subject:
Year: Month: Date: ( )

دکتر مشهدی — سرشکنی

سرشکنی و آزمون (Adjustment & test)

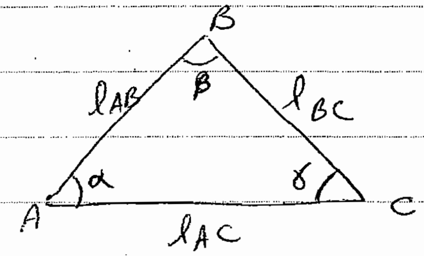
[illegible]

اهداف:

- اندازه‌گیری

هر چی تولید شامل اندازه‌گیری زاویه، اختلاف ارتفاع، زمان، طول، امواج و ... باشد به خاطر همین هدف ما در استفاده از این اندازه‌گیری‌ها تعیین بهتری از کمیت‌هایی که مهم‌ترین آن‌ها مختصات است

مشکل ما این جاست که این پارامترهای هندسی که اندازه‌گیری می‌کنیم در شرط هندسی مسئله به دلیل بعضی خطاها صدق نمی‌کند.



مثلا $\alpha+\beta+\gamma \neq 180^\circ$

$\alpha+\beta+\gamma \neq 180$

یا طبق قانون cos ها اتفاق را داریم که وقتی طول‌ها را اندازه می‌گیریم در رابطه زیر صدق نکند ولی به دلیل همین خطاها چنین اتفاقی می‌افتد

$$l_{AC}^2 = l_{AB}^2 + l_{BC}^2 - 2\, l_{AB}\, l_{BC} \cos\beta$$

سعی می‌کنیم تصحیحاتی را بر خطاهای اتفاقی مشاهدات اعمال کنیم و به نتیجه‌ی مطلوب برسیم (به شروط هندسی که در مسئله حاکم است برسیم) $\longrightarrow$ هدف سرشکنی

$$l_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

مختصات A و C معلوم است و می‌خواهیم با اندازه‌گیری طول‌ها (مشاهدات) به مجهول برسیم (مختصات B)

$$l_{BC}^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$$

$$l_{AC}^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

در این دستگاه معادلات غیرخطی به وجود می‌آید و چون به دنبال حل دستگاه معادلات هستیم باید با جبر خطی آشنایی داشته باشیم

۱. مروری بر مبانی جبر خطی

۲. مراحل انجام یک پروژه نقشه‌برداری

هدف سرشکنی : یعنی تصحیحات مربوط به خطاهای اتفاقی مشاهدات باشد که شرط هندسی حاکم بر یک شبکه برقرار گردد. برای این منظور همراه با دستگاه معادلات همزمان خواهیم که می‌بایست حل گردد. برای این منظور روش کمترین مربعات را بعنوان یک ابزار خواهیم بر

۳. سرشکنی مدل پارامتریک خطی

۳.۱) سرشکنی مدل پارامتریک خطی بدون در نظر گرفتن وزن مشاهدات

۳.۲) سرشکنی مدل پارامتریک خطی با در نظر گرفتن وزن مشاهدات

۴. ویژگی‌های جواب کمترین مربعات

۵. معکوس کیلر و ارتباط آن با جواب کمترین مربعات

۶. ماتریس‌های کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک خطی

۶.۱) درجه آزادی سرشکنی

۶.۲) ماتریس کوفاکتور

۶.۳) برآورد واریانس وزن واحد

۷. سرشکنی مدل پارامتریک غیرخطی

۸. ماتریس‌های واریانس - کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک غیرخطی

۹. معادلات شرط و جواب کمترین مربعات مدل شرط

۱۰. جواب کمترین مربعات مدل شرط غیرخطی

۱۱. ماتریس‌های واریانس - کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل شرط

ubject:
Year: Month: Date: ( )

۱۲. انتقال مشاهدات با وزن P به مشاهدات با وزن I
۱۳. ارتباط جواب حاصل از سرشکنی معادلات شرط با شبه‌معکوس
۱۴. بهترین جواب سرشکنی از عبارات
۱۴.۱) فضاهای برداری
۱۴.۲) نُرم
۱۴.۳) فضای متریک
۱۴.۴) فضای نرم
۱۴.۵) فضای ضرب داخلی
۱۴.۶) فضای هیلبرت

۱۵. سرشکنی مدل ترکیبی
۱۶. ماتریس‌های واریانس-کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل ترکیبی
۱۷. سرشکنی همراه با کنسترینت‌های مجهولات
۱۸. سرشکنی به روش آزاد
۱۹. سرشکنی ترتیبی (sequatial adjustment)
۲۰. phase adjustment
۲۱. آزمون‌های آماری و فواصل اطمینان
۲۱.۱) روش آمار پارامتریک
۲۲.۲) فرضیه آماری، آماره، سطح اعتبار ...

۲۲. آزمون نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات
۲۳. آزمون واریانس
۲۴. آزمون میانگین
۲۵. آزمون برآورد و فواصل اطمینان
۲۵.۱) فاصله اطمینان میانگین یک جامعه
۲۵.۲) فاصله اطمینان واریانس یک جامعه

۰۹۲۶۲۰۵۰۲۸۸

subject:
Year: Month: Date: ( )

۲۵-۳) فاصله‌ی اطمینان یک مشاهده

۲۶- آزمون های بعد از سرشکنی

۲۶-۱) آزمون واریانس فاکتور ثانویه

۲۶-۲) آزمون یافتن مشاهدات اشتباه

۲۶-۳) تکنیک روباست در تشخیص مشاهدات اشتباه

۲۷. فواصل چندبعدی

۲۸. فیلتر کالمن

این روش - phase adjustment بررسی گردد

منابع:

1) vanice k.p. and E.J. krakiwsky (1986), Geodesy, the concepts, PART III

√(2 Mikhail E.M and F. Achermen (1976), observations and least squares

3) Cooper M.A.R (1987) control surveys in civil Engineering

4) krakiasky E.J (1987), papers for CISM adjustment and Analysis seminars

ترتیب نتایج آن ها در طرح تکمیلی را از این سایت ببینید

http://sahand.kntu.ac.ir/~hossainali
↳ least square adjustment

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

اگر می‌خواهید مثل آدمهای حقیقی را بخوانید!

wells D.E. and K. Frankich (1987). Review of linear Algebra, In: papers for CISM adjustment and Analysis seminars

مروری بر مبانی جبر خطی

روش حذفی گوس

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (1.1) \\ x + 2y + 2z = 11 & (1.2) \\ x + 3y + 4z = 19 & (1.3) \end{cases}$$

با حذف متغیر x از معادلات 1.2 و 1.3 می‌توان نوشت

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (2.1) \\ -z = -3 & (2.2) \\ y + z = 5 & (2.3) \end{cases}$$

با تعویض محل معادلات 2.2 و 2.3

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (3.1) \\ y + z = 5 & (3.2) \\ -z = -3 & (3.3) \end{cases}$$

با حذف متغیر y از معادله‌ی 3.1 به این دستگاه معادله می‌رسیم

$$\begin{cases} x + z = 4 & (4.1) \\ y + z = 5 & (4.2) \\ -z = -3 & (4.3) \end{cases}$$

با ضرب طرفین معادله‌ی 4.3 در -1

$$\begin{cases} x + z = 4 & (5.1) \\ y + z = 5 & (5.2) \\ z = 3 & (5.3) \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب دستگاه معادلات 1 به صورت زیر است

$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$

subject:
Year: Month: Date: ( )

روش حذفی گاوس مستقل از تغییر متغیرها است

عدم وابستگی این روش به متغیرهای موجود در دستگاه معادلات ۱ این امکان را فراهم می کند که این دستگاه معادلات را با آرایشی از اعداد به فرم نمایش داده شده در زیر در ۶ بنویسیم

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 19 \end{array}\right]_{3\times 4} \quad (6)$$

آرایش از اعداد به فرم ۶ در جبر خطی اصطلاحاً ماتریس نام دارد

- در این درس با ماتریس های حقیقی (ماتریس هایی که عناصر آن ها اعداد حقیقی اند) سروکار داریم
- ماتریس ها را با حروف بزرگ زیرخط دار نمایش خواهیم داد
- بردار، ماتریس متشکل از یک ستون

با تکرار فرایندی مشابه با مراحل مورد استفاده در روش حذفی گاوس بر ماتریس $\underline{A}$ در رابطه ی ۶ خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad (7) \qquad \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$$

در این فرایند با استفاده از اعمال مقدماتی سطری (Elemetry row operation) به فرم جدیدی از دستگاه معادلات ۱ می رسیم. این فرم جدید ماتریس $\underline{A}$ را فرم پلکانی سطری کاهش یافته (redused row echelon form) می نامیم

تعریف فرم پلکانی سطری یک ماتریس: ماتریس $\underline{A}$ دارای فرم پلکانی سطری است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد

۱- اولین عنصر غیر صفر هر سطر عدد ۱ باشد. این عنصر از ماتریس اصطلاحاً عنصر pivot نامیده می شود

۲- عناصر ستونی که یک عنصر pivot در آن قرار دارد صفر است غیر از عنصر pivot

3_ اگر ماتریس دارای سطری متشکل از عناصر صفر باشد این سطر لزوماً در سطر آخر ماتریس قرار می‌گیرد

_ در نرم افزار مطلب دستور rref(A) ماتریس A را تبدیل به فرم پلکانی سطری می‌کند.

به لحاظ تعداد جواب دستگاه‌های معادلات:

1_ دارای یک و تنها یک جواب هستند   مجهولات = معادلات

2_ دارای بی‌نهایت جواب هستند   مجهولات > معادلات

3_ هیچ جوابی ندارند   مجهولات < معادلات

مثال 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \ell_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & \ell_2 \end{cases}$$

این مثال نمونه‌ای از دستگاه معادلات با بی‌نهایت جواب است

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad (9) \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

با بازنویسی دستگاه معادلات 9 داریم: ←

برحسب تعداد معادلات و تعداد مجهولات:

1_ تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است   under_determined

2_ تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر است   determined

3_ تعداد مجهولات از تعداد معادلات کمتر است   over_determined

دستگاه‌های معادلات همگن (homogenous)

دستگاه‌هایی هستند که تمام مقادیر ثابت همگی صفر است دستگاه معادلات 8 یک دستگاه معادلات همگن است. این دستگاه‌ها همواره دارای جواب بدیهی صفر هستند (trivial solution)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{جواب بدیهی} : \ \underline{x} = 0$$

PARSCO

در مقابل دستگاه‌های معادلات با مقادیر ثابت غیر صفر غیرهمگن (non-homogenous) هستند

تعریف: هر عضو از یک ماتریس عددی است که در محل برخورد یک سطر و یک ستون خاص از آن ماتریس قرار می‌گیرد.

$\underline{A} = [A_{ij}]_{n \times m}$ A_{11}: سطر $i=1$ و $j=1$

ترکیب ماتریس‌ها: چنانچه: $\underline{B}$، $\underline{C}$ دو ماتریس از نظر هم اندازه باشند داریم

$\underline{A} = [\underline{B} \ \underline{C}]$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 3 \\ c & d & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

• در حالت دیگر ترکیب دو ماتریس $\underline{B}$ و $\underline{C}$ داریم $\underline{A} = [\underline{B} ; \underline{C}]$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

تعریف جمع: اگر $\underline{B}$ و $\underline{C}$ دو ماتریس هم اندازه (هم مرتبه) باشند

$\underline{A} = [A_{ij}]_n$, $\underline{A} = \underline{B} + \underline{C}$

10

$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$

برقرار است که

$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$

$\underline{0}$ ماتریسی است که همه‌ی عناصر آن صفرند.

ضرب اسکالر: حاصلضرب اسکالر α (حقیقی فرض می‌شود) در ماتریس A

$$\alpha \underline{A} = \underline{B} \Rightarrow \alpha * \underline{A}$$

$$B_{ij} = \alpha A_{ij}$$

مجدداً دستگاه معادلات 8 را در نظر بگیرید این دستگاه معادلات به فرم برداری بازنویسی است

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

این فرم نمایش دستگاه 8 مبتنی بر تعریف ضرب اسکالر است

تعریف ترکیب خطی (linear combination)

بردارهای دستگاه 12 را که در آن ضرایبی از بردارها با یکدیگر جمع شده‌اند را یک ترکیب خطی از آن بردارها می‌نامند.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A}\,\underline{x} = x_1 A_{\cdot,1} + x_2 \underline{A}_{\cdot,2} + x_3 A_{\cdot,3}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix}$$

با تعمیم روش ضرب یک ماتریس در بردار به ضرب دو ماتریس می‌توان نوشت

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\left[B_{\cdot,1} \ \underline{B}_{\cdot,2} \ \underline{B}_{\cdot,3} \ \cdots \ \underline{B}_{\cdot,n}\right]$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = \left[\underline{A}\,B_{\cdot,1} \ \ \underline{A}\,\underline{B}_{\cdot,2} \ \cdots \ \underline{A}\,\underline{B}_{\cdot,n}\right]$$

شرط لازم برای استفاده از این روش برابری تعداد ستونهای ماتریس A با سطرهای ماتریس B می‌باشد

معکوس یک ماتریس. ماتریس $\underline{B}$ را معکوس ماتریس $\underline{A}$ گویند اگر و تنها اگر

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I} \qquad (13)$$

در این صورت $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$

(13) یک روش ابتدایی تعیین معکوس یک ماتریس حل دسته‌های معادلات متناظر با رابطه است. ماتریس هر ماتریس مربعی لزوماً معکوس‌پذیر نیست
(ماتریس های مستطیلی معکوس پذیر نیستند)

در حل یک دسته معادلات بشرط معلوم بودن $\underline{A}^{-1}$ جواب $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$:

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b} \qquad (14)$$ همیشه مناسب نیست

در متلب $inv(\underline{A}) = \underline{B} = \underline{A}^{-1}$

تعریف توان یک ماتریس: اگر $\underline{A}$ ماتریس مربع از مرتبه n باشد.

$$\underline{A}^k = \underbrace{\underline{A}.\underline{A}.\ldots.\underline{A}}_{k \text{ مرتبه}}$$

بنا بر تعریف $\underline{A}^0 = \underline{I}$ در نظر گرفته می‌شود

در متلب , $\underline{A}.\wedge(5)$ تک تک عناصر را به توان ۵ می‌رساند و $\underline{A}\wedge(5)$ ماتریس $\underline{A}$ را ۵ مرتبه ضرب می‌کند

تعریف ترانهاده. ترانهاده یا ترانسپوز یک ماتریس، ماتریسی است که از تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس مورد نظر بدست می‌آید

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A}^T = \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$$

تعریف: ماتریس قطری ماتریس $\underline{A}$ را قطری می‌گوییم اگر و تنها اگر

$$\forall i,j \,,\ \text{if } i\neq j \,;\ A_{ij}=0$$

تعریف: ماتریس $\underline{A}$ را بالا مثلثی گویند (upper-triangular) اگر و تنها اگر

$$\forall i,j \quad i>j \quad A_{ij}=0$$

تعریف: ماتریس $\underline{A}$ را پایین مثلثی گویند اگر و تنها اگر

$$\forall i,j \quad i<j \quad A_{ij}=0$$

روابط زیر برای اسکالرهای β و t و ماتریس‌های $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ و $\underline{C}$ که هم بعد فرض می‌شوند برقرارند

(1) $\underline{A}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{A}=\underline{A}$

(2) $\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$

(3) $(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{A}+(\underline{B}+\underline{C})$

(4) $\underline{A}(\underline{B}\,\underline{C})=(\underline{A}\,\underline{B})\,\underline{C}$

(5) $\underline{A}(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}\,\underline{B}+\underline{A}\,\underline{C}$

(6) $(\underline{A}+\underline{B})\underline{C}=\underline{A}\,\underline{C}+\underline{B}\,\underline{C}$

(7) $(\beta t)\underline{A}=\beta(t\underline{A})$

(8) $\beta(\underline{A}\,\underline{B}) = (\beta\underline{A})\,\underline{B} = \underline{A}\,(\beta\underline{B})$

(9) $(\beta + t)\,\underline{A} = \beta\underline{A} + t\underline{A}$

(10) $\beta(\underline{A} + \underline{B}) = \beta\underline{A} + \beta\underline{B}$

(11) $(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$

(12) $(\beta\underline{A})^T = \beta\underline{A}^T$

13 $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$

(14) $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\underline{A}^T$

(15) $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$

(16) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

(17) $(\underline{A}^T)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^T$

18 - اگر $\underline{A}$ ماتریس مربع از مرتبه‌ی n و $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{I}$ آنگاه $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$

19 - همچنین روابط زیر همواره برقرار است

Subject:
Year: Month: Date: ( )

) $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$

: $\underline{A}\,\underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{A} = 0$ or $\underline{B} = 0$

3) $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{C}$ & $\underline{A} \neq 0 \Rightarrow \underline{B} = \underline{C}$

استقلال خطی (lineas indipending)

n بردار $\underline{v}_1$ ، $\underline{v}_2$ ، ... ، $\underline{v}_n$ را مستقل خطی گویند اگر تنها راه دستگاه معادلات

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \cdots + c_n \underline{v}_n = 0 \quad (15)$$

تنها دارای جواب بدیهی $\underline{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T = 0$ باشد.

مثال: فرض کنید $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}$ ، $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$ ، $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$

$$\underline{A} = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \underline{v}_3] \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب [illegible] دارد پس [illegible]

فرم پلکانی سطری

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$c_1 - c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_3$

$c_2 + 2c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_3$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_3\\-2c_3\\c_3\end{bmatrix} \qquad \underline{c} = c_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

به ازای هر مقدار دلخواه غیر صفر c_3 یک مجموعه جواب غیر صفر $\underline{c}$ به دست می‌آید بنابراین این سه بردار وابسته‌اند

subject:
Year: Month: Date: ( )

فضای برداری :vector spase

مجموعه‌ای از بردارهای باشد $\underline{x}$, $\underline{y}$ را که دارای سه خاصیت زیر باشد (فضای R^n) یک فضای برداری می‌دهد

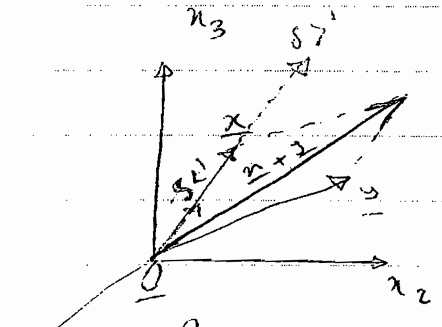
1. $\forall\ \underline{x},\underline{y}\in R^n$, $(\underline{x}+\underline{y})\in R$

جمع هر دو بردار دلخواه از فضا باید برداری از آن فضا باشد
بسته بودن فضا نسبت: عمل جمع برداری

2. برای هر اسکالر دلخواه s و هر بردار دلخواه $\underline{x}$: $\forall\ s\in R_n$, $\underline{x}$
[بسته بودن فضا نسبت به عمل ضرب اسکالر]

3. عنصری مانند بردار $\underline{0}$ در این فضا وجود داشته باشد بطوری که برای هر بردار دلخواه $\underline{x}$ از این فضا $\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}$ در این صورت بردار $\underline{0}$ را عضو صفر فضا می‌نامیم

فضای R_3



$\underline{0}+\underline{x}=\underline{x}$

زیرفضا: subspas

فضای W را فضای زیرفضای برداری فضای برداری R^n گوییم اگر سه خاصیت ذیل برای تمام بردارهای واقع در این فضا صادق باشند

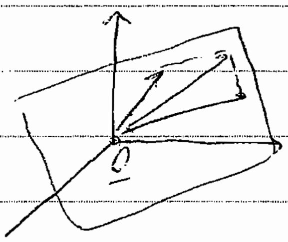
1) $\forall\ \underline{x},\underline{y}\in W$ $\quad \underline{x}+\underline{y}=\underline{z}\in \underline{W}$.

2) $\forall\ \underline{x}\in W$, $\forall s$ $\quad s\underline{x}=\underline{p}\in \underline{W}$

3) $\exists\ \underline{0}$ $:\forall\ \underline{x}\in W$, $\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}$

subject:
Year: Month: Date: ( )

مثال: صفحه‌ی $x_1+x_2+x_3=0$ زیرفضای از فضای برداری R^3 است



دو زیرفضای مهم وجود دارد یکی از آنها زیرفضای پوچ است که در تئوری اهمیت دارد.

زیرفضای پوچ (Null space)

فرض کنید که $\underline{A}_{m\times n}$ ماتریس دلخواه داده شده است. زیرفضای پوچ ماتریس $\underline{A}$ که به نمایش $N(\underline{A})$ داده می‌شود مجموعه‌ای متشکل از تمام بردارهای $\underline{x}$ است که در معادله‌ی $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{0}$ صادق باشد

$$N(\underline{A})=\{x \mid \underline{A}\,\underline{x}=\underline{0}\}$$

n تعداد ستون $\underline{A}$

قضیه: $N(\underline{A})$ در تعریف فوق زیرفضای از فضای R^n است

اثبات: فرض کنید $\underline{x}$ و $\underline{y}$ دو عضو اختیاری از $N(\underline{A})$ که به طور دلخواه فرض شده است

$$\underline{x}\in N(\underline{A}),\ \underline{y}\in N(\underline{A}) \Rightarrow \underline{x}+\underline{y}\in N(\underline{A})$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x}\in N(\underline{A}) \Rightarrow \underline{A}\,\underline{x}=\underline{0}\\ \underline{y}\in N(\underline{A}) \Rightarrow \underline{A}\,\underline{y}=\underline{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A}(\underline{x}+\underline{y})=\underline{0} \Rightarrow (\underline{x}+\underline{y})\in N(\underline{A})$$

اسکالر دلخواه s را از فضای R^n در نظر می‌گیریم اگر $\underline{x}$ عضو اختیاری از $N(\underline{A})$ باشد

$$\underline{x}\in N(\underline{A}) \Rightarrow \underline{A}\,\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow s(\underline{A}\,\underline{x})=s(\underline{0})$$

$$\underline{A}(s\underline{x})=\underline{0} \Rightarrow s\underline{x}\in N(\underline{A})$$

چون $\underline{A}\,\underline{0}=\underline{0} \Rightarrow \underline{0}\in N(\underline{A})$ چون

subject:
Year: Month: Date: ( )

از تعریف فضای پوچ به سادگی می‌توان دریافت که برای محاسبه‌ی فضای پوچ یک ماتریس کافیست دستگاه معادلات همگن $\underline{A}\,\underline{x}=0$ را برای آن حل کرد

مثال: فضای پوچ ماتریس $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 16 & 7 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید

دستگاه معادلات $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 16 & 7 & 0 \end{array}\right]$ $\underline{1}$ را حل می‌کنیم

فرم سطری پلکانی دستگاه معادلات $\underline{1}$ به صورت زیر است

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

دستگاه معادلات 3 فرم تحلیلی معادلات دستگاه معادلات 2 است

$(3) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \end{array}$ ⇐ متغیرهای محوری

x_3 و x_4 متغیرهای آزاد دستگاه معادلات (3) می‌شوند

هم بردار جواب عمومی دستگاه معادلات به صورت زیر است

$$\underline{x}_1 = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

x_3 و x_4 ستون‌های غیر pivot ماتریس ضرایب

* تعداد ستون‌های غیر pivot ماتریس ضرایب برابر تعداد متغیرهای آزاد است

در این مثال دستگاه معادلات $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$ را در حالت $\underline{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \\ 39 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

PARSCO

می‌توان نشان داد که $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ یک جواب خاص برای این دستگاه معادلات

همچنان است

برای هر ترکیب خطی دلخواه از رابطه‌ی 4 می‌توان نوشت

$$\underline{A}(\underline{x}_1 + \underline{p}) = \underline{A}\,\underline{x}_1 + \underline{A}\,\underline{p}$$
$$= \underline{A}p + 0$$
$$0 + \underline{b}$$
$$= \underline{b}$$

چون دستگاه دارای فضای پوچ است

دستگاه دارای جواب عمومی نیز هست (S)

بنابراین در بیشترین حالت باید طوری باشد که در نهایت دستگاه معادلات دارای فضای پوچ تهی باشد. اگر دارای عضو باشد رسیدن به جواب امکان‌پذیر نیست. مسئله‌ای این نوع در عمل ضروری است.

یکی دیگر از فضاها که در ترکیب اهمیت دارد:

فضای برد (Range space) یا فضای ستونی (Column space) یک ماتریس
ماتریس $\underline{A}_{m\times n}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تمام بردارهای $\underline{b}$ که برای هر یک از آن‌ها دستگاه معادلات $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ دارای حداقل یک جواب است فضای برد یا فضای ستونی ماتریس $\underline{A}$ می‌نامند. این فضا را با $R(\underline{A})$ نمایش می‌دهند.

مثال: فضای برد ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 16 & 7 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

باید دستگاه معادلات $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ را حل کنیم. برای محاسبه‌ی فضای برد مانند محاسبه‌ی فضای پوچ دستگاه معادلات $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ را حل کرده، در اینجا هدف پیدا کردن مجموعه‌ای از بردارهای $\underline{b}$ است که حداقل یک جواب برای دستگاه معادلات $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ پیدا شود.

subject:
Year: Month: Date: ( )

شکل سطری پلکانی ماتریس $\underline{A}$ در این مثال به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 5$$

چون ستون‌های غیر pivot داریم (منظور ستون‌های 3 و 4 در ماتریس بالا) هر دستگاه معادلات خطی که ماتریس $\underline{A}$ در این مثال ماتریس ضرایب مربوط به آن را تشکیل می‌دهد دارای بی‌نهایت جواب است

با صفر در نظر گرفتن متغیرهای نظیر ستون‌های غیر pivot در این دستگاه معادلات بردار مقادیر ثابت $\underline{b}$ که به ازای آن‌ها دستگاه معادلات $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ در این مثال منجر به جواب خواهد شد فضای برد این ماتریس را مشخص خواهد کرد

$$\underline{b} = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , x_3 , x_4 = 0 \quad 6$$

به ازای هر بردار دلخواه $\underline{b}$ از رابطه‌ی (6) یک جواب برای دستگاه معادلات (5) می‌توان رسید

* ابر بردار پایه (base vector)

مجموعه‌ی بردارهای $V_1, V_2, \ldots, V_p$ را بردارهای پایه‌ی یک فضای برداری دلخواه مانند W می‌نامیم اگر بتوان هر یک از اعضای فضای برداری W را با استفاده از ترکیب خطی از این بردارها نمایش داد. در این صورت بعد فضای برداری را برابر تعداد بردارهای پایه تعریف می‌کنیم

برابری تعداد بردارهای پایه‌ای پوچ یک ماتریس با تعداد ستون غیر pivot آن و برابری تعداد بردارهای پایه در فضای ستونی یک ماتریس با تعداد ستون‌های pivot آن ایجاب می‌کند

$$\dim(N(\underline{A}_{m\times n})) + \dim(R(\underline{A}_{m\times n})) = n \quad (7)$$

n: تعداد ستون‌های ماتریس $\underline{A}$ است

subject:
Year: Month: Date: ( )

از رابطه‌ی (7) می‌توان دید اگر $N(\underline{A}) = \phi$ (به عبارت دیگر $\dim(N(\underline{A}))=0$)
در این صورت $\dim(R(\underline{A}))=n$ و دستگاه معادلات فقط دارای جواب
صفر بردار است

فضای برد = تعداد ستون‌های pivot = RANK A
فضای پوچ = تعداد ستون‌های غیر pivot
$\} + = n$

تعریف رتبه‌ی یک ماتریس

برای ماتریس دلخواه $\underline{A}_{m\times n}$ رتبه یا Rank ماتریس $\underline{A}$ برابر بعد فضای برد این ماتریس است

اگر $\operatorname{rank}(\underline{A}) = \dim(R(\underline{A})) = \min(m,n)$ ماتریس $\underline{A}$ را ماتریس با رتبه‌ی کامل می‌نامیم

اگر $\operatorname{rank}(\underline{A}) = \dim(R(\underline{A})) < \min(m,n)$ ماتریس $\underline{A}$ کمبود رتبه یا (rank deficiency) خواهد داشت

تعریف ضرب داخلی:

مثال: در مثال قبل $\dim(R(\underline{A}))=2$ و $\underline{A}$ ماتریس 3×4 است بنابراین $\dim(R(\underline{A})) < \min(3,4)=3$ است پس ماتریس $\underline{A}$ در این مثال دارای نقصان رتبه است

دو بردار دلخواه $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ و $\underline{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ را در نظر بگیرید ضرب داخلی این دو بردار:

$$\underline{x}^T\underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n \quad (8)$$

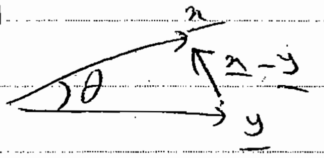
نرم اقلیدسی یا نرم ۲ یک بردار: عبارت است از

$$\|x\| = \sqrt{\underline{x}^T\underline{x}} = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

از هندسه می‌دانیم بر مبنای تعریف نرم اقلیدسی ضرب داخلی دو بردار $\underline{x}$ و $\underline{y}$ به صورت

زیر تعریف می‌شود

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = \|x\|_2 \, \|y\| \, \cos\theta \quad (9)$$



$$\|x-y\|^2 = \|\underline{x}\|_2^2 + \|\underline{y}\|_2^2 - 2\,\|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 \cos\theta$$

$$(\underline{x}-\underline{y})^T(\underline{x}-\underline{y}) = \underline{x}^T\underline{x} + \underline{y}^T\underline{y} - 2\,\|x\|_2 \|y\|_2 \cos\theta$$

$$\text{سمت چپ} = (\underline{x}^T - \underline{y}^T)(\underline{x}-\underline{y}) = \cancel{\underline{x}^T\underline{x}} - \underline{x}^T\underline{y} - \underline{y}^T\underline{x} + \cancel{\underline{y}^T\underline{y}}$$

$$= \cancel{\underline{x}^T\underline{x}} + \cancel{\underline{y}^T\underline{y}} - 2\,\|x\|_2 \|y\|_2 \cos\theta$$

$$-2\,\underline{x}^T\underline{y} = -2\,\|x\|\,\|y\| \cos\theta$$

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = \|x\|\,\|y\| \cos\theta$$

زاویه‌ی بین دو بردار:

بر اساس آنچه در جلسه‌ی قبل در خصوص تعریف ضرب داخلی دو بردار ملاحظه شد زاویه‌ی بین دو بردار دلخواه $\underline{x}$ و $\underline{y}$ از رابطه‌ی

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|x\|\,\|y\|}\right) \quad (1)$$

حاصل می‌شده است

بنابراین شرط تعامد دو بردار $\underline{x}$ و $\underline{y}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

Orthogonal

$$\underline{x} \perp \underline{y} \iff \underline{x}^T\underline{y} = 0 \quad (2)$$

به همین ترتیب تعریف متعامد دو بردار برای مجموعه‌ای از تعداد دلخواهی از بردارها قابل تعمیم است به طوری که: p بردار $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ و ... و $\underline{v}_p$ را متعامد می‌گوییم اگر و تنها اگر هر زوج دلخواه از این بردارها بر یکدیگر عمود باشند.

