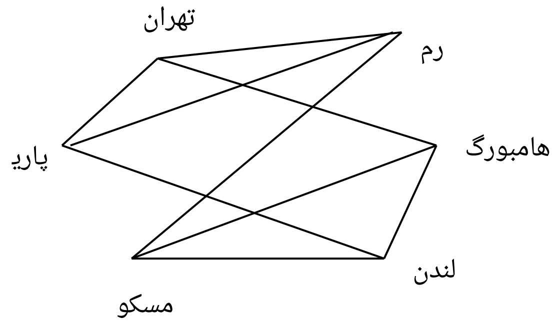
سلام

از دوستان عزیز درخواست می شود از قرار دادن این مجموعه و مجموعه های دیگر گروه ریاضیات ایرانیان در گروه های دیگر خود داری بفرمایند. قطعا کم لطفی ما در قرار دادن فایل های ورد گروه در گروه های دیگر مانع از دستیابی به اهداف گروه می شود.

نظریه گراف

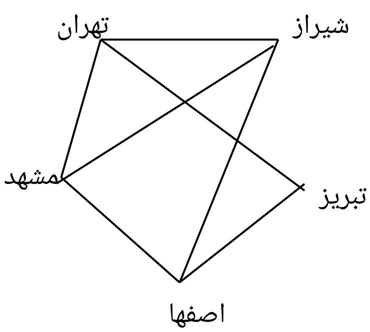
سوال:آیا بین شش شهر می توانیم خطوط هوایی برقرار کنیم بطوریکه از هر کدام دقیقا سه خط هوایی بگذرد؟

پاسخ: با توجه به شکل بله



سوال: آیا بین پتج شهر می توان خطوط هوایی برقرار کرد بطوریکه یکی از هر کدام دقیقت سه خطوط هوایی بگذرد؟

پاسخ این سوال منفی است



در این نمودار ملاحظه میشود از تمام شهرها

به جز تبریز سه خطوط هوایی می گذرد اما از

تبریز دو خط هوایی می گذرد.

آن شاخه از ریاضیات که می می تواند ثابت کند بین پنج شهر نمی توان خطوط هوایی برقرار نمود به طوریکه از هر کدام سه خط هوایی بگذرد نظریه گراف می باشد

گراف ساده: یک گراف ساده که آن را با حرف G نشان می دهیم عبارت است از زوج مرتب (V,E) که در آن V مجموعه ای متناهی وناتهی از یک سری اشیائ می باشد و E مجموعه ای است که عناصر آن را زیر مجموعه های دو عضوی Vتشکیل می دهند.

عناصر V رارئوس گراف ساده وعناصر Eرا یالهای گراف ساده می نامند.

نمودار گراف ساده : برای رسم نمودار یک گراف ساده متناظر با هر راس نقطه ای رسم می کنیم و برای نمایش یالهای از پاره خط استفاده می کنیم.

تمرین:نمودار گراف ساده G که در آن که در آن V={(a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,d)} را رسم کنید.

قرار داد :

در این جروه هر کجا از گراف صحبت شد منظور گراف ساده است (سا یر گراف هارا قید می کنیم) همچنین برای راحتی یال{x , y} را با xy نسان می دهیم

مرتبه واندازه گراف:

مرتبه گراف مقدار رئوس گراف را مر تبه گراف می تامیم و آنرا با حروف p نشان می دهیم

اندازه گراف : تعداد یالهای گراف را اندازه ی گراف می نامیم و آنرا با حروف q نشان می دهیم.

سوال: چه رابطه ای بین p,q براقرار است؟

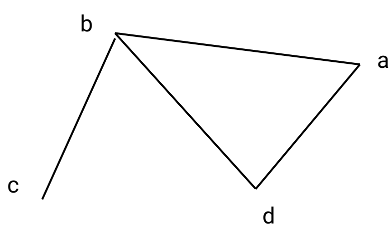
پاسخ:حداقل q صفر است و آن مربوط به گرافی است که فا قد یال است و حداکثر q برابر:

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

می باشد وآن مر بوط گرافی است که یالهای آن از تمامی زیر مجموعه های دو عضوی V

تشکیل بنا براین : $0 \le q \le \frac{p(p-1)}{2}$

رئوس مجاور : در یک گراف دو راس X,Y را مجاور می نامیم هرگاه $xy \in E$



مثال:فرض می کنیم نمودار گراف G به صورت زیر می باشد

رئوس a,b مجاور می باشند

اما دو راس a,c مجاور نمی باشند

درجه رئوس گراف: در یک گراف در جه راس مانند x که آنرا که با deg(x) نشان می دهیم تعداد یالهایی است که از x می گذرد.

در مثال بالا deg(a)=2 , deg(b)=3, deg(c)=1 , deg(d)=2

تمرین: نمودار چند گراف ساده را رسم کنید و درجه رئوس هر کدام را مشخص کنید.

تمرین : در گراف های رسم شده تمرین بالا مجموع درجه رئوس را هر کدام بدست آورده و آنرا با q مقایسه کنید.

قضیه: فرض کنیم G یک گراف و $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_p\}$ مجموعه ای از رئوس آن باشد در اینصورت مجموع درجات رئوس گراف برابر 2q است یعنی: $\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q$

اثبات: در محاسبه درجات رئوس گراف هر بال دو بار به حساب می آید پس مجموع درجات رئوس گراف برابر با دو برابر تعداد بالها یا 2q می باشد.

رئوس فرد:در یک گراف راسی که درجه ی آن فرد است را راس فرد می نامند

رئوس زوج: در یک گراف راسی که درجه ی آن روج است را راس زوج می نامند

تمربن:نمودار چند گراف دلخواه را رسم کرده فرد و زوج آنرا مشخص کنید

سوال:در تمرین بالا در مورد تعداد رئوس فرد هر گراف چه می توان گفت ؟

قضیه: در هر گراف تعداد رئوس فرد زوج است.

