فیزیک و درجات آزادی منتشر شونده

شمارش درجات آزادی منتشر شونده یا دینامیکی برای کوانتیزه کردن تئوری‌ها اهمیت دارد اما شاید این جدا سازی درجات آزادی به منتشر شونده و غیر منتشر شونده گول زننده باشد، طوری که آدم احساس کند فیزیک تماما درون درجات آزادی دینامیک جای دارد و در درجات آزادی غیر منتشر شونده اضافی هستند. درجات آزادی منتشر شونده یا درجات آزادی دینامیک، درجات آزادی از سیستم است که مشتق دوم زمانی در معادلات حرکت آن وجود دارد، اما آیا فیزیک تماما در این درجات آزادی جای گرفته؟ یا درجات آزادی غیر منتشر شونده هم سهمی از فیزیک دارند؟ بیایید برای الکترومغناطیس درجات آزادی دینامیکی را بشماریم و با فیزیکی که از آن میشناسیم مقایسه کنیم.

از دو معادله اتحاد ماکسول می‌توان شکل پتانسیل‌های الکترومغناطیس را تعیین کرد:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \quad \Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E}+\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\tfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{۱}$$

از این معادله‌ها می‌توان فهمید که اطلاعات شش تابع $\vec{B}$ و $\vec{E}$ را می‌توان در چهار تابع ϕ و $\vec{A}$ ذخیره کرد اما این معادله‌ها همچنین نشان می‌دهد یکی از درجات آزادی از این چهار درجه اضافی است و می‌توان با تبدیل پیمانه‌ای آن را از بین برد، می‌توان دید که با تبدیلات زیر که با تابع دلخواه $\lambda(\vec{x},t)$ انجام می‌شود،شش تابع $\vec{B}$ و $\vec{E}$ همچنان ناوردا باقی می‌مانند:

$$\begin{aligned} &\vec{A} \quad \rightarrow \vec{A}+\vec{\nabla}\lambda \\ &\phi \quad \rightarrow \phi-\tfrac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned} \tag{۲}$$

اصطلاحا به این درجه آزادی اضافی غیر فیزیکی درجه آزادی پیمانه‌ای می‌گویند. حالا نوبت بررسی معادلات چشمه ماکسول است، به زبان پتانسیل‌ها خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\vec{A}=\vec{J} \tag{۳}$$

$$-\nabla^2\phi-\frac{\partial(\vec{\nabla}.\vec{A})}{\partial t}=\rho \tag{۴}$$

که در این معادلات ثابت‌های فیزیکی برابر واحد در نظر گرفته شده. البته این دو معادله از هم مستقل نیستند بلکه دیورژانس معادله ۳ به علاوه مشتق زمانی معادله ۴ برابر صفر است که معادله پیوستگی را نتیجه می‌دهد.

قبل از پیشتر رفتن اجازه دهید معادلات ۳ و ۴ را در فضای فورریه بازنویسی کنیم، با تعریف زیر

$$A(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int A(\vec{k}) e^{i\vec{k}.\vec{x}} d^3\vec{k} \leftrightarrow A(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int A(\vec{x}) e^{-i\vec{k}.\vec{x}} d^3\vec{x} \quad (۵)$$

خواهیم داشت:

$$i\vec{k}\left(i\vec{k}.\vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + k^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (۶)$$

$$k^2 \phi - i\frac{\partial(\vec{k}.\vec{A})}{\partial t} = \rho \quad (۷)$$

در نگاه اول به دو معادله ۶ و ۷ ملاحظه می‌کنیم که فقط مشتقات زمانی $\vec{A}$ از مرتبه دو ظاهر شده و ما را وسوسه می‌کند که حکم کنیم که بردار سه بعدی A سه درجه آزادی دینامیکی معادلات ماکسول است و پتانسیل ϕ درجه آزادی غیر دینامیک معادلات ماکسول است. اما با حل معادله ۷ بر حسب ϕ و جایگذاری آن در معادله ۷ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right) + k^2\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right) = \vec{J} - i\vec{k}\frac{1}{k^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۸)$$

که کمیت $\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right)$ در واقع تصویر A عمود بر بردار k است به عبارتی $k.A$ یا $\nabla.A$ درجه آزادی دینامیکی نیست، پس معادلات ماکسول صرفا از روی معادله حرکت (بدون اعمال هیچ درجه آزادی پیمانه‌ای) دارای فقط دو درجه آزادی دینامیکی است. دست بر قضا آزادی پیمانه‌ای ما تنها بر روی $\vec{\nabla}.\vec{A}$ قابل اعمال است و بر روی کمیت $\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right)$ تاثیری ندارد.

