به نام یگانه معبود بخشنده مهربان

طراحی الگوریتم ها

Design and Analysis of Algorithms

گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

ترم دوم سال تحصیلی ۹۰–۹۱

ارائه دهنده : پیمان ادیبی

حل معادلات بازگشتی

Recurrence Equations

حل معادلات بازگشتی

- برای تحلیل پیچیدگی زمانی توابع بازگشتی (recursive functions) (t_n)، معمولاً زمان اجرا (تعداد دفعات تکرار عمل اصلی) بر حسب زمان اجرای فراخوانیهای بازگشتی (t_{n-1}، $t_{n/2}$، ....) بیان میشود.

- بدین ترتیب یک معادله بازگشتی (recurrence equation) خواهیم داشت که با حل آن زمان اجرا بدست می آید.

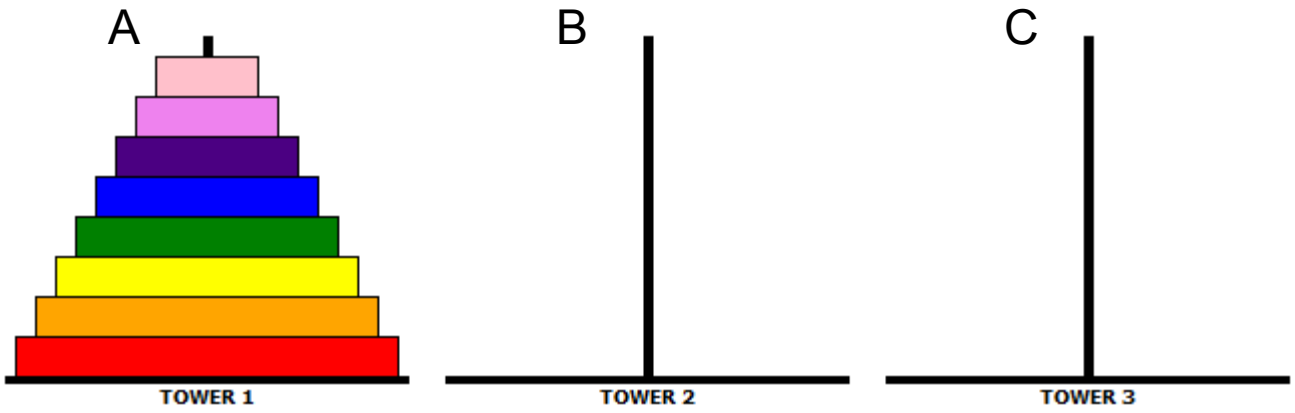
- در پیوست دوم کتاب روشهای حل اینگونه معادلات بیان شده است.

حل معادلات بازگشتی با استقرا (Induction)

- راه کلی: با داشتن یک معادله بازگشتی ابتدا پاسخی برای آن حدس زده و سپس درستی این پاسخ را با استقرا ثابت میکنیم.
- مثال: برجهای هانوی:
  - میخواهیم n دیسک با قطرهای مختلف را از میله A به میلهٔ C با کمک میلهٔ B منتقل کنیم. در این انتقال ها دو محدودیت داریم:

    1- در هر انتقال تنها یک دیسک را میتوان منتقل نمود.

    2- هیچگاه دیسک با قطر بزرگتر نباید روی دیسک با قطر کوچکتر قرار گیرد.



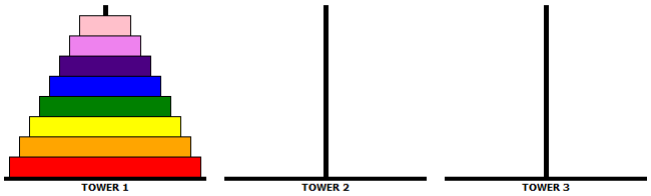
حل معادلات بازگشتی با استقرا (Induction)

- ایده بازگشتی حل مساله برجهای هانوی:

1- ابتدا n-1 دیسک را از میله A به B با کمک C منتقل میکنیم.

2- سپس دیسک آخر را از A به C منتقل میکنیم.

3- نهایتاً n-1 دیسک را از میله B به C منتقل میکنیم.