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_p\}$ مجموعه ی رئوس آن باشد

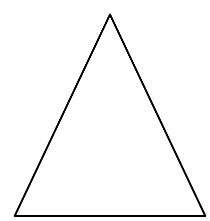
بنابراین $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$

سمت چپ مجموع چند عدد صحیح است برخی ازآنها زوج وبرخی فرد هستند. آنها را تفکیک کرده مجموع آنهایی که فرد هستند را با $\sum_1 \deg(v_i)$ و مجموع آنهایی که زوج اند را با $\sum_2 \deg(v_i)$ نشان می دهیم. بنابراین: $\sum_1 \deg(v_i) = 2q - \sum_2 \deg(v_i)$

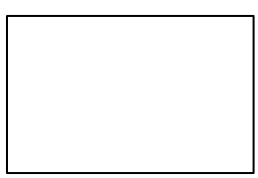
2q و $\sum_2 \deg(v_i)$ و $\sum_2 \deg(v_i)$ زوج اند سپس تقاضل آنها یعنی سمت راست رابطه بالا زوج است لذا سمت چپ یعنی $\sum_1 \deg(v_i)$ باید زوج باشد مجموع چند عدد فرد زمانی زوج است که تعداد آنها زوج باشد واین ثابت می کند تعداد رئوس فردگراف زوج است.

سوال: در مورد تعداد رئوس زوج گراف ساده چه می توان گفت؟

پاسخ:باتوجه به شکل زیر تعداد رئوس زوج گراف می تواند زوج ویا اینکه فرد باشد



سه راس زوج دارد



چهار راس زوج دارد

سوال: آبا بین پنج شهر می تئوانیم خطوط هوایی رسم کنیم بطوریکه از هر کدام دقیقا سه خط هوایی بگذرد؟

پاسخ:خیر زیرا اگر این کار شدنی باشد یک گراف با پنج راس فرد (راس درجه 3) حاصل می شود در حالی که می دانیم تعداد مقدار رئوس فرد گراف زوج است.

سوال:در یک میهمانی 9 نفر شرکت کرده اند آیا ممکن است هرکدام دقیقا با پنج نفر دست بدهند ؟

پاسخ: خیر

سوال : در مورد انسانهای زنده یا مرده که به تعداد فرد از دواج کرده اند چه می تو ان گفت؟

پاسخ:تعداد آنها حتما فرد است.

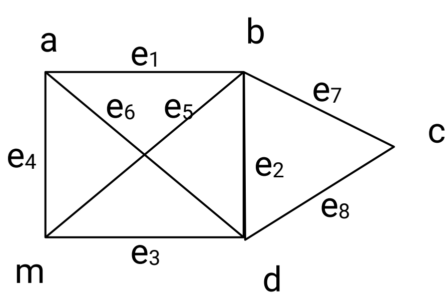
راه و جاده و مسیر و دور :

راه:در یک گراف هر دنباله از رئوس (رئوس مجاور) ویالها را راه می نامیم .

جاده:راهی که یال تکراری ندارد را جاده می نامیم .

مسیر:جاده ای است که راس تکراری نداشته باشد

تمرین:در گراف شکل زیر از a به c :



الف:راهی مشخص کنید که در نباشد.

ب:جاده ای مشخص کنید که مسیر نباشد.

ج:یک مسیر مشخص کنید.

دور: جاه ای است که فقط راس ابتدا وانتهای آن تکراری باشد

مثال:در یک گراف بالا a,b,c da یک دور می باشد اما a,b,c,d,b,m,a یک دور محسوب نمی شو د.

بدون استفاده از راه و جاده نیز می توانیم مسیر و دور را تعریف کنیم.

مسیر:

هر دنباله از رئوس مجاور و یالها که در آن نه راس تکراری و نه یال تکراری وجود داشته باشد را مسیر می نامیم.

دور: هر دنباله از رئوس مجاور و یالها را که در آن فقط راس ابتدا و انتهای آن تکراری باشد را دور می نامیم.

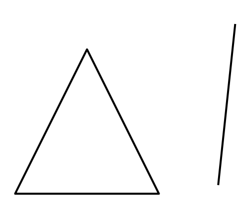
در یک مسیر یا دور تعداد یالها را طول مسیر یا دور می نامیم.

گراف همبند:

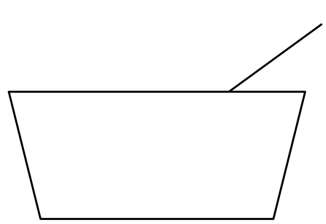
یک گراف ساده را همبند می نامیم هرگاه بین هر دو راس متمایز آن حد اقل یک مسیر وجود داشته باشد.

گراف ناهمبند:

گرافی که همبند نباشد را نا همبند می نامیم.



گراف نا



گراف همبنمد

گراف r - منتظم:

گرافی که درجه هر راس آن r باشد را گراف r- منتظم می نامیم.

تمرین : گرافهای زیر را رسم کنید.

الف _ گراف 2– منتظم از مرتبه 3

ب _ گراف 3 – منتظم از مرتبه4

ج _ گراف 2– منتظم از مرتبه 6

د _ گراف 3– منتظم از مرتبه 6

نکته :

در گراف r – منتظم p راس از درجه r وجود دارد .بنابر این مجموع درجه رئوس برابر rp می باشد اما از طرفی مانند تمام گرافها مجموع درجات رئوس گراف باید برابر 2q باشد

لذا 2q= rp

تست 1:یک گراف r-منتظم 12 یال دارد. چند جواب برای r وجود دارد؟

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

نکته: گراف r منتظم p راس از در جه r دارد پس مجموع درجات رئوس آن pxr می باشد . از طرفی در تمام گراف ها مجموع درجات رئوس 2q می باشد بنابراین در گرافهای r منتظم رابطه ی rp=2q راخواهیم داشت.

تست1: یک گراف r منتظم 12 یال دارد چند جواب برای r وجود دارد؟

1)2 2)4 3)6 4)8

پاسخ:گزینه 4

$$q = 12 \Rightarrow 2q = 24 \Rightarrow rp = 24$$

اما r حداکثر p-1 است پس فقط 4 جواب برای r وجود دارد.