پایه‌ی یک فضا:

مجموعه‌ای از p بردار مستقل خطی که یک فضا را پدید آورند را پایه‌ی آن فضا گوییم. چنانچه این p بردار بر یکدیگر عمود باشند، پایه‌ی این فضا متعامد خواهد بود (orthogonal basis)

مثال: یک نمونه‌ی آشنا از یک پایه‌ی متعامد، بردارهای پایه محورهای سیستم مختصات مستقیم الخط کارتزین در فضای سه‌بعدی است:

$\underline{e}_1 = [1, 0, 0]^T$

$\underline{e}_2 = [0, 1, 0]^T$

$\underline{e}_3 = [0, 0, 1]^T$

(در درس ریاضی II خواهید دید با پایه‌های متعامد در سیستم‌های مختصات منحنی الخط کارتزین آشنا خواهید شد)

ماتریس متعامد (orthogonal matrix)

ماتریس مربع $\underline{Q}$ با n ستون $\underline{Q}_{\cdot,1}$ ، $\underline{Q}_{\cdot,2}$ ، $\underline{Q}_{\cdot,3}$ ، ... ، $\underline{Q}_{\cdot,n}$ را متعامد گویند اگر و تنها اگر ستون‌های این ماتریس بردارهای متعامد باشند

$$\forall\, i,j \quad i,j \in \{1,2,\ldots,n\}; \quad \underline{Q}_{\cdot,i} \cdot \underline{Q}_{\cdot,j} = 0 \qquad (3)$$

مثال: ماتریس دوران یکی از ماتریس‌های متعامد است (در فضای دوبعدی)

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_{\cdot,1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} \quad \underline{R}_{\cdot,2} = \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{R}_{\cdot,1} \cdot \underline{R}_{\cdot,2} = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$$

ماتریس ارتونرمال (orthonormal)

ماتریس متعامدی است که هریک از ستون های آن دارای نرم واحد است ماتریس علاوه بر شرط (3) یک ماتریس ارتونرمال شرط زیر نیز برقرار است:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \|Q_{\cdot, i}\| = 1$$

مثال: ماتریس های دوران نمونه هایی از ماتریس های ارتونرمال هستند

$$\|R_{\cdot,1}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + (-\sin\alpha)^2} = 1$$

$$\|R_{\cdot,2}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

قضیه زیر خصوصیات مهمی از ماتریس های ارتونرمال را ارائه می دهد.

قضیه:

اگر Q ماتریس مربعی یا ماتریس ارتونرمال باشد:

1. $\underline{Q}\,\underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I} \Rightarrow \underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T$

2) $\forall \underline{x} \in R^n \quad \|\underline{Q}\,\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ (4)

اثبات:

$$\|Qx\| = \left[(\underline{Q}\,\underline{x})^T \cdot (\underline{Q}\,\underline{x})\right]^{1/2}$$

$$= \left[(\underline{x}^T \underline{Q}^T) \cdot (\underline{Q}\,\underline{x})\right]^{1/2}$$

$$= \left[\underline{x}^T \underbrace{(\underline{Q}^T \underline{Q})}_{I} \underline{x}\right]^{1/2}$$

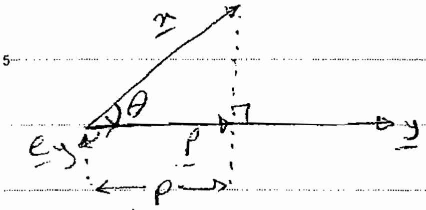
$$= \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}} = \|\underline{x}\|$$

ubject:
Year: Month: Date: ( )

3. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n : \underline{x}^T \underline{y} = (Q\underline{x})^T (Q\underline{y})$ یعنی با دوران دو بردار (در یک سیستم مختصات جدید) زاویه بین آن دو بردار تغییر نمی‌کند

تصویر یک بردار:

برداری است که از تصویر عمود انتهای یک بردار بر بردار دیگری که مبدأ آن به مبدأ بردار اولیه انتقال یافته است به دست می‌آید.



$$\underline{x}^T \underline{y} = \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\| \cos\theta$$

$$p = \|\underline{p}\| \qquad (5)$$

$$\cos\theta = \frac{p}{\|\underline{x}\|}$$

(اندازه) (اندازه)

$$\underline{p} = f\,\underline{y}$$ یعنی هم‌راستا با بردار y است

$$p = \|\underline{x}\| \cos\theta$$

$$\underline{p} = proj_{\underline{y}}^{\underline{x}}$$ تصویر بردار x بر بردار y

$$p = \|\underline{x}\| \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\| \, \|\underline{x}\|}$$

$$p = \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|} \qquad \left. e_y = \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|} \right\} \Rightarrow proj_{\underline{y}}^{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} e_y$$

$$proj_{\underline{y}}^{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|} \underline{y} \qquad (6)$$

به همین ترتیب می‌توان یک بردار دلخواه x را برحسب مؤلفه‌های تصویر این بردار بر مجموعه‌ای از بردارهای متعامد نظیر $\underline{w}_1$، $\underline{w}_2$، ... ، $\underline{w}_p$ به صورت زیر نوشت

$$proj_{W}^{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^T \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|} \underline{w}_1 + \frac{\underline{x}^T \underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|} \underline{w}_2 + \cdots + \frac{\underline{x}^T \underline{w}_p}{\|\underline{w}_p\|} \underline{w}_p$$

W: فضایی است که بردارهای $\underline{w}_1$، ... $\underline{w}_p$ یک پایه برای آن محسوب می‌شود

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

با قطر کوچک سمت استدلالها باشد تا خط خوب باشد. یعنی دست راست حاشیه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس:

اگر $\underline{A}$ ماتریس مربع باشد اسکالر λ و بردار $\underline{x}$ را به ترتیب یک مقدار ویژه (eigen value) و یک بردار ویژه (eigen vector) برای ماتریس $\underline{A}$ گویند اگر و تنها اگر

$$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \quad (7)$$

برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه دستگاه معادلات 7 را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\underline{A}\,\underline{x} - \lambda\,\underline{x} = 0$$

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})\,\underline{x} = 0 \quad (8)$$

برای رسیدن به جواب غیر بدیهی برای دستگاه معادلات 8.2 باید

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \quad (9)$$

معادله‌ی 9 به معادله‌ی مشخصه ماتریس $\underline{A}$ معروف است.

با افزایش ابعاد یک ماتریس حل معادله‌ی مشخصه نظیر آن برای تعیین مقادیر ویژه (و به دنبال آن بردارهای ویژه نظیر آن مقادیر ویژه) بسیار مشکل می‌شود لذا در عمل از روش‌های عددی موجود برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه یک ماتریس استفاده می‌کنیم.

$\text{eig}(\underline{A})$: در مطلب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

هر ماتریس مربع $\underline{A}$ از مرتبه‌ی n دارای n مقدار ویژه $\lambda_n, \ldots, \lambda_2, \lambda_1$ و n بردار ویژه نظیر $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ می‌شود نشان داد که:

$$\underline{A} = \underline{X}\,\underline{\Lambda}\,\underline{X}^T \quad (9)$$

$$\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

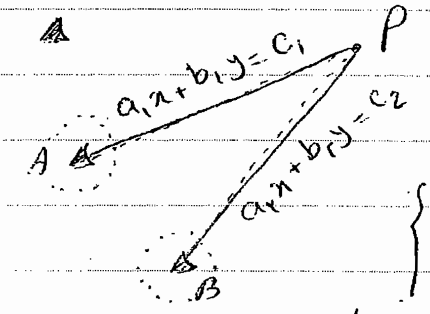
$$\underline{X}_{n\times n} = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n]$$

نرم وارون یک ماتریس را نرم اسپکترال یا طیفی ماتریس آن ماتریس می‌گویند

خصیصه: اگر A ماتریس مربع متقارن باشد مقادیر ویژه‌ی ماتریس A حتماً اعداد حقیقی اند

خصیصه: یک ماتریس متقارن را همواره می‌توان به فرم قطری نوشت

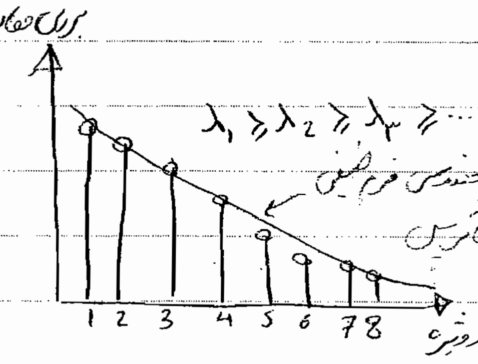
دو نقطه‌ی معلوم داریم می‌خواهیم مختصات P از نقطه‌ی A و B بیابیم



هر چه زاویه‌ی ما بین A و B از هم دورتر شوند محل برخورد دو پاره خط AP و BP از یک نقطه تک پاره خط نزدیک می‌شوند

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

امکان رسیدن به جواب قطعی برای معادلات وجود ندارد به آنها دستگاه‌های معادلات ناپایدار می‌گویند که تغییر کوچک در پارامتر ورودی باعث تغییر زیاد در خروجی می‌شود



دستگاه‌های معادلات ناپایدار:
اگر مقادیر ویژه را مرتب کنیم و در روی یک گراف بیاوریم برای مسائل ناپایدار ما با یک گراف رو به رو مواجه هستیم که ... عالی است. اگر به محور افقی نزدیک شد دستگاه معادلات ما singular است اگر نزدیک صفر باشد دستگاه ما ناپایدار است

singular یعنی جواب ندارد

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = k(A) \quad 10$$

عدد شرط

Condition number

برای یک دستگاه معادلات ایده‌آل $k(A)=1$

subject:

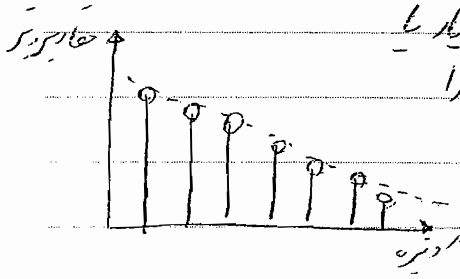
Year: Month: Date: ( )

- در حقیقت برای عدد شرط cond(A) ، عدد شرط ماتریس A را به ما می دهد

محاسبه ی معکوس ماتریس های بد وضع با condition number بالا با خطاهای محاسباتی زیادی همراه است هرچه condition number بزرگتر شد خطای محاسباتی به اعداد ارقام بیشتری سرایت می کند

- روش های حل مسائل ناپایدار به تکنیک های پایدارسازی (regularization technics) معروف هستند

محاسبه مقادیر ویژه در راه های دیگر امکان محاسبه یک ماتریس را نیز با شکل خطی فراهم می کند از این طریق وضعیت یا condition یک ماتریس به طور عینی قابل بررسی بود علاوه بر این معیار نسبت بزرگترین به کوچکترین مقدار ویژه یک ماتریس را به عنوان عددی در شرایط نا وضعیت یک ماتریس را روشن می کند معرفی کردیم. عدد شرط (condition number) این تعریف از عدد شرط به روشنی ارتباط بین تغییر پارامترهای خروجی یک دستگاه معادلات را با تغییر در پارامترهای ورودی آن دستگاه نشان می دهد. برای رسیدن به معیار یا تعریفی از عدد شرط به ابزار ارتباط بین تغییرات پارامترهای خروجی را با تغییرات در پارامترهای ورودی یک سیستم روشن کند ما نیاز به تعریف مفاهیم جبری از جبر خطی هستیم.



نرم یک بردار:

نرم p ام یک بردار $\underline{x}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p} \quad (1)$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

نرم 2 یکی از حالت های خاص است که به خصوص $p=2$ از نرم p قابل استخراج است همین طور با در نظر گرفتن ۱ به نرم هم گیری می‌رسیم که به آن نرم ۱ می‌گویند

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad (2)$$

مجموعه‌ای از معلومات و مجهولات داریم که بین آن ها یک مدل ریاضی یک ارتباط ایجاد می‌کنیم

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} \qquad \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x}$$

معلومات   مجهولات   مدل ریاضی

مجهولات ← $n > u$ تعداد مشاهدات

با ناشناخته

پس با یک دستگاه معادلات over_determinde استفاده می‌کنیم این دستگاه یک حالت دارد که هیچ u معادله‌ای را نمی‌توانیم پیدا کنیم که از حل در u معادله‌ی دیگر صدق کند اندازه‌گیری‌ها حتماً خطا دارند راه حل این است که این مشاهدات را با یک تصحیح انجام دهیم به این ترتیب از یک دستگاه معادلات over_determind با ناشناخته به پایداری می‌رسیم

$$\underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

عناصر آن حتی ناشناس یا مجهول هستند به لحاظ خاصیت تصادفی مشاهدات

مشاهدات   مجهولات

$$\Longrightarrow n < n+u$$

به این ترتیب از دستگاه معادلات over-determind به دستگاه معادلات under determind می‌رسیم که دارای بی‌نهایت جواب است که به دردمان نمی‌خورد باید دنبال جواب منحصر به فرد بگردیم تا با در نظر گرفتن شرایط خاص یک جواب است که برخوردار باشد برای حل این مشکل بی‌نهایت جواب می‌آییم در روش کمترین مربعات:

least-esquer technique

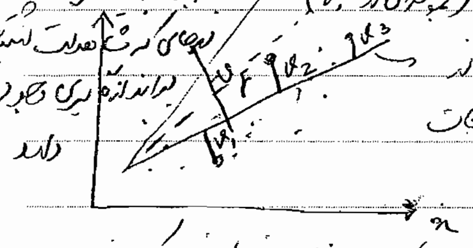
$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} \\ \|\underline{l} - \underline{A}\,\underline{x}\|_2 = \min = \|v\|_2 \end{cases}$$

روش کمترین مربعات

فرض بر این است که مشاهدات با دقت بالا شده پس بردارهای v ما دارای مقادیر کوچک هستند

PARSCO

روش های کمترین مربعات یکی از روش های بهینه سازی است علاوه بر مزایای آن از معایب نیز این روش برخوردار است برای مثال: n اندازه گیری کنیم داریم که در صفحه x و y هستند و می خواهیم یک خط برازش دهیم اگر بردار پارامترهای مجهول را بگیریم $\underline{x}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ خطی را باید بیابیم که کمترین فاصله را از نقاط داشته باشد در این محصول ابتدا استفاده از کمترین مربعات است که کمترین فاصله را بدست می آورد (مجموع مربعات از v ها)



$$y = ax + b$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

حال چون تعدادی از مشاهدات با بقیه مشاهدات تطابق مناسب نداشته باشد بنابراین یکی از v های بزرگ min می شود چون تصحیح مشاهداتی است که پرت است بنابراین شیب خط را طوری تغییر دهد که مناسب با v آخری نیز باشد در این صورت خطا ایجاد می شود و جواب با اصلاً با واقعیت تطابق پیدا نمی کند

نسبت به خطاهای سیستماتیک حساس است

در این صورت اگر به جای حل از روش under determind از روش های دارای نرم-1 استفاده کنیم یعنی اگر بتوانیم مشاهدات اشتباه را حذف کنیم با یک نرم از شرط نرم-1 مینیمم کردن به جای نرم-2 استفاده می کنیم

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}x \\ \|\underline{l} - \underline{A}\underline{x}\|_1 = min \end{cases}$$

این محاسبه نرم-1 جزو محاسبات غیرخطی است. و دلیل بر این است که جمع اشتباهی در مشاهدات نداریم

با توجه به مفهوم نرم که برای بردار دارای شود نیز میتوان به ماتریس تعمیم داد؟ نرم یک ماتریس $(\underline{A})$ که به $\|\underline{A}\|$ اسکالری است که در شرایط زیر صدق می کند

1. $\forall \underline{A}, \|\underline{A}\| \geq 0$
2. $\|\underline{A}\| = 0 \iff \underline{A} = \underline{0}$ (ماتریس صفر)

subject:
Year: Month: Date: ( )

3. $\forall s \in R ,\ \forall \underline{A} \quad \|s\underline{A}\| = |s| \cdot \|\underline{A}\|$

4. $\forall \underline{A}, \underline{B}$ (جمع‌پذیر) : $\quad \|\underline{A}+\underline{B}\| \leq \|\underline{A}\| + \|\underline{B}\|$

5. $\forall \underline{A}, \underline{B}$ (ضرب‌پذیر) $\quad \|\underline{A}\,\underline{B}\| \leq \|\underline{A}\|\,\|\underline{B}\|$

معروف‌ترین نمونه‌های از تعریف نرم یک ماتریس که در شرایط فوق صدق می‌کند

نرم فروبنیوس (Ferobenius)

$$\|\underline{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}$$

خاصیت ۵ از مجموعه خواص نرم یک ماتریس به حاصل ضرب یک بردار و یک ماتریس قابل تعمیم است یعنی اگر $\underline{A}$ ماتریس دلخواه و $\underline{x}$ برداری دلخواه که ضرب $\underline{A}\,\underline{x}$ شدنی باشد داریم:

$$\|\underline{A}\,\underline{x}\| \leq \|\underline{A}\|\,\|\underline{x}\| \qquad (3)$$

دستگاه معادلات $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ را در نظر بگیرید فرض کنید ماتریس دستگاه دارای یک جواب است. این جواب را با $\hat{\underline{x}}$ نشان می‌دهیم داریم:

$$\begin{cases} \underline{A}\,\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}} \\ \underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \end{cases} \qquad (4)$$

در این صورت برای مجموعه از بردار مقادیر ثابت $\hat{\underline{b}}$

از هم کم کردن روابط فوق

$$\underline{A}\,(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) = \underline{b} - \hat{\underline{b}} \quad (5) \implies \underline{x} - \hat{\underline{x}} = \underline{A}^{-1}(\underline{b} - \hat{\underline{b}})$$

در رابطه‌ی 4 $\underline{x}$ و $\hat{\underline{x}}$ به ترتیب دو مجموعه جواب برای دستگاه معادلات مورد نظر برای دو مقدار کمی متفاوت از بردار مقادیر ثابت $\underline{b}$ بدست آمده‌اند. از طرفین رابطه‌ی (5) نرم

می‌گیریم : $\| (x - \hat{x}) \| = \| A^{-1} (b - \hat{b}) \|$

با استفاده از خاصیت ③ $\| (x - \hat{x}) \| = \| A^{-1} (b - \hat{b}) \| \leq \| A^{-1} \| \| b - \hat{b} \|$ (6)

با تقسیم رابطه‌ی 6 به $\|b\|$

$$\frac{\| (x - \hat{x}) \|}{\| b \|} \leq \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| b - \hat{b} \|}{\| b \|} \qquad (7)$$

در رابطه‌ی 7 به جای نرم $\|b\|$ در سمت چپ نامساوی از عبارت معادل آن

$\|b\| = \|Ax\|$ (رابطه‌ی 4) استفاده می‌کنیم

$$\frac{\| x - \hat{x} \|}{\| A x \|} \leq \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| b - \hat{b} \|}{\| b \|} \qquad (8)$$

با توجه به رابطه‌ی زیر

$$\| A x \| \leq \| A \| \| x \|$$

می‌توان نوشت :

$$\frac{\| x - \hat{x} \|}{\| A \| \| x \|} \leq \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| b - \hat{b} \|}{\| b \|} \qquad (9)$$

با ضرب طرفین 9 در عدد غیر صفر و مثبت $\|A\|$

$$\frac{\| x - \hat{x} \|}{\| x \|} \leq \| A \| \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| b - \hat{b} \|}{\| b \|} \qquad (10)$$

$$k(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

این کسر را بعدن اثبات می‌کنیم

subject:
Year: Month: Date: ( )

اگر $\underline{A}$ ماتریس مربع و $\underline{B}$ معکوس این ماتریس باشد، همچنین فرض شود که ماتریس $\underline{A}$ را بتوان به فرم زیر به مجموعه‌ای از زیرماتریس‌های $\underline{A}_{11}$ و $\underline{A}_{12}$ و $\underline{A}_{21}$ و $\underline{A}_{22}$ تجزیه کرد

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

در این صورت ماتریس $\underline{B}$ با تجزیه به زیرماتریس‌های مشابه ماتریس $\underline{A}$: $\underline{B}_{11}$ و $\underline{B}_{12}$ و $\underline{B}_{21}$ و $\underline{B}_{22}$ می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{11} = \underline{A}_{11}^{-1} + \underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}\underline{B}_{22}\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}$$

$$\underline{B}_{12} = -\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}\underline{B}_{22}$$

(11)

$$\underline{B}_{21} = -\underline{B}_{22}\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}$$

$$\underline{B}_{22} = \left(\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}\right)^{-1}$$

حاصلضرب مربعی :

برای ماتریس مربع $\underline{A}_n$ و بردار n بعدی $\underline{x}_n$ حاصلضرب $y = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x}$ را فرم مربعی (کوادراتیک) می‌گویند

ماتریس مشخصه

- یک فرم مربعی را اکیداً مثبت (positive definite) گویند اگر تنها اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس مشخصه آن مثبت باشد، همچنین به ترتیب یک فرم مربعی را اکیداً منفی (negative definite) گویند اگر تنها اگر تمام مقادیر ویژه آن منفی باشد

- یک فرم مربعی را (posetive semi-definit) نیمه مثبت می‌گویند اگر برخی از مقادیر ویژه صفر و باقی مثبت باشند

- " " " منفی (negative ") " " " " منفی باشد

PARSCO

اگر ماتریس مشخصه یک فرم درجه دوم حاوی مقادیر ویژه مثبت و منفی داشته باشد فرم درجه دوم را نامشخص (indifinide) می‌گویند.

مشتق یک ماتریس:

فرض کنید که عناصر ماتریس A توابعی از یک یا چند متغیر مستقل باشند در این صورت

$$\frac{dA}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{11}}{dx} & \frac{dA_{12}}{dx} \\ \frac{dA_{21}}{dx} & \frac{dA_{22}}{dx} \end{bmatrix} \quad (12)$$

در نقشه‌برداری ماتریس‌ها نیاز به مشتق‌گیری داریم. فرض کنید یک طول که غیرخطی با مجهولات داشته باشند

$$l_{ij} = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + \Delta z_{ij}^2} = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$$

مشتق حاصلضرب دو ماتریس

اگر $\underline{A} = \underline{B}\,\underline{C}$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dx}\underline{C} + \underline{B}\frac{dC}{dx} \quad (13)$$

اگر f تابعی اسکالر از n متغیر مستقل $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ، $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\underline{x})$ در این صورت

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \quad (14)$$

اگر $\underline{y}$ تابعی برداری شامل $f_1, f_2, \dots, f_n$ از n تابع اسکالر از n متغیر مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ به صورت

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

مشتق $\frac{dy}{dx}$ (مشتق تابع برداری y نسبت به بردار متغیرهای مستقل):

$$\frac{d\underline{y}}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با استفاده از این تعاریف می‌توان نشان داد که

$$y = \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{b}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = b^T \underline{A}^T \quad (16)$$

همین طور می‌توان نشان داد مشتق فرم درجه دو $y = \underline{x}^T A \underline{x}$ نسبت به بردار $\underline{x}$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = 2\,\underline{x}^T \underline{A}$$

به خاطر داریم که بسط تیلور تابع برداری y از متغیر برداری $\underline{x}$ با رابطه‌ی زیر (تا ترتیب مرتبه اول) بیان می‌شود

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) \\ f_2(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) \\ \vdots \\ f_n(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0) \end{bmatrix}}_{=\underline{y}^0} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x_n^0} \\ \frac{\partial f_2}{} & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{x_n^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{bmatrix} + \cdots$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

اپراتور تریس و خواص آن:

تعریف: $\mathrm{Trace}(\underline{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

خواص:

1. $Tr(\underline{A}^T) = Tr(\underline{A})$

2. $Tr(k\underline{A}) = k\,Tr(\underline{A})$ اگر k اسکالری دلخواه باشد

3. $Tr(\underline{A} + \underline{B}) = Tr(\underline{A}) + Tr(\underline{B})$

4. $Tr(\underline{A} \cdot \underline{B}) = Tr(\underline{B} \cdot \underline{A})$

5. $Tr(\underline{A}^T \underline{B}) = Tr(\underline{A}\,\underline{B}^T)$

6. $Tr(\underline{R}^{-1} \underline{A}\, \underline{R}) = Tr(\underline{A})$ اگر $\underline{R}$ ماتریس دلخواه باشد

7. $\dfrac{\partial Tr(\underline{A}\,\underline{B})}{\partial \underline{A}} = \dfrac{\partial Tr(\underline{B}\,\underline{A})}{\partial \underline{A}} = \underline{B}$

8. $\dfrac{\partial Tr(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^T)}{\partial \underline{A}} = (\underline{B} + \underline{B}^T)\,\underline{A}^T$ 18

9. $\dfrac{\partial Tr(\underline{A}^T \underline{B}\,\underline{A})}{\partial \underline{A}} = \underline{A}^T (\underline{B} + \underline{B}^T)$

10. $\dfrac{\partial Tr(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{A}^T \underline{C})}{\partial \underline{A}} = \underline{B}\,\underline{A}^T \underline{C} + \underline{C}^T \underline{B}^T \underline{A}^T$

psudo inverse ← معکوس گرالیزد و شبه معکوس

Generalized inverse

برای هر ماتریس مستطیلی دلخواه A ماتریسی مانند A^- را می‌توان یافت به طوری که

$$A A^- A = A \quad (19)$$

در این صورت ماتریس A^- در رابطه 19 را معکوس تعمیم یافته ماتریس A می‌گویند. چنانچه معکوس فوق در روابط زیر نیز صادق باشد این معکوس را شبه معکوس ماتریس A می‌گویند.

