش می‌دهیم.

واژگان P_N عبارتند از: ۱- جمله نشانه‌ها ۲- ثوابت منطقی : $\sim,\wedge,\vee,\supset,\equiv,\forall,\exists,(,)$ ۳- محمول نشانه‌ها ۴- ترم‌ها (شاملِ ثابت‌های فردی و متغیرهای فردی).

قواعد ساختِ P_N عبارتند از: همان چهار قاعده‌ی ساختِ پیش گفته در قسمت سه-یک-یک بعلاوه‌ی این قاعده: "اگر α یک متغیر فردی و ϕ_α نیز فرمولی از زبان صوری منطق محمولات باشد، $(\forall\alpha)\phi$ و $(\exists\alpha)\phi$ نیز فرمولند به شرط آنکه اولاً شامل مورد آزادی از متغیر نباشند، و ثانیاً شامل سوری برحسب α نباشند."

تعاریف P_N: مجموعه تعاریف در P_N تهی است.

اصول موضوعه‌ی P_N: مجموعه اصول موضوعه در P_N تهی است.

قواعد استنتاج P_N: تمامی قواعد اصلی در سیستم استنتاج منطق گزاره‌ها در اینجا نیز کار می‌کند. بعلاوه در منطق محمولات چهار قاعده‌ی اصلی دیگر نیز وجود دارد:

- قاعده‌ی حذفِ $\forall$: $\dfrac{(\forall\alpha)\phi_\alpha}{\phi_\beta}$ شاملِ ۱- شرط عمومی: ϕ_α دامنه‌ی سور است و ϕ_β باید «نمونه درست» آن باشد (یعنی β و فقط β جانشین تمامی موارد آزاد α و فقط α در ϕ_α گردد، و درصورتیکه β یک متغیر باشد، در کلیه‌ی مواردی که α در ϕ_α آزاد است، β نیز در ϕ_β آزاد باشد.). ۲- شرط اختصاصی: ندارد.
- قاعده‌ی معرفیِ $\forall$: $\dfrac{\phi_\beta}{(\forall\alpha)\phi_\alpha}$ شاملِ ۱- شرط عمومی: مانند شرط عمومی قاعده‌ی حذفِ $\forall$. ۲- شرط اختصاصی: الف) β باید یک متغیر باشد. ب) β نباید در مقدمات و در فرضی که ϕ_β در حوزه‌ی آن فرض است آزاد باشد. ج) β نباید در $(\forall\alpha)\phi_\alpha$ آزاد باشد.

- قاعده‌ی حذفِ $\exists$:
$$\begin{array}{l}(\exists\alpha)\phi_\alpha\\ \phi_\beta\\ \vdots\\ \omega\\ \hline \omega\end{array}$$
شاملِ ۱- شرط عمومی: مانند شرط عمومی قاعده‌ی حذفِ $\forall$. ۲- شرط اختصاصی: الف) β باید یک متغیر باشد. ب) β نباید در ω آزاد باشد. ج) β نباید در سطرهای قبل از ϕ_β آزاد باشد.

- قاعده‌ی معرفیِ $\exists$: $\dfrac{\phi_\beta}{(\exists\alpha)\phi_\alpha}$ شاملِ ۱- شرط عمومی: مانند شرط عمومیِ قاعده‌ی حذفِ $\forall$. ۲- شرط اختصاصی: ندارد.

قسمت سه-دو: ساختار معنایی

تعبیر I از L_P با یک دوتایی مرتبِ (D,V) مشخص می‌شود که D دامنه‌ی تعبیر است (مجموعه‌ای از اشیاء) که تهی نبودن آن شرط لازم هر تعبیری است، و V تابعِ تعبیر با این سه کارکرد: ۱- به هر جمله نشانه یکی از دو ارزش T یا F را اسناد می‌دهد. ۲- شیء معینی از دامنه‌ی تعبیر را به هر ترم اسناد می‌دهد. ۳- مجموعه‌ای از n تایی‌های مرتب از اشیای دامنه‌ی تعبیر را به هر محمول نشانه‌ی n موضعی اسناد می‌دهد.

اگر ϕ فرمولی از L_P و I تعبیری از این زبان باشد این ویژگی‌ها (شرایط صدق تارسکی) را داریم:

۱- اگر ϕ یک جمله نشانه باشد، $\models_{\mathrm{I}} \phi$ اگروتنهااگر $V(\phi)=T$

۲- $\models_{\mathrm{I}} \varphi_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ اگروتنهااگر $(V(\beta_1),\ldots,V(\beta_n)) \in V(\varphi_n)$

۳- $\models_{\mathrm{I}} \sim\phi$ اگروتنهااگر $\not\models_{\mathrm{I}} \phi$

۴- $\models_{\mathrm{I}} (\phi \wedge \omega)$ اگروتنهااگر $\models_{\mathrm{I}} \phi$ و $\models_{\mathrm{I}} \omega$

۵- $\models_{\mathrm{I}} (\phi \vee \omega)$ اگروتنهااگر $\models_{\mathrm{I}} \phi$ یا $\models_{\mathrm{I}} \omega$

۶- $\models_{\mathrm{I}} (\phi \supset \omega)$ اگروتنهااگر $\not\models_{\mathrm{I}} \phi$ یا $\models_{\mathrm{I}} \omega$

۷- $\models_{\mathrm{I}} (\phi \equiv \omega)$ اگروتنهااگر ($\models_{\mathrm{I}} \phi$ و $\models_{\mathrm{I}} \omega$) یا ($\not\models_{\mathrm{I}} \phi$ و $\not\models_{\mathrm{I}} \omega$)

۸- $\models_{\mathrm{I}} (\forall\alpha)\phi_\alpha$ اگروتنهااگر به ازای هر شیء از دامنه‌ی تعبیر که به β اسناد داده می‌شود $\models_{\mathrm{I}} \phi_\beta$

۹- $\models_{\mathrm{I}} (\exists\alpha)\phi_\alpha$ اگروتنهااگر به ازای حداقل یک شیء از دامنه‌ی تعبیر که به β اسناد داده می‌شود $\models_{\mathrm{I}} \beta$

اکنون سؤال این است که چگونه اعتبار و عدم اعتبار یک استدلال را می‌توان در منطق محمولات نشان داد. دو نکته‌ی زیر ما را در پاسخ به این سؤال کمک می‌کند:

- اگر استدلالی دارای n محمول نشانه‌ی یک موضعی بوده و در تعبیری با ۲^n عضو معتبر باشد در هر تعبیر دیگری با هر تعداد عضو نیز معتبر است.
- عدم اعتبارِ استدلال‌هایی را که شامل محمول دوموضعی یا بیشترند، در حالت کلی نمی‌توان نشان داد.

قسمت سه-سه: فرانظریه

فراقضیه‌های صحت، سازگاری، تمامیت و تصمیم‌پذیری در منطق محمولات (مرتبه‌ی اول) نیز برقرار است.