تست 2 :در یک گراف r – منتظم , p>q , r کدام است؟

1)حداقل 2   2) دقیقا 2   3) حداکثر 2   4) کمتر از 2

پاسخ : گزینه 4

$$p > q \xRightarrow{\times 2} 2p > 2q \Rightarrow 2p > rp \xRightarrow{\div 2} 2 > r$$

تست 3: در گراف r- منتظم G , q-p=3 در اینصورت r کدام است؟

1) 3   2) 4   3) 5   4)3 یا 4 یا 5

پاسخ:

گزینه 1

$$q - p = 3 \xRightarrow{\times 2} 2q - 2p = 6 \Rightarrow rp - 2p = 6 \Rightarrow (r - 2) = 6$$

$\Rightarrow$

p	6	3	2	1
r - 2	1	2	3	6
r	3	4	5	8

تست 4 : در یک گراف r – منتظم تعداد رئوس از نصف تعداد یالها کمتر است. حداقل r کدام است؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

پاسخ:

گزینه 4

$$p < \frac{q}{2} \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4p < 2q \Rightarrow 4p < rp \Rightarrow 4 < r$$

گراف کامل:

گراف G از مرتبه p را کامل می نامیم هرگاه (p-1)- منتظم باشد. گراف کامل از مرتبه p را با K_P نشان می دهیم.

تمرین :

گرافهای K_5 K_4 , K_3 , K_2 , K_1 , را رسم نمایید.

تمرین:

در گراف K_P ثابت کنید: $q = \frac{p(p-1)}{2}$

اثبات : در گراف K_P , r=p-1 بنابراین pr = p (p-1) لذا 2q = p (p-1) بنابراین

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

تمرین: تعداد یالهای گراف K_n, $n\leq 12$ را مشخص کنید.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	6	10	15	21	28	36	45	55	66

تست 5 : مجموع درجات رئوس گراف K_p کدام است؟

1) 2p 2) $p^2 + p$ 3) $p^2 - p$ 4) $\frac{p(p-1)}{2}$

پاسخ:

گزینه 3

$$\sum \deg(v_i) = 2q = rp = (p-1)p = p^2 - p$$

تست 6 : اگر تعداد یالهای گراف K_p و K_{p-1} روی هم 36 باشد در اینصورت p کدام است؟

1) 7   2) 6   3) 9   4) 8

پاسخ :

گزینه 1

$$q_{(K_p)} + q_{(k_{p-1})} = 36 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2} = 36 \Rightarrow \frac{p-1}{2}(p+p-2) = 36 \Rightarrow (p-1)^2 = 36$$
$$\Rightarrow p-1 = 6 \Rightarrow p = 7$$

تست 7 : در چند گراف کامل رابطه $8p+1 > 3q$ برقرار است؟

پاسخ : گزینه 4

$$8p = 1 > 3q \Rightarrow 8p \geq 3q \overset{\times 2}{\Rightarrow} 16p \geq 3(2q) \Rightarrow \frac{16p}{3} \geq (p-1)p \Rightarrow p-1 \leq \frac{16}{3} \Rightarrow p-1 \leq 5 \Rightarrow p \leq 6$$

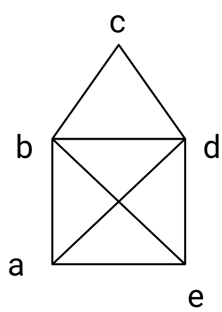
گراف تهی :

گرافی است که فاقد یال می باشد. گراف تهی از مرتبه p را با $\overline{K}_p$ نشان می دهند.

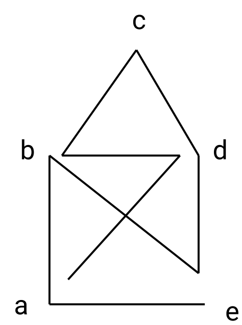
تمرین: گرافهای K_4 و K_6 رارسم کنید.

گراف اویلری و گراف همیلتنی

سوال :آیا بدون برداشت قلم از روی کاغذ و بدون آنکه هیچ یالی را بیش از یکبار بکشیم می توان گراف شکل زیر را رسم کرد؟



پاسخ: بله



در این گراف a d b c d e b a e یک جاده می باشد.(جاده ای شامل تمام یالها)

جاده قابل عبور:

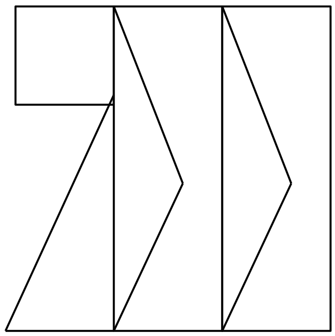
در یک گراف جاده ای شامل تمام یالها را جاده قابل عبور می نامیم.

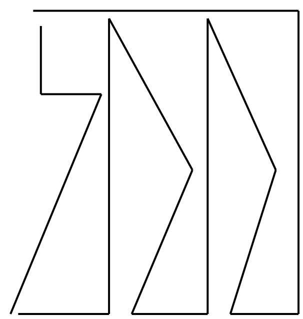
گراف قابل عبور:

گرافی که یک جاده قابل عبور داشه باشد را گراف قابل عبور می نامیم.

سوال :

آیا می توان گراف شکل زیر را بدون برداشت قلم از روی کاغذ وتکرار یالها بگونه ای رسم کرد که راس ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند؟





پاسخ : با توجه به شکل بله

در اینجا جاده قابل عبوری داریم که انتها و ابتدای آن برهم منطبق اند چنین جاده قابل عبور را جاده قابل عبور بسته می نامیم.

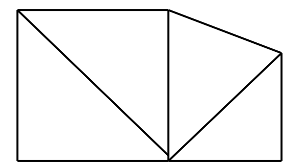
گراف اویلری:G را اویلری می نامیم هرگاه شامل یک جاده قابل بسته باشد.

تفضیه: گراف همبند G ادیلری است اگر و تنها اگر درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

گرافهمیلتن: گراف G از مرتبه P را اویلری می نامیم هرگاه شامل دوری به طول P باشد(دوری که از تمام رئوس بگذرد)

تذکر:در گراف همیلتن P>3

تمرین: نشان دهید گراف شکل زیر همیلتن است



تمرین :گرافی رسم کنید که:

الف_همیلتنی و اویلری باشد

ب_نه همیلتنی و نه اویلری باشد

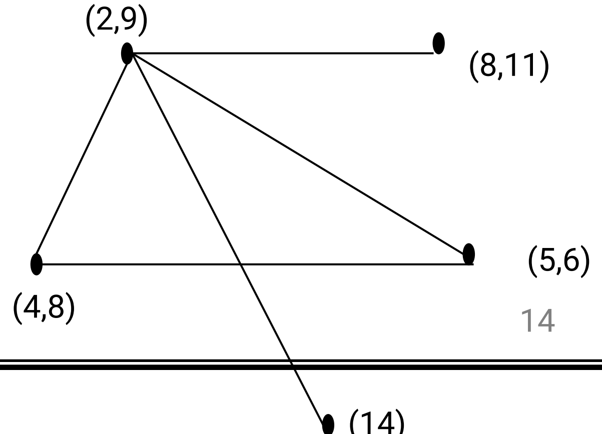
ج_اویلری باشد همیلتنی نباشد

د_همیلتنی باشد اویلری نباشد

گرااف بازه ای : گرافی را بازه ای می نامیم که رئوس آن را بازه های اعداد حقیقی تشکیل دهند.بین دو راس زمانی یال وجود دارد که بازه های آن ها اشتراک نا تهی داشته باشد.