- الگوریتم بازگشتی حل مساله برجهای هانوی:

مساله: انتقال n دیسک از مبدا به مقصد بکمک میله واسط با رعایت محدودیتهای فوق

ورودیها: عدد n، سه لیست دربردارنده محتویات سه میله

خروجیها: لیستهای میله‌ها با محتویات مطلوب

```
void HanoiTowers(int n, int X[], int Y[], int Z[])
{
    if (n==1)
        move the top disk of X to Z;
    else {
        HanoiTowers(n-1, X, Z, Y);
        move the top disk of X to Z;
        HanoiTowers(n-1, Y, X, Z);
    }
}
```

فراخوانی اولیه:

A ← [1, …, n]

B ← []

C ← []

HanoiTowers(n, A, B, C);

حل معادلات بازگشتی با استقرا (Induction)

- تحلیل پیچیدگی زمانی الگوریتم بازگشتی حل مساله برجهای هانوی:

عمل اصلی: انتقال یک دیسک از میله ای به میله دیگر (move)

اندازه ورودی: n

تحلیل در هر حالت؟ داریم چون تعداد تکرار عمل اصلی به چیزی جز n بستگی ندارد

```
void HanoiTowers(int n, int X[], int Y[], int Z[])
{
    if (n==1)
        move the top disk of X to Z;
    else {
        HanoiTowers(n-1, X, Z, Y);
        move the top disk of X to Z;
        HanoiTowers(n-1, Y, X, Z);
    }
}
```

معادله بازگشتی:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(n-1)+1 & n > 1 \end{cases}$$

حدس پاسخ:

T(1)=1

T(2)=2+1=3

T(3)=6+1=7

T(4)=14+1=15

…

حدس : $T(n)=2^n-1$ ← اثبات حدس با استقرا

حل معادلات بازگشتی با استقرا (Induction)

پایه استقرا (Induction Base): $T(1)=1$

فرض استقرا (Induction Hypothesis): $T(n)=2^n-1$

حکم یا گام استقرا (Induction Step): $T(n+1)=2^{n+1}-1$

$$T(n+1) = 2T(n)+1 = 2(2^n-1)+1= 2^{n+1}-1$$

- مثال: مطلوبست حل رابطه بازگشتی زیر با استقرا (با فرض اینکه n توانی از 2 باشد):

$$t_n = \begin{cases} t_{n/2}+1 & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

$t_2=2$

$t_4=2+1=3$

$t_8=3+1=4$

$t_{16}=4+1=5$

...

حدس : $t_n=\lg n+1$ ← اثبات حدس با استقرا

پایه استقرا : $t_1=1$

فرض استقرا: $t_n=\lg n+1$

گام استقرا : $t_{2n}=\lg(2n)+1$

$$t_{2n}= t_{(2n/2)}+1= t_n+1=\lg n+1+1=\lg(2n)+1$$

حل معادلات بازگشتی با استقرا

- اشکال این روش:
  - راهی برای تعیین پاسخ یک معادله ارایه نمیدهد، بلکه تنها درستی یک پاسخ حدس زده شده را بررسی میکند.
  - همیشه نمیتوان پاسخ یک معادله بازگشتی را براحتی حدس زد.

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- یک راه حل تحلیلی برای دسته بزرگی از معادلات بازگشتی است.
- معادلات بازگشتی خطی همگن درجه k با ضرایب ثابت:
  - رابطه بازگشتی همراه با شرایط اولیه زیر موجود است:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0, \qquad (\text{for } n \geq k)$$

$$t_0 = I_0, \quad t_1 = I_1, \ldots, \quad t_{k-1} = I_{k-1}$$

  - این رابطه:

خطی است، چون تمام جملات درجه 1 هستند (جملاتی چون t_i^2 و $t_i t_j$ نداریم).
همگن است، چون ترکیب خطی t_i ها برابر با صفر است.
از درجه k است، چون t_n برحسب k جمله قبلی بیان شده‌است (k ثابت).
دارای ضرایب ثابت است، چون a_i ها ثابت فرض شده‌اند.

- اگر در رابطه فوق قرار دهیم $t_n = r^n$، معادله مشخصه را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k = 0}$$

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- اگر معادله مشخصه دارای **k** ریشه متمایز (غیر مضاعف) r_1 تا r_k باشد، تنها پاسخهای معادله بازگشتی بصورت زیر خواهند بود:

$$\boxed{t_n = C_1 r_1^n + \ldots + C_k r_k^n}$$

که C_1 تا C_k ضرایب ثابت بوده و در عمل با جایگذاری t_n و به کمک شرایط اولیه بدست می‌آیند.