1. $A^- A A^- = A^-$
2. $(A A^-)^T = A A^-$ (20)
3. $(A^- A)^T = A^- A$

برخلاف معکوس یک ماتریس مربع، معکوس تعمیم یافته ماتریس های مستطیلی منحصر به فرد نیست ولی با اعمال شروط 20 یعنی تبدیل معکوس تعمیم یافته به شبه معکوس، به معکوسی منحصر به فرد برای یک ماتریس مستطیلی می‌توان رسید.

از آنجایی که تعداد مشاهدات بیش از تعداد حداقل لازم (تعداد مجهولات) است، ماتریس ضرایب در دستگاه معادلات مربوطه (ماتریس A) ماتریسی مستطیلی است:

$$l = A x$$

$$x = A^- l$$

مراحل انجام یک پروژه نقشه برداری:

مقدمه: ضمن مرور مراحل مختلف اجرای یک پروژه نقشه برداری به دنبال تبیین این نکته هستیم که چه ارتباطی بین موضوع درس تعدیل و محاسبات نقشه برداری و انتخاب روش‌ها در فرایند یا پروسه انجام یک پروژه نقشه برداری وجود دارد.

subject:

Year: Month: Date: ( )

دیدگاه اول: نقشه‌برداری حرفه‌ی تخصصی مرتبط با اندازه‌گیری خصوصیات هندسی زمین

* مراحل مختلف اجرای یک پروژه نقشه‌برداری:

1. تعیین پارامترها یا کمیت‌های مجهول مورد نظر است. که عمدتاً از طرف کارفرما به مجری ابلاغ می‌شود. (1)

2. براساس کمیت‌های مورد اندازه‌گیری روابط ریاضی بین این کمیت‌ها و مجهولات مورد نظر برقرار می‌شود. به کمک این روابط طراحی اولیه (برنامه‌ریزی اولیه برای اجرای یک پروژه) صورت می‌گیرد.

4. انجام اندازه‌گیری‌ها

5. پردازش اولیه (pre-processing) مشاهدات

3. طراحی اولیه یا برنامه‌ریزی برای اجرای پروژه (pre-analysis) ← مرحله‌ی سوم بین مدل ریاضی و [illegible]

6. انجام محاسبات (Adjustment یا Data processing) ← [illegible] مرحله‌ی اصلی

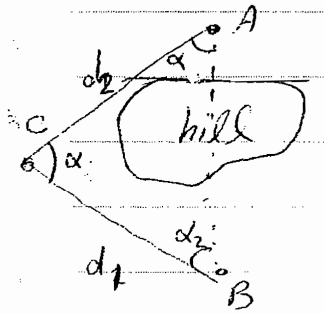
7. تجزیه و تحلیل نتایج حاصل

8. گزارش کردن نتایج به دست آمده به کارفرما

مرحله‌ی 1: مثال: (1)

1. مساحت یک قطعه زمین
2. پیاده کردن زمین یک محدوده خاص یا یک پروژه خاص روی زمین
3. تهیه‌ی نقشه‌ی توپوگرافی در مقیاس مشخص
4. کنترل کیفیت تولید محصولات صنعتی یک کارخانه باشد
5. کنترل پایداری یک سازه‌ی خاص مهندسی

یکی از پارامترهای مجهول مورد نظر موضوع دقت مورد نیاز در تعیین پارامترهای مجهول است.

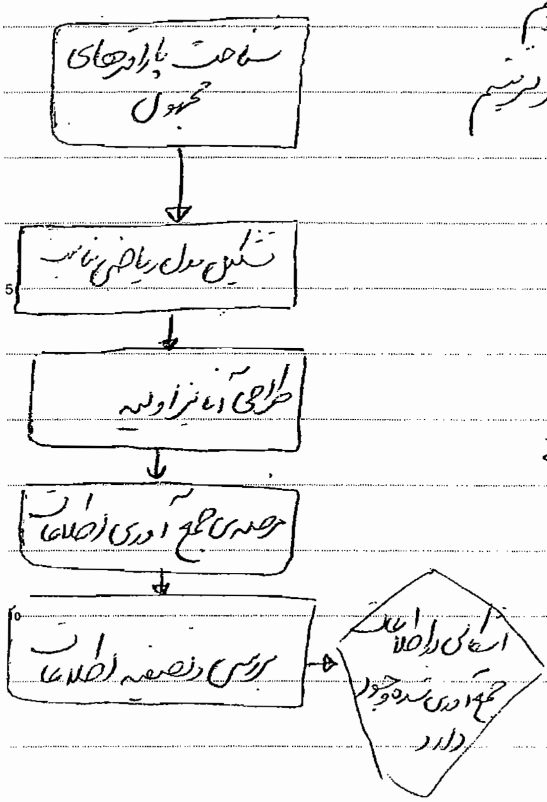


مرحله‌ی دوم 2:

هدف ساختن یک مدل ریاضی از شرایط واقعی اندازه‌گیری

مثلاً فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B را تعیین کنید. مرحله‌ای که برای این مدل اندازه‌گیری می‌کنیم ممکن است این‌ها باشد:

subject:
Year: Month: Date: ( )



- از انحنای زمین با توجه به فاصله کم نقاط A و B و C صرف نظر می‌کنیم
- طول‌های d_1 و d_2 را فاصله‌های مستقیم بین نقاط مربوط در نظر می‌گیریم
- زوایای α_1 و α_2 و α_3 را زوایای افقی فرض می‌کنیم

حال می‌توانیم روابط هندسی را با توجه به محاسبات بنویسیم

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180$$

$$\frac{d_1}{\sin\alpha_1} = \frac{d_2}{\sin\alpha_2}$$

$$d_1^2 = d_2^2 + x^2 - 2 d_2 x \cos\alpha_1$$

$$d_2^2 = d_1^2 + x^2 - 2 d_1 x \cos\alpha_2$$

$$x^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos\alpha_3$$

هر مدل ریاضی از قسمت‌های فرضی واقعی اندازه‌گیری ممکن است شامل چند مؤلفه‌ی اندازه‌گیری باشد:

تعیین کلیه پارامترها ... مجهولات بعد

1. مجموعه‌ای از مقادیر ثابت
2. مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها
3. مجموعه‌ای از پارامترهای مجهول

آن دسته از مدل‌هایی که در آن مستقیماً پارامترهای مجهول اندازه‌گیری می‌شود مدل‌های مستقیم می‌گویند. دسته‌ی دوم پارامترها به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری نیستند که به آن‌ها غیر مستقیم می‌گویند.

مدل‌های ریاضی:
1. مدل‌های مستقیم (direct)
2. مدل‌های غیرمستقیم یا ضمنی (implicit)

$$\begin{cases} x_p = x_0 + l\cos\alpha \\ y_p = y_0 + l\sin\alpha \\ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \end{cases}$$

نمونه‌ای از یک مدل ضمنی

$$\begin{cases} l_1 = x \\ l_2 = x \\ \vdots \\ l_n = x \end{cases} \quad \underline{x} = [x]$$

نمونه‌ای از مدل مستقیم

مرحله ی ۳: همان بهینه سازی نقاط و چگونگی استقرار ایستگاه ها (چیدمان) می خواهیم خروجی آن مثل اولیه یک دستورالعمل است برای اجرای پروژه های نقشه برداری است این یک سری دستورهای نیاز دارد که همان ماتریس های واریانس کوواریانس است (در نقشه برداری ژئودتیک گفته می شود)

مرحله ۴:

بعضی از دستورالعمل ها دستورالعمل های استانداردی ثابت هستند که از زبان های مهندسی اجرایی می گیریم

مرحله ی 5:

منظور از پردازش اولیه روی داده ها چیست؟

این است که فواصل حاصل از اندازه گیری کره یا تیم بودن در نظر گرفتن زوایای بین β_1 و β_2 اگر باید مدل ریاضی خود را طوری تغییر دهیم که به واقعیت های خود برسیم یعنی پارامترهای دیگری به مدل ریاضی اضافه کنیم. در این مرحله هر عاملی که بتواند مدل ریاضی را از شرایط واقعی اندازه گیری دور کند شناسایی و پردازش می برد

ما ۳ تا خطا داریم:
- اتفاقی
- سیستماتیک
- اشتباهات

هر چقدر مدل ریاضی ما با شرایط واقعی اندازه گیری فرق داشته باشد یک خطای سیستماتیک است پس در این مرحله هدف این است که خطاهای سیستماتیک ناشی از اینکه مدل ریاضی ما با شرایط واقعی اندازه گیری فرق داشته باشد را تصحیح کنیم. در مرحله ی اندازه گیری تصحیحات یا از طریق تغییر دادن مدل ریاضی یا تصحیح داده ها و مشاهدات (آن را) انجام می پذیرد که در حالت اول در حقیقت باعث اینجا مدل های ریاضی پیچیده تر غیرخطی تری تبدیل می شود.

این بخش بندی خیلی مهمی است در مرحله ی 6

subject:
Year: Month: Date: ( )

مرحله‌ی 6 :

وجود خطاهای اتفاقی در مشاهدات باعث می‌شود روابط هندسی بین مشاهدات که عملاً باید برقرار باشد، برقرار نباشد. مثلاً جمع زوایای مثلث 180° نشود. برای حل این مشکل هندسی در این مرحله خطاهای مشاهدات را طوری پخش می‌کنیم که روابط هندسی بین کمیت‌های مجهول ما برقرار شود که بتوانیم آن‌ها را به دست آوریم. ضمن اینکه دقت نیز تخمین زده شود.

قدم اول: } تخمین پارامترهای مجهول

قدم دوم: { تخمین دقت پارامترهای مجهول

چه موقعی می‌توانیم تصمیم‌گیری در مورد کیفیت محاسبات کنیم؟

مرحله‌ی 7 :

تصمیم‌گیری در مورد کیفیت محاسبات در این مرحله انجام می‌شود.

به دلایل مختلفی می‌تواند نتایج به دست آمده از محاسبات انجام شده قابل قبول نباشد.
مثلاً ممکن است خطاهایی در مدل ریاضی داشته باشیم که با شرایط اندازه‌گیری منطبق نباشد در نتیجه نتایج محاسبات با شرایط اندازه‌گیری سازگار نبوده پس باید مدل‌های ریاضی خود را تجزیه و تحلیل کنیم.

روش‌های تجزیه و تحلیل نتایج مورد استفاده مبتنی بر تکنیک‌های آمار ریاضی است.

مرحله‌ی 7 :

حال با قابل قبول بودن نتایج به مرحله‌ی 7 می‌رویم.

* نکات موجود در گزارش کردن نتایج به دست آمده به طور کلی

1. مشخصات پروژه شامل پارامترهای مجهول، دقت‌های مورد انتظار و دقت‌های به دست آمده صریحاً در گزارش قید می‌شود.

2. جهت مقایسه، ارزیابی نتایج حاصل از آنالیز اولیه در کنار نتایج محاسبات (post-analysis) نتایج آنالیز اولیه (pre-analysis) قید می‌شود.

subject:
Year: Month: Date: ( )

3. همخوانی مشاهدات انجام شده با دستورالعمل اندازه‌گیری حاصل از مرحله طراحی پروژه مورد تائید قرار گیرد.

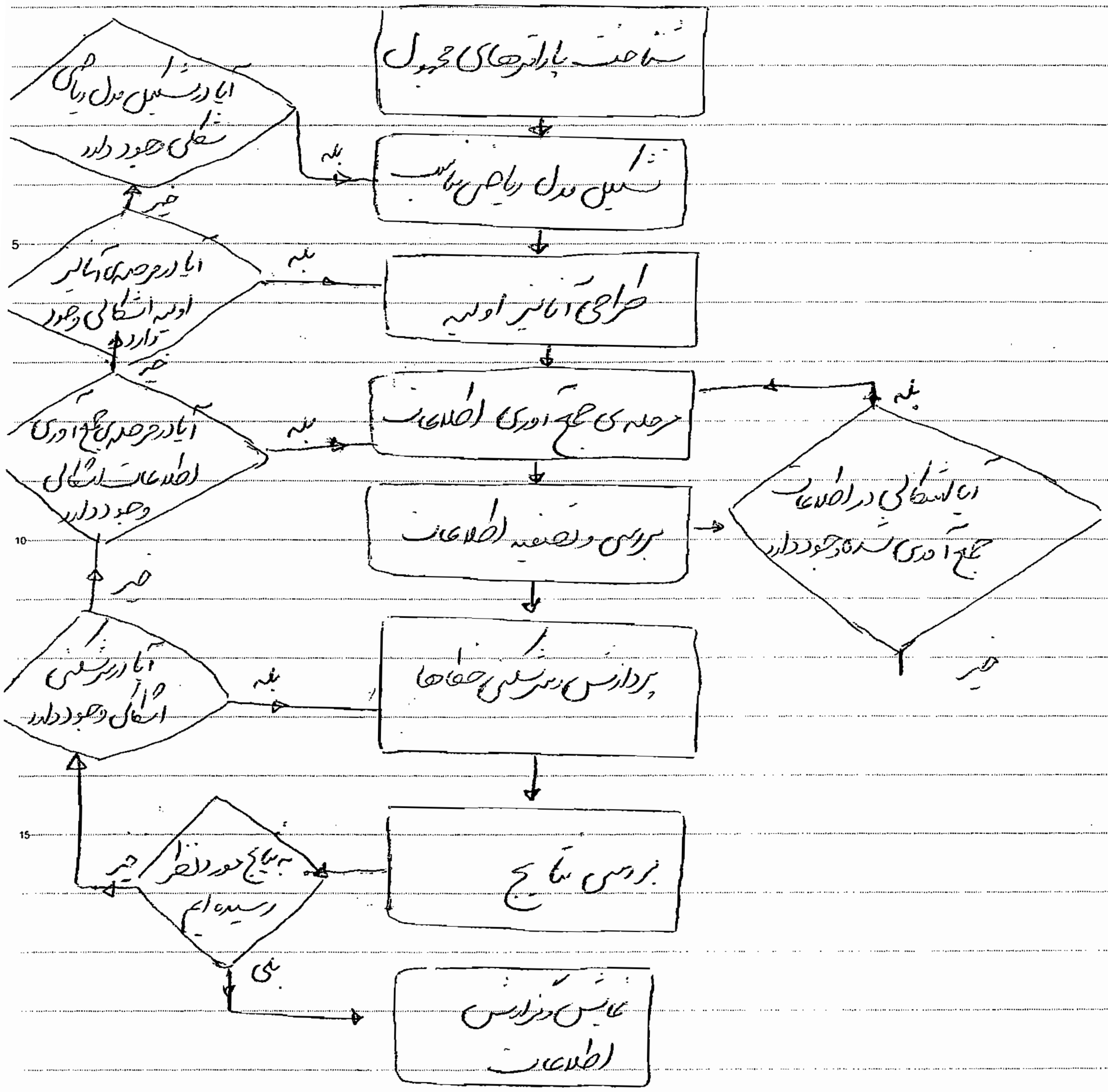
4. مشاهداتی که در مرحله‌ی پیش پردازش (pre-processing) از لیست مشاهدات انجام شده حذف شده‌اند صریحاً قید شود.

5. آزمون‌های آماری مورد استفاده (تست‌های آمار ریاضی) و نتایج حاصل مورد تائید قرار می‌گیرد.

6. نتایج ارزیابی نظیر شکل هندسی شبکه، بیضی‌های خطای موقعیت نقاط، هیستوگرام باقی‌مانده‌های [illegible] و امثال آن که به ارزیابی کیفی پروژه کمک می‌کند در گزارش منعکس می‌شود.

subject:

Year: Month: Date: ( )



سرشکنی مدل پارامتریک خطی :

۱- معادلات مربوط به سرشکنی مدل پارامتریک خطی

شکل کلی ترکیب فرم یک مدل ریاضی : $\underline{f}(\underline{x},\underline{l})=\underline{0}$ (1)

$\underline{f}$ تابعی برداری از متغیرهای برداری $\underline{x}$ و $\underline{l}$ است

همچنین از جلسه‌ی قبل دیدیم که بیان ریاضی شرایط واقعی اندازه‌گیری مدل ریاضی است

$\underline{l}$: برداری است که در این درس با بردار متشکل از n مؤلفه (عنصر) است عناصر این بردار را مشاهدات انجام شده تشکیل می‌دهد بنابراین بردار $\underline{l}$ را بردار مشاهدات می‌نامیم.

$$\underline{l}=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

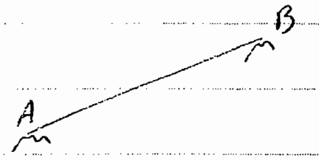
$\underline{x}$ برداری متشکل از u مؤلفه (عنصر است) این بردار، بردار پارامترها شامل مجموعه تمام پارامترهای مجهول است که در حل یک مسئله‌ی سرشکنی به دنبال تعیین آن‌ها هستیم

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix}$$

در سرشکنی برداری : همواره $n > u$. به عبارت دیگر هیچ گاه در سرشکنی برداری به حداقل مشاهدات لازم برای رسیدن به پارامترهای مجهول در یک مدل ریاضی اکتفا نمی‌کنیم

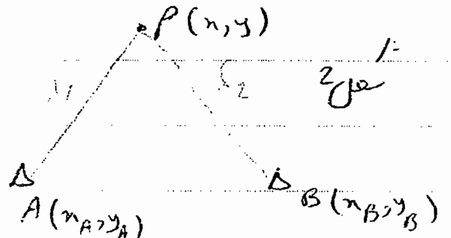
مثال ۱:

به عنوان مثال می‌خواهیم فاصله‌ی بین A و B را اندازه بگیریم حداقل مشاهده ۱ اندازه‌گیری است در تعیین فاصله‌ی بین دو نقطه مطابق شکل ۱ حداقل اندازه‌گیری لازم یک بار اندازه‌گیری فاصله‌ی AB است



شکل ۱

مثال ۲:



شکل ۲

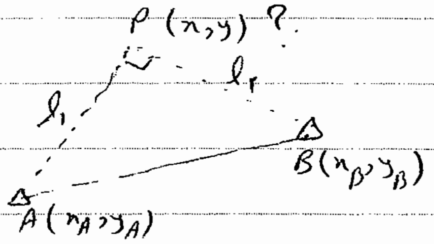
$$AP = l_1 = \sqrt{\Delta x_{AP}^2 + \Delta y_{AP}^2}$$

$$l_1 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$BP = l_2 = \sqrt{\Delta x_{BP}^2 + \Delta y_{BP}^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 - (y_P - y_B)^2}$$

حداقل مشاهدات لازم دو مشاهده‌ی l_1 و l_2 است

مثال 3:



$$PB = \sqrt{AB^2 - l_1^2}$$

در مثال 3 تنها یک مشاهده‌ی l_1 برای تعیین مختصات نقطه‌ی P نیاز داریم.

* به سه دلیل از حداقل مشاهدات اکتفا نمی‌کنیم:

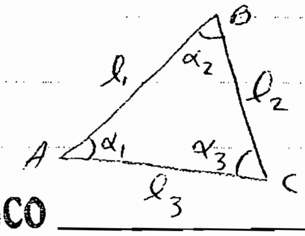
۱. تشخیص مشاهدات اشتباه، در صورتی که به حداقل تعداد مشاهدات اکتفا برود امکان‌پذیر نخواهد بود.

۲. امکان رسیدن به برآوردی نزدیک به واقع برای پارامترهای از یک جامعه‌ی اندازه‌گیری به یک نمونه‌ای با حداقل طول ممکن وجود ندارد.

۳. در صورتی که به حداقل اندازه‌گیری‌ها اکتفا کنیم امکان برآورد دقت کمیت‌های حاصل از نمونه‌ی اندازه‌گیری وجود نخواهد داشت.

در برخی از موارد مدل ریاضی (1) به فرم $l = f(x)$ (2): به صورت تابعی صریح برحسب مجهولات قابل بیان است.

به مدل ریاضی (2) مدل پارامتریک می‌گوییم. همچنین در برخی موارد مدل ریاضی (1) به صورت $g(l) = 0$ (3) قابل بیان است. مدل‌های ریاضی از نوع (3) که در آن‌ها هیچ اثری از مجهولات وجود ندارد و صرفاً مشاهدات در تشکیل مدل ریاضی مشارکت دارند مدل شرطی (Condition model) می‌گویند. به عنوان مثال می‌دانیم که در مثلث شکل زیر



نمونه‌ای از یک مدل شرطی

$$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos\alpha_2$$

$$\Rightarrow g(l) = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos\alpha_2 - l_3^2 = 0$$

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\frac{l_2}{\Sigma\alpha_4} = \frac{l_1}{\Sigma\alpha_3} \Rightarrow \underline{g}(\underline{l}) = l_2\Sigma\alpha_3 - l_1\Sigma\alpha_1 = 0$$ نمونه‌ای دیگر از مدل شرط

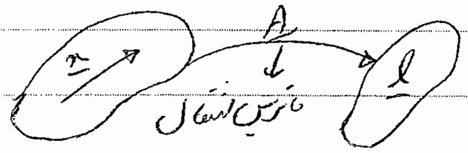
همانطور که ملاحظه می‌شود مدل‌های شرط مبتنی بر شروط هندسی بین مشاهدات هستند.
همچنین به خاطر داریم که مدل پارامتریک ② و مدل شرط ③ ممکن است خطی و یا غیرخطی باشد

$n > u$

$$\underset{n\times 1}{\underline{l}} = \underline{A}\,\underset{u\times 1}{\underline{x}} \quad (4)$$ فرم خطی مدل پارامتریک

$$\underline{B}\,\underline{l} = \underline{c} \quad (5)$$ فرم خطی مدل شرط که در آن $\underline{c}$ بردار مستقل از مقادیر ثابت است

با توجه به تفسیر هندسی از فرم خطی برای رابطه‌ی 4 ماتریس $\underline{A}$ در این رابطه ماتریس ضرایب (coefficient matrix) و ماتریس انتقال (Transformation matrix) نامیده می‌شود
(بردار مجهول $\underline{x}$ را از یک فضا به یک بردار $\underline{l}$ در یک فضای دیگر انتقال می‌دهد یا این عمل جزو کار ماتریس‌ها است)



دستگاه معادلات 4 با توجه به اینکه $n > u$ یک دستگاه معادلات over-determind است. علاوه بر این به لحاظ وجود خطاهای اتفاقی مشاهدات (عناصر بردار $\underline{l}$) این دستگاه یک دستگاه معادلات ناسازگار است. برای حل این مشکل فرض می‌کنیم که مشاهدات l_1 و l_2 و ... l_n (عناصر بردار مقادیر ثابت دستگاه معادلات 4) را نسبت به خطاهای اتفاقی مربوط با تصحیحات v_1 و v_2 و ... v_n اصلاح کنیم:

بردار تصحیحات یا باقی‌مانده‌ها

$$\underline{v} + \underset{n\times 1}{\underline{l}} = \underset{n\times u}{\underline{A}}\,\underset{u\times 1}{\underline{x}} \quad (5)$$ رابطه 5

به لحاظ ماهیت تصادفی خطاهای اتفاقی مشاهدات، عناصر بردار $\underline{v}$ معلوم نیست. بنابراین تعداد مجهولات $n+u$ خواهد بود. تعداد معادلات $n < n+u$

مولفه‌های بردار $\underline{v}$ — مولفه‌های بردار x

بنابراین دستگاه معادلات 5 یک دستگاه معادلات under-determined است
که دارای جواب منحصر به فرد نیست

PARSCO

خواهیم دید که استفاده از شرط $v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2=\min$ برای رسیدن به جوابی منحصر به فرد برای دستگاه معادلات 5 از دیدگاه‌های کاملی قابل توجه و به وجود دارد است. این شرط را شرط کمترین مربعات و جواب حاصل را جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات 5 گویند.

$$\begin{cases} \underline{v}+\underline{l}=\underline{A}\,\underline{x} \\ v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2=\min \end{cases} \equiv (7) \begin{cases} \underline{v}+\underline{l}=\underline{A}\,\underline{x} \\ \phi=\underline{v}^T\underline{v}=\|\underline{v}\|_2=\min \end{cases}$$

روش کمترین مربعات برای حل دستگاه معادلات 7 به دنبال پیدا کردن مجهولات $\underline{x}$ و $\underline{v}$ به گونه‌ای هستیم که تابع اسکالر (8) $\phi=\underline{v}^T\underline{v}$ را min کنیم.

$$(6) \Longrightarrow \underline{v}=\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l} \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه 9 در رابطه 8

$$(\underline{x}):\ \phi=(\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l})^T\underline{I}(\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l}) \quad (10)$$

با توجه به اینکه بر اساس رابطه 10 تابع اسکالر ϕ تنها تابعی از متغیر برداری $\underline{x}$ است، $\underline{x}$ را چنان تعیین می‌کنیم که ϕ را مینیمم کند

$$\frac{d\phi}{d\underline{x}}=\frac{d\phi}{d(\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l})}\cdot\frac{d(\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l})}{d\underline{x}} \quad (11)$$

$$\frac{d(\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l})}{d\underline{x}}=\frac{d}{d\underline{x}}(\underline{A}\,\underline{x})-\frac{d\underline{l}}{d\underline{x}}=\underline{A}\frac{d\underline{x}}{d\underline{x}}-\frac{d\underline{l}}{d\underline{x}}=\underline{A} \quad (12.1)$$

اگر $\underline{A}\,\underline{x}-\underline{l}$ را با $\underline{u}$ نمایش دهیم آنگاه $\phi=\underline{u}^T\underline{I}\,\underline{u}$ شکل خواهیم داشت که

$$\frac{d\phi}{d\underline{u}}=2\underline{u}^T\underline{I} \quad (12.2)$$

از رابطه 12.2 استفاده کرده خواهیم داشت

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\frac{d\phi}{d(\underline{A}\underline{x}-\underline{l})} = 2(\underline{A}\underline{x}-\underline{l})^T \underline{I} \qquad 12.3$$

با کمک روابط (12.1) و (12.2) و (11) داریم:

$$\frac{d\phi}{d\underline{x}} = 2(\underline{A}\underline{x}-\underline{l})^T\underline{A} \qquad (13)$$

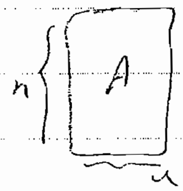
$$\frac{d\phi}{d\underline{x}} = 0 \Rightarrow 2(\underline{A}\underline{x}-\underline{l})^T\underline{A} = \underline{0} \qquad (14)$$

$$\underline{A}^T(\underline{A}\underline{x}-\underline{l}) = \underline{0} \qquad (15)$$

با ترانسپوز گرفتن از رابطه ی 14

$$\underline{A}^T\underline{A}\underline{x} - \underline{A}^T\underline{l} = 0$$

$$\underset{u\times n}{\underline{A}^T}\,\underset{n\times u}{\underline{A}}\,\underset{u\times 1}{\underline{x}} = \underset{u\times n}{\underline{A}^T}\,\underset{n\times 1}{\underline{l}} \qquad (16)$$



در رابطه ی 16 تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر است بدین لحاظ این دستگاه معادلات
دستگاه معادلات نرمال یا معمولی می گویند.