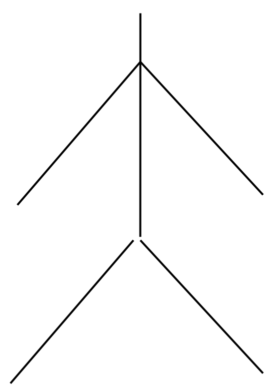
تمرین:گاف بازه های (2,9), (8,11), (5,6), (1,4), (4,5) را رسم کنید.

پاسخ:

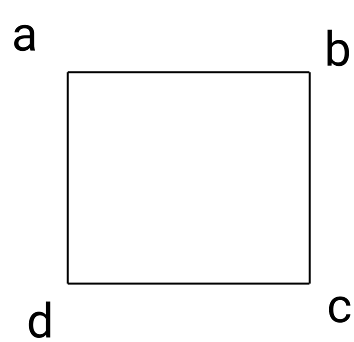


سوال:آیا گراف زیر گراف بازهای است؟

پاسخ:بله

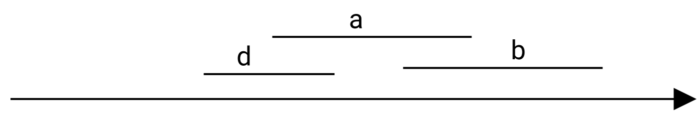


تمرین:ثابتکنید گراف شکل زیر گراف بازه ای نمی باشد



اثبات:فزض می کنیم d,c,b,a بازهای اعداد باشند. نمودار a و b و c و d را رسم می کنیم.

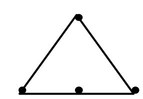
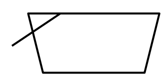
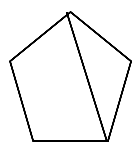
$a \bigcap b \neq \varnothing \qquad a \bigcap d \neq \varnothing \qquad b \bigcap d = \varnothing$



ملاحظه می شود c باید با d و b اشتراک داشته باشد اما این با نمودار همخوانی ندارد.

نکته: یک n ضلعی بدون قطر نمی تواند گراف بازه ها باشد.

تست 8 :کدام گراف گراف بازه ها می باشد.

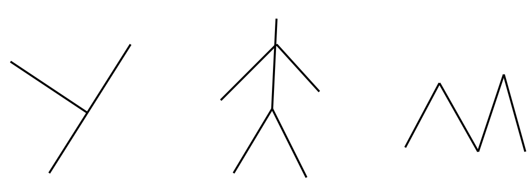
1)  2)  3) 4) 

پاسخ :

گزینه 3

در گزینه های 1 و 2 و 4 یک چهار ضلعی بدون قطر بوجود آمده است لذا نمی توانند گراف بازه ها باشند.

درخت



سوال : گرافهای شکل قبل را در نظر بگیرید . چه خصوصیتی در همه آنها وجود دارد؟

پاسخ : همه آنها همبند و فاقد دور می باشند.

درخت:

هر گراف همبند و فاقد دور را درخت می نامیم.

قضیه : بین هر دو راس متمایز در درخت دقیقا یک مسیر وجود دارد.

اثبات:از آنجاییکه درخت همبند است پس بین هر دو راس آن یک مسیر وجود دارد. اکنون اگر بیش از یک مسیر وجود داشته باشد دور ی حاصل می شود. که این امکان ندارد زیرا طبق تعریف درخت فاقد دور می باشد. پس بین هر دوراس درخت دقیقا یک مسیر وجود دارد.

قضیه : در هر درخت از مرتبه بزرگتر از یک حد اقل دو راس از درجه 1 وجود دارد.

اثبات : راسی از درخت را انتخاب می کنیم و با یک یال از آن خارج شده و به راس دیگری میرویم . این عمل را هر بار با یالی جدید تکرار می کنیم و به راس دیگری می رویم . ار آنجاییکه درخت فاقد دور است هیچگاه به راس تکراری نمی رسیم. با توجه به محدود بودن تعداد رئوس پس از مرحله ای کار خاتمه می پذیرد.راسی که خاتمه کار در آن صورت پذیرفته است از درجه یک میباشد. زیرا در غیر اینصورت خاتمه کار در آن نخواهد بود(اگر از درجه یک نباشد با یک یال به آن وارد شده ایم وبا یال دیگر ی از آن خارج می شو یم) به این طریق به راسی از درجه یک میرسیم.عمل بالا را از راس درجه یک بدست آمده تکرار می کنیم و به راس دیگری از درجه یک می رسیم.

قضیه : در هر درخت $p = q+ 1$.

اثبات: حکم را با استقرا رو ی p اثبات می کنیم.

حکم بای درخت از مرتبه یک بدیهی است. (شروع استقرا) زیرا $p=1$ و $q = 0$ بنابر این رابطه $p=q+1$ برقرار است.

فرض کنیم حکم برا ی هر درخت از مرتبه k ‏(k>1)‏ (فرض استقرا)

اینک حکم را برای هر درخت از مرتبه k+1 ثابت می کنیم.(حکم استقرا)

فرض کنیم T درختی از مرتبه P=K+1 باشد باید در این درخت ثابت کنیم p = q+1

T راسی از درجه یک دارد .با حذف آن و یال مربوط به آن به درخت جدید T' می رسیم.

اگر مرتبه و اندازه این درخت را p' و q' بنامیم داریم $p = p' + 1$ و $q = q' + 1$

T' درختی از مرتبه k است بنابراین طبق فرض استقرا $p' = q' + 1$

$$p' = q' + 1 \overset{+1}{\Rightarrow} p' + 1 = q' + 1 + 1 \Rightarrow p = q + 1$$

پس حکم استقرا و بنابر اینحکم درست مباشد.

