# سری توانی

دنباله عددی $\{a_n\}$ را درنظر بگیرید. دراین صورت برای عدد ثابت $c\in\mathbb{R}$، عبارت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots$$

را یک سری توانی حول $x=c$ می‌گوییم.

* توجه کنید که سری فوق تابعی از $x$ می‌باشد $\left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)$ که دامنه تعریف آن شامل تمام $x$ هایی است که سری نامتناهی مذکور برای آن مقادیر $x$ همگرا می‌باشد.

* درحالت خاصی که $c=0$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را یک سری توانی حول صفر می‌گوییم.

* هر سری توانی حول $x=c$ در نقطه $x=c$ همگراست زیرا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \underset{x=c}{=} a_0$

لذا $c\in D$.

* به مجموعه نقاط همگرایی یک سری (همان دامنه تابع $f$)، بازه همگرایی $(I)$ سری می‌گوییم. نقطه $x=c$ در وسط این بازه قرار دارد. به نصف طول بازه همگرایی، شعاع همگرایی $(R)$ می‌گوییم.

مثال: سری نامتناهی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ یک سری توانی است که $\{a_n\}=\{1\}$ و $c=0$ است. این سری در حقیقت همان سری هندسی با قدرنسبت $r=x$ می‌باشد. لذا همگراست هرگاه $|r|<1$ و واگراست اگر $|r|\geq 1$. پس

$$|x|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

پس $I=(-1,1)$ و $R=1$.

به $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بسط تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ حول $x=0$ نیز می‌گوییم.

## نحوه پیدا کردن شعاع و بازه همگرایی :

① ابتدا با آزمون نسبت یا ریشه سری را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن از حدگیری براساس تغییر $n \to \infty$ استفاده می‌شود و برای داشتن همگرایی باید پاسخ $(1 >$ پاسخ$)$ باشد. حالتهای زیر اتفاق می‌افتند:

الف) اگر سری فقط برای $x = c$ همگرا باشد، بازه همگرایی تباهیده و تک عضوی است:

$$R = 0 \quad , \quad I = \{c\} = [c , c]$$

ب) اگر سری برای همه اعداد حقیقی همگرا باشد، بازه همگرایی $(-\infty , \infty) = \mathbb{R}$ است:

$$R = \infty \quad , \quad I = \mathbb{R}$$

ج) در غیر اینصورت، با بدست آوردن $|x - c|$ از پاسخ حد خواهیم داشت:

$$|x - c| < \underset{\text{مثبت}}{\alpha} \implies \begin{cases} \alpha \text{ : شعاع همگرایی} \Rightarrow R = \alpha \\ -\alpha < x - c < \alpha \Rightarrow c - \alpha < x < c + \alpha \end{cases}$$

"بازه همگرایی اولیه"

② اگر حالتهای (الف یا (ب) اتفاق افتاده باشد، عملیات تمام است ولی در حالت (ج)، باید برای $x$ های دو سر بازه، وضعیت همگرایی یا واگرایی بررسی شوند. اگر حالت همگرایی پیدا شود، آن سر بازه را «بسته» می‌نامیم.

∴ نتیجه در این حالت یکی از حالتهای

$$I = (c - \alpha , c + \alpha)$$

$$I = (c - \alpha , c + \alpha]$$

$$I = [c - \alpha , c + \alpha)$$

$$I = [c - \alpha , c + \alpha]$$

در هر حال $x = c$ نقطه وسط است.

مثال : شعاع و بازه همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

حل: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n}\right| \xlongequal{(n+1)!=(n+1)n!} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} x\right|$

$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \times 0 = 0 \overset{*}{<} 1$ (حالت ب)

همواره برای هر $x$

$\Rightarrow I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \quad , \quad R = +\infty$ سری حول صفر بود.

---

* $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n$

مرحله اول

حل: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{10^n (x-1)^n}{5^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{10}{5}}_{\text{ثابت}} |x-1| = 2|x-1| \overset{*}{<} 1$

$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{2} = R$ : شعاع همگرایی

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < x < 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

مرحله دوم : بررسی نقاط $x = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{3}{2}$ :

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ سری سؤال $= \sum (-1)^n$ , $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0 \Rightarrow$ فاقد شرط لازم همگرایی $\Rightarrow$ واگرا

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ سری سؤال $= \sum 1^n = \sum 1$ , $\lim_{n\to\infty} 1 \neq 0 \Rightarrow$ " $\Rightarrow$ واگرا

پس : حول یک , $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , $R = \frac{1}{2}$

* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n$

حل: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n e^{n^2}(x+e)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{n^2}|x+e|^n}$ (*)

$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2}{n}}|x+e| = |x+e|\lim_{n\to\infty} e^n = \underbrace{|x+e|\times\infty=\infty}_{x+e\neq 0 \text{ اگر}} \not< 1$

واگر $x+e=0$ که طبق نکته گفته شده در ابتدای کتاب: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2}(x+e)^n = a_0 = 1$ و همگرا است.