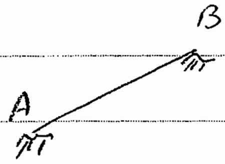
$$\boxed{\hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{l}}$$ بشرطی که $\underline{A}$ کمبود رتبه نداشته باشد (17)

$$\boxed{\hat{\underline{v}} = \underline{A}\hat{\underline{x}} - \underline{l}}$$

مشاهدات تصحیح شده $\leftarrow \hat{\underline{l}} = \underline{l} + \hat{\underline{v}}$

مثال 1. فرض کنید که فاصله ی بین نقطه ی A و B را n بار اندازه گیری کرده ایم داریم:

$\underline{l}^T = [l_1, l_2, \ldots, l_n]_{1\times n}$ مطلوبست برآورد محتمل ترین مقدار فاصله بین این دو نقطه



$$\underline{x} = [x]_{1\times 1}$$

$$\begin{cases} v_1 + l_1 = x \\ v_2 + l_2 = x \\ \vdots \\ v_n + l_n = x \end{cases}$$

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2 = \min$$

$$\underline{l} = \underline{A}\,\underline{x}$$

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{l}$$ به شرطی که $\underline{A}$ رتبه کامل داشته باشد

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \underline{x} \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \left([1\ 1\ \dots\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1\ 1\ \dots\ 1] \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{x}} = (\underbrace{1 + 1 + \dots 1}_{n\ \text{مرتبه}})^{-1} (l_1 + l_2 + \dots l_n)$$

$$\hat{\underline{x}} = \frac{1}{n}(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \bar{l}$$

مثال 2. ~~زاویه x~~ مسئله‌ی کمترین مربعات زیر $\min\|\underline{A}\underline{x} - \underline{b}\|$ را حل کنید

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.1 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$ است. را تفسیر کنید

1) نشان دهید که این دستگاه معادلات، دستگاه معادلاتی ناسازگار است

2) جواب کمترین مربعات این مسئله را پیدا کنید

3) جواب کمترین مربعات این مسئله را با تغییر بردار $\underline{b} = \underline{A}\overset{x}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{bmatrix}$ مجددا پیدا کنید

جواب واقعی

و با جواب قبل مقایسه کنید

subject:

Year: Month: Date: ( )

۴) از مقایسه‌ی این دو جواب با جواب واقعی $\underline{x} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ به چه نتیجه‌ای می‌رسید

۵) این نتیجه‌گیری را چگونه توجیه می‌کنید.

۶) از حل این مسئله چه نتیجه‌ای در ارتباط با محدودیت یا کارایی روش کمترین مربعات می‌رسید؟

۱) $\begin{cases} 0.16x_1 + 0.1x_2 = 0.27 \\ 0.17x_1 + 0.11x_2 = 0.25 \end{cases} \Longrightarrow \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.16 & 0.1\\0.17 & 0.11\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.27\\0.25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7.733\\-9.833\end{bmatrix}$

$\begin{cases} 0.16x_1 + 0.1x_2 = 0.27 \\ 2.02x_1 + 1.29x_2 = 3.33 \end{cases} \Longrightarrow \underline{x}_2 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.16 & 0.1\\2.02 & 1.29\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.27\\3.33\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.4773\\-2.8636\end{bmatrix}$

$\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ با اینکه دستگاه معادلات $\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$ در این مثال تغییر اندکی داشته دستگاه معادلات ناپایدار است

۲) $\hat{\underline{x}}_1 = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}7.0089\\-3.3959\end{bmatrix}$ $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}0.27\\0.25\\3.33\end{bmatrix}$

۳) $\hat{\underline{x}}_2 = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{b}_2 = \begin{bmatrix}8.9353\\-11.3996\end{bmatrix}$ $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix}0.26\\0.22\\3.35\end{bmatrix}$

۴) با تغییر کوچک در $\underline{b}$ جواب مسأله کمترین مربعات جواب بزرگی را سبب شده، پس دستگاه معادلات ناپایدار است چون condition n. آن را حساب کردیم که مطلب $Cond(\underline{A}^T\underline{A})$ بزرگ است

$k(\underline{A}^T\underline{A}) = 1.2\times 10^{6} \gg 1$

روش کمترین مربعات برای حل سیستم ناپایدار کارا نیست

PARSCO

subject:

Year: Month: Date: ( )

سرشکنی مدل پارامتریک خطی

۱. سرشکنی مدل پارامتریک خطی بدون در نظر گرفتن وزن مشاهدات

۲. سرشکنی مدل پارامتریک خطی با در نظر گرفتن وزن مشاهدات

۳. ویژگی های جواب کمترین مربعات

$$\begin{cases} \underset{n\times 1}{v} + \underset{n\times 1}{l} = \underset{n\times u}{A}\,\underset{u\times 1}{x} \qquad n>u \\ \phi = v^T v = \min = v_1^2+v_2^2+\dots v_n^2 \end{cases}$$

اگر A کمبود مرتبه نداشته باشد

$$\frac{d\phi}{dx}=0 \Longrightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (1)$$

یک نقطه‌ی اکسترمم برای تابع ϕ است

در ادامه‌ی بحث جبری می‌خواهیم نشان دهیم که (1) یک نقطه‌ی مینیمم برای تابع ϕ است

$$(I)\ y = x^T A x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^T A \qquad (II)\ y = x^T A b \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = b^T A^T$$

ماتریس متقارن

برای این کار $\frac{d^2\phi}{dx^2}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{d\phi}{dx} = 2(Ax-l)^T A$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\frac{d}{dx}\left[(Ax-l)^T A\right]$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\frac{d}{dx}\left[(x^T A^T A - l^T A)\right]$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\frac{d}{dx}(x^T A^T A) - \underbrace{2\frac{d}{dx}(l^T A)}_{=0}$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

$$\frac{d^2\phi}{d\underline{x}^2} = 2(\underline{A}^T\underline{A})^T = 2(\underline{A}^T\underline{A}) > 0 \quad (2)$$

دارای مقادیر ویژه‌ی مثبت است و

بنابراین $\frac{d^2\phi}{d\underline{x}^2} > 0$ و $\underline{\hat{x}}$ یک نقطه‌ی min نسبی برای تابع ϕ است،

$$\underline{\hat{v}} = \underline{A}\underline{\hat{x}} - \underline{l}$$

$$\underline{\hat{l}} = \underline{l} + \underline{\hat{v}} = \underline{A}\underline{\hat{x}}$$

— برای اثبات رابطه‌ی II فرض کنید $\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $\underline{b}$ بردار ستونی ضرب‌پذیر در بردار $\underline{x}^T$ باشد بنابراین

$$y = \underline{x}^T\underline{b} = [x_1, x_2, \dots, x_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$y = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 + \dots x_nb_n$$

طبق تعریف مشتق

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n}\right]$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \qquad \frac{dy}{d\underline{x}} = \underline{b}^T$$

— برای اثبات رابطه‌ی I در نظر بگیرید $\underline{x}^T = [x_1, x_2]$ بنابراین $\underline{A}_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ دلخواه است

$$y = \underline{x}^T\underline{A}\underline{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = ax_1^2 + cx_2^2 + 2bx_1x_2$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = \left[\frac{dy}{dx_1} \quad \frac{dy}{dx_2}\right]$$

$$\frac{dy}{d\underline{x}} = [2ax_1 + 2bx_2 \quad 2cx_2 + 2bx_1] = 2[ax_1 + bx_2 \quad cx_2 + bx_1]$$

$$= 2\underbrace{[x_1 \quad x_2]}_{\underline{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\underline{A}} = 2\underline{x}^T\underline{A}$$

PARSCO

$$\begin{cases} \underset{n\times1}{\underline{v}} + \underset{n\times1}{\underline{l}} = \underset{n\times u}{\underline{A}}\ \underset{u\times1}{\underline{x}} & (1) \\ \phi = \underline{v}^T \underline{v} = min = v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2 \end{cases}$$

$$\underline{l}^T = [l_1\ l_2\ \dots\ l_n]$$

حل دستگاه معادلات (1) در حالتی که مشاهدات (l_i) از ارزش متفاوتی برخوردار باشند جواب نزدیک به واقعیت برای پارامترهای مدل ریاضی ($\underline{x}$) به دست نمی‌دهد. راه حل منطقی حل این مشکل در نظر گرفتن ارزش مشاهدات در برآورد پارامترهای مجهول مدل ریاضی است.

$$\phi' = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \dots + v_n^2 p_n$$

p_i ها ضرایبی هستند که بزرگی ارزش مشاهدات را ارائه می‌کند ، $i = 1, 2, \dots, n$

$l_1 \quad l_2$

$p_1 > p_2 \implies v_1 < v_2$

ارزش بیشتری دارد

جایگزینی شرط کمترین مربعات در دستگاه معادلات (1) با شرط جدید

$$\phi = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \dots\ v_n^2 p_n$$

که در آن مقادیر مثبت p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) معرف ارزش مشاهده‌ی iام است

به مشاهدات با ارزش بالاتر تصحیحات کوچکتری تعلق می‌گیرد بالعکس

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} & (2) \\ \phi = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \dots + v_n^2 p_n = min \end{cases}$$

به شکل ماتریسی

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} \\ \phi = \underline{v}^T \underline{P}\, \underline{v} \end{cases} , \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & p_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

subject:

Year: *Month:* *Date:* ( )

برای پیدا کردن جواب بهترین جواب دستگاه معادلات (2) ابتدا مشتق تابع اسکالر ϕ را پیدا می‌کنیم

$$\phi = v^T P v \Longrightarrow \phi(x) = \phi = (Ax - l)^T P (Ax - l)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{d(Ax-l)} \frac{d(Ax-l)}{dx} \quad (4)$$

$$\frac{d(Ax-l)}{dx} = \frac{d(Ax)}{dx} - 0 = A \quad (5)$$

برای محاسبه $\frac{d\phi}{d(Ax-l)}$ مشابه تبدیل $u = Ax - l$ در این صورت

$$\phi = u^T P u$$

$$\frac{d\phi}{d(Ax-l)} = \frac{d\phi}{du} = 2u^T P = 2(Ax-l)^T P \quad (6)$$

از جایگذاری نتایج (5) و (6) در (4)

$$\frac{d\phi}{dx} = 2(Ax-l)^T P A$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 0 \Longrightarrow 2(Ax-l)^T P A = 0$$

$$A^T P (Ax - l) = 0$$

$$A^T P A x - A^T P l = 0 \Longrightarrow A^T P A x = A^T P l \quad (7)$$

دستگاه معادلات نرمال (معمولی) است

$$\boxed{\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l_{n \times 1}} \quad (8)$$

اگر ستونهای A و P کمبود رتبه نداشته باشند

Subject:
Year: Month: Date: ( )

برای تامین شرط کامل بودن مرتبه ی ماتریس وزن P، عناصر P را مقادیری مثبت و غیر صفر انتخاب می‌کنیم

برای ماتریس A که مشخص است اگر بعضی از سطرها یا ستون‌ها وابسته باشند، سطرها یا ستون‌های دیگر باشد ماتریس دارای کمبود مرتبه است

در ادامه می‌بایست نشان داده شود که $\hat{x}$ (از رابطه ی (8)) یک نقطه ی min برای تابع اسکالر ϕ است

$$\frac{d\phi}{dx} = 2(\underline{A}\underline{x} - \underline{l})^T \underline{P}\underline{A}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2(\underline{x}^T\underline{A}^T - \underline{l}^T)\underline{P}\underline{A}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2(\underline{x}^T\underline{A}^T\underline{P}\underline{A}) - 2\underline{l}^T\underline{P}\underline{A}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{2d}{dx}(\underline{x}^T\underline{A}^T\underline{P}\underline{A}) - 2\frac{d}{dx}\underbrace{(\underline{l}^T\underline{P}\underline{A})}_{=0}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = (\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^T - 0 = A^T\underline{P}\underline{A} \quad (9)$$

مقادیر ویژه‌ی این ماتریس متقارن حتماً مثبت و غیر صفرند اگر عناصر قطری ماتریس وزن P حتماً مثبت و غیر صفر باشند

به این ترتیب تنها با انتخاب مناسب از ماتریس وزن می‌توان اطمینان داشت که رابطه ی (8) جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات (2) است

$$n_i < n_j \Rightarrow \sigma_{l_i} = \frac{\sigma_{l_i}}{\sqrt{n_i}} > \sigma_{l_1} = \frac{\sigma_{l_1}}{\sqrt{n_j}}$$

خطای اندازه‌گیری

$l_1 : 1$

$l_2 : 2$

$l_3 : 3$

$\vdots$

$l_n : n \qquad n > n-1 > \cdots > 1$

$$\Rightarrow \underline{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots \\ \cdot & \cdot & 1/n \end{bmatrix}$$

subject:
Year: Month: Date: ( )

معمولاً ماتریس وزن که ابعادی دارد به جای آن از ماتریس کوفاکتور (cofactor matrix) استفاده می‌کنیم زیرا ماتریس وزن است که ابعاد آن عکس مقیاس است و مقیاس ارزش آزادی شده است.

مسئله قبل

$$\begin{cases} \hat{v} = A\hat{x} - l \\ \hat{l} = l + \hat{v} = A\hat{x} \end{cases} \quad 10$$

مثال: فاصله‌ی بین دو نقطه چهار بار اندازه‌گیری و نتایج ذیل حاصل شده است:

	مقدار اندازه‌گیری m	انحراف معیار اندازه‌گیری cm
1	1000.19	12
2	1000.40	13
3	1000.50	14
4	1000.28	15

برآورد بهترین مقدار این فاصله
الف) با احتساب ارزش مشاهدات
ب) بدون احتساب ارزش متفاوت مشاهدات
را حساب کنید.

جواب ب) (میانگین حسابی ساده)

$$\hat{x} = \frac{1000.19 + 1000.40 + 1000.50 + 1000.28}{4} = 1000 + \frac{0.19 + 0.4 + 0.5 + 0.28}{4} =$$

$$\hat{x} = 1000.39$$

جواب الف)

$$\begin{cases} v_1 + l_1 = x \\ v_2 + l_2 = x \\ v_3 + l_3 = x \\ v_4 + l_4 = x \end{cases} \qquad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000.19 \\ \vdots \\ 1000.28 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}$: بردار باقیمانده‌ها

مجهولات $\underline{x} = [x]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \mathrm{diag}(\sigma_{l_i}^{-2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12^2} & & & \\ & \frac{1}{13^2} & & \\ & & \frac{1}{14^2} & \\ & & & \frac{1}{15^2} \end{bmatrix}$$

$$\dim(Q) = \frac{1}{cm^2}$$

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l$$

$$\hat{x} = \left(10^4 \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/12^2 & & & \\ & 1/13^2 & & \\ & & 1/14^2 & \\ & & & 1/15^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} 10^4 \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/12^2 & & & \\ & 1/13^2 & & \\ & & 1/14^2 & \\ & & & 1/15^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1000.19\\1000.40\\1000.50\\1000.28\end{bmatrix} \ m$$

برای تبدیل cm به m تبدیل کنیم که 10^4 را حذف می کنیم یعنی از ماتریس بیرون بیاید $10^{-4} \times 10^{4} = 1$ پس
لازم نیست هم واحد شوند در جواب تأثیر ندارند

$$\hat{x} = \left(\frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1000.19}{12^2} + \frac{1000.40}{13^2} + \frac{1000.5}{14^2} + \frac{1000.28}{15^2}\right)$$

$$\hat{x} = \frac{\frac{1000.19}{12^2} + \frac{1000.4}{13^2} + \cdots + \frac{1000.28}{15^2}}{\frac{1}{12^2} + \cdots + \frac{1}{15^2}} = \frac{l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3 + l_4 w_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}, \quad w_i = \frac{1}{\sigma_{l_i}^2}$$

میانگین وزن دار تقریبا جواب یکسان است

$$\hat{x}_2 = 1000.33$$

زاویه α با سه دستگاه زاویه یاب مختلف اندازه گیری و نتایج زیر بدست آمده است

ایستگاه	زاویه α (45)	σ
WILD 1AE	45 ~~27~~ 20"	6"
T16	45° 27′ 24"	9"
T2	45° 27′ 23"	3"

برآورد کردن مربعات زاویه α را
در دو حالت بدون احتساب
وزن مشاهدات و با احتساب
وزن مشاهدات محاسبه کنید
تعبیر برای عناصر بردار تصحیحات (باقیمانده ها)
چگونه است

$v_3 < v_1 < v_2$

$\hat{v}_1$ و $\hat{v}_2$

45.4556

45.456~~7~~

45.4564

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

۱. بدون احتساب وزن مشاهدات

$$\hat{x} = \frac{25^\circ 27' 20'' + 45^\circ 27' 24'' + 45^\circ 27' 23'}{3} =$$

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \qquad P = \begin{bmatrix} 1/36'' & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/81'' & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/9'' \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \left(\underset{1\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 1/36'' & & \\ & 1/81'' & \\ & & 1/9'' \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/36'' & & \\ & 1/81 & \\ & & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45^\circ\ 27'\ 20'' \\ 45^\circ\ 27'\ 24'' \\ 45^\circ\ 27'\ 23'' \end{bmatrix}$$

۱×۳ ۳×۳ ۳×۱ ۱×۱

$$\hat{x} = \frac{l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = 45.4563$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 + l_1 = \hat{x} \Rightarrow v_1 = \hat{x} - l_1 = 45.4563 - 45.4556 = 0.0006$$

$$v_2 = \hat{x} - l_2 = 45.4563 - 45.4567 = -0.0004$$

$$v_3 = \hat{x} - l_3 = 45.4563 - 45.4564 = -0.0001$$

$$\Rightarrow v_3 < v_2 < v_1$$

ویژگی های جواب کمترین مربعات :

خصوصیات این جواب مثل سرشکن است

1. نا اریب بودن جواب کمترین مربعات

اریب biased

نااریب unbiased

2. ماکزیمم احتمال بودن جواب کمترین مربعات (این جواب محتمل‌ترین جواب محسوب می‌شود)

3. مینیمم واریانس بودن این جواب

PARSCO

از آمار و احتمالات به خاطر داریم که برآورد $\hat{x}$ از پارامتر x که از طریق یک نمونه اندازه‌گیری به دست می‌آید برآوردی نااریب است اگر ضابطه زیر برای این برآورد داشته باشیم

$$E(\hat{x}) = x \quad (1)$$

حال برای بررسی این ویژگی در جواب کمترین مربعات تساوی (1) را برای این جواب تحقیق می‌کنیم. می‌دانیم

$$\hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPL \qquad L = Ax - v \quad (2)$$

از طرفین رابطه (2) امید ریاضی می‌گیریم

$$E(\hat{x}) = E\left[(A^TPA)^{-1}A^TPL\right]$$
$$= E\left[(A^TPA)^{-1}A^TP\,[Ax - v]\right]$$
$$= E\left[(A^TPA)^{-1}A^TPAx - (A^TPA)^{-1}A^TPv\right]$$
$$E\left[\underbrace{(A^TPA)^{-1}A^TPA}_{=I}\,x\right] - E\left[(A^TPA)^{-1}A^TPv\right]$$
$$= E[x] - (A^TPA)^{-1}A^TP\,E(v) \quad (3)$$

در رابطه (3) x مقدار واقعی پارامتر مجهول است بنابراین $E[x] = x$ همچنین چنانچه مشاهدات عاری از خطاهای سیستماتیک و اشتباهات باشد، $E(v) = 0$ (4) بنابراین ترتیب

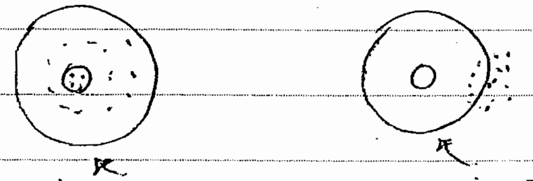
$$E(\hat{x}) = x - 0$$
$$E(\hat{x}) = x \quad (5)$$

با رابطه (4) ثابت می‌شود که جواب کمترین مربعات مدل پارامتریک خطی یک جواب نااریب است

شرط (4) [از عدم وجود خطاهای سیستماتیک در مشاهدات و اشتباه در اندازه‌گیری‌ها] تأکیدی است بر لزوم پالایش مشاهدات (preprocessing) پیش از استفاده از آن‌ها در روش کمترین مربعات

subject:

Year: Month: Date: ( )



تمرکز حجم ولی دور از هدف

آزمایش نااریب   آزمایش اریب

برای بررسی برتری حالاست با زعم احتمال بودن جواب بهترین معادلات ضمناً ثابت است نشان داده جواب دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = A\underline{x} \\ \underline{v}^T P \underline{v} = \min \end{cases} \quad (6)$$

منطبق بر جواب دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = A\underline{x} \\ f(\underline{v}_i) = \max \end{cases} \quad (7)$$

است به شرط آنکه $f(v_i)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $\underline{v}$ است

برای این کار لازم است ابتدا ماتریس واریانس کوواریانس بردار باقیمانده‌های $\underline{v}$ را بدست آوریم:

طبق تعریف

$$\underline{C}_v = E\left[(\underline{v} - E(\underline{v})) (\underline{v} - E(\underline{v}))^T \right] \quad (8)$$

طبق شرایط (4) $E(\underline{v}) = 0$ پس

$$C_v = E(\underline{v}\underline{v}^T)$$

همچنین طبق رابطه (2)

$$\underline{C}_v = E\left[(\underline{A}\underline{x} - \underline{l}) (\underline{A}\underline{x} - \underline{l})^T \right] \quad (9)$$

برای ساده کردن رابطه 9 کافی است که از تساوی $\underline{v} + \underline{l} = A\underline{x}$ امید ریاضی بگیریم:

$$E(\underline{v} + \underline{l}) = E(\underline{A}\underline{x})$$

$$\underbrace{E(\underline{v})}_{=0} + E(\underline{l}) = \underline{A}\underline{x} \Rightarrow E(\underline{l}) = \underline{A}\underline{x} \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (10) در رابطه (9)

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$C_v = E\{[\underline{l} - E(\underline{l})][\underline{l} - E(\underline{l})]^T\} \quad (11)$$

رابطه‌ی (11) طبق تعریف ماتریس واریانس کوواریانس بردار مشاهدات $\underline{l}$ است

$$\boxed{C_v = C_l} \quad (12)$$

روش دیگر را برای تحقیق رابطه‌ی 12 بررسی می‌کنیم

$$\underline{v} = A\underline{x} - \underline{l} = f(\underline{l})$$

(از قانون انتشار خطاهای کوواریانس استفاده کردیم)

$$C_v = \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{l}}\right] C_l \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{l}}\right]^T$$

$$C_v = [-I]\, C_l\, [-I]^T \Rightarrow \boxed{C_v = C_l}$$

از آمار و احتمال می‌دانیم که تابع توزیع احتمال بردار تصادفی $\underline{v}$ به صورت زیر است:

$$f(\underline{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sqrt{\det(C_v)}} Exp(-\underset{n\times 1}{\underline{v}^T} C_v^{-1} \underline{v}) \quad (13)$$

ملاک حل دستگاه معادلات (7) منظور یافتن ماتریس جوابی از دستگاه معادلاتی است که $\underline{v} + \underline{l} = A\underline{x}$ است که تابع (13) را ماکزیمم می‌کند. تابع $f(\underline{v})$ وقتی ماکزیمم می‌شود که $\min\ \underline{v}^T C_v^{-1} \underline{v}$ شود. به عبارت دیگر دستگاه معادلات (7) را با دستگاه معادلات زیر جایگزین کرد:

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = A\underline{x} \\ \underline{v}^T C_v^{-1} \underline{v} = \min \end{cases} \quad (14)$$

یا به طور معادل به کمک رابطه‌ی 12 داریم:

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = A\underline{x} \\ \underline{v}^T C_l^{-1} \underline{v} = \min \end{cases} \quad (15)$$

از مقایسه‌ی دو دستگاه معادلاتی که در بالا نشان داده شد می‌توان دید که این دو دستگاه دارای جواب یکسانند اگر و تنها اگر

$$\boxed{P = C_l^{-1}} \quad (16)$$

تعریف ماتریس وزن در حالت کلی

PARSCO

با تغییر مقیاس (scale کردن) ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات تغییری در این نتیجه بوجود نمی آید

ضریب ثابت

برای تحقق شرط (ویژگی) مینیمم واریانس بودن جواب بهترین برآورد ناریب است نشان دهیم که جواب دستگاه معادلات (6) منطبق بر جواب دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} \\ \underline{c}_{\hat{x}} = \min \end{cases} \quad (17)$$

که در آن $\underline{c}_{\hat{x}}$ ماتریس واریانس کوواریانس برآوردگر پارامترهای مجهول $\underline{x}$ است

واضح است که جواب دستگاه معادلات 17 را می توان به صورت $\hat{\underline{x}} = \underline{B}\,\underline{l}$ (18) نوشت که در آن $\underline{B}$ ماتریس نامشخص است. از آنجا که علاقمندیم دو ویژگی یک جواب بهترین برآورد برای جواب (18) برقرار باشد ماتریس $\underline{B}$ را چنان تعیین می کنیم که دو ویژگی ناریب بودن و مینیمم احتمال بودن برای جواب (18) صادق باشد.