تست 9 : چند درخت (بدون داشتن نام برای رئوس) وجود دارد که مجموع درجات رئوس آن برابر 6 میباشد.

1) 2 ‏ ‏ ‏ 2) 3 ‏ ‏ ‏ 3) 4 ‏ ‏ ‏ 4) 5

پاسخ گزینه 1

$$\sum \deg(v_i) = 6 \Rightarrow 2q = 6 \Rightarrow q = 3 \overset{p=q+1}{\Longrightarrow} p = 4$$

تست 10 :درختی n راس از درجه 4 , n+1 راس از درجه 3 , 2 از درجه 2 , 4n راس از درجه 1 دارد.n کدام است؟

1) 2 ‏ ‏ ‏ 2) 3 ‏ ‏ ‏ 3) 4 ‏ ‏ ‏ 4) 5

پاسخ : گزینه 2

$$\sum \deg(v_i) = 2q \Rightarrow n(4) + (n = 1)3 + 2(2) + 4n(1) = 2q \Rightarrow 11n + 7 = 2p - 2 \Rightarrow$$
$$11n + 7 = 2(n + n + 1 + 2 + 4n) - 2 \Rightarrow 11n + 7 = 12n + 4 \Rightarrow n = 3$$

نکته : در یک درخت تعداد رئوس درجه درجه 1 از را می توان با دستور زیر محاسبه نمود.

تعداد رئوس از درجه یک $= 2 + \sum\limits_{\deg(vi)>2} (\deg(v_i) - 2)$

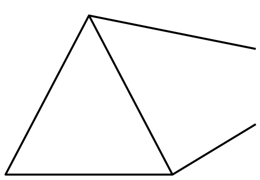
تست قبل را با این نکته حل می کنیم:

$$2 + \sum_{\deg(vi)>2} (\deg(v_i) - 2) \Rightarrow 4n = 2 + n(4 - 2) + (n + 1)(3 - 2) \Rightarrow 4n = 3n + 3 \Rightarrow n = 3$$

دنباله درجه رایهای یک گراف:

اگر درجات رئویس یک گراف را بصورت نزولی بنویسیم دنباله حاصل را دنباله رئوس گراف می نامند.

مثال : دنباله درجات رئوس گراف شکل زیر بصورت 1 , 1 , 2 , 3 , 3 می باشد.



تست11_کدام دنباله, دنباله درجات رئوس یک گراف است.4)0,0,1,2,3,3,4,5

1) 1,2,2,3,4,4,5 2)1,2,3,4,4,7,7, 3)0,0,1,1,2,4,4

پاسخ :گزینه 4

گزینه 1 مربوط به گراف نیست زیرا تعداد رئوس فرد باید زوج باشد.

گزینه 2 نیز مربوط به یک گراف نیست زیرا بابا7 را بزرگترین درجه حداکثر6 می باشد.

گزینه 3 نیز درست نیست. زیرا 5 راس غیر ایزوله داریم(راس از ردجه صفر را ایزوله می نامیم) باتوجه به اینکه دو راس از ردجه4 استاین دو راس به تمام رئوس غیر ایزوله وصل شده اند پس نمی توانیم راس درجه یک داشته باشیم.

تست:12اگر 4,4,3,x,y دنباله ی رئوس یک گراف باشند x=y کدام است.

5(1 4(2 6(3 3(4

پاسخ: گزینه 1

تعداد رئوس فرد زوج است پس ازx,y یکی فرد و یکی زوج است با توجه به نزولی بودن دنباله رئوس گراف

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

و یا اینکه $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. باتوجه به اینکه5 راس داریم و ردجه دو راس4 است پس این دو راس به تمام رئوس وصل شده اند لذا درجه هیچ رایس سک نمی باشد پس

x + y = 5 یعنی y =2 , x =3

تست13:دنباله رئوس یک گراف بصورت 6,5,4,4,3,2,2, است

چند یال از آن حذف می کنیم تا تبدیل به یک ردخت شود

7(1 8(2 5(3 4(4

پاخ:گزینه 1

$$\frac{6+5+4+4+3+2+2}{2}$$ = یعنی q و p=7

q درخت = p-1 ⟹ q درخت = 6 ⟹ q فعلی - q درخت = 7

تست14:دنباله رئوس یک درخت به صورت 4,3,2,x.y,z,m,n, است x+y+z کدام است

پاسخ:گزینه ی1

5 = (3-2)+(4-2)+2 = تعداد رئوس ردجه 1

پس x=y=z=m=n=1 لذا x+y+z=3

قرار دارد: در یک گرتف ماگزیم ردرجه ها با Δ ومنیم در جه ها را با δ نشان می دهیم.

سوال:در یک گراف عدد $\frac{2q}{p}$ میانگین درجات رئوس گراف است.

نکته:در یک گراف $\Delta \le \frac{26}{p} \le \delta$ تساوی تنها در حالت منتظم بودن گراف بر قرار است.

تست15:در یک گراف با 29 راس درجه راسی کمتر لز 3نمی باشد حداقل تعداد یالها کدام است.

1)43 2)44 3)56 4)58

پاسخ : گزینه 2

$$\frac{26}{p} \ge \varsigma \Rightarrow \frac{2q}{29} \ge 3 \Rightarrow 2q \ge 78 \Rightarrow q \ge 43/5$$

تست16:میانگین درجات رئوس یک درخت1/8 می باشد این درخت چند بال دارد

1)9 2)10 3)17 4)18

پاسخ:گزینه ی 1

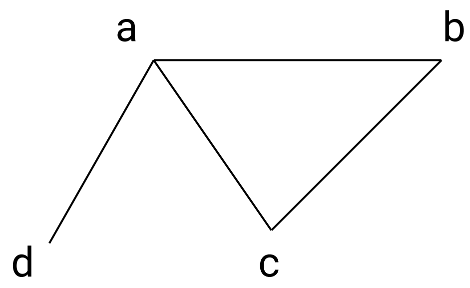
$$\frac{2q}{p} = 1/8 \Rightarrow \frac{2p-2}{p} = 1/8 \Rightarrow 2 - \frac{2}{p} = 1/8 \Rightarrow \frac{2}{p} = \frac{2}{10} \Rightarrow p = 10 \Rightarrow q = 9$$

ماتریس مجاورت یک گراف

فرض می کنیم G گراف ساده $7 = \{7_1, 7_2, 7_3, \ldots\ldots, 7_p\}$ مجموع رئوس آن باشد در ایضورت

ماتریس $M = \left[mij \right]$ که در آن $mij = \begin{cases} 1 & 7i7\ j \in E \\ 0 & 7I7\ J \notin E \end{cases}$ را ماتریس مجاورت گراف G می نامیم

مثال:فرض کنیم نمودار گراف G بصورت



می باشد

در ایضورت

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خوتص ماتریس مجاورت یک گراف:1-ماتریس است مربع 2- درایه های آن از 0و1 تشکیل شده اند 3– درایه های قطر اصلی آن همگی صفر اند 4- ماتریس متقارن است 5 – تعداد تمام یکها برابر 2q است.

