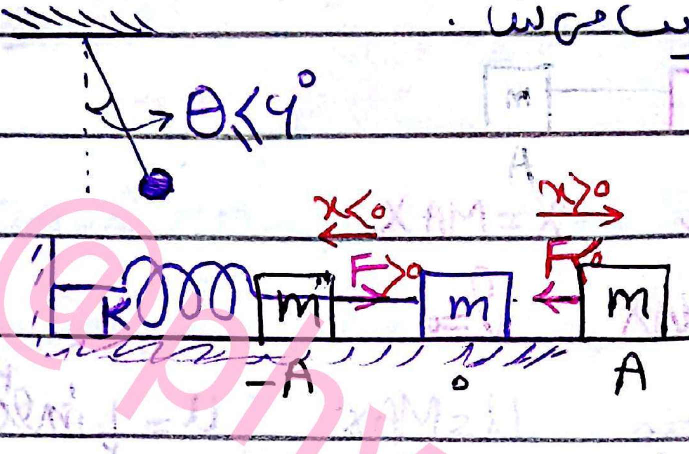
* فصل نوسان :

- حرکت نوسانی ساده : حرکتی رفت و برگشتی است روی پاره خط راست حول نقطه ای ثابت به نام مرکز نوسان که توسط نیروی بازگرداننده از قانون هوک $\vec{F}=-KX$ تبعیت می کند.



* بُعد (X) فاصله نوسانگر در هر لحظه از مرکز نوسان را گویند.

* دامنه (A) : بیشترین فاصله نوسانگر از مرکز نوسان گویند.

* دوره (T) : مدت زمان یک نوسان کامل را دوره گویند.

$$\boxed{T=\frac{t}{N}}$$

t : زمان (s) — N : تعداد کل نوسان ها — T : دوره (s)

* بسامد - فرکانس (f) : تعداد نوسان در یک ثانیه

$$\boxed{f=\frac{N}{t}}$$

f : فرکانس ($\frac{1}{s}$ یا Hz)

* بسامد زاویه ای - سرعت زاویه ای (ω) : تغییر مکان زاویه ای نوسانگر در یک ثانیه را گویند

$$\boxed{\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \quad \left(\frac{Rad}{s}\right)$$

$\bar{\omega}=\omega$ ، در یک نوسان کامل : $\Delta\theta=2\pi$ ، $\Delta t=T$ $\rightarrow$ $\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T} \ \text{یا}\ \omega=2\pi f}$

$\bar{\omega}=\omega$ شرط : متحرک در زمان های ثابت ، مقدارهای برابری را طی می کند برابرند

نکته 1 $\Rightarrow A=\frac{\text{طول پاره خط}}{۲}$

نکته 2 : ۱ نوسان کامل $=۴A$

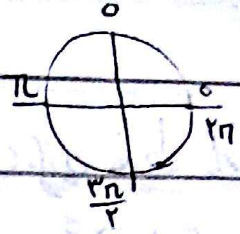
نکته ۳ : $T=\frac{1}{f}$ یا $f=\frac{1}{T}$ یا $fT=1$

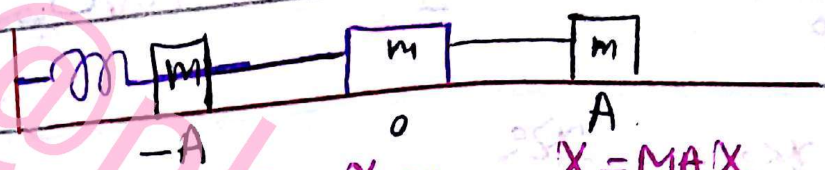
نوسان کامل	زمان
1	T
f	1

$\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{Rad}{s}\right) \longrightarrow T = 4s$

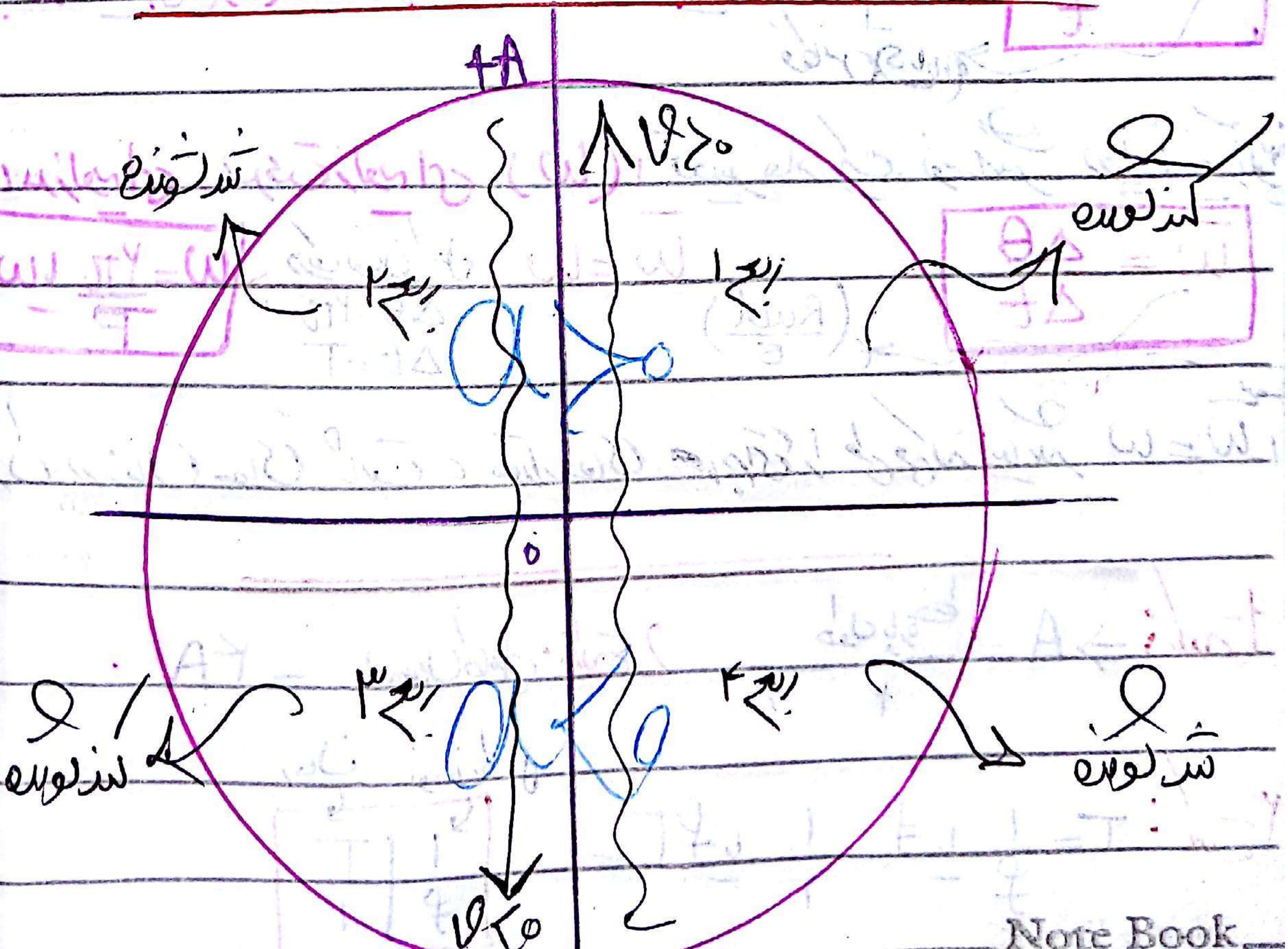
$\omega = \frac{5\pi}{2} \longrightarrow T = \frac{4}{5}s$