- اگر معادله مشخصه دارای ریشه‌های متعدد (مضاعف) باشد، برای هر ریشه متعدد **r** با تعدد **m**، هر یک از جملات زیر را با یک ضریب ثابت در مجموع مربوط به پاسخ عمومی معادله بازگشتی وارد میکنیم:

$$r^n, \quad nr^n, \quad n^2 r^n, \ldots, \quad n^{m-1} r^n$$

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- مثال: دنباله فیبوناچی:

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0 \qquad \text{for } n > 1$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$
$$r^2 - r - 1 = 0. \longrightarrow r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{and} \quad r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$t_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \longrightarrow$$

$$t_0 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$
$$t_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$$c_1 = 1/\sqrt{5} \text{ and } c_2 = -1/\sqrt{5}. \longrightarrow \boxed{t_n = \frac{\left[\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]^n - \left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right]^n}{\sqrt{5}}}$$

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- معادلات بازگشتی خطی نا همگن با ضرایب ثابت:
  - رابطه بازگشتی مقابل را در نظر گیرید: $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = f(n)$ که **f(n)** مخالف تابع صفر است.
  - این رابطه ناهمگن است، چون ترکیب خطی $\mathbf{t_i}$ ها برابر با صفر نیست.
- اگر $\mathbf{g_n}$ پاسخ عمومی بخش همگن رابطه فوق ($a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$)، بوده و $\mathbf{h_n}$ یک پاسخ برای رابطه ناهمگن فوق باشد، آنگاه $\mathbf{h_n+g_n}$ پاسخ عمومی معادله ناهمگن فوق خواهد بود.
- برای یافتن $\mathbf{h_n}$ یک قاعده کلی وجود ندارد، لذا برای حالات خاص بحث میکنیم.
- حالت خاص: فرض کنید $f(n) = b_1^n p_1(n) + \cdots + b_S^n p_S(n)$ باشد، که $\mathbf{b_j}$ ها ثابت و $\mathbf{p_j(n)}$ ها چندجمله ای های درجه $\mathbf{d_j}$ از **n** باشند.

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- در این حالت خاص، معادله مشخصه رابطه بازگشتی به شکل زیر نوشته میشود:

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k)(r-b_1)^{d_1+1}(r-b_2)^{d_2+1}\cdots(r-b_s)^{d_s+1} = 0$$

- بقیه مراحل مانند قبل شامل حل معادله مشخصه، تشکیل پاسخ عمومی از ریشه های آن، و یافتن ضرایب از شرایط اولیه است.
- مثال: معادله بازگشتی زیر را حل کنید:

$$t_n - 4t_{n-2} = n^2 + 2^n \quad \text{for } n > 2, \qquad t_1 = 0, \qquad t_2 = 1.$$

بخش همگن: $t_n - 4t_{n-2} = 0$ ، جملات سمت راست: $1^n n^2, \ 2^n n^0$

لذا : $b_1=1$، $d_1=2$، $b_2=2$، $d_2=0$، و معادله مشخصه میشود:

$$(r^2-4)(r-1)^3(r-2) = 0 \longrightarrow r_1 = -2, \ r_2 = 1, \ r_3 = 2$$

$\boxed{m=3}$ $\boxed{m=2}$

√484

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

پاسخ عمومی:

$$t_n = C_1(-2)^n + C_2(1)^n + C_3 n(1)^n + C_4 n^2(1)^n + C_5(2)^n + C_6 n(2)^n$$
$$= C_1(-2)^n + C_2 + C_3 n + C_4 n^2 + C_5 2^n + C_6 n 2^n$$