تست 17 : اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد عزدار G است

پاسخ:گزینه3:

با توجه به تعداد یک ها در هر سطر این گراف دو راس از درجه 3 و سه راس از درجه 2 دارد

تست18: اگر در یک گراف p+q=5 در ایضورت کدام می تواند ماتریس مجاورت گراف باشد

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ:گزینه

تعداد سطرها یا ستونها برابر P و نصف تعداد یک ها برابر q است.پس گزینه 4 صحیح است.

تست19: ماتریس یک درخت 3x+2 درایه صفر دارد و $x \in N$ مرتبه این درخت کدام می تواند باشد؟

1) 16 2) 17 3) 19 4) 22

پاسخ:

گزینه 2

تعداد کل درایه ها =تعداد یکها + تعداد صفرها

$$3x+2+2q=p^2 \Rightarrow 3x+2+2(p-1)=p^2 \Rightarrow x=p^2-2p \Rightarrow x=\frac{p(p-2)}{3}$$

از آنجایی که x عددی طبیعی استپس باید p یا p-2 میرب 3 باشد لذا فقط گزینه 2 چنین اخاصیتی دارد.

قضیه :فرض کنید G یک گراف و $V=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد.اگر ماتریس مجاورت گراف G را با M نشان دهیم دراینصورت درایه های قطر اصلی M^2 با درجه رئوس

نظیر برابرند.

اثبات:فرض کنیم $M=[a_{ij}]$ و $M^2=[b_{ij}]$ در اینصورت برای هر i و j داریم:

$$b_{ij}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+...+a_{ip}a_{pj}$$

با توجه به متقارن بودن ماتریس مجاورت گراف ساده داریم $a_{ri}=a_{ir}$ لذا :

$$b_{ij}=a\neg_{i1}^2+a_{i2}^2+...+a_{ip}^2$$

درایه های ماتریس مجاورت 0 یا 1 میباشند.لذا توان دوم آنها با خودشان برابرند پس

تعداد یک ها در سطر I ام =مجموع درایه ها در سطر i ام= $b_{ii}=a_{i1}+a_{i2}+...+a_{ip}$

$=\deg(v_i)$

تست 20 : اگر A مجاورت یک گراف باشد دراینصورت A^2 کدام است؟

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

پاسخ :گرینه 2

از آنجائیکه تعداد رئوس فرد گراف باید زوج باشد لذا گزینه 2 گزینه درست می باشد.

چند نکته

1)تعداد انتخابهای k شی از n شی که جایگاه آنها مهم با شد را جایگشت k شی از n شی می

نامیم و آنرا با $P_{(n,k)}$ یا $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ نشان میدهیم و :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2))تعداد انتخابهای k شی از n شی که جایگاه آنها مهم نبا شد را ترکیب k شی از n شی می نامیم و آنرا با $C_{(N,K)}$ یا $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ نشان میدهیم و :

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

تمرین:در K_5 بین دو راس متمایز چند مسیر به طول 3 وجود دارد؟

پاسخ:فرض می کنیم $\{a, b, c, d, e\} = 7$ و $a\square\square b$ مسیر به طول 3بینb,a ما باشد ما باید از بین e,d,c دو راس را انتخاب کرده ورد $a\square\square b$ قرار دهیم از آنجایی که جایگاه این دو عضوی مهم است پس بینb,aبه تعداد $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$یعنی 6 مسیر به طول 3وجود دارد.

نکته:در K_n تعداد مسیرهای به طول ن بین دو راس متمایز برابر است با $\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}$

یا $\begin{bmatrix} (n-2)! \\ (k-1)! \end{bmatrix}$

تمرین :در بین k_6 بین دو راس متمایز چند مسیر وجود دارد؟

$$\begin{bmatrix} 6-2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6-2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6-1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6-2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6-2 \\ 4 \end{bmatrix}=\frac{4!}{4!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}++\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{0!}=1+4+12+24+=65$$

تمرین:در k_5 چند مسیر به طول 3وجود دارد؟

پاسخ:هر دو راسی راکه انتخاب کنیم $\begin{bmatrix} 3 \\ 3-1 \end{bmatrix}$مسیر به طول 3خواهیم داشت با توجه به اینکه

به تعداد $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ جفت راس می توانیم انتخاب کنیم پس جفات مساله ما $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ می

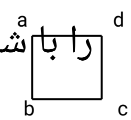
باشدیعنی $\frac{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}}{2k}$ 10*6=60

نکته:در k_n تعداد مسیرهای به طول ن برابر است با $\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$

نکته:در k_n تعداد تمام مسیرها برابر است با: $\binom{n}{2}\left(\begin{bmatrix}n-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-2\\1\end{bmatrix}+\ldots\ldots+\begin{bmatrix}n-2\\n-3\end{bmatrix}\right)$

تمرین:در k_5 چند دور به طول وجود دارد.

پاسخ: $\frac{\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}}{2\times 4}$ یعنی 15 زیرا ابتدا باید 4راس را بین 5 راس انتخاب کنیم که جایگاه آنها مهم است از طرفی هر دو را به 8صورت (2×4) می توانبم بنویسیم

مثلا 

را با شروع زا ش به صورت a,b,c,d,a یا a,d,c,b,a, ما توانیم بخوانیم پس $\frac{\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}}{2\times 4}$ تعداد دور های به طول 4 در k_5 می باشد.