$\times \frac{1}{2}$ → عکس





$x = MAX$	$x = 0$	$X = MAX$	
$v = 0$	$v = MAX$	$v = 0$	
$U = MAX$	$U = 0$	$U = MAX$	$U = \frac{1}{2}Kx^2$
$F = MAX$	$F = 0$	$F = MAX$	$F = -KX$
$a = MAX$	$a = 0$	$a = MAX$	$F = ma$
$K = 0$	$K = MAX$	$K = 0$	$K = \frac{1}{2}mv^2$
$P = 0$	$P = MAX$	$P = 0$	$P = mv$
ثابت E	ثابت E	ثابت E	$E = U + K$



Note Book

معادله حرکت نوسانی ساده :

$$\underset{\text{بُعد نوسان}}{y} = \underset{\text{دامنه نوسان}}{A} \sin\left(\sqrt{\frac{\overset{\text{ثابت فنر}}{K}}{\underset{\text{جرم نوسانگر (kg)}}{m}}}\, t\right) = A \sin(\underset{\text{فاز حرکت}}{\omega t})$$

بسامد زاویه‌ای $\left(\frac{Rad}{s}\right)$

$$\longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{\omega}} \boxed{\underset{\text{دوره}}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

* دوره یک نوسانگر فقط به ویژگی‌های ساختاری نوسانگر (K و m) بستگی دارد.
* دوره و بسامد زاویه‌ای یک نوسانگر به A دامنه نوسانگر بستگی ندارد.

مثال: مطلوب است:

$$y = 0/5 \sin(20\pi t)$$

الف) دامنه – بسامد زاویه – بسامد – دوره را بیابید.

$A = 0/5\,m = 50\,cm$

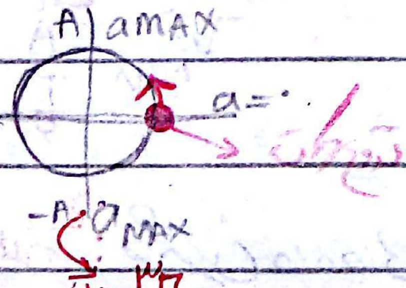
$\omega = 20\pi \left(\frac{Rad}{s}\right)$ (ضریب t)

$T = \frac{1}{10}\,s \Rightarrow f = 10\,Hz$

ب) مکان نوسانگر در لحظه $t = \frac{1}{5}$ چقدر است؟

$y = 0/5 \sin\left(20\pi \times \frac{1}{5}\right) = 0/5 \sin(4\pi) = 0$ در وضع تعادل

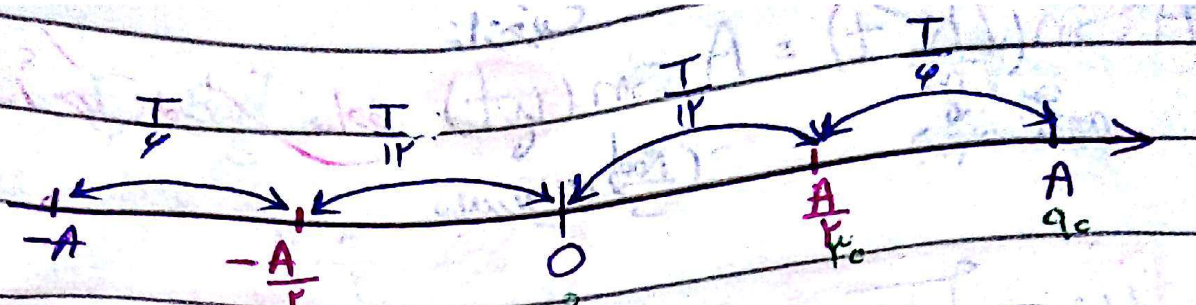
ج) چند ثانیه پس از شروع حرکت شتاب نوسانگر برای دومین بار MAX می‌شود؟