حال برگردیم به سوال اصلی، آیا $\nabla.A$ یا ϕ که هیچ کدام درجه آزادی دینامیکی نیستند، پیشبینی فیزیکی هم ندارند؟ ما می‌توانیم معادلات ماکسول را به صورت معادله ۸ و ۷ بنویسیم که اولی فقط شامل درجات آزادی دینامیک است و دومی فقط شامل درجات آزادی غیر دینامیک و هر دو معادله از هم مستقل هستند. با توجه به این که قسمت درجه آزادی دینامیکی A را می‌دانیم با بسط آن خواهیم دید:

$$k^2\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right) = -\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (۹)$$

با توجه به این که دیورژانس B صفر است نتیجه می‌گیریم درجات آزادی دینامیکی فقط مربوط به کرل میدان مغناطیسی است، اما ما می‌دانیم که میدان الکتریکی کولونی داریم که هیچ میدان مغناطیسی

ندارد، و این همان فیزیکی است که معادله ۷ پیشبینی می‌کند و حل آن تماما متکی به درجات آزادی غیر دینامیک است. به عبارتی برای به دست آوردن میدان کولونی، نمی‌توان از هیچ ترکیبی از درجات آزادی دینامیکی استفاده کرد، پس درجات آزادی غیر دینامیکی هم فیزیک دارند و برای پیشبینی کامل فیزیکی باید آنها را در نظر بگیریم.

رابطه آزادی پیمانه و درجات آزادی غیر دینامیکی

دیدیم که ابتدا ما سه معادله داشتیم که مشتق دوم زمانی ظاهر شده بود اما تنها دو معادله شامل درجه آزادی دینامیکی واقعی بودند و یکی از آنها غیر واقعی بود، اما چرا؟ یک دلیل آن را می‌توان در آزادی پیمانه‌ای جست و جو کرد، آزادی پیمانه ای یک درجه آزادی غیر دینامیک را به یک درجه ظاهرا دینامیکی مربوط می‌کند که می‌توان با استفاده از آزادی پیمانه‌ای، یکی از درجات آزادی سیستم را به نفع دیگری حذف کرد، یک ظاهرا دینامیک به نفع یک ظاهرا غیر دینامیک، بنا بر این به ازای هر درجه آزادی پیمانه‌ای دو درجه آزادی از کل درجات آزادی سیستم غیر دینامیک خواهند بود (به شرطی که آزادی پیمانه‌ای درجه آزادی دینامیکی را به غیر دینامیکی مربوط کند). در نسبیت عام دقیقا همین اتفاق می‌افتد، در تئوری خطی شده نسبیت عام نیز چهار معادله قید وجود دارد که دینامیک نیستند و چهار درجه آزادی پیمانه‌ای هم هست که این چهار قید را به چهار درجه آزادی دیگر مربوط می‌کند که ظاهرا دینامیک اند، اما دقیقا مثل الکترومغناطیس که می‌توانستیم دیورژانس میدان برداری را به نفع ϕ حذف کنیم و این باعث از بین رفتن دو درجه آزادی دینامیک می‌شد، در نسبیت عام نیز چهار درجه آزادی پیمانه‌ای هشت درجه آزادی را غیر دینامیک می‌کنند که در نتیجه از ۱۰ درجه آزادی متریک فقط دو درجه آن باقی می‌ماند.

تنها نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که آیا لزوما همیشه تعداد درجات آزادی پیمانه‌ای و درجات آزادی غیر دینامیکی ظاهری برابر است؟ در نسبیت عام و الکترومغناطیس که همین طور است.