نکته:در k_n چند دور به طول k $(3\leq k\leq n)$ وجود دارد؟$\frac{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}}{2k}$

تمرین: k_6 چند دور به طول 4 دارد؟ $\frac{\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}}{2\times 4}=\frac{\begin{bmatrix}\frac{6!}{2!}\end{bmatrix}}{2\times 4}=45$

سوال:در k_6 چند مسیر به طول 3وجود دارد؟

پاسخ:از هر دور به طول 4و4 مسیر به طول 3 تولید می شود یعنی 180= 45×4

نکته:فرمولی دیگر برای تعداد مسیرهای به طول k در گراف k_n ازحاصل ضرب (k+1) در تعداد دورهای به طول (k+1) حاصل می شود یعنی

$$\frac{\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}}{2}$$

نکته :باpراس نام بگذاری شده به تعداد زیر مجموعه های یالهای گراف کامل

(یعنی $2^{\frac{p(p-1)}{2}}$) گراف می توان تشکیل داد.

تست 22 :با پنج راس {a,b,c,d,e} چند گراف می توان تشکیل داد؟

256(1 512(2 1024(3 128(4

پاسخ :گزینه 3

$$2^{\frac{5(5-1)}{2}} = 5^{10} = 1024$$

نکته:با p راس نامگذاری شده تعداد گرافهای که از اندازه q می توان تشکیل دادبرابر است با

$$\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$$

تست 23 :با رئوش {a,b,c,d,e} چند گراف از اندازه 8 می توان تشکیل داد؟

21(1 28(2 36(3 45(4

پاسخ :گزینه 4
$$\binom{\frac{5(5-1)}{2}}{8}=\binom{10}{8}=45$$

نکته : با p راس نامگذاری شده تعداد گرافهایی از اندازه q که شامل k یال خاص باشد برابر

است با:
$$\binom{\frac{p(p-1)}{2}-k}{q-k}$$

تست 24 : با رئوس {a,b,c,d} چند گراف شامل ab و cd از اندازه 4 می توان تشکیل داد؟

3(3 4(4 5(1 6(2

پاسخ : گزینه 2
$$\binom{6-2}{4-2}=\binom{4}{2}=6$$

نکته : تعداد گرافهایی از اندازه q که با p راس نامگذاری شده که شامل k یال خاص نباشد

برابر است با :
$$\binom{\frac{p(p-1)}{2}-k}{q}$$

تست 25 : با رئوش {a,b,c,d,e} چند گراف از اندازه 6 می توان تشکیل داد که شامل یالهای ad و ae نباشد؟

32(1 21(2 36(3 28(4

پاسخ : گزینه 4

$$\binom{\frac{5(5-1)}{2}-2}{6}=\binom{8}{6}=28$$

نکته: در یک گراف با q یال حد اقل p از دستور $p \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$ تعیین می گردد.

تست 26 :در یک گراف با 18 یال حداقل p کدام است؟

5(1 6(2 7(3 8(4

پاسخ : گزینه 3

$$p \geq \frac{1+\sqrt{1+8(18)}}{2} \Rightarrow p \geq \frac{1+\sqrt{145}}{2} \Rightarrow p \geq 7$$

نکته : در یک گراف حداقل تعداد رئوس ایزوله برابز است با p-2q (البته اگر p-2q<0 آنگاه تعداد رئوس ایزوله برابر0 است) و حد اکثر تعداد رئوس ایزوله

از دستور p − min(k) که در آن k عددی صحیح است و $k \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$

تست 27 : در یک گراف با 9 راس و 4 یال حداقل و حد اکثر چند راس ایزوله وجود دارد ؟

1) 5,1　　2) 4,1　　3) 5,2　　4) 4,2

پاسخ : گزینه 1

$$k \geq \frac{1+\sqrt{1+8(4)}}{2} \Rightarrow \min(k)=4$$

بنابر این حداقل به تعداد 1=(4)2-9 و حد اکثر 5=4-9 راس ایزوله خواهیم داشت.

نکته : برای آنکه تشخیص دهیم دنباله ای نزولی از اعداد صحیح نا منفی دنباله درجات رئوس یک گراف است یا خیر ابتدا بزرگترین عدد را حذف کرده و به تعداد آن از اعداد دیگر یک واحد کم میکنیم . سپس دنباله جدید را به ترتیب نزولی مرتب می کنیم. این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که بزرگترین عدد 1 باشد. اگر تعداد یک ها فرد باشد دنباله اصلی دنباله رئو س یک گراف می باشد در غیر اینصورت دنباله مربوط به یک گراف نمی باشد.

تذکر: اگر در یکی از مراحل تعداد اعداد فرد , فرد باشد آنگاه دنباله مربوط به یک گراف نخواهد بود.

سوال : آیا 7,6,6,5,4,4,3,2,2,1 دنباله رئوس یک گراف است؟

پاسخ: عدد 7 راحذف میکنیم و از هفت عدد دیگر یک واحد کم می کنیم.

5,5,4,3,3,2,1,2,1

این دنباله را به ترتیب نزولی مرتب می کنیم. 5,5,4,3,3,2,2,1,1

حال یکی از 5 ها را حذف می کنیم و عمل بالا را تکرار می کنیم

$$4,3,2,2,1,2,1,1 \Rightarrow 4,3,2,2,2,1,1,1$$

اینک 4 را حذف می کنیم. 2,1,1,1,1,1,1

حال نوبت به حذف 2 میباشد. 0,0,1,1,1,1 و پس از مرتب کردن 1,1,1,1,0,0

لذا دنباله مربوط به یک گراف می باشد.

نکته : اگر در یک گراف برای هر دو راس x و y رابطه deg (x) + deg (y) ≥p

برقرار باشد آنگاه گراف حاصل همیلتنی است .

سوال : آیا دنباله 6,6,5,4,4,4,3 دنباله درجات رئوس یک گراف است؟

پاسخ ک بله زیرا برای هر دو راس y, x , g(x)+deg(y)≥p که در آن p=7

نکته : اگر در یک گراف $\delta \geq \frac{p}{2}$ الزاما گراف همیلتنی است .

تست 28 : کدام گراف همیلتنی است؟

1)3- منتظم از مرتبه 8 2) 4- منتظم از مرتبه 10

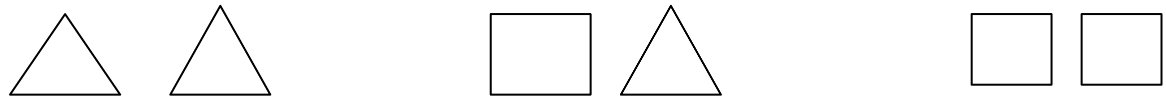
3)6- منتظم از مرتبه 11 4)7- منتظم از مرتبه 12

پاسخ : گزینه 3

میدانیم در یک گراف r–منتظم $\delta = r$ پس با توجه به اینکه در گراف 6 –منتظم از مرتبه ,

11 $\delta \geq \frac{11}{2}$ لذا گراف همیلتنی است .