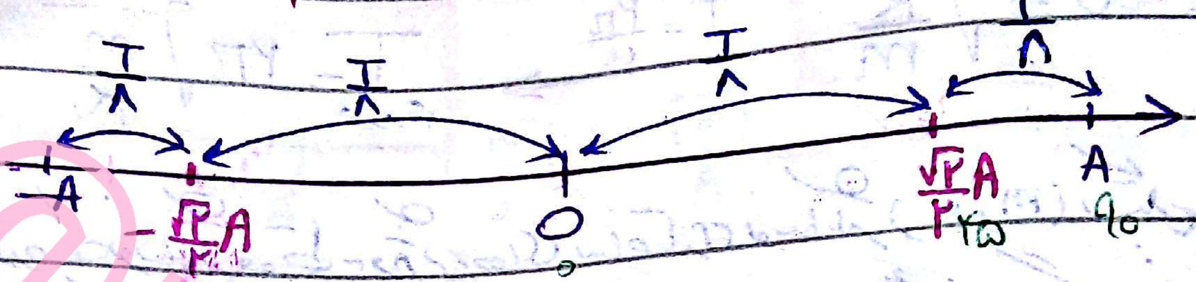


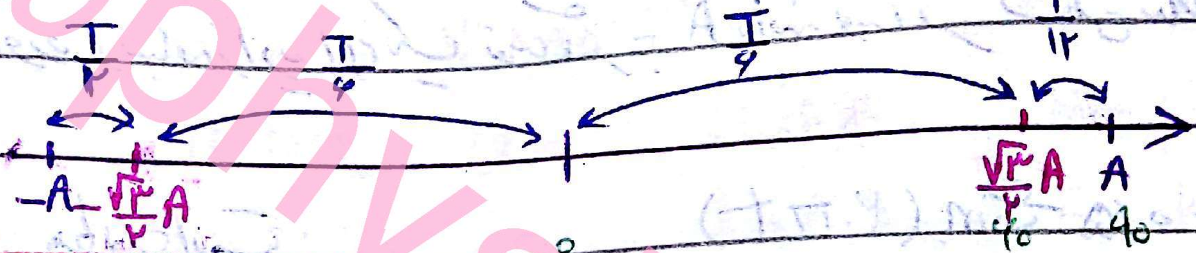
فاز حرکت $= \frac{3\pi}{2}$

$$20\pi t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{3}{40}\,s}$$

* تکنیک زمان‌های طلایی :





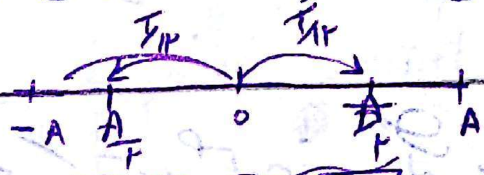


$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \sim \frac{T}{12}$$
$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \sim \frac{T}{6}$$
$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \sim \frac{T}{8}$$

$$15^\circ \sim \frac{T}{24}$$

نکته: بیشترین جابجایی نوسانگر در مدت زمان $\frac{T}{6}$ برابر A است.

اثبات: $\frac{T}{6} \div 2 = \frac{T}{12}$

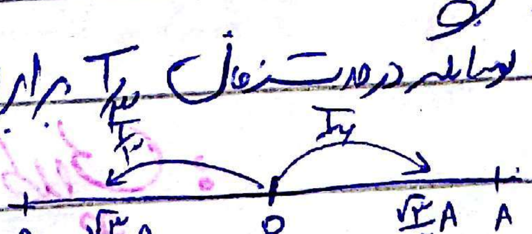


$$\Delta x = 2\left(\frac{A}{2}\right) = \boxed{A}$$

$$V_{MAX} = \frac{\Delta x_{MAX}}{\Delta t}$$
$$V_{MAX} = \frac{A}{\frac{T}{6}} = \frac{6A}{T}$$

نکته ۲: بیشترین جابجایی نوسانگر در مدت زمان $\frac{T}{3}$ برابر است با $\sqrt{3}A$

اثبات: $\frac{T}{3} \div 2 = \frac{T}{6}$



$$\Delta x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right) = \sqrt{3}A$$

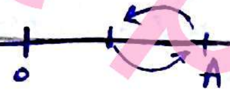
$$V_{MAX} = \frac{\sqrt{3}A}{T/3} = \frac{3\sqrt{3}A}{T}$$

نکته 3) بیشترین جابجایی نوسانگر در مدت زمان $\frac{T}{4}$ برابر است با $\sqrt{2}A$

نکته 4) $\frac{T}{2}$ برابر است با $2A$

تذکر ← نوسانگر در هر نوسان کامل دو بار از مرکز عبور می‌کند.

نکته ← کمترین مسافت طی شده در اطراف دامنه اتفاق می‌افتد.



$$\overset{A_{MAX}}{}$$

$$1)\ x = A \sin \omega t$$

$$2)\ V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V = \underbrace{A\omega}_{V_{MAX}} \cos \omega t$$

$$3)\ a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow a = -\underbrace{A\omega^2}\sin \omega t$$

$$|a_{MAX}| = A\omega^2$$

$$4)\ F = ma \Rightarrow F = -\underbrace{mA\omega^2}\sin \omega t$$

$$|F_{MAX}| = mA\omega^2$$

نکته 1) $a_{MAX} = A\omega^2 = V_M \cdot \omega = \frac{V_{MAX}^2}{A}$

$$x = A \sin \omega t$$

$$V = A\omega \cos \omega t = V_{MAX} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$a = a_{MAX} \sin \omega t = a_M \sin(\omega t + \pi)$$