ناریب بودن جواب 18 ایجاب می کند:

$$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{x}$$

$$E(\hat{\underline{x}}) = E(\underline{B}\,\underline{l})$$

$$E(\hat{\underline{x}}) = E[\underline{B}(\underline{A}\,\underline{x} - \underline{v})]$$

$$E(\hat{\underline{x}}) = E(\underline{B}\,\underline{A}\,\underline{x}) - E(\underline{B}\,\underline{v})$$

$$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{B}\,\underline{A}\,\underline{x} - \underline{0}$$

ناریب

$$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{B}\,\underline{A}\,\underline{x} \quad (19)$$

رابطه 19 نشان می دهد که جواب 18 تنها در صورتی یک جواب ناریب است که $\underset{u\times n}{\underline{B}}\,\underset{n\times u}{\underline{A}} = \underset{u\times u}{\underline{I}}$ (20) باشد

در حقیقت ماتریس $\underline{B}$ در رابطه $\underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$ ، $\underline{A}\,\underline{B} \neq$ را معکوس چپ ماتریس $\underline{A}$ می گویند بنابراین طبق 20 جواب 18 برآوردی ناریب از بردار $\underline{x}$ است اگر و تنها اگر $\underline{B}$ معکوس چپ ماتریس $\underline{A}$ باشد

با احتساب این شرط با در نظر گرفتن شرط 16 جواب 18 از هر دو ویژگی یک جواب بهترین برآورد برخوردار خواهد بود.

subject:
Year: Month: Date: ( )

بنابراین برای حل دستگاه معادلات 17 این دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\hat{\underline{x}} \\ \phi = trace(\underline{C}_{\hat{x}}) = min \end{cases} \quad (21)$$

با استفاده از رابطه 18 و قانون انتشار خطاها:

$$\underline{C}_{\hat{x}} = \underline{B}\,\underline{C}_l\,\underline{B}^T$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات 21 را تحت شرط

$$\phi = trace(\underline{B}\,\underline{C}_l\,\underline{B}^T) = min$$

پیدا می‌کنیم. برای اینکه جواب حاصل از تئوری مناسب برای ما نیز وجود داشته باشد تابع ϕ را چنان تغییر می‌دهیم که شرط 20 نیز در آن لحاظ گردد

$$\phi = trace(\underline{B}\,\underline{C}_l\,\underline{B}^T) + trace[2(\underline{B}\,\underline{A} - \underline{I})\,\underline{k}_{u\times u}] \quad (22)$$

ماتریس $\underline{B}$ را از رابطه 22 را چنان پیدا می‌کنیم که ~~جواب 18~~ به ازای آن تابع ϕ min شود

در رابطه 22 $\underline{k}$ برداری نامشخص است (مجهول است) و بردار ضرایب لاگرانژ معروف است از تابع ϕ نسبت به پارامترهای مجهول این رابطه (ماتریس‌های $\underline{B}$ و $\underline{k}$) مشتق گرفته مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{B}} = 2\,\underline{C}_l\,\underline{B}^T + 2\,\underline{A}\,\underline{k} = 0 & (23.1) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{k}} = 2(\underline{B}\,\underline{A} - \underline{I}) = 0 & (23.2) \end{cases}$$

از تقسیم رابطه بالا به 2 و ترانسپوز گرفتن این رابطه:

$$\underline{B}\,\underline{C}_l + \underline{k}^T \underline{A}^T = 0 \Rightarrow \underline{B} = -\underline{k}^T \underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \quad (24)$$

و یا

$$\underline{B}^T = -\underline{C}_l^{-1}\,\underline{A}\,\underline{k}$$

طبق شرط 20

$$\underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$$

$$-k^T A^T C_l^{-1} A = I$$

$$\underbrace{A^T C_l^{-1} A}_{u \times u} k = -I \quad (25)$$

شرط کامل بودن مرتبه ی ماتریس A

$$k = -(A^T C_l^{-1} A)^{-1} \quad (26)$$

از جایگذاری رابطه ی (26) در رابطه ی (24) خواهیم داشت

$$\underbrace{B = (A^T C_l^{-1} A)^{-1} A^T C_l^{-1}} \quad (27)$$

از جایگذاری رابطه ی (27) در جواب (18)

$$\hat{x} = (A^T C_l^{-1} A)^{-1} A^T C_l^{-1} l \quad (28)$$

رابطه ی (28) جواب دستگاه معادلات (21) است. ملاحظه می کنید که تحت شرط مناسب بودن ~~جواب~~ جواب این دستگاه معادلات این جواب منطبق بر جواب کمترین مربعات است

ماتریس های واریانس - کوواریانس کمیت های حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک خطی

$\hat{x}$, $\hat{v}$, $\hat{l}$

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (29) \qquad \hat{v} = A\hat{x} - l \quad (30) \qquad \hat{l} = A\hat{x} \quad (31) \qquad P = C_l^{-1}$$

الف) ماتریس واریانس کوواریانس برآورد بردار مجهولات ($\hat{x}$):

با استفاده از رابطه ی 29 و قانون انتشار خطاها می توان نوشت

$$C_{\hat{x}} = \left[(A^T P A)^{-1} A^T P \right] C_l \left[(A^T P A)^{-1} A^T P \right]^T$$

بجای P ، C_l^{-1} می گذاریم

$$C_{\hat{x}} = \left[(A^T C_l^{-1} A)^{-1} A^T \underbrace{C_l^{-1} \right] C_l}_{=I} \left[C_l^{-1} A \, (A^T C_l^{-1} A)^{-1} \right]$$

$$C_{\hat{x}} = \left[(A^T C_l^{-1} A)^{-1} A^T \right] \left[C_l^{-1} A \, (A^T C_l^{-1} A)^{-1} \right]$$

$$C_{\hat{x}} = \left[\underbrace{(A^T C_l^{-1} A)^{-1} (A^T C_l^{-1} A)}_{=I} \right] (A^T C_l^{-1} A)^{-1}$$

subject:
Year: Month: Date: ( )

adjustment

$\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1}$ یا $\boxed{\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}}$ (32)

ب) ماتریس واریانس کوواریانس بردار $\hat{l}$:

با استفاده از رابطه‌ی 31 و قانون انتشار خطاها

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{A}\,\underline{C}_{\hat{x}}\,\underline{A}^T \quad (33)$$

در رابطه‌ی (33) به جای $\underline{C}_{\hat{x}}$ از برآورد آن مطابق با رابطه‌ی (32) استفاده می‌کنیم

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{A}(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T}$$

ماتریس‌های واریانس کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک خطی

الف) ماتریس واریانس کوواریانس برآورد بردار مجهولات ($\hat{x}$) $\quad \underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1}$

ب) ماتریس واریانس کوواریانس برآورد بردار مشاهدات ($\hat{l}$) $\quad \underline{C}_{\hat{l}} = \underline{A}\,\underline{C}_{\hat{x}}\,\underline{A}^T$

پ) ماتریس واریانس کوواریانس برآورد بردار باقیمانده‌ها ($\hat{v}$)

$$\hat{v} = \overbrace{\underline{A}\hat{x}}^{\hat{l}} - \underline{l} \quad (1)$$

با جایگذاری (2) در (1):

$$\hat{x} = (\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{l} \quad (2)$$

$$\hat{v} = A(\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{l} - \underline{l}$$

$$\hat{v} = [A(\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} - \underline{I}]\, \underline{l} \quad (3)$$

با اعمال قانون انتشار خطاها به رابطه‌ی 3 خواهیم داشت:

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[\frac{d\hat{v}}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_l \left[\frac{d\hat{v}}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = [A(A^T \underline{C}_l^{-1} A)^{-1} A^T \underline{C}_l^{-1} - \underline{I}]\; \underline{C}_l\; [\underline{A}(A^T \underline{C}_l^{-1} A)^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} - \underline{I}]^T \quad (4)$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = [A\underbrace{(\underline{A}^T \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1}}_{=N^{-1}} \underline{A}^T - \underline{C}_l][\underline{C}_l^{-1} \underline{A} \underbrace{(\underline{A}^T \underline{C}_l \underline{A})^{-1}}_{=\underline{N}^{-1}} \underline{A}^T - \underline{I}]$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = [A N^{-1} A^T - C_\ell][C_\ell^{-1} A N^{-1} A^T - I]$$

$$C_{\hat{v}} = A N^{-1} \overbrace{A^T C_\ell^{-1} A}^{N} N^{-1} A^T - A N^{-1} A^T - C_\ell C_\ell^{-1} A N^{-1} A^T + C_\ell$$

$$C_{\hat{v}} = A N^{-1} A^T - A N^{-1} A^T - A N^{-1} A^T + C_\ell$$

$$C_{\hat{v}} = C_\ell - A N^{-1} A^T$$

$$C_{\hat{v}} = C_\ell - A \underbrace{(A^T C_\ell^{-1} A)^{-1}}_{= C_{\hat{x}}} A^T$$

$$C_{\hat{v}} = C_\ell - \underbrace{A\, C_{\hat{x}}\, A^T}_{C_{\hat{\ell}}} \qquad C_\ell \quad C_{\hat{\ell}}$$

$$\boxed{C_{\hat{v}} = C_\ell - C_{\hat{\ell}}} \quad (5)$$

در این لحظه برای $\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \ell$ استفاده کردیم هنوز شناخت درستی از ماتریس درک نکردیم

ارتباط جواب بهترین جوابات با جواب حاصل از شبه معکوس ماتریس طراحی:

$$\underset{n\times 1}{\ell} = A \underset{u\times 1}{x} \qquad n > u \quad (6)$$

همانگونه که قبلاً مشاهده شد ماتریس طراحی A در مدل پارامتریک خطی ماتریس مستطیلی (در اینجا) است (چون تعداد سطرهای بیشتری نسبت به تعداد ستون‌های آن دارد)

از جبر خطی دیدیم که اگر C ماتریس مربع و معکوس پذیر باشد ماتریسی مانند B وجود دارد به طوری

$$C B = B C = I$$

در این صورت B را معکوس منظم (Regular inverse) یا به اختصار

معکوس ماتریس g می‌نامند.

برای یک ماتریس مستطیلی مانند $\underline{A}$ ماتریسی مانند $\underline{H}$ می‌توان یافت به نحوی که

$$\underline{H}\,\underline{A}\,\underline{H} = \underline{A}$$

در این صورت $\underline{H}$ را معکوس فراگیر ماتریس $\underline{A}$ می‌گویند و $\bar{\underline{A}}$ نمایش می‌دهند.

همچنین دیدیم که معکوس فراگیر معکوسی منحصر به فرد نیست. ماتریس‌ها از شروطی استفاده شد که به معکوس منحصر به فرد برای یک ماتریس مستطیلی منجر می‌شود. این شروط عبارت بودند از

I) $\underline{A}\,\underline{H}\,\underline{A} = \underline{A}$

II) $(\underline{A}\,\underline{H})^T = \underline{A}\,\underline{H}$

III) $(\underline{H}\,\underline{A})^T = \underline{H}\,\underline{A}$

در این صورت معکوس منحصر به فرد H را شبه معکوس ماتریس $\underline{A}$ می‌نامند و با $\underline{A}^+$ نمایش می‌دهند.

به این ترتیب جواب منحصر به فردی در ازاء l ها برای دستگاه معادلات $\underline{l}$ حال که ماتریس است یک جواب منحصر به فرد برای این دستگاه معادلات است

$$\hat{\underline{x}} = \underline{A}^+\underline{l} \quad (7)$$

برای اینکه جواب (7) منطبق بر جواب کمترین مربعات $\hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{l}$ باشد باید

$$\hat{\underline{x}} = \underline{A}^+\underline{l} = (\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{l} \Longrightarrow \underline{A}^+ \overset{?}{=} (\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P} \quad (8)$$

رابطه 8 الگوریتمی را برای محاسبه‌ی شبه معکوس ماتریس $\underline{A}$ پیشنهاد می‌کند در صورتی که این الگوریتم منجر به محاسبه‌ی شبه معکوس ماتریس $\underline{A}$ گردد آنگاه جواب (7) جوابی منطبق بر جواب کمترین مربعات خواهد بود. برای این منظور می‌بایست رابطه‌ی (8) از آن در شرط I، II و III صادق باشد.

$$\underline{A}\,\underbrace{(A^TPA)^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\underline{A}}_{\underline{I}} = \underline{A}\,\underline{I} = \underline{A} \Longrightarrow$$ شرط (I) برقرار است

subject: http://sahand.kntu.ac.ir/~hessainal

Year: Month: Date: ( ) least square Adjustment

$$[A(A^TPA)^{-1}A^TP]^T = \underline{P}\,\underline{A}(\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T \Rightarrow$$

شرط (II) زمانی برقرار است که $P = I$ باشد

به عبارت دیگر مشاهدات وزن واحدی داشته باشند.

شرط III همواره برقرار است

$$\Big[\underbrace{(\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A}}_{=I}\Big]^T = \underline{I}^T = \underline{I} = (\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\,\underline{A} \Rightarrow$$

بنابراین رابطه‌ی 8 آلتی‌تیمی برای محاسبه‌ی شبه معکوس ماتریس $\underline{A}$ پیشنهاد می‌کند اگر و تنها اگر $\underline{P} = \underline{I}$ در این صورت معمول‌ترین جواب حقیقی برجواب (7) از دستگاه معادلات همان (6) خواهد بود.

$$\boxed{\underline{A}^+ = (A^TA)^{-1}A^T} \quad (9)$$

اگر و تنها اگر $\underline{P} = \underline{I}$

$A^+ = pinv(A) \Leftarrow$ شبه معکوس $\underline{A}$ در مطلب

$(A^TLL^TA)\ A\ \underline{l}$

$\hat{x} = pinv(\underline{A})\,\underline{l} \Leftarrow$ در مطلب

$L^T.\underline{l}$

تبدیل مشاهدات با وزن $\underline{P}$ به مشاهدات با وزن واحد

از جبر خطی می‌دانیم که هر ماتریس متقارن حقیقی را می‌توان به حاصل ضرب دو ماتریس پایین مثلثی و بالا مثلثی تجزیه کرد. بنابراین برای ماتریس وزن می‌توان نوشت

ماتریس پایین مثلثی $\underline{P} = \underline{L}\,\underline{L}^T$ (10)

با توجه به این موضوع در حل دستگاه معادلات (7)

$\underline{l} = \underline{A}\,\underline{x}$ (7)

طرفین را در ماتریس $\underline{L}^T$ ضرب کنیم خواهیم داشت.

$$\underbrace{L^T\underline{l}}_{\underline{l}'} = \underbrace{L^T}_{}\!\!\underset{\underline{A}'}{A}\,\underline{x} \Rightarrow \underline{l}' = \underline{A}'\underline{x} \quad (11)$$

به این ترتیب به کمک این انتقال به دستگاه معادلات (11) می‌رسیم. نشان خواهیم داد که در این دستگاه معادلات بردار مشاهدات $\underline{l}'$ برداری با وزن واحد است. برای این کار کافی است نشان دهیم جواب کمترین مربعات دستگاه معادلات (11) برای بردار مشاهدات $\underline{l}'$ و

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

و با احتساب وزن یکه برای این مشاهدات با جایگزین کردن معادلات دستگاه معادلات (7)
و با احتساب وزن P برای بردار مشاهدات l دراین دستگاه برهم منطبقند.

$$\hat{x}' = (A'^T A')^{-1} A'^T l'$$

$$\hat{x}' = \left[(L^T A)^T (L^T A) \right]^{-1} (L^T A)^T L^T l$$

$$\hat{x}' = (A^T \underbrace{L\, L^T}_{=P} A)^{-1} A^T \underbrace{L\, L^T}_{=P} l$$

$$\hat{x}' = (A^T P A)^{-1} A^T P l = \hat{x}$$

تنها نکته‌ی باقی مانده دراین خصوص نحوه‌ی محاسبه‌ی ماتریس L است یکی از الگوریتم‌های مفید برای این منظور الگوریتم چولسکی است

الگوریتم چولسکی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & & l_{n2} \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L^T}$$

(12)

subject:
Year: Month: Date: ( )

در واقع الگوریتم چولسکی مبتنی بر حل دستگاه معادلات همزمان (12) است:

$$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{21} = l_{21} l_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}, \ \ldots, \ l_{n1} = \frac{a_{n1}}{l_{11}}$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$a_{32} = l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}}, \ \ldots,$$

$$\forall i = 1, n, \quad \forall j = i+1, \ldots, n$$

chol در مطلب

$$l_{ii} = \sqrt{\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\right)} \qquad (13)$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}\, l_{ik}\right) / l_{ii}$$

برآورد واریانس وزن واحد ($\hat{\sigma}_0^2$):

بنابراین خواهیم داشت برآورد $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\underline{V}}^T \underline{Q}^{-1} \hat{\underline{V}}}{df} \qquad (15) \qquad \hat{\underline{V}} = \underline{A}\,\hat{\underline{x}} - \underline{l}$$

که در آن $df = n - u$ (تعداد مشاهدات، تعداد مجهولات) به درجه آزادی سرشکنی (degree of freedom) شناخته می‌شود و برآوردی نااریب برای پارامتر $\hat{\sigma}_0^2$ است. $\underline{Q}$ در این رابطه ماتریس کوفاکتور (ماتریسی که معرف دقت نسبی مشاهدات است.)

$$\sigma_0^2 \underline{Q} = C_l \qquad (14) \qquad \underline{P} = \sigma_0^2 C_l^{-1}$$

در عمل اطلاع دقیقی از ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات قبل از سرشکنی در دست نیست. ماتریس C_l ماتریس کوواریانس واقعی مشاهدات است (یعنی ماتریسی که دقت عملی دستگاه اندازه‌گیری را در شرایط واقعی یک پروژه در اختیار ما قرار می‌دهد) و $\underline{Q}$ ماتریس واریانس کوواریانس نسبی است که بر اساس اطلاعات موجود از دستگاههای اندازه‌گیری مورد

subject:
Year: Month: Date: ( )

استفاده ماتریسی که از ترکیب تشکیل می‌شود (ماتریس کوفاکتور مشاهدات) این ضریب مقیاس σ_0^2 به تفاوت دارند. این ضریب مقیاس را فاکتور واریانس اولیه یا واریانس وزن واحد می‌گویند

برآورد واریانس وزن واحد ($\hat{\sigma}_0^2$) (فاکتور واریانس ثانویه)

تخمین نااریب برآورد $\hat{\sigma}_0^2$: $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}}{df}$ که در آن $df = n-u$ درجه‌ی آزادی سیستم (تعداد معادلات اضافی موجود در دستگاه معادلات نسبت به حداقل تعداد معادلات مورد نیاز در برآورد پارامترهای مجهول است. معادل است که برای اثبات این موضوع کافی است نشان دهند $E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$ (1)

$$v^T Q^{-1} v = (Ax-l)^T Q^{-1} (Ax-l) \quad (2)$$
$$= (x^TA^T - l^T)(Q^{-1}Ax - Q^{-1}l)$$
$$= x^TA^TQ^{-1}Ax - \underbrace{x^TA^TQ^{-1}l}_{3} - \underbrace{l^TQ^{-1}Ax}_{4} + l^TQ^{-1}l$$

$$A^TQ^{-1}A\hat{x} = A^TQ^{-1}l \quad (3)$$ اما داریم در دستگاه معادلات نرمال

$$\hat{x}^TA^TQ^{-1}A = l^TQ^{-1}A \quad (4)$$ همچنین با ترانسپوز گرفتن از طرفین رابطه‌ی 3

از ترکیب روابط (2)، (3)، (4) :

$$v^TQ^{-1}v = x^TA^TQ^{-1}Ax - x^TA^TQ^{-1}A\hat{x} - \hat{x}^TA^TQ^{-1}Ax + l^TQ^{-1}l \quad (5)$$

به ترتیب مشابه برای عبارت $\hat{v}^TQ^{-1}\hat{v}$:

$$\hat{v}^TQ^{-1}\hat{v} = (A\hat{x}-l)^TQ^{-1}(A\hat{x}-l)$$
$$= (\hat{x}^TA^T - l^T)(Q^{-1}A\hat{x} - Q^{-1}l)$$
$$= \hat{x}^TA^TQ^{-1}A\hat{x} - \underbrace{\hat{x}^TA^TQ^{-1}l}_{3} - \underbrace{l^TQ^{-1}A\hat{x}}_{4} + l^TQ^{-1}l$$
$$= \hat{x}^TA^T\cancel{Q^{-1}}A\hat{x} - \hat{x}^TA^T\cancel{Q^{-1}}A\hat{x} - \hat{x}^TA^TQ^{-1}A\hat{x} + l^TQ^{-1}l$$

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v} = -\hat{x}^T A^T Q^{-1} A \hat{x} + l^T Q^{-1} l \quad (6)$$

از کم کردن روابط (5) و (6) :

$$-\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v} + v^T Q^{-1} v = +\hat{x}^T A^T Q^{-1} A \hat{x} + \cancel{l^T Q^{-1} l}$$
$$+ x^T A^T Q^{-1} A x + x^T A^T Q^{-1} A \hat{x} +$$
$$+ \hat{x}^T A^T Q^{-1} A x + \cancel{l^T Q^{-1} l}$$

$$-\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v} + v^T Q^{-1} v \overset{?}{=} (\hat{x} - x)^T A^T Q^{-1} A (\hat{x} - x)$$

$$(\hat{x} - x)^T A^T Q^{-1} A (\hat{x} - x) = (\hat{x}^T - x^T)(A^T Q^{-1} A \hat{x} - A^T Q^{-1} A x)$$
$$= (\hat{x}^T A^T Q^{-1} A \hat{x} - \hat{x}^T A^T Q^{-1} A x$$
$$- x^T A^T Q^{-1} A \hat{x} + x^T A^T Q^{-1} A x)$$

بنابراین

$$v^T Q^{-1} v - \hat{v}^T Q^{-1} \hat{v} = (\hat{x} - x)^T A^T Q^{-1} A (\hat{x} - x) \quad (7)$$

از طرفین رابطه‌ی 7 امید ریاضی می‌گیریم

$$E(v^T Q^{-1} v - \hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}) = E\left[(\hat{x} - x)^T A^T Q^{-1} A (\hat{x} - x)\right]$$

می‌توان ثابت کرد که اگر $y = x^T B x$ باشد آنگاه $y = \mathrm{trace}(x x^T B)$

علاوه بر این با توجه به خطی بودن اپراتور E :

$$E(v^T Q^{-1} v) - E(\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}) = E\left\{\mathrm{trace}\left[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T A^T Q^{-1} A\right]\right\} \quad (8)$$

برای ساده کردن رابطه‌ی 8 مجدداً از خاصیت خطی بودن اپراتور trace و امید ریاضی استفاده می‌کنیم

$$E(\underline{v}^T \underline{Q}^{-1} \underline{v}) = E(\hat{\underline{v}}^T \underline{Q}^{-1} \hat{\underline{v}}) = \text{trace}\left\{E\left[(\hat{\underline{x}}-\underline{x})(\hat{\underline{x}}-\underline{x})^T \underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{A}\right]\right\} \quad (9)$$

$$E(\hat{\underline{v}}^T \underline{Q}^{-1} \hat{\underline{v}}) = \text{trace}\left\{E(\underline{v}\,\underline{v}^T \underline{Q}^{-1})\right\} - \text{trace}\left\{E\left[(\hat{x}-x)(\hat{x}-x)^T A^T Q^{-1} A\right]\right\}$$

از تئوری خطاها به خاطر داریم که

$$E\left[(\hat{x}-x)(\hat{x}-x)^T\right] = \left\{(E(\underline{x})-\underline{x})(E(\underline{x})-\underline{x})^T\right\}$$

$$= E\left[(\underline{x}-E(\underline{x}))(\underline{x}-E(\underline{x}))^T\right]$$

$$= \underline{C}_{\hat{x}} \quad (10)$$

$$E(v v^T) = E\left[(\underline{v}-E(\underline{v}))(\underline{v}-E(\underline{v}))^T\right] \quad (11) = \underline{C}_v$$

برای رابطه‌ی (11) فرض بر این است که بردار مشاهدات l آلوده به خطاهای سیستماتیک داشته نیست

با استفاده از روابط (10) و (11) همچنین توجه به این نکته که در رابطه‌ی (9) ضرایب $\underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{A}$ و $\underline{Q}^{-1}$ ثابت هستند می‌توان نوشت

$$E(\hat{\underline{v}}^T \underline{Q}^{-1} \hat{\underline{v}}) = \text{trace}(\underline{C}_v \underline{Q}^{-1}) - \text{trace}(\underline{C}_{\hat{x}} \underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{A}) \quad (12)$$

از قسمت قبل به خاطر داریم که

$$\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{Q}_l^{-1} \underline{A})^{-1}, \quad \underline{C}_v^* = \underline{C}_l$$

بنابراین رابطه‌ی 12 به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود.

$$E(\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}) = \text{trace}(\underline{Q}_l \underline{Q}^{-1}) - \text{trace}(\underline{C}_{\hat{x}} \underline{C}_{\hat{x}}^{-1})$$

با جایگذاری $Q^{-1} = \sigma_0^2 \underline{C}_l^{-1}$ در رابطه‌ی مربوطه $\underline{C}_{\hat{x}}$ و $\underline{Q}$ می‌توان نوشت

subject:
Year: Month: Date: ( )

$$E(\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}) = \mathrm{trace}(\sigma_0^2 \underbrace{C_\ell C_\ell^{-1}}_{=I_n}) - \mathrm{trace}\left[\sigma_0^2 \underbrace{(A^T C_\ell^{-1} A)^{-1}(A^T C_\ell^{-1} A)}_{u \times u \;\; = I_{u \times u}}\right]$$

$$E(\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}) = \sigma_0^2 \left[\mathrm{trace}(I_n) - \mathrm{trace}(I_u)\right]$$

$$= \sigma_0^2 (n - u) \Rightarrow \sigma_0^2 = \frac{1}{df = n-u} E(\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v})$$

$$\overset{*}{\sigma}{}_0^2 = E\left(\frac{\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}}{df = n-u}\right) \Rightarrow \sigma_0^2 = E(\hat{\sigma}_0^2)$$

می‌توان نشان داد که برآوردهای نااریب از ماتریس‌های واریانس کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی می‌باشند

$$\hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}$$

$$\hat{C}_{\hat{\ell}} = \hat{\sigma}_0^2 \, A (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T \qquad (13)$$

$$\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \left[Q - A (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T\right]$$

بکمک روابط (13) می‌توان حتی در شرایطی که اطلاعی از واریانس صحیح ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات در دست نیست پس از سرشکنی ، برآوردی واقع‌بینانه از دقت مشاهدات ($\hat{C}_{\hat{\ell}}$) همراه با دقت سایر پارامترهای حاصل از سرشکنی ($\hat{C}_{\hat{v}}$ ، $\hat{C}_{\hat{x}}$) می‌یابیم.

$$E(\hat{C}_{\hat{x}}) \overset{?}{=} C_{\hat{x}}$$

PARSCO

$$E(\underline{\hat{C}}_{\hat{x}}) = E\left[\hat{\sigma}_0^2 (\underline{A}^T \underline{Q}^{-1} \underline{A})^{-1}\right]$$

$$= E\left[\hat{\sigma}_0^2 (\underline{A}^T \sigma_0^{2} \underline{C}_l^{-1} \underline{A})^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} E\left[\hat{\sigma}_0^2 \underbrace{(A^T \underline{C}_l^{-1} A)^{-1}}_{\underline{C}_{\hat{x}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} E(\hat{\sigma}_0^2 \underline{C}_{\hat{x}})$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} \underline{C}_{\hat{x}} E(\hat{\sigma}_0^2)$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} \underline{C}_{\hat{x}} \sigma_0^2 = \underline{C}_{\hat{x}}$$

این تساوی ثابت می‌کند که رابطه‌ی (13-1) برآوردی نااریب از ماتریس واریانس کوواریانس مجهولات است

بزرگ بودن $\hat{\sigma}_0^2$ نشان دهنده‌ی وجود اشتباه در مشاهدات است زیرا $\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}$ بزرگ شده و همچنین وجود خطاهای سیستماتیک باشد یا این که ارتباط مدل ریاضی با شرایط اندازه‌گیری نباشد برای این مورد v زیادی می‌شود (ناقص بودن مدل ریاضی) $\underline{v} + \underline{l} = \underline{f}(\underline{x})$ و یا این که ماتریس واریانس کوواریانس ناقص باشد که مقیاس آن خیلی غلط بوده است.

$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \Rightarrow$ معیاری برای درست بودن فرآیند سرشکنی

واضح است که در صورت وجود یک یا چند مشاهده‌ی اشتباه (مشاهده یا مشاهداتی که با مشاهدات دیگر سازگار نیستند و در نتیجه مؤلفه‌های بردار تصحیحات حاصل برای آن‌ها که از سرشکنی به دست می‌آید بزرگتر از سایر مشاهدات است) و یا وجود خطاهای سیستماتیک در اندازه‌گیری‌ها حاصل جمع $\hat{v}^T \underline{Q}^{-1} \hat{v}$ در مقایسه با حالتی که مشاهدات آلوده به خطاهای فاحش

subject:
Year: Month: Date: ( )

در اینجا یک تست ~~...~~ برازش خواهد بود. ماتریس $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ می‌تواند ملاکی برای ارزیابی هر یک از سه فرضیه‌ی زیر قرار گیرد. در صورتی که $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > 1$

الف) احتمالاً مشاهده یا مشاهدات اشتباه در ~~...~~ بردار مشاهدات وجود دارد

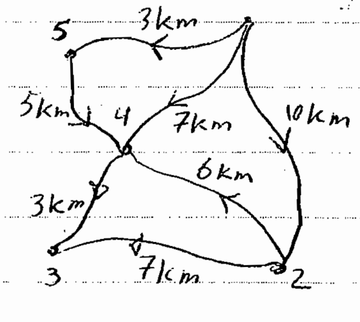
ب) احتمالاً مشاهدات خطاهای سیستماتیک وجود داشته باشند. آلوده به خطاهای سیستماتیک هستند یا مدل ریاضی مورد استفاده ناکافی است (با شرایط واقعی اندازه‌گیری تطبیق نمی‌کند)

ج) مقیاس اولیه σ_0^2 در نظر گرفته شده برای ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات خیلی دور از واقعیت است

با توجه به فرضیاتی که گذشت در استخراج جواب‌ها (برای ماتریس مجهولات) مدل پارامتریک خطی مورد استفاده قرار گرفته است. در دو حالت الف و ب جواب سرشکنی غیرقابل قبول خواهد بود. در این صورت در حالت نخست [الف] می‌بایست مشاهده یا مشاهدات اشتباه شناسایی و از لیست مشاهدات حذف گردد. سپس با تکرار سرشکنی مجدداً نسبت $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ بسته به نتایج جدید تصمیم‌گیری کرد.

در حالت ب واضح است که می‌بایست پردازش اولیه انجام شده بر روی مشاهدات خام و مدل ریاضی مورد استفاده مورد تحلیل و بررسی قرار گیرد. نهایتاً در صورتی که نسبت $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ مقداری قابل قبول باشد می‌توان نتایج سرشکنی را پذیرفت

مثال: شبکه ترازیابی شکل زیر را در نظر بگیرید.