لذا فقط در $x=-e$ همگرا است.

(حالت الف) سری حول $(-e)$ است، و $R=0$ ، $I=\{-e\}$

---

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\ln n}$

حل: مرحله اول: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{(x+1)^n}{n\ln n}}\right| = |x+1|\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{\text{یک}}\times\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\frac{\infty}{\infty}\text{ هو}} = |x+1|\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

$=|x+1|\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}_{\text{یک}} = |x+1| < 1 = R \Rightarrow -1<x+1<1$ (*)

$\Rightarrow -2<x<0$ : بازه اولیه همگرایی

مرحله دوم: $x=-2 \Rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{n\ln n} \Rightarrow$ سری متناوب با $\frac{1}{n\ln n}$ مثبت نزولی و دارای حد صفر $\Rightarrow$ همگرا است

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \Rightarrow$ آزمون انتگرال $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u}du$

$u=\ln x$ p.c

p-انتگرال با $p=1$ و واگرا.

لذا: حول $x=-1$ و $I=[-2,0)$ و $R=1$

قضیه: اگر $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد بطوری‌که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=1$ . در این صورت شعاع همگرایی سری $\sum a_n x^n$ و سری $\sum c_n a_n x^n$ با هم برابرند.

مثال: شعاع همگرایی سری $\sum n^{\ln n} x^n$ را بیابید.

حل: $\{c_n\}=\{n^{\ln n}\}$ i.e. $\sum \underbrace{n^{\ln n}}_{c_n} x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{\ln n}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{هـ}}{=}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n \times \frac{1}{n}}{1}} = e^{2\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{هـ}}{=}} e^{2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1$$

پس شعاع همگرایی سری $\sum \underbrace{n^{\ln n}}_{c_n} x^n$ و سری $\sum x^n$ (هندسی) یکسان است که

$$|x|<1 \Rightarrow \boxed{R=1}.$$

مثال: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2}$ را بیابید. (پیدا کردن بازه همگرایی برعهده دانشجویان)

حل: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{c_n} \underbrace{\left(\frac{x}{5}\right)^n}_{a_n x^n}$

« $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ » یادآوری

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n+1)} \underset{\text{هـ}}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1}} = \underset{1}{e^0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^2}} = \frac{1}{1^2} = 1$$

پس شعاع همگرایی سری سؤال، شعاع همگرایی $\sum \left(\frac{x}{5}\right)^n$ یکسان است که

(سری هندسی): $\left|\frac{x}{5}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 5 = R$.

قضیه تیلور: اگر تابع $f(x)$ تابعی از هر مرتبه مشتق پذیر باشد (در $x=a$)، در این صورت می‌توان سری توانی تابع $f(x)$ را حول نقطه $x=a$ بصورت زیر نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

در حالت خاص اگر $a=0$، سری تیلور حول صفر را ماکلورن می‌نامیم.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

---

مثال: سری تیلور $e^x$ در $x=1$ را بیابید.

$$f^{(n)}(x)=e^x\ ;\quad \forall n=1,2,\dots \implies f^{(n)}(1)=e^1=e$$

$$\xrightarrow[\text{تیلور}]{\text{طبق فرمول}} e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^1}{n!}(x-1)^n=e+e(x-1)+e\frac{(x-1)^2}{2!}+e\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots$$

---

مثال: سری ماکلورن تابع $f(x)=\sin x$ را حول $x=0$ بنویسید.

$$f(0)=\sin 0=0=f^{(4)}(0)$$
$$f'(0)=\cos 0=1=f^{(5)}(0)$$
$$f''(0)=-\sin 0=0 \quad \vdots$$
$$f'''(0)=-\cos 0=-1$$

$$\xRightarrow{\text{ماکلورن}} \sin x=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+\frac{1}{1!}x+0+\frac{-1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال: نشان دهید $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ .

حل:

حول $x=0$
ماکلورن

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = +2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -3!(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!$$

لذا:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$$

مثال: پنج جمله اول سری تیلور $f(x) = \cos x$ را حول $x = \pi$ بیابید.

$$f(x) = \cos x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x)\Big|_{x=\pi} = \cos\pi = -1$$

$$f'(x) = -\sin x = f^{(5)}(x)\Big|_{\pi} = -\sin\pi = 0$$

$$f''(x) = -\cos x = f^{(6)}(x)\Big|_{\pi} = -\cos\pi = +1$$

$$f'''(x) = +\sin x = f^{(7)}(x)\Big|_{\pi} = \sin\pi = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$= -1 + \cancel{\frac{0}{1!}(x-(-\pi))} + \frac{1}{2!}(x+\pi)^2 + \cancel{\frac{0}{3!}(x+\pi)^3} + \frac{-1}{4!}(x+\pi)^4 + \cancel{\frac{0}{5!}(x+\pi)^5} + \dots$$

$$= -1 + \frac{1}{2!}(x+\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x+\pi)^4 + \frac{1}{6!}(x+\pi)^6 - \frac{1}{8!}(x+\pi)^8 + \dots$$