نکته ۳: سرعت نسبت به بعد $\frac{\pi}{2}$ رادیان تقدم فاز دارد

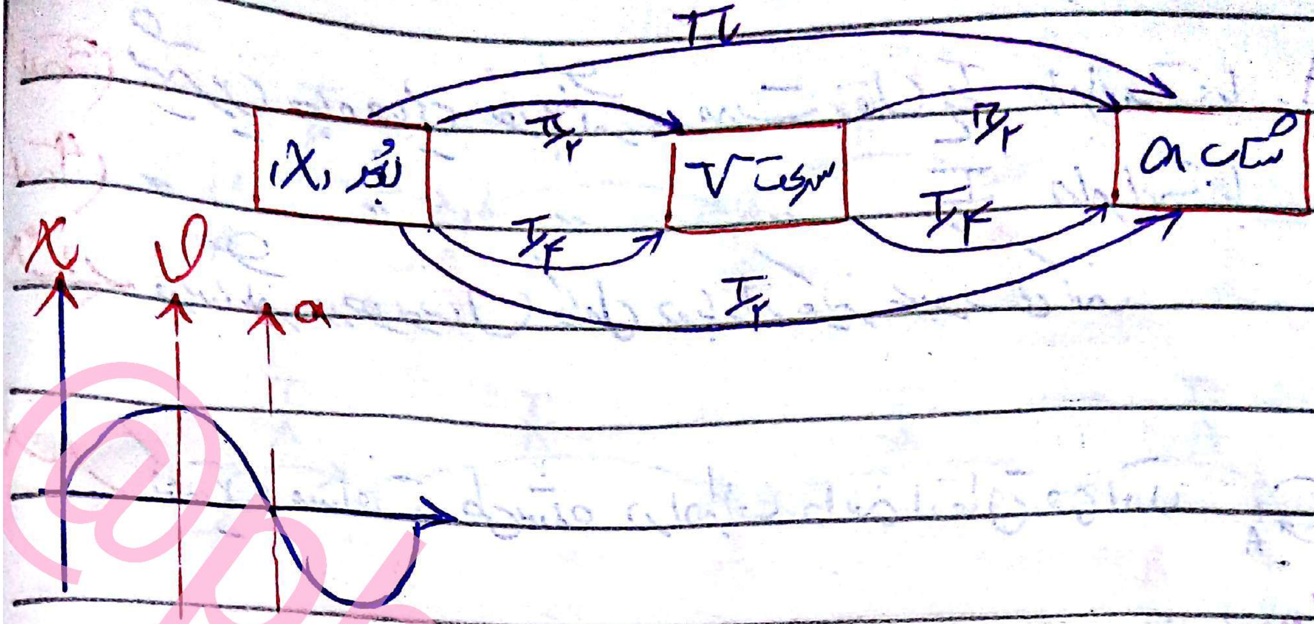
بعد نسبت به سرعت $\frac{\pi}{2}$ رادیان تأخیر فاز دارد

← شتاب با بعد در فاز متقابل اند.

← x با V با a هر کدام در $\frac{\pi}{2}$ از هم اختلاف فاز دارند.

فاز: $V \to x \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

فاز: $a \to V = \frac{\pi}{2}$

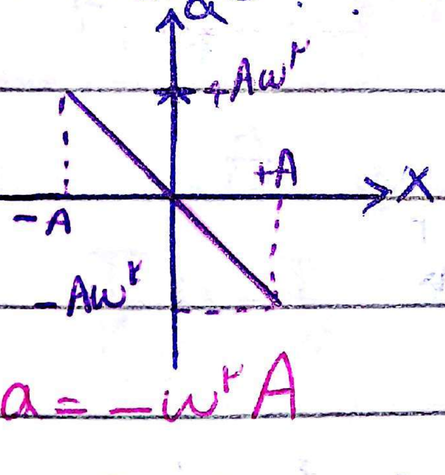


نکته 3: $a = -A\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x$

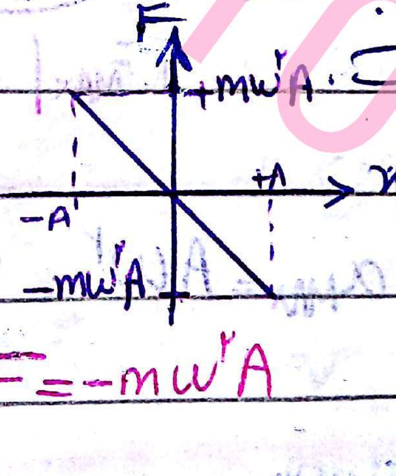
$\boxed{a=-\omega^2 x}$ $\xrightarrow[\text{در مرکز نوسان}]{x=0}$ $a=0$

در دو انتهای مسیر $x=\pm A$ → $|a|_{max}=A\omega^2$

شتاب همواره در خلاف جهت بردار مکان و متناسب با آن ولی در فاز مقابل با آن است.



$a=-\omega^2 A$



$F=-m\omega^2 A$

با تغییر $\omega t=\theta$ داریم:

