

## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ ساختار توابع نمایی، همان ساختار تصاعد هندسی می باشد، لذا می توان از قوانین تصاعد هندسی برای حل سؤال استفاده کرد.

در تصاعد هندسی جمله ششم  $a_6$  واسطه هندسی بین جملات دوم و دهم محسوب می شود. پس داریم:

$$a_6^2 = a_2 \times a_{10}$$

در نتیجه در مورد تابع  $f$  می توان گفت:

$$f(6) = f(2) \times f(10)$$

$$f(6)^2 = 72 \times 8 = 9 \times 8 \times 8 = 9 \times 64 \rightarrow f(6) = 3 \times 8 = 24$$

توجه داشته باشید که در توابع نمایی پایه منفی نیست، لذا مقدار نمایی مثبت خواهد بود.

۲ - گزینه ۳

$$4^x - 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 0 \rightarrow 4^x - 4 + (4^{-1})^{x-1} = 0$$

$$\rightarrow 4^x - 4 + 4^{1-x} = 0 \rightarrow 4^x - 4 + \frac{4}{4^x} = 0$$

$$\xrightarrow{4^x=t} t - 4 + \frac{4}{t} = 0 \rightarrow \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$\rightarrow (t-2)^2 = 0 \rightarrow t=2 \rightarrow 4^x=2 \rightarrow 2^{2x}=2 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

۳ - گزینه ۳

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{27} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{27} \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{243}\right)^{3-x} \rightarrow \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^3} (3^{-\frac{1}{3}})^x = 3^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^5}\right)^{3-x}$$

$$\rightarrow 3^{-\frac{5}{3}} \times 3^{-\frac{x}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} (3^{-\frac{1}{3}})^{3-x} \rightarrow 3^{-\frac{5}{3}-\frac{x}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1-x}{3}}$$

$$\rightarrow 3^{\frac{15-2x}{6}} = 3^{\frac{9x-24}{2}} \rightarrow \frac{-15-2x}{6} = \frac{9x-24}{2}$$

$$\rightarrow 3(9x-24) = -15-2x \rightarrow 27x-72 = -15-2x \rightarrow 29x = 57 \rightarrow x = \frac{57}{29}$$

۴ - گزینه ۴

$$\left(\frac{4\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{4}}\right)^2 = \left(\frac{4^2\sqrt[3]{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^2\sqrt[3]{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2^4\sqrt[3]{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= (2^6\sqrt[3]{2})^2 = 2^{12}\sqrt[3]{2} = 2^A \rightarrow A = 12\sqrt[3]{2}$$

۵ - گزینه ۳ نمودار دو تابع  $y = a^x$  و  $y = a^{-x}$   $(y = \left(\frac{1}{a}\right)^x)$  نسبت به محور  $y$ ها قرینه هستند، پس داریم:

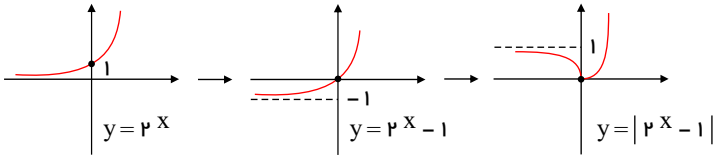
$$(4a-2)\left(1-\frac{a}{2}\right) = 1 \rightarrow 4a-2a^2-2+a-1=0 \rightarrow -2a^2+5a-3=0$$

$$\rightarrow 2a^2-5a+3=0 \rightarrow \text{مجموع ریشه ها} : S = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

۶ - گزینه ۳

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20 \rightarrow 2^{-x} = 20 \quad \text{و} \quad 16 < 20 < 32 \rightarrow 2^4 < 2^{-x} < 2^5$$

$$\rightarrow 4 < -x < 5 \rightarrow -4 > x > -5$$



برای رسم توابع به فرم  $y = |f(x)|$  هر آنچه از شکل تابع  $y = f(x)$  زیر محور  $x$  است آئینه وار به بالا منتقل می کنیم.

۸ - گزینه ۲

$$4(2)^x > 8^x \rightarrow 2^2 \times 2^x > 2^{3x} \rightarrow 2^{x+2} > 2^{3x} \rightarrow x+2 > 3x \rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$$

۹ - گزینه ۱

$$2^x - 125 = \frac{384}{2^x} \xrightarrow{\times 2^x} 2^{2x} - 125 \times 2^x = 384 \rightarrow (2^x)^2 - 125(2^x) - 384 = 0$$

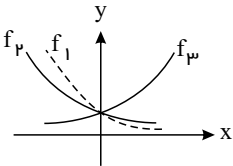
$$\xrightarrow{2^x=A} A^2 - 125A - 384 = 0 \rightarrow (A - 128)(A + 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 128 \rightarrow 2^x = 128 \rightarrow x = 7 \rightarrow x^2 + 2x = 49 + 14 = 63 \\ A = -3 \rightarrow 2^x = -3 \rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

۱۰ - گزینه ۳ با توجه به اینکه فقط  $c > 1$  می باشد پس تنها تابعی که اکیداً صعودی است  $f_3$  خواهد بود. لذا گزینه های ۱ و ۴ قابل قبول نمی باشد نمودار  $f_2, f_1$  باید در بخش  $x > 0$  طوری

رسم شوند که  $b^x > a^x$

این مطلب در گزینه سوم رعایت شده است.