$\Delta H_{15} = -42.107\,m$

$\Delta H_{24} = -33.802\,m$

$\Delta H_{12} = -12.424\,m$

$\Delta H_{23} = -42.251\,m$

$H_5 = 500\,m$ فرض می‌شود

$\Delta H_{43} = -8.464\,m$

$\Delta H_{54} = -4.138\,m$

$\Delta H_{14} = -46.269\,m$

پیدا کردن ترازسنجی مجهولات ارتفاع سایر نقاط شبکه را حساب کنید دستگاه ترازیاب ما دارای دقت
3cm در km است . [illegible]

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \Delta H_{15} - H_5 \\ \Delta H_{12} \\ \Delta H_{23} \\ \Delta H_{43} \\ \Delta H_{54} + H_5 \\ \Delta H_{14} \\ \Delta H_{24} \end{bmatrix}$$

برای ماتریس طراحی سطر [illegible]

$$\begin{cases} l_1 = H_5 - H_1 = \Delta H_{15} \\ l_2 \; \Delta H_{12} = H_2 - H_1 \\ l_3 = \Delta H_{23} = H_3 - H_2 \\ l_4 = \Delta H_{43} = H_3 - H_4 \\ l_5 = \Delta H_{54} = H_4 - H_5 \\ l_6 = \Delta H_{14} = H_4 - H_1 \\ l_7 = \Delta H_{24} = H_4 - H_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H_5 + l_1 = -H_1 \\ l_2 = H_2 - H_1 \\ l_3 = H_3 - H_2 \\ l_4 = H_3 - H_4 \\ = H_5 + l_5 = H_4 \\ l_6 = H_4 - H_1 \\ l_7 = H_4 - H_1 \end{cases}$$

مجهولات $\quad \underline{x} = [H_1, H_2, H_3, H_4]^T$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{l_1} = 3 \frac{cm}{km} \times \sqrt{3km} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sigma^2_{l_1} = 27 \frac{cm^2}{km}$

طول l_1

$\sigma_{l_2} = 3\sqrt{1.} \Rightarrow \sigma^2_{l_2} = 90 \; cm^2/km$

$\sigma_{l_3} = 3\sqrt{7} \Rightarrow \sigma^2_{l_3} = 63 \; cm^2/km$

$\sigma_{l_4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sigma^2_{l_4} = 27 \; cm^2/km$

$\sigma_{l_5} = 3\sqrt{5} \Rightarrow \sigma^2_{l_5} = 45 \; cm^2/km$

$\sigma_{l_6} = 3\sqrt{7} \Rightarrow \sigma^2_{l_6} = 63 \; cm^2/km$

$\sigma_{l_7} = 3\sqrt{6} \Rightarrow \sigma^2_{l_7} = 54 \; cm^2/km$

$$C_l = diag[\sigma^2_{l_1}, \ldots \sigma^2_{l_7}]$$

$$\hat{x} = (A^T C_l^{-1} A)^{-1} A^T C_l^{-1} \underline{l}$$

$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ باید برابر یک باشد

PARSCO

subject:
Year: Month: Date: ( )

برازش مدل پارامتریک غیرخطی:

در جلسات قبل دیدیم که حالت کلی معادلات مدل پارامتریک خطی $\underline{l} = A\underline{x}$ با این شرط که ماتریس A کمبود رتبه نداشته باشد از حل

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad , \quad P = Q^{-1} = \sigma_0^2 C_l^{-1} \quad (1)$$

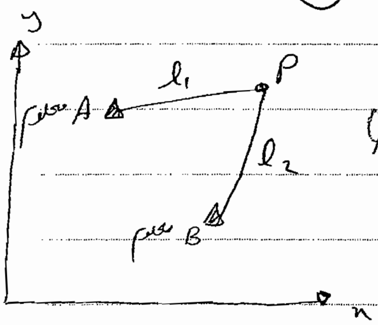
حاصل می‌شده است.

مدل پارامتریک خطی حالتی خاص از فرم کلی مدل‌های پارامتریک است. در حالت کلی یک مدل پارامتریک را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (2)$$

که در آن $\underline{f}$ لزوماً یک تابع خطی نیست:

به عنوان مثال در شکل زیر



$$\underline{f}(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} \\ \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \end{bmatrix}$$

و $\underline{x} = [x_P , y_P]^T$ $\quad$ $\underline{l} = [l_1 , l_2]^T$

در چنین شرایطی دستگاه معادلات حاصل $\underline{l} = \underline{f}(\underline{x})$ یک over determined دستگاه معادلات ناسازگار غیرخطی است. ضمناً چنانچه از درس محاسبات عددی می‌دانیم برای حل چنین دستگاه معادلاتی (با فرض سازگار بودن دستگاه معادلات) در اولین قدم این دستگاه معادلات را به دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنیم. برای این کار اگر بردار $\underline{x}^0$ شامل مقادیر اولیه‌ای از پارامترهای مجهول $\underline{x}$ باشند با بسط تیلور معادله (2) حول این مقادیر اولیه خواهیم داشت:

$$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x}^0) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\underline{x}^0} (\underline{x} - \underline{x}^0) + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{جملات غیرخطی}} \quad (3)$$

PARSCO

Subject:
Date: No.

با صرف نظر کردن از بخش غیرخطی رابطه‌ی (3) دستگاه معادلات (2) را می‌توان به تقریب
با دستگاه معادلات خطی زیر جایگزین کرد

$$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x}^\circ) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ}(\underline{x}-\underline{x}^\circ) \quad (4)$$

$$\underbrace{\underline{f}(\underline{x}^\circ)}_{=\underline{l}^\circ} \qquad \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ}}_{\underline{A}}$$

$$\underline{l} = \underline{l}^\circ + \underline{A}(\underline{x}-\underline{x}^\circ)$$

$$\underbrace{\underline{l}-\underline{l}^\circ}_{\delta l} = \underline{A}\,\underbrace{(\underline{x}-\underline{x}^\circ)}_{\delta x}$$

بنابراین رابطه‌ی (۴) را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد

$$\underline{\delta l} = \underline{A}\,\underline{\delta x}, \quad \underline{\delta l} = \underline{l}-\underline{l}^\circ, \quad \underline{\delta x} = \underline{x}-\underline{x}^\circ \quad (5)$$

به این ترتیب دستگاه معادلات با ساختار اولیه غیرخطی به دستگاه معادلات با ساختار خطی (5) تبدیل شده است. با تصحیح مشاهدات $\underline{\delta l}$ نسبت به خطاهای اتفاقی مشاهدات و با فرض عدم وجود مشاهدات اشتباه، خطاهای سیستماتیک حذف شده است

$$\underline{v} + \underline{\delta l} = \underline{A}\,\underline{\delta x} \quad (6)$$

به این ترتیب با دستگاه معادلات جبری under determined مواجهیم (تعداد معادلات کمتر از مجهولات) برای رسیدن به جواب بهینه برای این دستگاه معادلات از شرط کمترین مربعات استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{\delta l} = \underline{A}\,\delta x & (7) \\ \underline{v}^T \underline{P}\,\underline{v} = \min \end{cases}$$

جواب دستگاه با توجه به شرط دستگاه معادلات (7) با دستگاه معادلات مشاهدات در سرشکنی مدل پارامتریک خطی به صورت زیر است

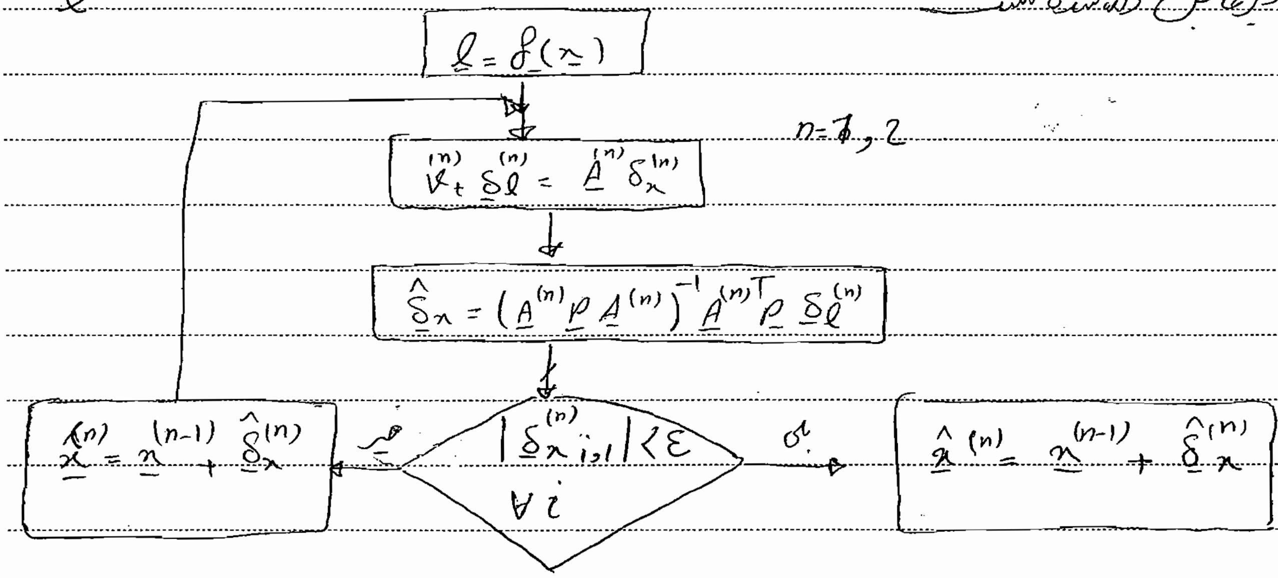
$$\hat{\underline{\delta}}_x = (\underline{A}^T \underline{P}\,\underline{A})^{-1}\underline{A}^T \underline{P}\,\underline{\delta l} \quad (8.1)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x}^\circ + \hat{\underline{\delta}}_x \quad (8.2)$$ جواب نهایی

این فرآیند را با استفاده از فلوچارت نمایش می‌دهیم

(8.2) در صورتی که تمام مؤلفه‌های بردار $\hat{\delta}_x$ از یک حد معیار کوچکتر باشند از برآورد برای پارامترهای مدل ریاضی به عنوان مقادیر تقریبی جدید استفاده کرده و مدل غیرخطی را به کمک آن‌ها خطی می‌کنیم سپس جواب کمترین مربعات مدل خطی جدید را محاسبه می‌کنیم چنانچه تمام عناصر بردار $\hat{\delta}_x$ حاصل از حل این مدل کوچکتر از حد معیار نباشند محاسبات را ادامه می‌دهیم در غیر این صورت مجدداً $\hat{x}$ حاصل از $\hat{\delta}_x$ جدید به عنوان مقادیر تقریبی جدید تلقی شده محاسبات تا جایی ادامه می‌یابد که شرط معیار توقف برقرار شود این فرآیند در فلوچارت زیر نمایش داده شده است

l



ماتریس‌های کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی مدل پارامتریک غیرخطی:

الف) ماتریس کوواریانس بردار δl

ب) ماتریس کوواریانس بردار $\hat{\delta}_x$

پ) ماتریس کوواریانس بردار $\hat{x}$

ت) ماتریس کوواریانس بردار $\hat{v}$

$$\delta l = l - l^0, \quad l^0 = f(x^0) \quad (و)$$

الف)

به کمک قانون انتشار خطاها

$$\underline{C}_{\delta l} = \left[\frac{d\underline{\delta}_l}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_l \left[\frac{d\underline{\delta}_l}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\delta l} = (\underline{I} - 0)\, \underline{C}_l\, (\underline{I} - 0)^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\delta l} = \underline{C}_l} \quad 10$$

با استفاده از قانون انتشار خطاها مطابق (8.1)

$$\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = \left[\frac{d\hat{\underline{\delta}}_x}{d\underline{\delta}_l}\right] \underline{C}_{\delta l} \left[\frac{d\hat{\underline{\delta}}_x}{d\underline{\delta}_l}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = \left[(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\right] \underline{C}_{\delta l} \left[(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\right]^T \quad (11)$$

با جایگذاری رابطه (10) در (11) داریم:

$$\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = \left[(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}\right] \underline{C}_l \left[\underline{P}\underline{A}\,(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\right]$$

$$\underline{P} = \underline{Q}^{-1} = \sigma_0^2\, \underline{C}_l^{-1}$$

$$\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = \left[(\underline{A}^T \cancel{\sigma_0^2}\, \underline{C}_l^{-1}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T \cancel{\sigma_0^2}\, \underbrace{\underline{C}_l^{-1}\right] \underline{C}_l}_{=I} \left[\cancel{\sigma_0^2}\, \underline{C}_l^{-1}\underline{A}\,(\underline{A}^T \cancel{\sigma_0^2}\, \underline{C}_l^{-1}\underline{A})^{-1}\right]$$

$$\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = (\underline{A}^T\underline{C}_l^{-1}\underline{A})^{-1}\, \underbrace{\underline{A}^T\underline{C}_l^{-1}\underline{A}\,(\underline{A}^T\underline{C}_l^{-1}\underline{A})^{-1}}_{=I}$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{\delta}_x} = (\underline{A}^T\underline{C}_l^{-1}\underline{A})^{-1}} \quad (12)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x}^0 + \hat{\underline{\delta}}_x$$

طبق قانون انتشار خطاها

$$\underline{C}_{\hat{x}} = \left[\frac{d\hat{\underline{x}}}{d\hat{\underline{\delta}}_x}\right] \underline{C}_{\hat{\delta}_x} \left[\frac{d\hat{\underline{x}}}{d\hat{\underline{\delta}}_x}\right]^T$$

Subject:
Date: . . No:

$$\underline{C}_{\hat{x}} = \underline{I}\ \underline{C}_{\hat{\delta}x}\ \underline{I}^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{x}} = \underline{C}_{\hat{\delta}x}} \quad (13)$$

$$\underline{\hat{\ell}} = \underline{f}(\underline{\hat{x}}) \Rightarrow$$

$$\underline{C}_{\hat{\ell}} = \underbrace{\left[\frac{d\underline{f}}{d\underline{\hat{x}}}\right]}_{=\underline{A}} \underline{C}_{\hat{x}} \left[\frac{d\underline{f}}{d\underline{\hat{x}}}\right]^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{\ell}} = \underline{A}\ \underline{C}_{\hat{x}}\ \underline{A}^T \quad \underline{\ell} \quad \underline{C}_{\hat{\ell}} = \underline{A}(\underline{A}^T \underline{C}_{\ell}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T} \quad (14)$$

$$\underline{\hat{v}} = \underline{f}(\underline{\hat{x}}) - \underline{\ell} \quad (15)$$

با استفاده از قانون انتشار خطاها به رابطه‌ی (15)

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[\frac{d\underline{\hat{v}}}{d\underline{\ell}}\right] \underline{C}_{\ell} \left[\frac{d\underline{\hat{v}}}{d\underline{\ell}}\right]^T \quad (16)$$

$$\frac{d\underline{\hat{v}}}{d\underline{\ell}} = \frac{d\underline{f}(\underline{\hat{x}})}{d\underline{\ell}} - \underline{I} \quad (17)$$

$$\frac{d\underline{f}(\underline{\hat{x}})}{d\underline{\ell}} = \underbrace{\frac{d\underline{f}(\underline{\hat{x}})}{d\underline{\hat{x}}}}_{=\underline{A}} \cdot \frac{d\underline{\hat{x}}}{d\underline{\ell}} = \underline{A}\ \frac{d\underline{\hat{x}}}{d\underline{\ell}} \quad (18)$$

$$\underline{\hat{x}} = \underline{x}^{\circ} + \underline{\hat{\delta}x}$$

$$\frac{d\underline{\hat{x}}}{d\underline{\ell}} = \underline{0} + \frac{d\underline{\hat{\delta}x}}{d\underline{\ell}} = \frac{d}{d\underline{\ell}}\left[(\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P}(\underline{\ell} - \underline{\ell}^{\circ})\right]$$

$$\frac{d\underline{\hat{x}}}{d\underline{\ell}} = (\underline{A}^T\underline{P}\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{P} \quad (19)$$

از ترکیب روابط (17) و (18) و (19)

$$\frac{d\hat{v}}{dl} = A\,(A^TPA)^{-1}A^TP - I \qquad (20)$$

از ترکیب روابط (20) و (16)

$$C_{\hat{v}} = \left[A\,(A^TPA)^{-1}A^TP - I\right] C_l \left[A\,(A^TPA)^{-1}A^TP - I\right]^T$$

اگر $P = Q^{-1} = \sigma_0^2 C_l^{-1}$ در رابطه‌ی بالا جایگزین و ضرب ماتریسی مربوط را انجام دهیم خواهیم داشت

$$\boxed{C_{\hat{v}} = C_l - C_{\hat{l}}} \qquad (21)$$

می‌توان نشان داد که برآوردهای زیر برآوردهای ناریب ماتریس‌های کوواریانس کمیت‌های حاصل از سرشکنی است

$$\hat{C}_{\delta x} = \hat{\sigma}_0^2\,(A^TQ^{-1}A)^{-1}$$

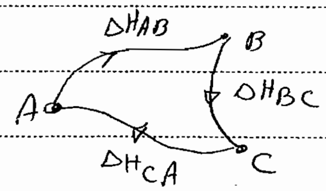
$$\hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2\,(A^TQ^{-1}A)^{-1} \qquad (22)$$

$$\hat{C}_{\hat{l}} = \hat{\sigma}_0^2\,A\,(A^TQ^{-1}A)^{-1}A^T$$

$$\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2\left[Q - A\,(A^TQ^{-1}A)^{-1}A^T\right]$$

سرشکنی . مدل شرط :

مدل‌های شرط دستگاهی از معادلات ریاضی هستند که شرط هندسی بین مشاهدات تشکیل می‌شود به عنوان مثال



در مثال شکل مقابل تنها شرط هندسی بین مشاهدات صفر بودن حاصل جمع اختلاف ارتفاع‌های این شبکه است

$$\Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{CA} = 0 \qquad (23)$$

رابطه‌ی (23) نمونه‌ای از یک مدل شرط است

در کلی‌ترین حالت مدل شرط یک رابطه‌ی غیرخطی بین مشاهدات است $\underline{f}(\underline{l}) = \underline{c}$ (24)
در این صورت مدل شرط را مدل شرط غیرخطی می‌گویند. در حالت خاص ممکن است معادلات یا روابط هندسی بین مشاهدات یک رابطه‌ی خطی باشد در این صورت مدل شرط را مدل شرط خطی می‌گویند.

$$\underline{B}\,\underline{l} = \underline{c}$$ مدل شرط غیرخطی (25)

در رابطه‌ی (25) ماتریس $\underline{B}$ ماتریس مقادیر معلوم است که رابطه‌ی خطی بین مشاهدات (مؤلفه‌های بردار $\underline{l}$) را تعیین می‌کند و $\underline{c}$ بردار مقادیر ثابت است.

به عنوان مثال در رابطه‌ی (23)

$$\underline{l} = [\Delta H_{AB}, \Delta H_{BC}, \Delta H_{CA}]^T$$

$$\underline{c} = \underline{0}$$

$$\underline{B} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

در یک پیمایش متشکل از اندازه‌گیری‌های طول و زاویه شروط هندسی بین مشاهدات عبارت است از
ها

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \cos G_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^{n} l_i \sin G_i = 0 \quad (26)$$

روابط (26) نمونه‌ای از یک مدل شرط غیرخطی است.

دستگاه معادلات $\underline{B}\,\underline{l} = \underline{c}$ (شروط هندسی بین مشاهدات) به دلیل وجود خطاهای اتفاقی همواره یک دستگاه معادلات ناسازگار است. برای تبدیل این دستگاه به دستگاه معادلات سازگار مشاهدات مورد نظر را نسبت به خطاهای اتفاقی مشاهدات تصحیح می‌کنیم.

$$\underline{B}(\underline{l} + \underline{v}) = \underline{c} \quad (27)$$

$$\underline{B}\,\underline{l} + \underline{B}\,\underline{v} = \underline{c}$$

$$\underline{B}\,\underline{v} + \underline{B}\,\underline{l} - \underline{c} = 0$$

$$\underset{df\times n}{\underline{B}}\,\underset{n\times 1}{\underline{v}} + \underset{df\times 1}{\underline{w}} = 0 \qquad \underline{w} = \underline{B}\,\underline{l} - \underline{c} \quad (28) \qquad df < n$$

بردار $\underline{w}$ در رابطه‌ی (28) بردار خطای بست (mis clouser) معروف است که به بردار ناسازگاری
شروط هندسی بین مشاهدات از طریق تصحیح مشاهدات نسبت به خطاهای اتفاقی جبران

باعث افزودن تعداد n پارامتر مجهول به دستگاه معادلات خواهد شد. درحالی که همواره تعداد شرایط هندسی مستقل بین مشاهدات کمتر از درجه آزادی شبکه است. بنابراین برای رسیدن به جواب منحصر به فرد برای دستگاه معادلات (28) از شرط کمترین مربعات استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w} = 0 \\ \underline{v}^T \underline{P}\,\underline{v} = \min \end{cases} \quad (29)$$

برای حل این دستگاه معادلات از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\phi = \underline{v}^T \underline{P}\,\underline{v} + 2\underline{k}^T (\underline{B}\,\underline{v} + \underline{w})$$

در تابع اسکالر ϕ پارامترهای $\underline{v}$ و $\underline{k}$ پارامترهای مجهولند. بردار $\underline{k}$ را بردار ضرایب لاگرانژ می‌گویند

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{v}} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{k}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{v}} = \cancel{2}\underline{v}^T \underline{P} + \cancel{2}\underline{k}^T \underline{B} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{k}} = 2(\underline{B}\,\underline{v} + \underline{w})^T = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \underline{P}\,\underline{v} = -\underline{B}^T \underline{k} & (31\text{-}1) \\ \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w} = 0 & (31\text{-}2) \end{cases}$$

چون $\underline{P}$ از رتبه کامل برخوردار است:

$$\underline{v} = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{k} \quad (32)$$

از جایگذاری رابطه (32) در رابطه (31-2)

$$\underbrace{-\underset{df\times n}{\underline{B}}\;\underset{n\times n}{\underline{P}^{-1}}\;\underset{n\times df}{\underline{B}^T}}_{df\times df}\,\underline{k} + \underline{w} = 0 \quad (33)$$

با فرض اینکه شرایط هندسی بین مشاهدات مستقل از هم باشند:

$$\underline{k} = (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{w} \quad (34)$$

با جایگذاری رابطه (34) در رابطه (32)

$$\boxed{\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{w}} \quad (35)$$

$\hat{l} = l + \hat{v}$

36

سرشکنی مدل شرط غیرخطی

از جلسه‌ی قبل دیدیم که جواب کمترین مربعات مدل شرط خطی با رابطه‌ی

$$\hat{v} = -P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}w$$

تعیین می‌شود. w بردار اختلاف بست $Bl - c = w$

همچنین دیدیم که در کلی‌ترین حالت، مدل شرط غیرخطی $f(l) = 0$ است

بنابراین مانند مدل پارامتریک غیرخطی برای پیدا کردن جواب کمترین مربعات مدل شرط غیرخطی ابتدا با استفاده از مقادیر اولیه‌ای برای مشاهدات این مدل را به صورت مدل خطی تبدیل می‌کنیم

$$f(l) = \underbrace{f(l^0)}_{w} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{l=l^0}}_{=B}(l - l^0) + \dots$$

$$f(l) = f(l^0) + B\underbrace{(l - l^0)}_{=v}$$

$$Bv + \underbrace{f(l^0)}_{=w} = f(l) = 0$$

$$Bv + w = 0$$

بنابراین روند انجام محاسبات در سرشکنی مدل شرط غیرخطی کاملاً مشابه با روند انجام محاسبات در مدل پارامتریک غیرخطی است. در ادامه قدم ماتریس های کواریانس کمیت های حاصل از سرشکنی مدل شرطی:

ماتریس های کواریانس کمیت های حاصل از سرشکنی مدل شرط

الف) ماتریس واریانس کواریانس بردار اختلاف بست

$$\underline{w} = \underline{B}\,\underline{l} - \underline{c} \rightarrow$$ برای انتشار ثابت

با استفاده از قانون انتشار خطاها:

$$\underline{C}_w = \left[\frac{d\underline{w}}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_l \left[\frac{d\underline{w}}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\underline{C}_w = (\underline{B} - 0)\,\underline{C}_l\,(\underline{B} - 0)^T$$

$$\boxed{\underline{C}_w = \underline{B}\,\underline{C}_l\,\underline{B}^T} \quad (1)$$

ب) ماتریس واریانس کوواریانس برای باقیمانده‌ها

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\,P^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{w}$$

با استفاده از قانون انتشار خطاها

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[\frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{w}}\right] \underline{C}_w \left[\frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{w}}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[-\underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\right] \underline{C}_W \left[-P^{-1}B^T(B\,P^{-1}B^T)^{-1}\right]^T$$

$$P = Q^{-1} = \sigma^2 \underline{C}_l^{-1}$$

از جایگذاری $\underline{C}_w$ از رابطه (1)

$$\underline{P}^{-1} = \underline{Q} = \sigma^{-2}\underline{C}_l$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[\cancel{\sigma^{2}}\,\underline{C}_l\,B^T(\underbrace{B\,\cancel{\sigma^{2}}\,\underline{C}_l\,B^T)^{-1}\right](\underline{B}\,\underline{C}_l\,B^T)}_{=\underline{I}}\left[(B\,\cancel{\sigma^{2}}\,\underline{C}_l\,B^T)^{-1}\underline{B}\,\cancel{\sigma^{2}}\,\underline{C}_l\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{C}_{\hat{v}} &= \underline{C}_l\,B^T(\underline{B}\,\underline{C}_l\,B^T)^{-1}\underline{B}\,\underline{C}_l \\ \underline{C}_{\hat{v}} &= \underline{C}_l\,B^T\,\underline{C}_W^{-1}\,\underline{B}\,\underline{C}_l\end{aligned}} \quad (2)$$

پ) ماتریس واریانس کواریانس بردار $\hat{\underline{l}}$

$$\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \hat{\underline{v}}$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \left[\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_l \left[\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}} = \frac{d}{d\underline{l}}\left[\underline{l} + \hat{\underline{v}}\right] = \underline{I} + \frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{l}} \quad (3)$$

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}(\underline{B}\underline{l} - \underline{c})$$

$$\frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{l}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{B} \quad (4)$$

از روابط (3) و (4) :

$$\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}} = \underline{I} - \underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}$$

بنابراین

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \left[\underline{I} - \underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\right] \underline{C}_l \left[\underline{I} - \underline{P}^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \left[\underline{C}_l - \cancel{\sigma^2}\underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\cancel{\sigma^2}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l\right]\left[\underline{I} - \cancel{\sigma^2}\underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\cancel{\sigma^2}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\right]^T$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \left[\underline{C}_l - \underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l\right]\left[\underline{I} - \underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l\right]$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{C}_l - \underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l - \underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l$$

$$+ \underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underbrace{\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}}_{=\underline{I}}\underline{B}\underline{C}_l$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{C}_l - 2\underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l + \underline{C}_l\underline{B}^T\cancel{(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}}\underline{B}\underline{C}_l$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{C}_l - \underbrace{\underline{C}_l\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_l\underline{B}^T)^{-1}\underline{B}\underline{C}_l}_{=\underline{C}_{\hat{v}}} \quad (5)$$

Subject:
Date: . . No:

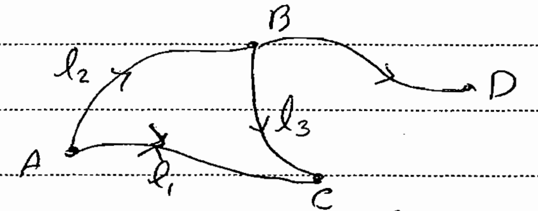
$$\boxed{C_{\hat{l}} = C_l - C_{\hat{v}}}$$ (5)

مثال: شبکه ترازیابی شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شبکه اختلاف ارتفاع های

$l_1 = 4\,m$, $l_2 = 2\,m$, $l_3 = -6.3\,m$, $l_4 = 5\,m$

اندازه گیری شده است. با فرض اینکه مشاهدات ناهمبسته و از دقت یکسان برخوردار باشند

ارتفاع نقطه D از این شبکه را محاسبه کنید.