شش مجهول و تنها دو شرط اولیه داریم. لذا چهار شرط اولیه دیگر میسازیم:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 1 \\ t_3 &= 4t_1 + 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17 \\ t_4 &= 4t_2 + 4^2 + 2^4 = 36 \\ t_5 &= 4t_3 + 5^2 + 2^5 = 125 \\ t_6 &= 4t_4 + 6^2 + 2^6 = 244 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ -8 & 1 & 3 & 9 & 8 & 24 \\ 16 & 1 & 4 & 16 & 16 & 64 \\ -32 & 1 & 5 & 25 & 32 & 160 \\ 64 & 1 & 6 & 36 & 64 & 384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 17 \\ 36 \\ 125 \\ 244 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.91 \\ -2.96 \\ -1.78 \\ -0.33 \\ 1.63 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad t_n = -0.91(-2)^n - 2.96 - 1.78n - 0.33n^2 + 1.63 \times 2^n + 0.5 \times n2^n$$

√484

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- تغییر متغیر:
  - برخی از معادلات بازگشتی با یک تغییر متغیر مناسب به فرم های شناخته شده تبدیل میشوند.
- مثال: معادله بازگشتی زیر را حل کنید:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2 \qquad \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 2$$
$$T(1) = 0$$

  - بعلت وجود جمله n/2 نمیتوان از روشهای قبلی مستقیماً برای حل آن استفاده کرد.
  - تغییر متغیر: $n = 2^k$ ←

$$t_k = T(2^k) \begin{cases} T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 18(2^{k-1})^2 \\ t_k = 7t_{k-1} + 18(2^{k-1})^2 = 7t_{k-1} + 18(4^{k-1}) = 7t_{k-1} + 4^k\left(\frac{18}{4}\right). \end{cases}$$

$$\longrightarrow t_k = c_1 7^k + c_2 4^k \longrightarrow T(2^k) = c_1 7^k + c_2 4^k \xrightarrow{k = \lg n} T(n) = c_1 7^{\lg n} + c_2 4^{\lg n}$$

$$\longrightarrow T(n) = c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^2. \longrightarrow T(n) = 6n^{\lg 7} - 6n^2 \approx 6n^{2.81} - 6n^2.$$

√504

حل معادلات بازگشتی با استفاده از معادلات مشخصه (Characteristic Equations)

- **قضیه:** اگر T(n) یک تابع پیچیدگی غیر نزولی نهایی باشد، و

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k) \quad \text{for } n > 2,\ n \text{ a power of } b$$
$$T(s) = d$$

آنگاه:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{if } a < b^k \\ \Theta(n^k \lg n) & \text{if } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a > b^k \end{cases}$$

که در آن a>0، b≥2، d≥0، و s توانی از b است.

- اثبات با تغییر متغیر و معادله مشخصه (قضیه B.6 کتاب).

- قضیه فوق با نمادهای O و Ω بجای Θ نیز برقرار است.
- مثال: تابع T(n) از چه مرتبه ای است؟ $T(n) = 27T(n/3) + 4n^3 + n^2$

√484

حل معادلات بازگشتی با جایگذاری (Substitution)

- **راه کلی:** با شروع از معادله بازگشتی در حالت کلی تا رسیدن به مقادیر اولیه **n** به عقب برمیگردیم. در هر بار، زمان فراخوانی های بازگشتی را با مقادیر قبلی جایگزین میکنیم.
- **مثال: برجهای هانوی:**

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \quad \text{for } n > 1$$
$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2(2T(n-2)+1)+1 = 2^2 T(n-2) + 2 + 1$$
$$= 2^2(2T(n-3)+1) + 2 + 1 \quad = 2^3 T(n-3) + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^3(2T(n-4)+1) + 2^2 + 2 + 1 \quad = 2^4 T(n-4) + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= \cdots = 2^{n-1}T(1) + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1(2^n - 1)}{2-1} = 2^n - 1$$

- مجموع **n** جمله اول از یک تصاعد هندسی با قدر نسبت **q** و جمله اول a_1:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)}}$$

حل معادلات بازگشتی با جایگذاری (Substitution)

- مثال: رابطه بازگشتی مقابل را حل کنید:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{2}{n} \quad \text{for n} > 1$$

$$t_1 = 0$$

$$t_n = t_{n-1} + \frac{2}{n} = t_{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} = t_{n-3} + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} = \cdots$$

$$= t_1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n} = 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \approx 2(\ln n - 1)$$

با فرض کوچک نبودن n

$$\Rightarrow t_n \in \theta(\lg n)$$

- مثال A.9 پیوست اول کتاب (با فرض کوچک نبودن n):

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n}$$