مسئله مقدار اولیه

در اولین نگاه به معادلات ۳ و ۴ به نظر می‌رسد که به ازای چهار میدان ϕ و $\vec{A}$ و درجه دو بودن معادلات نسبت به زمان، ما باید ۸ تابع برای شرایط اولیه در لحظه $t = t_0$ داشته باشیم، چهار تا شرایط اولیه پیکره بنده میدان و چهار تا شرایط اولیه مشتق زمانی، اما با آنالیز دقیقی که راجع به درجات آزادی دینامیک داشتیم معلوم شد فقط دو درجه آزادی دینامیک وجود دارد که متناظر آن باید ۴ شرایط اولیه (دو شرط پیکره بندی و دو شرط مشتق زمانی) داشته باشیم، برای دو مولفه دیگر که غیر دینامیکی هستند به نظر می‌رسد که دو شرط اولیه کافی باشد اما با توجه به آزادی پیمانه‌ای تنها یک شرط اولیه کافی خواهد بود، که جمعا می‌شود ۵ شرط اولیه، اما این پنج شرط چطور مشخص می‌شوند؟ در لحظه $t = t_0$ ما تنها

می‌توانیم میدان‌های E و B را داشته باشیم و با توجه به روابط ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 = & \quad -\vec{\nabla}\phi - \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}_0 = & \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با محاسبه کرل شرایط اولیه میدان مغناطیسی و با استفاده از معادله ۹ می‌توان شرایط اولیه قسمت دینامیکی A را تعیین کرد، و با قسمت بدون دیورژانس E می‌توان $\partial A/\partial t$ همان درجات آزادی دینامیکی را تعیین کرد یعنی با توجه معادله زیر:

$$\vec{E} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} - \frac{\vec{k}}{k^2}\vec{k}.\vec{A}\right) \tag{۱۱}$$

با در دست داشتن میدان‌های E و B شرایط اولیه دینامیکی تعیین می‌شوند، آنچه باقی می‌ماند معادله زیر است:

$$i\vec{k}.\vec{E} = k^2\phi - i\frac{\partial}{\partial t}\vec{k}.\vec{A} \tag{۱۲}$$

این معادله در واقع همان معادله ۷ است. فرم این معادله باعث تعجب است چرا که مثل معادله ۸ فرم دینامیکی ندارد و ظاهرا در معادله موج هم صدق نمی‌کند. البته در پیمانه لورنتس که به صورت، $\nabla.A + \partial\phi/\partial t = 0$ تعریف می‌شود، معادله به صورت زیر چهره دینامیکی به خود می‌گیرد:

$$\rho = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi \tag{۱۳}$$

اما این کاملا ظاهری است، فرض کنید برای حل معادله بالا به دنبال شرایط اولیه بگردیم، قبل از هر چیزی با استفاده از پیمانه لورنتس در میابیم که توابع λ که در معادله موج خلا صدق کنند همچنان پیمانه لونتس را ناوردا نگه می‌دارند. با توجه به این که در زمان $t = t_0$ نیاز به ϕ و $\partial\phi/\partial t$ داریم اما تبدیل پیمانه‌ای به ما اجازه می‌دهد که $\partial\lambda/\partial t$ را از ϕ اولیه کم کنیم و $\nabla^2\lambda$ را به $\partial\phi/\partial t$ اضافه کنیم (با توجه به مستقل بودن انتخاب مشتق زمانی λ و خودِ λ این یعنی هر شرط اولیه دلخواه برای معادله بالا!) و معادله را حل کنیم. به یک معنی تنها جوابِ ناهمگن غیر وابسته به شرایط اولیه مهم است و مجموعه جوابهای همگن این معادله تاثیری در فیزیکِ مسئله ندارد، در این پیمانه ملاحظه می‌کنیم که در واقع ما هیچ نیازی به تعیین شرط اولیه برای ϕ نداریم تا معادلات را حل کنیم، این پیمانه این خوبی را دارد که علیت را برقرار نگه می‌دارد. برای این که عدم نیاز به شرایط اولیه را بهتر ببینیم بهتر است با تبدیل پیمانه‌ای یکی از درجات آزادی غیر دینامیکی را به طور کامل حذف کنیم، مثلا در پیمانه کولون که $k.A = 0$ است معادله به راحتی به صورت $\phi = \rho/k^2$ حل می‌شود، این معادله جوابِ یکتایی برای ϕ مشخص می‌کند که ناشی از استفاده از تمامِ آزادی پیمانه‌ای است.