در این شبکه ارتفاع نقطه A معلوم و صفر فرض می شود

روش پارامتریک

$$
\begin{aligned}
l_1 &= h_C - \cancel{h_A}^{\,0} \\
l_2 &= h_B - \cancel{h_A}^{\,0} \\
l_3 &= h_C - h_B \\
l_4 &= h_D - h_B
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned} n &= 4 \\ u &= 3 \end{aligned}\right\} \; df = n - u = 1
$$

فقط یک معادله شرط مستقل می توانیم

بنویسیم در حلقه $\Sigma \Delta h = 0$

با توجه به اینکه در این شبکه یک حلقه داریم یک معادله شرط داریم

$l_1 + l_2 + l_3 = 0$ مدل شرطی با الگوی خطی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}}_{l} = 0 \qquad w = Bl - (C = 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6.3 \end{bmatrix} = -0.3\,m$$

چون دقت یکسان است ماتریس وزن همانی است

$$\hat{v} = -P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} w$$

$$P = \begin{bmatrix} \sigma^{-2} & & & \\ & \sigma^{-2} & & \\ & & \sigma^{-2} & \\ & & & \sigma^{-2} \end{bmatrix} = \sigma^{-2} I_{4\times4} = C_l^{-1} \Rightarrow C_l = \sigma^2 I$$

$$\hat{v} = -B^T (B\, B^T)^{-1} w$$

برای محاسبه ماتریس وزن

با داشتن مشاهدات ... را

محاسبه کنیم

$$\hat{v} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \times -0.3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \hat{\underline{v}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 2.1 \\ -6.2 \end{bmatrix}$$

l_4 هیچ ترازیابی سمت هیچ نقطه‌ای روی آن وجود ندارد بنابراین از این تعریف حذف می‌کنیم

$$\hat{h}_D = \hat{h}_A + \hat{l}_2 + \hat{l}_4 = 0 + 2.1 + 5 = 7.1\,m \Rightarrow \boxed{\hat{h}_D = 7.1\,m}$$

$$\sigma^2_{h_D} = \sigma^2_{h_A} + \sigma^2_{\hat{l}_2} + \sigma^2_{\hat{l}_4} = 0 + 2/3 + 1 = 5/3 \Rightarrow \sigma_{h_D} = \sqrt{5/3}\,m$$

کوفاکتورها را استخراج کنیم

$$\underline{Q}_{\hat{l}} = \underline{Q}_l - \underline{C}_{\hat{v}}$$

$$\underline{Q}_{\hat{v}} = \underline{Q}_l \underline{B}^T (\underline{B}\,\underline{Q}_l \underline{B}^T)^{-1} \underline{B}\,\underline{Q}_l$$

$$\underline{Q}_{\hat{v}} = \underline{B}^T (\underline{B}\,\underline{B}^T)^{-1} \underline{B} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$$

$$\underline{Q}_{\hat{l}} = \underline{I} - \underline{Q}_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$h_{AB} = \sum \Delta h_i \qquad \sigma^2_{h_{AB}} = \sum \sigma_{\Delta H_i}$$

می‌توانند اختلاف ارتفاع‌ها با هم همبسته باشند :

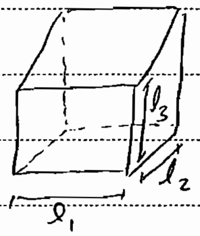
$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \vdots \\ \Delta h_n \end{bmatrix} \qquad \underline{C}_l = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\Delta H_1} & \sigma_{\Delta H_1 \Delta H_2} & \cdots & \sigma_{\Delta H_1 \Delta H_n} \\ & \sigma^2_{\Delta H_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2_{\Delta h_n} \end{bmatrix}$$

$$h = \sum \Delta h_i = [\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots}_{n \text{ مرتبه}}]\,\underline{l} = \underline{A}\,\underline{l}$$

$$\underbrace{\underline{C}_{\Delta H_{AB}}}_{1\times 1 \to \sigma^2_{\Delta h_{AB}}} = \underline{A}\,\underline{C}_l\,\underline{A}^T = [1 \; \cdots \; 1] \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

به عنوان تمرین این روابط با پارامتریک حل و جواب آن با مدل شرطی حل شود

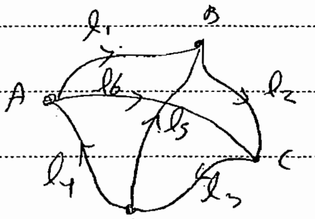
مثال: در مکعب شکل زیر سه ضلع مکعب را داشته اند اندازه گیری شده اند
مدل ریاضی شرط سنجی مشاهدات انجام شده را بنویسید.



چون مکعب است $\quad l_1 = l_2$

$l_2 = l_3$

$$\begin{cases} l_1 - l_2 = 0 \\ l_2 - l_3 = 0 \end{cases}$$



A نقطه‌ای با ارتفاع معلوم مدل شرطی می‌شود

مستقل $\quad l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 0 \quad (1)$

$l_1 + l_2 - l_6 = 0 \quad (2)$

شکل با سه‌بعدی $\quad l_3 + \cancel{l_4} + l_6 = 0 \Rightarrow$ از ترکیب (1) و (2) بدست آمده است

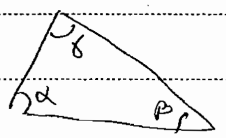
چون B وابسته می‌شود دیگر نمی‌نویسیم

$l_2 + l_5 + l_3 = 0 \quad (3)$

$$\left.\begin{matrix} u = 3 \\ n = 6 \end{matrix}\right\} df = 3$$

$$\Rightarrow \underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_6 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{array}{cccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = -P^{-1} \underline{B}^T (\underline{B} P^{-1} B^T)^{-1} \underline{w}$$

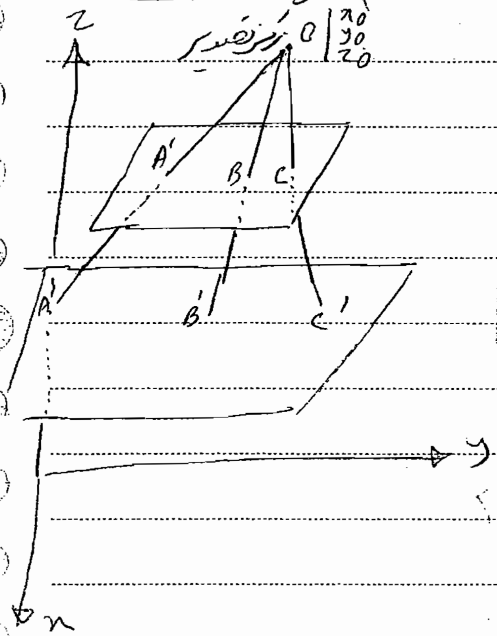


$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}}_{C}$$

فرم کلی مدل ترکیبی:

از درس فتوگرامتری معادلات شرط هم‌خطی ترکیبی از نوع مدل ریاضی به صورت $\underline{f}(\underline{x},\underline{l})=\underline{0}$ است. این نوع از مدل ریاضی به مدل ترکیبی (combined model) معروف است.



$$\begin{cases} \dfrac{x_0 - x_A}{x'_A - x_A} = \dfrac{y_0 - y_A}{y_{A'} - y_A} \\[2ex] \dfrac{x_0 - x_A}{x_{A'} - x_A} = \dfrac{z_0 - z_A}{z_{A'} - z_A} \end{cases}$$

معادله شعاع نور OAA'

$$\begin{cases} \dfrac{x_0 - x_B}{x_{B'} - x_B} = \dfrac{y_0 - y_B}{y_{B'} - y_B} \\[2ex] \dfrac{x_0 - x_B}{x_{B'} - x_B} = \dfrac{z_0 - z_B}{z_{B'} - z_B} \end{cases}$$

معادلات شعاع نور OBB'

$m=6$ تعداد معادلات

$u=3$ تعداد مجهولات

$\underline{x}=[x_0, y_0, z_0]^T$ بردار مجهولات

$$\begin{cases} \dfrac{x_0 - x_C}{x_{C'} - x_C} = \dfrac{y_0 - y_C}{y_{C'} - y_C} \\[2ex] \dfrac{x_0 - x_C}{x_{C'} - x_C} = \dfrac{z_0 - z_C}{z_{C'} - z_C} \end{cases}$$

معادلات شعاع نور OCC'

$$\underset{18\times 1}{\underline{l}} = [x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, x_{A'}, y_{A'}, z_{A'}, x_{B'}, y_{B'}, z_{B'}, x_{C'}, y_{C'}, z_{C'}]^T \qquad n=18$$

به دلیل تعداد خیلی زیاد مشاهدات نسبت به مجهولات در مسائلی از این نوع این امکان که هر مشاهده به طور صریح بر حسب مجهولات فرموله گردد وجود ندارد. به عبارت دیگر غالباً در مسائلی از این نوع امکان تبدیل مدل ضمنی $\underline{f}(\underline{x},\underline{l})=\underline{0}$ به مدل صریح $\underline{l}=\underline{f}(\underline{x})$ وجود ندارد.

در فرم کلی مدل ترکیبی همواره $m \geq u$ است. از طرفی همانگونه که این مثال نشان می‌دهد همواره

$\underline{f}(\underline{x},\underline{l})=0$ در حالت کلی تابع ضمنی . $m<n+u$ بنابراین $m<n$ است
نه تنها یک تابع خطی نیست . بنابراین برای رسیدن به جواب بهترین جواب این مدل اولین
قدم خطی کردن مدل ریاضی است

$$\underline{f}(\underline{x},\underline{l})=\underline{f}(\underline{x}^{\circ},\underline{l}^{\circ})+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}^{\circ}\\ \underline{l}=\underline{l}^{\circ}}}}_{\underline{A}}(\underline{x}-\underline{x}^{\circ})+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}^{\circ}\\ \underline{l}=\underline{l}^{\circ}}}}_{\underline{B}}(\underline{l}-\underline{l}^{\circ})+\text{ترم‌های مرتبه بالا}$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\underline{A}\underbrace{(\underline{x}-\underline{x}^{\circ})}_{\underline{\delta}}+\underline{B}\underbrace{(\underline{l}-\underline{l}^{\circ})}_{\underline{V}}+\underbrace{\underline{f}(\underline{x}^{\circ},\underline{l}^{\circ})-\underline{f}(\underline{x},\underline{l})}_{\underline{w}}=0$$

بنابراین :

$$\underset{m\times u}{\underline{A}}\,\underset{u\times 1}{\underline{\delta}}+\underset{m\times n}{\underline{B}}\,\underset{n\times 1}{\underline{V}}+\underset{m\times 1}{\underline{W}}=0$$

در رابطه‌ی فوق $\underline{w}$ بردار اصلاح [illegible] است ، $\underline{V}$ بردار تصحیحات یا بردار باقیمانده‌ها و $\underline{\delta}$ بردار تصحیحات مجهولات است . تعداد مجهولات در این رابطه $n+u$ ، تعداد معادلات m همچنین نشان دادیم که $m<n+u$ بنابراین دستگاه معادلات خطی فوق یک دستگاه معادلات under-determind است . برای رسیدن به جواب منحصر به فرد برای این دستگاه معادلات از شرط بهترین جواب استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases}\underline{A}\,\underline{\delta}+\underline{B}\,\underline{V}+\underline{W}=0\\ \underline{V}^T P\,\underline{V}=\min\end{cases}$$

حال برای حل دستگاه معادلات خطی فوق از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم

$$\phi=\underline{V}^T P\,\underline{V}+2\underline{k}^T(\underline{A}\,\underline{\delta}+\underline{B}\,\underline{V}+\underline{w})$$

در این تابع اسکالر مجهولات شامل بردارهای : $\underline{V}$ ، k (بردار ضرایب لاگرانژ) و δ است

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial\underline{V}}=0\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial\underline{\delta}}=0\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial\underline{k}}=0\end{cases}$$

Subject
Date   No.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{v}} = \cancel{2}\,\underline{v}^T \underline{P} + 2\underline{k}^T \underline{B} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{\delta}} = \cancel{2}\,\underline{k}^T \underline{A} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{k}} = \cancel{2}\,(\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w})^T \end{cases}$$

با ترانسپوز گرفتن از طرفین داریم

$$\begin{cases} \underline{P}\,\underline{v} + \underline{B}^T \underline{k} = 0 \\ \underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w} = 0 \\ \underline{A}^T \underline{k} = 0 \end{cases}$$

از رابطه‌ی اول :

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{k}$$

با جایگذاری این نتیجه در رابطه‌ی دوم از دستگاه معادلات فوق:

$$\underline{A}\,\underline{\delta} - \underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T \underline{k} + \underline{w} = 0$$

از رابطه‌ی فوق

$$\hat{\underline{k}} = (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}(\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w})$$

داریم

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1}(\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w}) \quad \text{I}$$

همچنین می‌دانیم که باید شرط $\underline{A}^T \underline{k} = 0$ برقرار باشد

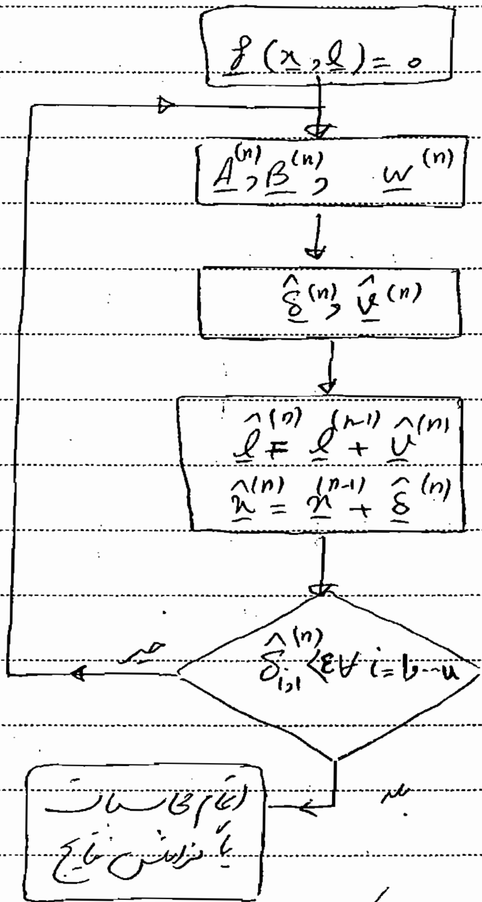
$$\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w}) = 0$$

$$\left[\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1} \underline{A}\right] \underline{\delta} + \underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1} \underline{w} = 0$$

$$\hat{\underline{\delta}} = -\left[\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1} \underline{A}\right]^{-1} \underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^T)^{-1} \underline{w} \quad \text{II}$$

POUYAN

غیرخطی بودن این مدل ریاضی ایجاب می‌کند با جواب‌های اولیه فرآیند حل تکرار شده و معادلات
و با استفاده از تعریف مقادیر مجاز برای اختلاف بین جواب‌های با جواب هر مرحله مرحله آخر محاسبات
با حل دوری قبل تعیین شود. مراحل این محاسبات در شکل زیر نمایش داده شده است.



ماتریس‌های کوواریانس کمیت‌های حاصل از برازش مدل ترکیبی

الف) ماتریس کوواریانس بردار اختلاف بست ($\underline{w}$)

$$\underline{w} = \underline{f}(\underline{x}^{\circ}, \underline{l}^{\circ}) - \underline{f}(\underline{x}, \underline{l})$$

$$\underline{C}_w = \left[\frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{l}}\right] \underline{C}_l \left[\frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{l}}\right]^T$$

$$C_w = (-B)\, C_l\, (-B)^T$$

$$\boxed{C_w = B\, C_l\, B^T}$$ (3)

ب) ماتریس کوواریانس بردار $\hat{\delta}$:

$$C_{\hat{\delta}} = \left[\frac{\partial \hat{\delta}}{\partial w}\right] C_w \left[\frac{\partial \hat{\delta}}{\partial w}\right]^T$$

$$C_{\hat{\delta}} = \left\{-\left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1} A^T (B P^{-1} B^T)^{-1}\right\} C_w$$
$$\left\{-\left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1} A^T (B P^{-1} B^T)^{-1}\right\}^T$$

$$C_{\hat{\delta}} = \left\{\left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1} A^T \underbrace{(B P^{-1} B^T)^{-1} (B C_l B^T)}_{I}\right\} \times$$
$$\left\{(B P^{-1} B^T)^{-1} A \left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1}\right\}$$

$$C_{\hat{\delta}} = \left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1} \underbrace{A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A \left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1}}_{=I}$$

$$C_{\hat{\delta}} = \left[A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A\right]^{-1}$$

$$\boxed{C_{\hat{\delta}} = \left(A^T C_w^{-1} A\right)^{-1}}$$ (4)

پ) ماتریس کوواریانس بردار مجهولات ($\hat{x}$)

$$\hat{x} = x^0 + \hat{\delta}$$

$$C_{\hat{x}} = \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\delta}}\right) C_{\hat{\delta}} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\delta}}\right)^T$$

Subject:
Date: No.

$$\underline{C}_{\hat{x}} = (0 + \underline{I})\, \underline{C}_{\hat{\delta}}\, (0 + \underline{I})^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{x}} = \underline{C}_{\hat{\delta}}}$$

ث) ماتریس واریانس کوواریانس برای باقیمانده‌ها ($\hat{\underline{v}}$)

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T (\underline{B}\, \underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}\, \hat{\underline{\delta}} + \underline{w})$$

نامعلوم است

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{C}_{l}\, \underline{B}^T (\underline{B}\, \underline{C}_{l}\, \underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}\, \hat{\underline{\delta}} + \underline{w})$$

$$\underline{C}_{\hat{v}} = \left[\frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_{l} \left[\frac{d\hat{\underline{v}}}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{v}} = \underline{C}_{l}\, \underline{B}^T \underline{C}_{w}^{-1} (\underline{I} - \underline{A}\, \underline{C}_{\hat{\delta}}\, \underline{A}^T \underline{C}_{w}^{-1})\, \underline{B}\, \underline{C}_{l}} \quad (6)$$

ج) ماتریس واریانس کوواریانس برآورد بردار مشاهدات ($\hat{\underline{l}}$)

$$\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \hat{\underline{v}}$$

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \left[\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}}\right] \underline{C}_{l} \left[\frac{d\hat{\underline{l}}}{d\underline{l}}\right]^T$$

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{C}_{l} - \underline{C}_{\hat{v}}} \quad (7)$$

در صورتیکه ضریب واریانس ماتریس کوواریانس به درستی انتخاب نشده باشد (در مواردی که ضریب واریانس ماتریس وزن معلوم نیست) با استفاده از برآورد نااریب

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\underline{v}}^T \underline{Q}^{-1} \hat{\underline{v}}}{df}$$

در روابط زیر می‌توان به برآوردی نااریب از ماتریس‌های کوواریانس رسید

$$\hat{\underline{C}}_w = \hat{\sigma}_0^2 \, \underline{B} \, \underline{Q} \, \underline{B}^T$$

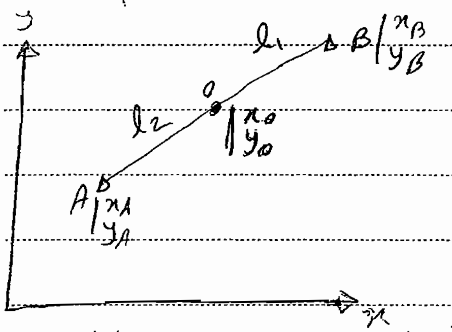
$$\hat{\underline{C}}_{\hat{\delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \left[\underline{A}^T (\underline{B}\underline{Q}\underline{B}^T)^{-1} \underline{A} \right]^{-1}$$

$$\hat{\underline{C}}_{\hat{x}} = \hat{\underline{C}}_{\hat{\delta}} \quad , \quad \hat{\underline{C}}_{\hat{l}} = \hat{\underline{C}}_l - \hat{\underline{C}}_{\hat{v}}$$

$$\hat{\underline{C}}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \, \underline{C}_{\hat{v}}$$

σ^2 همان ماتریس وزن ماست ولی چون در شرایط بیرونی
اندازه‌گیری شده با دقت آن در شرایط آزمایشگاهی متفاوت است پس باید از روابط بالا
استفاده کنیم یعنی σ^2 را در نظر می‌گیریم و $\hat{\sigma}^2$ را بدست می‌آوریم اگر اختلاف داشت باید
از روابط بالا استفاده کنیم

مشکلی حل ترکیبی به همراه کنسترینت‌های مجهولات (Constraint)



در برخی از مسائل برقراری شرطی خاص بین مجهولات
یک رابطه برقرار است. به این شروط اصطلاحاً
کانسترینت‌های مجهولات گفته می‌شود. به عنوان مثال
در شکل مقابل هدف برآورد کردن مختصات
O است. با توجه به این موضوع در سه نقطه‌ی A و B (نقاط معلوم هستند) و O (نقطه‌ی مجهول)
در امتداد یک خط راست واقع اند

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(x_o - x_B)^2 + (y_o - y_B)^2} \\ l_2 = \sqrt{(x_o - x_A)^2 + (y_o - y_A)^2} \\ y_o = a * x_o + b \end{cases}$$

از شرط هم‌راستایی سه نقطه A ، B و O صرف‌نظر می‌کنیم

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x_0} & \frac{\partial l_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial l_2}{\partial x_0} & \frac{\partial l_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x_0 - x_B}{l_1} & \frac{y_0 - y_B}{l_1} \\ \frac{x_0 - x_A}{l_2} & \frac{y_0 - y_A}{l_2} \end{bmatrix}$$

چون هم‌راستایی سه نقطه‌ی A و B و O ایجاب می‌کند:

$$\frac{x_0 - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_0 - y_A}{y_B - y_A} = k$$

$$x_0 - x_A = k\,(x_B - x_A)$$

$$y_0 - y_A = k\,(y_B - y_A)$$

$$\frac{x_0 - x_B}{A - x_B} = \frac{y_0 - y_A}{y_A - y_B}.$$

$$x_0 - x_B = k\,(x_A - x_B)$$

$$y_0 - y_B = k\,(y_A - y_B)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{k(x_A - x_B)}{l_1} & \frac{k(y_A - y_B)}{l_2} \\ \frac{k(x_B - x_A)}{l_2} & \frac{k(y_B - y_A)}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$A(2,:) = -A(1,:) \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

این رابطه نشان می‌دهد که صرف‌نظر کردن از شرط هم‌راستایی سه نقطه‌ی A و B و O منجر به رسیدن به ماتریس طراحی می‌شود که از کمبود مرتبه برخوردار است

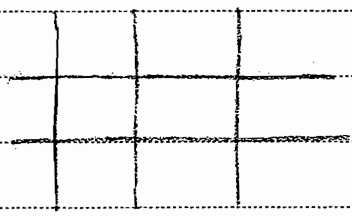
به این ترتیب با اضافه کردن شرط $y_0 = a x_0 + b$ بردار مجهولات به $\underline{x} = [x_0]$ تقلیل می‌یابد

Subject:
Date: No.

x, y

$x + y = 0$

$x, y = 0$



POLYAN

subject:
Year: Month: Date: ( )

سرشکنی پارامتریک تحمیل قیود

همانگونه که گفتیم در صورت وجود قیودی بین مجهولات یک مدل ریاضی و عدم منظور کردن آن در مدل ماتریس ضرایب و به دنبال آن ماتریس نرمال کمبود رتبه خواهد داشت بنابراین چنانچه قیودی بین مجهولات یک مدل ریاضی در سرشکنی خطاهای اتفاقی مشاهدات مربوطه وجود داشته باشد بایست حتماً این قیود در نظر گرفته شوند. در این شرایط مدل ریاضی سرشکنی خطاهای اتفاقی مشاهدات به صورت

$$\begin{cases} f(\underline{x}, \underline{l}) = 0 \\ g(\underline{x}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

دستگاه معادلات (1) می‌تواند در حالت کلی یک دستگاه معادلات غیرخطی است بنابراین اولین قدم در حل این دستگاه معادلات تبدیل آن به یک دستگاه معادلات خطی است

$$\begin{cases} \underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}\underline{v} + \underline{w}_1 = 0 \\ \underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

برای رسیدن به جواب منحصر به فرد برای دستگاه معادلات خطی (2) از شرط کمترین مربعات استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} \underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}\underline{v} + \underline{w}_1 = 0 \\ \underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2 = 0 \\ \underline{v}^T \underline{P} \underline{v} = \min \end{cases} \quad (3)$$

محاسبه‌ی پارامترهای مجهول دستگاه معادلات (3) را همچنان تعیین می‌کنیم که جواب این دستگاه معادلات یک نقطه‌ی min برای تابع اسکالر زیر باشد

$$\Phi = \underline{v}^T \underline{P} \underline{v} + 2\underline{k}_1^T (\underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}\underline{v} + \underline{w}_1) + 2\underline{k}_2^T (\underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2) \quad (4)$$

در رابطه (4) $\underline{k}_1$ و $\underline{k}_2$ بردارهای مجهولی هستند که به بردارهای ضرایب لاگرانژ موسومند

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \underline{v}} = 2\underline{v}^T \underline{P} + 2\underline{k}_1^T \underline{B} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \underline{\delta}} = 2\underline{k}_1^T \underline{A}_1 + 2\underline{k}_2^T \underline{A}_2 = 0 \quad (5) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \underline{k}_1} = 2(\underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}\underline{v} + \underline{w}_1)^T = 0 \end{cases}$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = \cancel{2}(\underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2)^T = 0$$

در ادامه دستگاه معادلات (5) را ساده‌تر و بردارهای مجهول $\underline{\delta}$, $\underline{v}$, $\underline{k}_1$, $\underline{k}_2$ را از آن محاسبه می‌کنیم.

معکوس پذیر

$$\begin{cases} \overset{\nearrow}{\underline{P}}\,\underline{v} + \underline{B}^T \underline{k}_1 = 0 \\ \underline{A}_1^T \underline{k}_1 + \underline{A}_2^T \underline{k}_2 = 0 \\ \underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w}_1 = 0 \\ \underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(6.1) \Longrightarrow \underline{v} = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T \underline{k}_1 \quad (7)$$

از ترکیب روابط (7) و (6.3):

$$\underline{A}_1 \underline{\delta} - \overbrace{\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T}^{\text{ماتریس معکوس پذیر}} \underline{k}_1 + \underline{w}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k}_1 = (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{w}_1) \quad (8)$$

$$(8), (6.2) \Rightarrow \underline{A}_1^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{w}_1) + \underline{A}_2^T \underline{k}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \underline{A}_1^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} \underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{A}_2^T \underline{k}_2 + \underline{A}_1^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} \underline{w}_1 = 0 \\ \underline{A}_2 \underline{\delta} + \underline{w}_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

دستگاه معادلات (9) را به شکل ماتریسی به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A}_1^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} \underline{A}_1 & \underline{A}_2^T \\ \underline{A}_2 & 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{k}_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{\Delta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{A}_1^T (\underline{B}\,\underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} \underline{w}_1 \\ -\underline{w}_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{b}} \quad (10)$$

دستگاه معادلات (10) دستگاه معادلات نرمالی است که از حل آن می‌شود بردارهای مجهول $\underline{\delta}$ و $\underline{k}_2$ را تعیین کرد. پس از آن از ترتیب روابط (7) و (8) بردار تصحیحات $\underline{v}$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1}\underline{B}^{T}\left(\underline{B}\,\underline{P}^{-1}\underline{B}^{T}\right)^{-1}\left(\underline{A}_1\underline{\delta} + \underline{w}_1\right) \qquad (11)$$

$$\underline{x} = \underline{N}^{-1}\underline{b}$$

بدون اثبات می‌پذیریم که

$$\underline{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{R} & (\underline{A}_2\underline{A}_2^{T})^{-1}\underline{A}_2 \\ \underline{A}_2^{T}(\underline{A}_2\underline{A}_2^{T})^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{R} = \left(\underline{A}_1^{T}\underline{C}_{w_1}^{-1}\underline{A}_1\right)^{+}$$

یا

$$\underline{R} = \left[\underline{A}_1^{T}\underline{P}\,\underline{A}_1 + \underline{A}_2^{T}(\underline{A}_2\underline{A}_2^{T})^{-1}\underline{A}_2\right]^{-1}\left[\underline{I} - \underline{A}_2^{T}(\underline{A}_2\underline{A}_2^{T})^{-1}\underline{A}_2\right]$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{\delta}} = -\underline{R}\,\underline{A}_1^{T}\underline{C}_{w_1}^{-1}\underline{w}_1 - \underline{A}_2^{T}\underline{w}_2 \qquad (12)$$

روابط (11) و (12) جواب نهایی حاصل از سرشکنی خطاهای اتفاقی مشاهدات از یک مدل ریاضی همراه با شرط مجهولات را به دست می‌دهد.