$x=A\sin\theta \rightarrow \sin\theta=\frac{x}{A}$

$v=v_M\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{v}{v_M}$

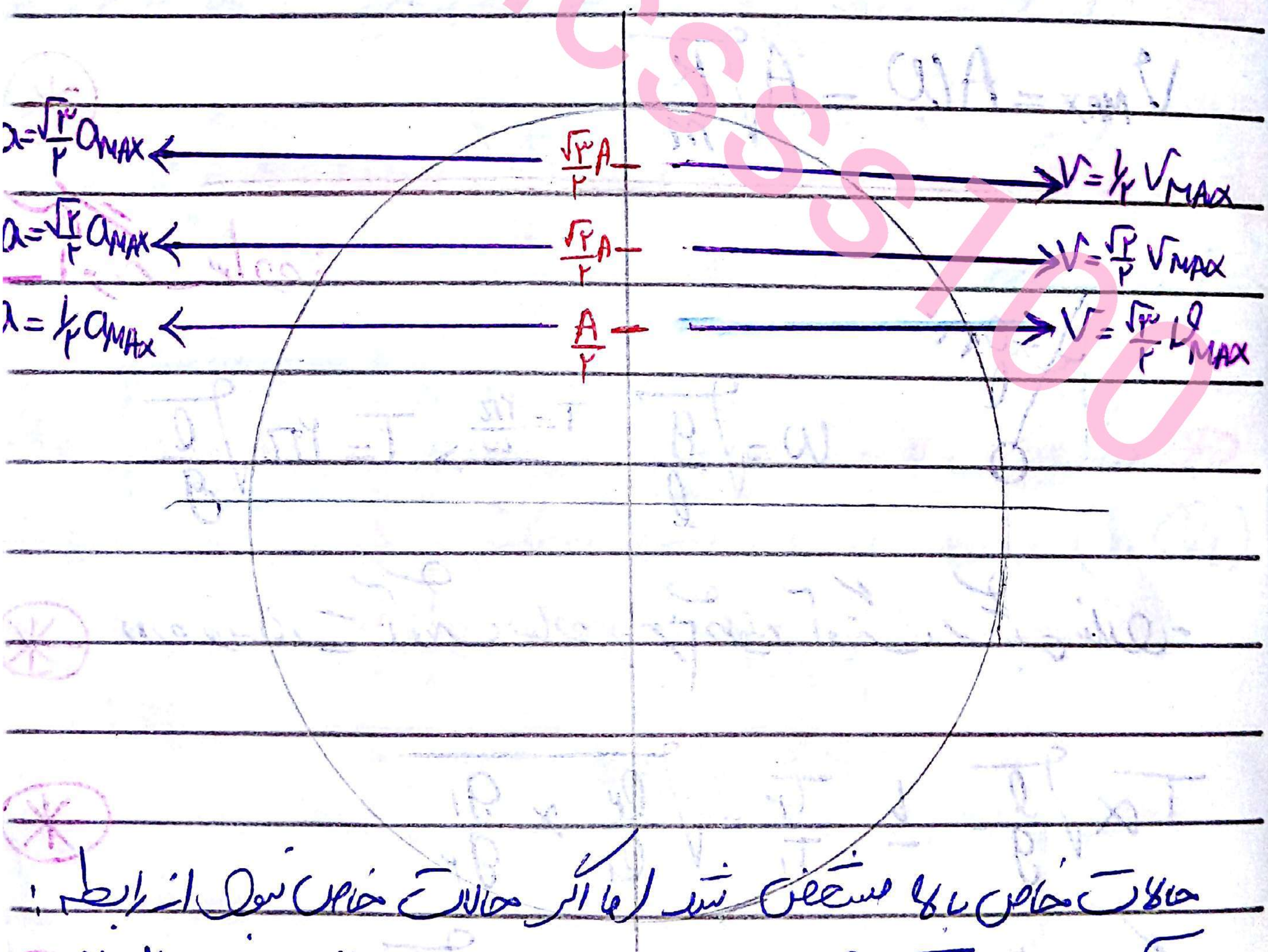
$a=a_M\sin\theta \rightarrow \sin\theta=\frac{a}{a_M}$

$$\frac{x}{A}=\frac{a}{a_M} \xrightarrow{\text{با داده و حذف}} \left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{a_M}\right)^2=1 \Rightarrow V=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\left(\frac{a}{a_M}\right)^2+\left(\frac{V}{V_M}\right)^2=1 \Rightarrow a=\pm\omega\sqrt{V_M^2-V^2}$$

اگر سرعت نوسانگری در بعد X_1 برابر V_1 و در بعد X_2 برابر V_2 باشد داریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{V_2^2-V_1^2}{X_1^2-X_2^2}} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} T=2\pi\sqrt{\frac{X_1^2-X_2^2}{V_2^2-V_1^2}}$$



حالات خاص را مشخص شد اما اگر حالات خاص نبود از رابطه:

$\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{V}{V_M}\right)^2=1$ یا $V=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ بدست می‌آید.

مثال:

$$x=\frac{1}{5}A \rightarrow \frac{V}{V_{MAX}}=?$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{V}{V_M}\right)^2=1 \rightarrow \frac{1}{25}+\frac{V^2}{V_M^2}=1 \Rightarrow \frac{V^2}{V_M^2}=\frac{24}{25} \xrightarrow{\sqrt{}} \frac{\sqrt{24}}{5}$$

Note Book

- نوسانات وزنه‌فنر:

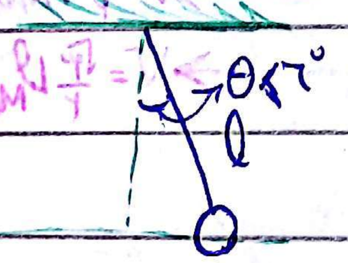
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

* دوره نوسانات وزنه-فنر به دامنه نوسان بستگی ندارد.

* $T \propto \sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2 \times K_1}{m_1 \times K_2}}$

* $V_{MAX} = A\omega = A\sqrt{\frac{K}{m}}$

- آونگ ساده:



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

* دوره نوسانات آونگ ساده به جرم وزنه آونگ بستگی ندارد.

* $T \propto \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1} \times \frac{g_1}{g_2}}$

* اگر: $\pi^2 \simeq g \longrightarrow T = 2\sqrt{l}$

* آونگ‌ها ثانیه را می‌زنند.

① $T = 2s$

② $l = 1m$

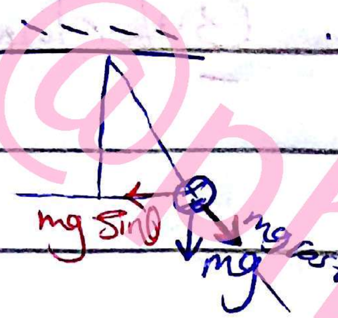
* اگر آونگ در یک جسم متحرک باشد.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\pm a}}$$

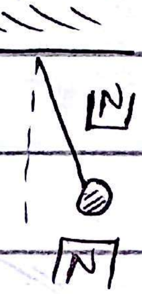
$+a$ زمانی که است که تند شونده رو به بالا یا کند شونده رو به پایین.

$-a$ " " " رو به پایین یا " رو به بالا.

* مؤلفه بازگرداننده در آونگ $mg\sin\theta$ است.