۱۱ - گزینه ۲

$$\frac{1}{2^{x-1}} \geq (2\sqrt{2})^{2x} \rightarrow 2^{1-x} \geq (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{2x} \rightarrow 2^{1-x} \geq (2^{\frac{3}{2}})^{2x}$$

$$\rightarrow 2^{1-x} \geq 2^{3x} \rightarrow 1-x \geq 3x \rightarrow 1 \geq 4x \rightarrow \frac{1}{4} \geq x$$

۱۲ - گزینه ۲

$$3^x - 3 \times 2^x - 4 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) - 4 = 0 \xrightarrow{2^x=A} A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\rightarrow (A - 4)(A + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۱۳ - گزینه ۳ می دانیم تابع  $y = 2^x$  وقتی محور  $y$  ها را قطع می کند که  $x = 0$  باشد. پس:  $y = 2^0 = 1$

پس نقطه  $A(0, 1)$  به دست آمد و چون نقطه  $B$  در معکوس تابع صدق می کند پس جای  $x$  و  $y$  عوض می شوند. و  $B(1, 0)$  است. حال فاصله ی نقاط  $A$  و  $B$  را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

گزینه ۴ - ۱۴

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 3 \times 2^{x+1} \Rightarrow (2^{-3})^{3x} = (2^5)^{x+1} \Rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5}$$

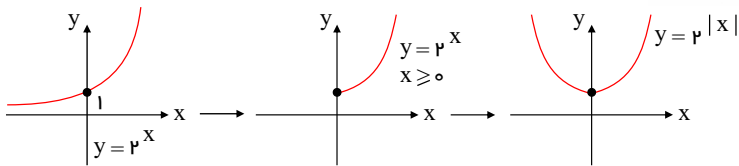
$$\Rightarrow -9x = 5x + 5 \Rightarrow 14x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$

۱۵ - گزینه ۴

$$(3^x)^2 - 8 \times 3^x + 15 = 0 \xrightarrow{3^x=a} a^2 - 8a + 15 = 0 \rightarrow (a-5)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = \log_3 3 \\ a = 5 \Rightarrow 3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5 \end{cases}$$

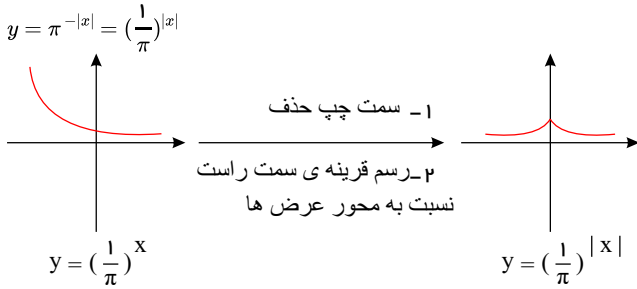
۱۶ - گزینه ۲ برای رسم توابع  $y = f(|x|)$  ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را با شرط  $x \geq 0$  رسم کرده و سپس قرینه ی شکل را نسبت به محور  $y$  ها رسم می کنیم و به شکل اضافه می کنیم.



۱۷ - گزینه ۴ باید پایه تابع نمایی بزرگ تر از یک باشد.

امکان ندارد  $a > 1 \rightarrow a - a^2 > 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 < 0 \rightarrow (a - 1)^2 < 0$

۱۸ - گزینه ۲ برای رسم نمودار  $y = f(|x|)$  باید قسمت چپ محور  $y$  پاک شود و قرینه ی قسمت راست نسبت به محور  $y$  ها رسم شود.



گزینه ۲ - ۱۹

$$1 \cdot 3^{2x-4} \times 18^{7-2x} = 1458 \rightarrow (3^2 \times 3)^{2x-4} \times (3^2 \times 2)^{7-2x} = 2 \times 3^6 \rightarrow (3^{6x-8})(3^{14-4x})(2^{7-2x}) = 2 \times 3^6$$

$$\rightarrow (3^{6x-1})(3^{10-x}) = 2 \times 3^6 \rightarrow \frac{3^{6x-1}}{2} = \frac{3^6}{3^{10-x}} \rightarrow 3^{6x-2} = 3^{x-4}$$

$$\xrightarrow{3^a = 3^b} a = 4x - 2, b = x - 4 \rightarrow a + b = 5x - 6$$

۲۰ - گزینه ۴ تابع  $y = a^x$  به شرطی تابع نمایی است که  $a > 0$  و  $a \neq 1$  باشد.

$$\frac{2a-3}{a+2} > 0 \rightarrow \frac{a}{\text{عبارت} > 0} \begin{array}{c|ccc} -\infty & -2 & \frac{3}{2} & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \rightarrow a < -2 \text{ یا } a > \frac{3}{2}$$

$$\frac{2a-3}{a+2} \neq 1 \rightarrow 2a-3 \neq a+2 \rightarrow a \neq 5$$

بنابراین مجموعه ی مقادیر  $a$  به صورت  $\left\{ \frac{3}{2}, +\infty \right\} \cup (-\infty, -2)$  است.