تمرین : نمودار چند گراف 2 – منتظم ناهمبد را رسم کنید.

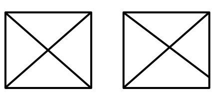


سوال : یک گراف 2- منتظم و ناهمبند حد اقل چند یال دارد؟

پاسخ: 6 راس دارد.

سوال : یک گراف 3- منتظم ناهمبند حد اقل چند یال دارد؟

پاسخ : حداقل رئوس مربوط به دو چهارضلعی بصورت می باشد.پس یک گراف 3- منتظم ناهمبند حد اقل 3×2 یعنی 6 راس دارد.



نکته : یک گراف r– منتظم ناهمبند حد اقل 2(r+1) راس دارد و همچنین حداقل دارای r(r+1) یال دارد.

نکته :یک گراف ناهمبند حداکثر به تعداد $\binom{p-1}{2}$ یال دارد.

تست 29 :در کدام حالت گراف لزوما همبند است ؟

1) $q \geq \binom{p-1}{2}$ 2) $q > \binom{p-1}{2}$ 3) $q > p-1$ 4) $q \geq p-1$

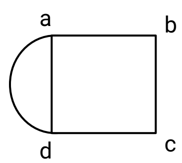
پاسخ: گزینه 2

از نظر تعداد یالها بزرگترین گراف ناهمبند $\binom{p-1}{2}$ یال دارد.پس اگر یک یال دیگر به آن بیافزاییم حتما همبند می شود.

تذکر: علاوه بر گرافهای ساده ما گرافهای دیگری نظیر گرافهای چند گانه و گرافهای جهت دار نیز در ریاضیات گسسته داریم.

گراف چند گانه : گرافی است که بین برخی از رئوس آن بیش از یک یال وجود دارد

مثال: گراف شکل زیر مربوط به یک گراف چند گانه است.زیرا بین دوراس a و d سه یال وجود دارد.



گراف جهت دار: گرافی است که یالهای آنرا زوج مرتب هایی تشکیل می دهند که مولفه های آن رئوس گراف می باشند.

ما در فصل سوم به تفضیل به بررسی گرافهای جهت دار می پردازیم.

تمرینهای فصل اول

1- گرافی از مرتبه 9 و اندازه 21 فقط رئوس درجه 4 و 5 دارد. تعداد رئوس درجه 5 این گراف را مشخص کنید .

پاسخ:

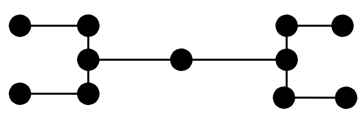
تعداد رئوس درجه y:5 و تعداد رئوس درجه x : 4

$$-4\begin{cases}4x+5y=2(21)\\ x+y=9\end{cases} \Rightarrow \quad y=6$$

2- به یک درخت از مرتبه p که در آن $\Delta < 4$ حد اقل چند یال اضافه کنیم تا به یک گراف 4-منتظم تبدیل شود؟

$$q_{\text{درخت}}+x=\frac{4p}{2} \Rightarrow \quad p-1+x=2p \quad \Rightarrow \quad x=p+1$$

3- به گراف شکل زیر چند حداقل چند یال بیافزاییم تا تبدیل به یک گراف منتظم گردد.



پاسخ : این گراف 11 راس دارد پس نمی تواند به گراف 3- منتظم تبدیل شود. بنابراین این گراف حد اقل باید به گراف 4- منتظم تبدیل شود.

$$q_{\text{فعلی}}+x=q_{\text{4-منتظم}} \Rightarrow 10+x=\frac{4(11)}{2} \quad \Rightarrow \quad x=12$$

4- چند گراف ساده وجود دارد که مجموعه رئوس آن بصورت x,x,y,y,x-y است؟

پاسخ : x و y هر دو فرد یا هر دو زوجند و همچنین حد اکثر x نباید از 4 بیشتر باشد.

بنابر این تنها حالتهای زیر را داریم:

$$x=4,\ y=2 \Rightarrow 4,4,2,2,2$$
$$x=2,\ y=2 \Rightarrow 2,2,2,2,0$$
$$x=3,\ y=3 \Rightarrow 3,3,3,3,0$$

5-در ماتریس مجاورت یک گراف r– منتظم تعداد یکها و صفر ها برابرند. r زا برحسب p بدست آورید.

پاسخ : $p^2 =$ تعدادیکها + تعداد صفرها

$$2q + 2q = p^2 \Rightarrow rp + rp = p^2 \Rightarrow r = \frac{p}{2}$$

6- اگر 3,x,y,z,1,1,1 دنباله رئوس یک درخت باشد x+3y+z را بدست آورید.

پاسخ: اگر x=3 آنگاه با توجه به فرمول تعداد رئوس درجه 1 در درخت دقیقا 4 راس درجه 1 خواهیم داشتلذا در این حالت y=2 و z=1 پس x+3y+z=10

و اگر $x \neq 3$ آنگاه درخت مذکور باید دقیقا 3 راس درجه 1 دارد و در این حالت نیز x+3y+z=10

7- در یک گراف r– منتظم 5q+1>8p حداقل r را بدست آورید.

پاسخ:

$$5q+1>8p \Longrightarrow \quad 5q \geq 8p \quad \overset{\times 2}{\Longrightarrow} 5(2q) \geq 16p \Rightarrow 5rp \geq 16p \Rightarrow r \geq \frac{16}{5}$$

پس حداقل r , 4 می باشد.

8- تعداد مسیر های به طول بزرگتر از یک را در درخت مشخص کنید.

پاسخ : در یک درخت بین هر دو راس دقیقا یک مسیر وجود دارد پس تعداد تمام مسیرها در درخت برابر با $\binom{p}{2}$ میباشد لذا کافیست تعداد مسیرهای به طول یک را در درخت را از $\binom{p}{2}$ کم کنیم .

$$\binom{p}{2} - (p-1) = \frac{p(p-1)}{2} - (p-1) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \binom{p-1}{2} = \text{تعداد مسیرهای به طول}$$

بزرگتریک