* در صورتی که بالا و پایین آونگ آهنربا قرار بگیرد آنگاه T از رابطه

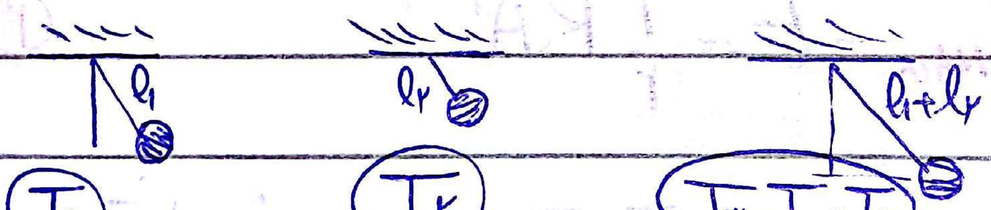


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\pm\frac{F}{L}}}$$

$+\frac{F}{L}$ زمانی که آهنربا زیر آونگ باشد

$-\frac{F}{L}$ " " بالای آونگ باشد

* در یک محل دو آونگ (آونگ به طول l_1 و آونگ دیگر به طول l_2 $(l_2<l_1)$ و دوره T_2 باشد آونگی که طولش l_1+l_2 باشد دوره اش



$$x \text{ درصد تغییرات} = \left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)\times 100$$

دوره با تعداد نوسان رابطه عکس دارد.

$E=U+K$

انرژی در حرکت نوسانی ساده

انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$

انرژی پتانسیل $U=\frac{1}{2}kx^2$

انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ ← پایسته

جدول طلایی

انرژی	فازی	مکانی
جنبشی K	$\cos^2\theta$	A^2-x^2
پتانسیل U	$\sin^2\theta$	x^2
مکانیکی E	1	A^2

۱) $E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow[\omega^2=\frac{k}{m}]{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}} E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 \xrightarrow{V_{MAX}=A\omega}$

$$\boxed{E=\frac{1}{2}mV_{MAX}^2}$$

E متناسب است با V_{MAX}^2

K متناسب است با V_{MAX}

۲) انرژی مکانیکی یک نوسانگر به جرم نوسانگر بستگی ندارد و با مجذور دامنه و مجذور بسامد نوسانگر رابطه مستقیم دارد.

$E\propto f^2A^2$

$\omega^2=(2\pi f)^2$ ... f^2

۳) $$\boxed{K_{MAX}=U_{MAX}=E=\frac{1}{2}kA^2}$$

* تنها در فازهای $\frac{\pi}{4}$ و مضربات آن U و K برابر خواهند بود.

* در بُعدهای $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ و زمان‌ها $(2n-1)\frac{T}{8}$ U و K برابر است.

$U=K$:

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=\pm0/7A$

$\theta=(2n-1)\frac{\pi}{4}$

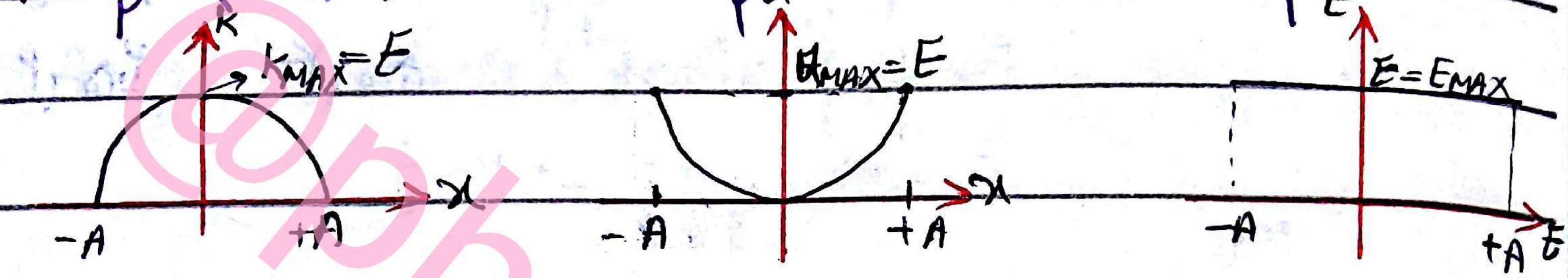
$t=(2n-1)\frac{T}{8}$

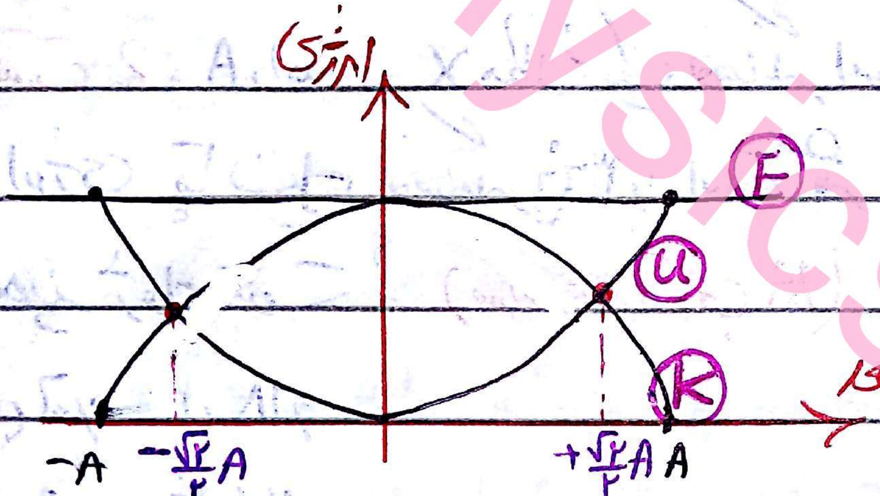
Note Book

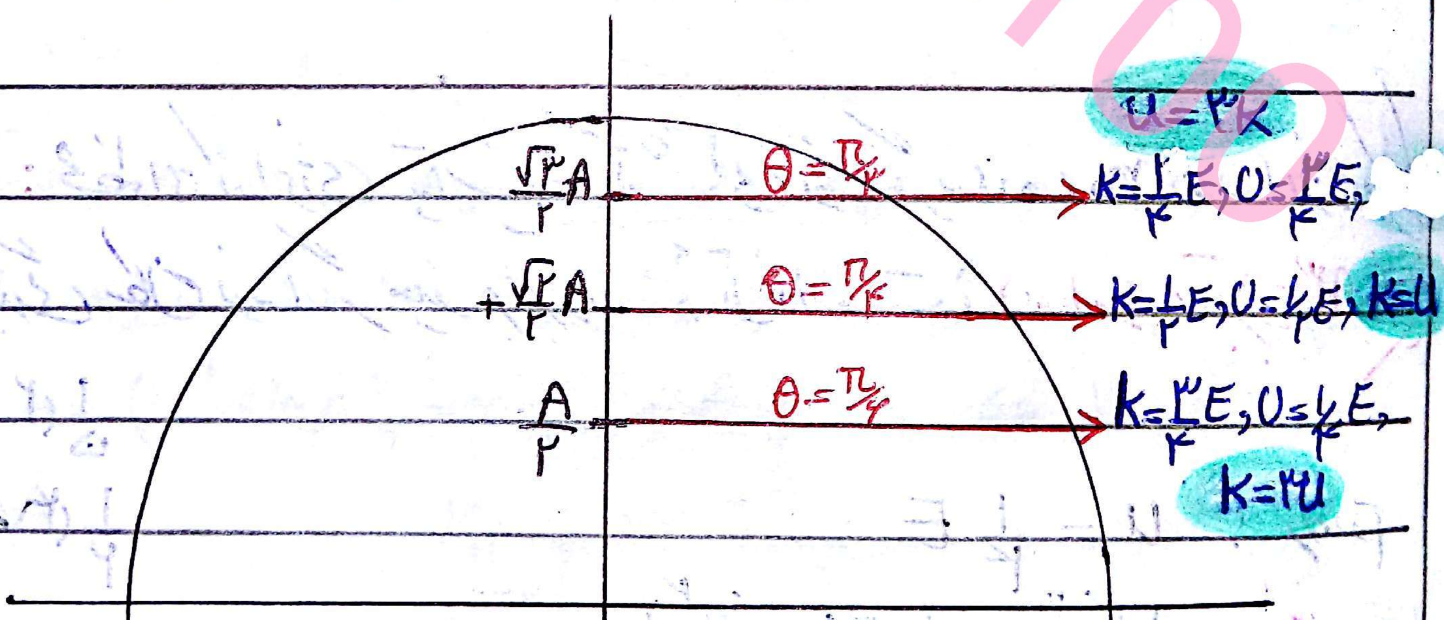
* در یک نوسان کامل ۲ مرتبه انرژی پتانسیل با انرژی جنبشی برابر خواهد شد

نمودارهای انرژی :

$K=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)$ $\qquad$ $U=\frac{1}{2}kx^2$ $\qquad$ $E=\frac{1}{2}kA^2$







تست 1 دامنه حرکت یک نوسانگر وزنه فنر 5cm است. اگر جرم وزنه $200\frac{N}{m}$ باشد

انرژی کل نوسانگر چند ژول است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) ۰٫۲۵ ✓　۳) ۵

۲) ۲٫۵　۴) ۵۰

$A = 5cm$

$m = 200$

$E = \frac{1}{2} K A^2$

$E = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{200}^{100} \times (5\times10^{-2})^2$

$E = \frac{100 \times 25}{10000} = 0.25$ ژ

تست 2: A دامنه و x مکان یک نوسانگر است. در لحظه‌ای که $x = A$ است انرژی پتانسیل نوسانگر ۰٫۳۶ ژول است. اگر $x = \frac{\sqrt{3}}{2} A$ شود انرژی جنبشی نوسانگر چند ژول است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$E = U_{MAX} = \frac{1}{2} K A^2 = 0.36$

۱) ۰٫۰۶　۳) ۰٫۱۸

۲) ۰٫۰۹ ✓　۴) ۰٫۲۷

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow K = \frac{1}{4} E = \frac{1}{4} \times 0.36 = 0.09$

تست ۳: لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر ساده، ۲۵ درصد انرژی مکانیکی است بزرگی مکان نوسانگر چند برابر دامنه آن است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خارج)

$U = \frac{1}{4} U \Rightarrow x = \frac{1}{2} A$

۱) $\frac{3}{4}$　۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{1}{2}$ ✓

راه دوم: $U = \frac{1}{4} E$

$\frac{1}{\cancel{2}} K x^2 = \frac{1}{4} [\frac{1}{\cancel{2}} K A^2]$

$x^2 = \frac{1}{4} A^2 \Rightarrow$ جذر $\boxed{x = \frac{1}{2} A}$

تست ۴: معادله انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر ساده‌ای در SI به صورت $u = 0.2 \sin(25\pi t)$ است. در لحظه $t = \frac{1}{100} s$ انرژی جنبشی این نوسانگر چند ژول است؟

[illegible]

Note Book

$u = 0.02 \sin(25\pi t) \longrightarrow E = U_{max} = 0.02$

$$\text{فاز نوسانگر} = 25\pi t \Big|_{t=\frac{1}{100}s} = 25\pi \times \frac{1}{100} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow K = U = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(0.02) = 0.01\,J$$

تست ۵: در لحظه‌ای که انرژی جنبشی نوسانگری با هماهنگ ساده ۸ برابر انرژی پتانسیل کشسانی آن است اندازه‌ی فاصله‌ی نوسانگر از مبدأ نوسان چه کسری از دامنه نوسان است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓

۲) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} = 8$$

$$8x^2 = A^2 - x^2 \Rightarrow 9x^2 = A^2$$

$$x = \frac{\pm A}{3}$$

تست ۶: نوسانگری به جرم 100g روی پاره‌خطی به طول 20cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در مدت $\frac{1}{4}$ ثانیه از مرکز نوسان به انتهای مسیر می‌رسد. انرژی جنبشی این نوسانگر در مرکز نوسان چند میلی‌ژول است؟ $(\pi^2 = 10)$ (سراسری تجربی ۹۵)

۱) 2 ۲) 8

۳) 20 ۴) 25

$m = 0.1\,kg$

$A = 10\,cm = 0.1\,m$

$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow T = 1\,s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \boxed{2\pi}$

$$K_M = \frac{1}{2} m V_M^2$$

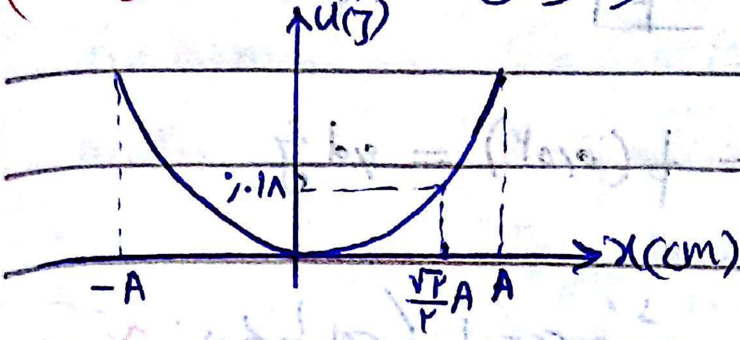
$$K_M = \frac{1}{2} m (A\omega)^2$$

$$K_M = \frac{1}{2} \times 0.1 (0.1 \times 2\pi)^2$$

$$K_M = \frac{1}{20} (4 \times 10^{-2} \times 10)$$

$$K = \frac{1}{20}(4 \times 10^{-1}) = 2 \times 10^{-2}\,J \Rightarrow 20\,mJ$$

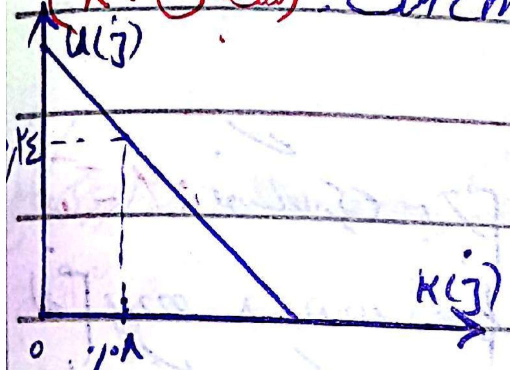
تست ۸: نمودار انرژی پتانسیل برحسب مکان نوسانگر ساده‌ای مطابق شکل است. انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)



۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۶ ✓ ۳) $0/18\sqrt{2}$ ۴) $0/18\sqrt{3}$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}A \Rightarrow U=K \Rightarrow E=U+K=2(0/18)=0/36\,J$$

تست ۹: شکل مقابل نمودار تغییرات انرژی پتانسیل نسبت به انرژی جنبشی دستگاه وزنه ـ فنری است که روی سطح افقی بدون اصطکاک نوسان می‌کند. اگر ثابت فنر $100\,\frac{N}{m}$ باشد دامنه نوسان چند cm است؟ (سنجش ۸۶)



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ✓

$$E=U+K \rightarrow U=E-K$$

$$E=0/24+0/08=0/32\,J$$

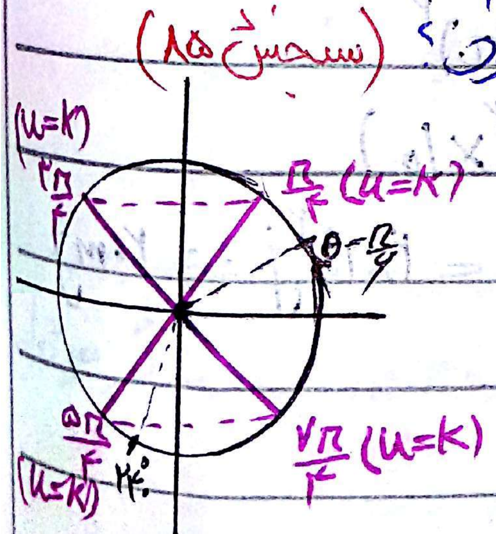
$$E=\frac{1}{2}KA^2$$

$$0/32=\frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow KA^2=0/64 \Rightarrow A^2=\frac{0/64}{100} \Rightarrow A=0/08\,m$$

$$A=8\,cm$$

تست ۱۰: در فاصله زمانی که فاز نوسانگر از $\frac{\pi}{6}$ به $\frac{4\pi}{3}$ رادیان برسد چند مرتبه انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر با هم برابر می‌شود؟ (سنجش ۸۵)

(۳۰ به ۲۴۰)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

نکته) دوره تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل نصف دوره تغییرات شتاب، سرعت، مکان و نیرو می باشد.

نوسانگر هماهنگ ساده‌ای با سرعت $3\,m/s$ از مکان $5\,cm$ و با سرعت $7\,m/s$ از مکان $3\,cm$ عبور می‌کند دوره حرکت این نوسانگر تقریباً چند ثانیه است؟ $(\pi \simeq 3/1)$

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{49-25}{9-4}} = 2\pi\sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{4}{2} = 2\pi \times \frac{2}{\pi} = 4$$

۱) ۲

۲) $\sqrt{4}$ ✓

۳) ۵

۴) 20

* در حالت تعادل نیروی وارد شده به فنر برابر mg است:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \xrightarrow{\text{زیرا}} mg = kd \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{d}{g}$$

* MAX افزایش طول فنر در نوسانگر وزنه فنر برابر $\Delta X = \frac{2mg}{k}$ است.