سرشکنی همراه با پارامترهای وزن‌دار:

مسئله سرشکنی خطاهای اتفاقی مشاهدات با فرض در اختیار داشتن مقادیر اولیه برای تمام یا بخشی از مجهولات مدل ریاضی در کلی‌ترین حالت می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = 0 , & \underline{C}_l \\ \underline{l}_x = \underline{H}\underline{x} , & \underline{C}_x \end{cases} \qquad (13)$$

ماتریسی است هر عنصر از سطر آن ۰ یا ۱ است

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} \qquad \underline{l}_x=\begin{bmatrix}l_{x_3}\\l_{x_4}\\l_{x_5}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}}_{H}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

اضلاع داخل ←

$\underline{H}$: تعداد سطر برابر با تعداد عناصر l_x است

برای حل دستگاه معادلات (13) در اولین قدم این دستگاه را به دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنیم.

$$\underline{A}_1\underline{\delta}+\underline{B}_1\underline{v}_1+\underline{w}_1=\underline{0} \qquad (14)$$

مقادیر تقریبی شاخص — مقادیر تقریبی ثوابت در مدل ریاضی

$$\underline{l}_x-\underline{l}_x^{0}+\underline{l}_x^{0}-\underline{H}(\underline{x}-\underline{x}^{0}+\underline{x}^{0})=\underline{0}$$

$$\underline{l}_x-\underline{l}_x^{0}-\underline{H}(\underline{x}-\underline{x}^{0})+\underline{l}_x^{0}-\underline{H}\,\underline{x}^{0}=\underline{0}$$

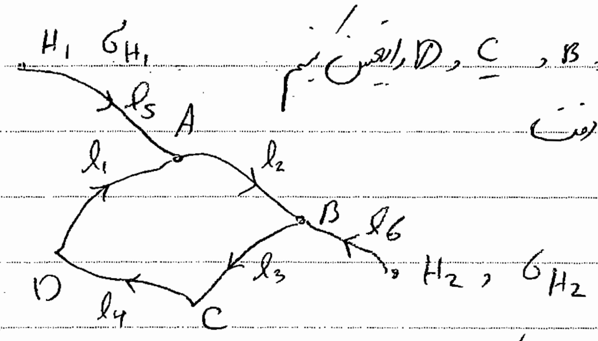
$$-\underline{H}\underbrace{(\underline{x}-\underline{x}^{0})}_{\underline{\delta}}+\underline{I}\underbrace{(\underline{l}_x-\underline{l}_x^{0})}_{\underline{v}_2}+\underbrace{\underline{l}_x^{0}-\underline{H}\,\underline{x}^{0}}_{\underline{w}_2} \qquad (15)$$

از ترکیب روابط (14) و (15) فرم خطی دستگاه معادلات (13) بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\underline{A}_1\underline{\delta}+\underline{B}_1\underline{v}_1+\underline{w}_1=\underline{0}\\[4pt]-\underline{H}\,\underline{\delta}+\underline{I}\,\underline{v}_2+\underline{w}_2=\underline{0}\end{cases} \qquad (16)$$

برای رسیدن به جواب منحصر به فرد برای دستگاه معادلات (16) از شرط کمترین مربعات استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases}\underline{A}_1\underline{\delta}+\underline{B}_1\underline{v}_1+\underline{w}_1=\underline{0}\\-\underline{H}\,\underline{\delta}+\underline{I}\,\underline{v}_2+\underline{w}_2=\underline{0}\\\underline{v}_1^T\underline{P}_l\underline{v}_1+\underline{v}_2^T\underline{P}_x\underline{v}_2=\min\end{cases} \qquad (17)$$



مثال: فرض می‌کنیم می‌خواهیم در یک شبکه ترازیابی ارتفاع ۴ نقطه‌ی A، B، C و D را تعیین کنیم که ما یک سری نقاط ترازیابی کشوری H_1 و H_2 داریم که دقت آن‌ها σ_{H_1} و σ_{H_2} معلوم است.

فرض می‌کنیم دقت ترازیابی‌های ما از H_2 و H_1 کمتر باشد پس می‌توانیم از وزن دادن H_1 و H_2 به شکل دقت خودشان استفاده کنیم.

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_6 \end{bmatrix} \qquad \underline{l}_x = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{C}_{l_x} = \begin{bmatrix} \sigma_{H_1}^{2} & 0 \\ 0 & \sigma_{H_2}^{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

برای رسیدن به حل کمترین مربعات دستگاه معادلات (17) دو معادله‌ی (17.1) و (17,2) را به صورت زیر با هم ترکیب می‌کنیم.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ -\underline{H} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{\delta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & +\underline{I} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{w}} = \underline{0}$$

$$\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w} = 0 \qquad (18)$$

اکنون به جای حل مسئله کمترین مربعات دستگاه معادلات (17) دستگاه معادلات جدید (18) را با شرط کمترین مربعات حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{v} + \underline{w} = 0 \\ \underline{v}^T \underline{P}\,\underline{v} = \min \end{cases} \quad (19) \qquad P = \begin{bmatrix} \underline{P}_l & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{P}_x \end{bmatrix}$$

subject:
Year: Month: Date: ( )

می‌دانیم جواب این دستگاه معادلات از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\hat{\underline{\delta}} = -(\underline{A}^T \underline{C}_w^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_w^{-1} \underline{w}$$

$$\underline{C}_w = \underline{B}\, \underline{C}_l\, \underline{B}^T \quad , \quad \underline{C} = \underline{P}^{-1} \qquad (20)$$

$$\hat{\underline{v}} = -\underline{P}^{-1} \underline{B}^T (\underline{B}\, \underline{P}^{-1} \underline{B}^T)^{-1} (\underline{A}\underline{\delta} + \underline{w})$$

$$\underline{C}_w = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_l & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_1^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_w = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \underline{C}_l & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_1^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_w = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \underline{C}_l \underline{B}_1^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{(\underline{B}_1 \underline{C}_l \underline{B}_1^T)^{-1}}_{\underline{C}_{w_1}^{-1}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{w_1}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\delta}} = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T & -\underline{H}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_{w_1}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ -\underline{H} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A}_1^T & -\underline{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_{w_1}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{l_x}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix}$$

PARSCO

$$\hat{\underline{\delta}} = \left\{ \left[\underline{A}_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \; - \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ -\underline{H} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left[\underline{A}_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \quad -\underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\delta}} = -\left(\underline{A}_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \underline{A}_1 + \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \underline{H} \right)^{-1} \left(\underline{A}_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \underline{w}_1 - \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \underline{W}_2 \right) \quad (22)$$

$$\hat{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{v}}_1 \\ \hat{\underline{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{C}_l \underline{B}_1^T (\underline{B}_1 \underline{C}_l \underline{B}_1^T)^{-1} (\underline{A}_1 \hat{\underline{\delta}} + \underline{w}_1) \\ \underline{H} \hat{\underline{\delta}} - \underline{w}_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\underline{C}_{\hat{\delta}} = (\underline{A}^T \underline{C}_w^{-1} \underline{A})^{-1} , \quad \underline{C}_{\hat{\delta}} = \underline{C}_{\hat{x}}$$

$$\underline{C}_{\hat{\delta}} = \left(\underline{A}_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \underline{A}_1 + \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \underline{H} \right)^{-1}$$

می‌توان ثابت کرد برآوردگر برآوردی نااریب از فاکتور واریانس ثانویه (پسینی) خطاهای اتفاقی مشاهدات در مدل‌های ریاضی ترکیبی با پارامترهای وزن‌دار است

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{v}_1^T \underline{P}_l \underline{v}_1 + \underline{v}_2^T \underline{P}_x \underline{v}_2}{m_1 + m_2 - u}$$

m_1: $\underline{f}(\underline{x}, \underline{l})$ تعداد معادلات در مدل

m_2: $\underline{l}_x = \underline{H}\,\underline{x}$ تعداد معادلات در مدل

در مدل ترکیبی

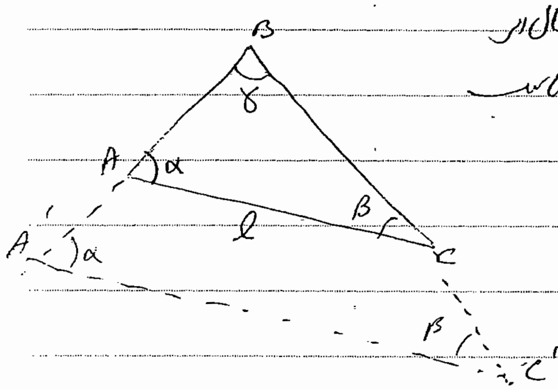
$$f(l) = \underbrace{f(l^0)}_{w} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{l_0}}_{B} \underbrace{(l - l^0)}_{v} =$$

۴

subject:
Year: Month: Date: ( )

سرشکنی با قیود داخلی (inner constraints)

اگر α و β و γ را تعیین کنیم مثلث شکل می‌شود حال اگر α و β و طول ضلع را اندازه‌گیری کنیم مثلث با مقیاس مناسب بدست می‌آید.

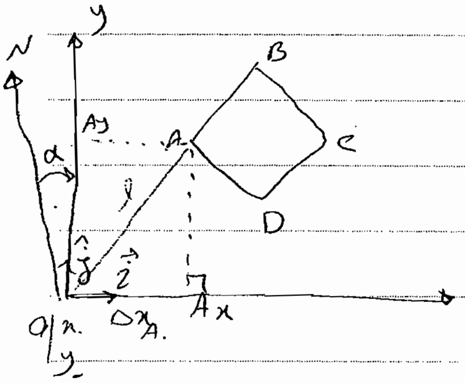


برای تعیین مختصات یک سیستم دو بعدی به پارامترهای زیر نیاز داریم

۱. مبدأ سیستم مختصات معلوم باشد (۲ پارامتر)

۲. محور y آن نسبت به امتداد ثابت و معلوم یک زاویه‌ای می‌سازد (۱ پارامتر)

۳. اگر بخواهیم طول بردارهای محورهای مختصات را با فاصله بین یک ... باید با کمک مختصات حساب کرد طول بردار Δx_A نسبت به مبدأ بدست می‌آید (۱ پارامتر با عنوان مقیاس بین آنها)

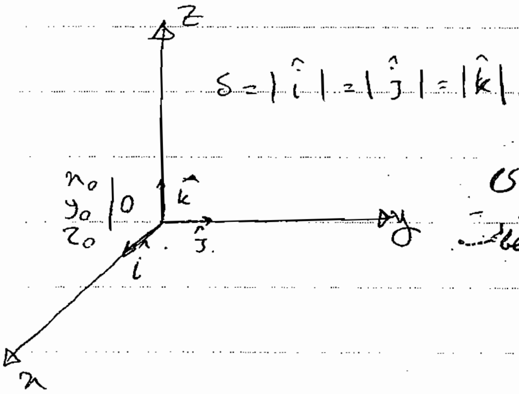


$$x_A = x_0 + \Delta x_{AO}$$
$$y_A = y_0 + \Delta y_{AO}$$

پس در کل شروط هندسی برای تعیین مختصات α ، x_0 و y_0 و $S = |\hat{i}| = |\hat{j}|$ ۴ پارامتر است که

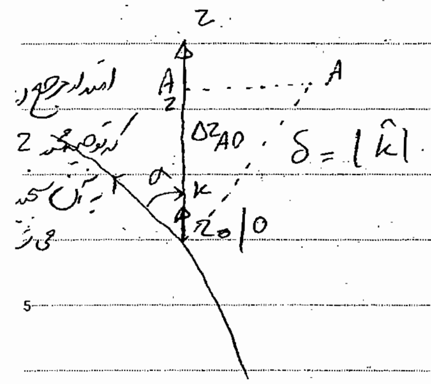
شروط هندسی مورد نیاز در حالت تعیین مختصات یک ناحیه دو بعدی

حال اگر فاصله OA معلوم باشد دیگر لازم نیست مقیاس را یکی بگیریم مشکل مقیاس را نداریم



دوران‌های محور مختصات α β γ ⇒ 7 پارامتر برای تثبیت شروط هندسی مورد نیاز در تعیین مختصات سه بعدی نقاط

PARSCO



3 پارامتر جزو دیتام است

$\delta = [\hat{k}]$

$Z_A = Z_0 + \Delta Z_{A0}$

در دیتام‌های ثابت یک امتداد جهت دستگاه را ترازی زمین کنیم α را نداریم
از طرفی اگر اختلاف ارتفاع را داشته باشیم می‌توانیم مقیاس را داشته باشیم

$\delta h = \hat{i}$ →

بنابراین مقیاس سیستم مختصات نداریم

در شبکه‌های ترازیابی عملاً تعداد شروط هندسی جزو دیتام در حل مسائل سرشکنی که در آن‌ها هدف پیدا کردن ارتفاع نقاط است یک شرط (اصطلاحاً معلوم بودن ارتفاع یک نقطه) پارامتر است.

در بعضی از مواقع تمام شروط هندسی در دست نیست برای این شبکه‌ها شبکه‌های آزاد گویند یعنی

شبکه‌های را که در آن‌ها به دلایل مختلف امکان تعیین تمام شروط هندسی جزو دیتام برای تعیین مختصات نقاط آن‌ها وجود ندارد شبکه‌های آزاد (free network) می‌گویند. در چنین شبکه‌هایی از روش سرشکنی inner (قیود داخلی) برای تعیین مختصات نقاط استفاده می‌شود. برای این کار شروط هندسی را که اندازه‌گیری‌های شبکه آن‌ها را تأمین نمی‌کند از طریق مجهولات اضافی در جبران می‌شود.

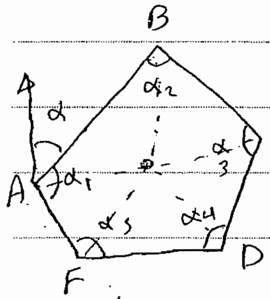
۱- مرکز ثقل شبکه را ثابت در نظر گیریم. با ثابت فرض کردن مرکز ثقل یک شبکه مشکل مبدأ سیستم مختصات در تعیین موقعیت نقاط شبکه حل می‌شود

۲- متوسط طول اضلاع نقاط مختلف شبکه از مرکز ثقل ثابت فرض می‌شود. این شرط در صورتی که هیچ فاصله‌ای در شبکه اندازه‌گیری نشده باشد مشکل مقیاس سیستم مختصات را حل می‌کند

۳- متوسط آزیموت (آزیمان) امتدادهای مختلفی که از نقاط مختلف شبکه به مرکز ثقل آن واصل می‌شود ثابت در نظر گرفته می‌شود. از این طریق مشکل توجیه سیستم مختصات شبکه در صورتی که هیچ آزیمان

subject:
Year: Month: Date: ( )

یا از طریق اندازه‌گیری شده باشد حل می‌شود.



در مسائل بر مشاهدات بر حسب مختصات نقاط فرمول‌بندی می‌شوند معلوم نبودن حرکت از پارامترهای تعیین‌کننده‌ی سیستم مختصات که موقعیت نقاط نسبت به آن‌ها تعیین می‌شود باعث ایجاد یک واحد کمبود رتبه در ماتریس A خواهد شد. بنابراین ترتیب ماتریس نرمال ماتریس کمبود رتبه داشته و برآورد مختصات نقاط از طریق معکوس این ماتریس (مثلاً در مدل پارامتریک از رابطه $\hat{x} = N^{-1} A^T P l$ امکان‌پذیر نیست. قیود داخلی مشکل کمبود رتبه‌ی ماتریس نرمال را در چنین شرایطی برطرف می‌کند.

کانسترینت‌های مجهولات جواب‌های بی‌شماری را به سمت تامین این روابط پاس می‌کند بنابراین هیچ‌گاه نباید بدون دلیل موجه از کانسترینت خاصی استفاده کرد یا به عبارت دیگر همیشه باید از حداقل کانسترینت‌های مورد نیاز در حل یک شبکه‌ی ژئودتیکی استفاده کرد. شبکه‌ی ژئودتیکی که با حداقل کانسترینت‌های مورد نیاز حل می‌شود اصطلاحاً (minimum constraints) و در مقابل وقتی یک شبکه‌ی ژئودتیکی با بیش از حداقل کانسترینت‌های مورد نیاز حل می‌شود اصطلاحاً (over constraints) می‌گویند.

$$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x}) \qquad \operatorname{rank}(\underset{n\times u}{\underline{A}}) < u$$

$$\delta \underline{l} = \underline{A}\, \delta \underline{x}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\begin{cases} x_G = cte \\ y_G = cte \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = cte \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = cte \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ d \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} dx_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} dy_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

یا به عبارتی دیگر

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = 0 \\ \sum \delta y_i = 0 \end{cases}$$

[illegible]

PARSCO

$\bar{\theta}_{G_i}$

$$\bar{\theta}_{G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_{Gi}}{n} = cte \Rightarrow \theta_{G_i} = \mathrm{tg}^{-1} \frac{x_i - x_G}{y_i - y_G}$$

متوسط آزیموت نقاط نسبت به ثقل

$$\Rightarrow \bar{\theta}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}^{-1} \frac{x_i - x_G}{y_i - y_G} = cte$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}^{-1} \frac{x_i - x_G}{y_i - y_G} = cte \Rightarrow d \sum \mathrm{tg}^{-1} \frac{x_i - x_G}{y_i - y_G} = 0 \qquad d\theta_{G_i} = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(dx_i - dx_G)(y_i - y_j) - (dy_i - dy_G)(x_i - x_G) / (y_i - y_G)^2}{1 + \left(\frac{x_i - x_G}{y_i - y_G}\right)^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(dx_i - dx_G)(y_i - y_j) - (dy_i - dy_G)(x_i - x_G)}{\underbrace{(y_i - y_G)^2 + (x_i - x_G)^2}_{= r_{G_i}^2}} = 0$$

شرط لازم برای برقراری رابطه ی فوق این است که

$$\sum \left[(dx_i - d\cancel{x_G})(y_i - y_G) - (dy_i - d\cancel{y_G})(x_i - x_G) \right] = 0$$

$$\sum \left[dx_i (y_i - y_G) - dy_i (x_i - x_G) \right] = 0$$

$$\sum \left(y_i dx_i - y_G dx_i - x_i dy_i + x_G dy_i \right) = 0$$

$$\sum (y_i dx_i - x_i dy_i) + \underbrace{\sum (x_G dy_i - y_G dx_i)}_{= x_G \sum \cancel{dy_i} - y_G \sum \cancel{dx_i} = 0} = 0$$

$$\sum (y_i dx_i - x_i dy_i) = 0 \quad (2)$$

Subject:
Date: No:

$$\bar{r}_G = \frac{\sum r_{Gi}}{n} = cte$$

$$\bar{r}_G = \frac{\sum \sqrt{\Delta x_{Gi}^2 + \Delta y_{Gi}^2}}{n} = cte$$

$$d\bar{r}_G = 0 \Rightarrow d\sum r_{Gi} = 0 \Rightarrow \sum dr_{Gi} = 0$$

$$r_{Gi} = \sqrt{\Delta x_{Gi}^2 + \Delta y_{Gi}^2} \Rightarrow dr_{Gi} = \frac{(dx_i - dx_G)(x_i - x_G) + (dy_i - dy_G)(y_i - y_G)}{r_{Gi} = \sqrt{(x_i - x_G)^2 + (y_i - y_G)^2}}$$

شرط لازم برای $\sum dr_{Gi} = 0$ این است که

$$\sum \left[(dx_i - dx_G)(x_i - x_G) + (dy_i - dy_G)(y_i - y_G) \right] = 0$$

$$\sum (x_i dx_i + y_i dy_i) = 0 \quad (3)$$

دستگاهی که از روبرو حل شود کافی است
به روش قیود داخلی حل شده است

$$\begin{cases} \underline{l} = \underline{f}(\underline{x}) \\ \sum dx_i = 0 \\ \sum dy_i = 0 \\ \sum (y_i dx_i - x_i dy_i) = 0 \\ \sum (y_i dy_i + x_i dx_i) = 0 \\ \underline{v}^T \underline{P} \underline{v} = \min \end{cases}$$

آزیموت — $\sum (y_i dx_i - x_i dy_i) = 0$
طول — $\sum (y_i dy_i + x_i dx_i) = 0$
مقیاس — $\underline{v}^T \underline{P} \underline{v} = \min$

آزمون های آماری و تعیین حدود اطمینان:

تکنیک های آماری در ارزیابی نتایج حاصل از یک سری محاسبات خاص به دو روش قابل انجام است:

۱- آمار پارامتریک: مبتنی بر فرضیاتی در خصوص تابع توزیع احتمال مشاهدات مربوط است

۲- روش های آمار غیرپارامتریک: هیچ فرضی در حدود تابع توزیع احتمال مشاهدات مربوط مطرح نیست

بنابراین از آنجا که مشاهدات از توزیع نرمال برخوردارند در ارزیابی نتایج حاصل از پراکندگی خطاهای اتفاقی مشاهدات ترجیح می دهیم تا از تکنیک های آمار پارامتریک استفاده کنیم

روش آزمون های آماری یکی از این دسته از تکنیک هاست.

فرضیه آماری: (Statistical Hypothesis)

یک فرضیه آماری عبارت است در خصوص تابع توزیع یا یکی از پارامترهای آن در یک جامعه آماری

مثال: فرض کنید طول یک ضلع را داریم که دقت آن برابر است با $\sigma_l = a^{mm} + b\ ppm$

انحراف معیار استاندارد آن برابر است با $S^2 =$ واریانس

بنابراین یک فرضیه آماری است.

هر فرضیه آماری مشتمل از دو بخش است:

الف) فرض صفر (Null Hypothesis)

ب) فرض مخالف (Alternative Hypothesis)

الف) فرض صفر: همان عبارتی در حدود تابع توزیع و یا پارامترهای از آن است که به دنبال بررسی درستی یا نادرستی آن هستیم

ب) فرض مخالف: هر فرضی که در مقابل یک فرض صفر در بررسی یک فرضیه‌ی آماری مطرح می‌شود فرض مخالف نامیده می‌شود

در مقابل هر فرض صفر یک احتمالات فرض مخالف مختلف قابل تصور است
در تئوری آزمون‌های فرض، فرض صفر را با H_0 نمایش می‌دهیم و فرض مخالف را با H_1

مثال: در یک ... فرضیه‌ی آماری هدف بررسی و آزمون این موضوع است که آیا برآورد $\bar{x}$ از میانگین μ از یک جامعه‌ی آماری تفاوت معنی‌داری با این میانگین دارد یا خیر

$$\begin{cases} H_0: \mu = \bar{x}, \alpha \\ H_1: \mu \neq \bar{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} H_0: \mu = \bar{x}, \alpha \\ H_1: \mu > \bar{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} H_0: \mu = \bar{x}, \alpha \\ H_1: \mu < \bar{x} \end{cases}$$

با توجه به اینکه در بررسی یک فرضیه‌ی آماری در عمل به جای یک جامعه‌ی اندازه‌گیری با نمونه‌ای با تعداد محدود (مشتمل از تعداد محدودی از اندازه‌گیری‌ها) سروکار داریم، نتیجه بررسی یک فرضیه‌ی آماری می‌تواند درست و یا نادرست باشد.

واقعیت / تصمیم	تأیید کنید	رد فرض صفر	
فرض صفر درست است	✓	—	به تصمیم‌گیری درست
	— $(1-\alpha)$	(α) ✓	به تصمیم‌گیری غلط (خطای نوع اول) type I error
فرض صفر غلط است	—	✓	به تصمیم‌گیری درست
	✓ (β)	— $(1-\beta)$	به تصمیم‌گیری غلط (خطای نوع دوم) type II error

بنابراین در بررسی یک فرضیه آماری با دو نوع خطا مواجه هستیم. خطای نوع اول به عنوان ریسک در یک آزمون فرض یا بررسی درستی یک فرضیه‌ی آماری است. احتمال ارتکاب خطای نوع اول در بررسی یک فرضیه‌ی آماری را با α نمایش می‌دهیم.

بنابراین احتمال تایید فرض صفر در صورتی که این فرض واقعاً درست باشد $1-\alpha$

در روش آزمون های فرض از بین شاخص های آماری پارامتریک مقادیر α معمولاً ۱٪ و ۵٪ انتخاب می‌شوند

در تئوری آزمون های فرض احتمال ارتکاب خطای نوع دوم را در بررسی یک فرضیه‌ی آماری با β نمایش می‌دهیم

$1-\beta$ احتمال رد فرض صفر در صورتی که این فرض واقعاً غلط باشد معیاری از قدرت یک آزمون آماری است

به α (احتمال ارتکاب خطای نوع اول) سطح اعتبار آزمون (significance level) می‌گویند

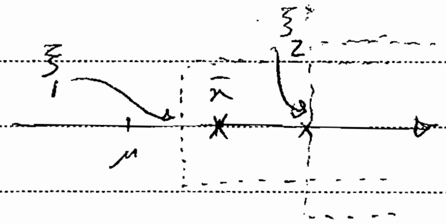
$1-\alpha$ اصطلاحاً سطح اطمینان یک آزمون فرض در بررسی یک فرضیه‌ی آماری گفته می‌شود

در بررسی علمی درستی یا نادرستی یک فرضیه‌ی آماری نیاز به برآورد یا محاسبه‌ی مقادیر عددی هستیم که بر مبنای آن درباره‌ی درستی یا نادرستی فرض صفر تصمیم می‌گیریم. توابعی که این مقادیر عددی را در اختیار ما می‌گذارند را اصطلاحاً آماره یا statistics گفته می‌شود. از آنجا که آماره‌ی یک آزمون تابعی از متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال مشخص است، تابع توزیع احتمال آماره آزمون نیز مشخص است. تصمیم‌گیری درخصوص درستی یا نادرستی فرض صفر در یک آزمون فرض برمبنای مقدار عددی آماره و طبق قاعده تصمیم صورت می‌گیرد (decision rule).

مثال: در فرضیه‌ی آماری

$$\begin{cases} H_0: \mu = \bar{x}, \ \alpha \\ H_1: \mu > \bar{x} \end{cases}$$

قاعده‌ی تصمیم می‌تواند به صورت زیر باشد:



$\mu - \bar{x} > \xi$

ξ_2 اختلاف معنی‌داری بین μ و $\bar{x}$ وجود ندارد

ξ_1 اختلاف معنی‌داری بین μ و $\bar{x}$ وجود دارد

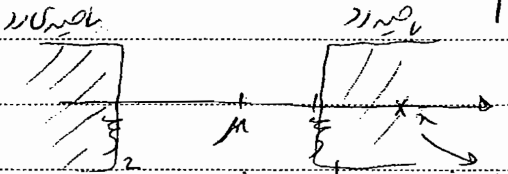
در این مثال به ازای ξ مقدار بحرانی در ناحیه $(\infty, \xi]$ در این مثال ناحیه‌ی رد

یا ناحیه‌ی بحرانی می‌نامیم

$$\begin{cases} H_0: \mu = \bar{x} \\ H_1: \mu \neq \bar{x} \end{cases} \qquad \xi_2 < \mu - \bar{x} < \xi_1$$

یک ناحیه‌ی تصمیم برای بررسی درستی یا نادرستی فرض صفر در مواجهه‌ی آماری بالا می‌توانند این صورت در نظر گرفته شوند $\bar{x}$ تفاوت معنی‌داری با μ ندارد چنانچه $\xi_2 < \mu - \bar{x} < \xi_1$

بر طوری که ملاحظه می‌شود ارتباط معنی‌داری بین مرز ناحیه‌ی تصمیم و فرض مقابل وجود دارد



با توجه به تعریف خطای نوع اول ناحیه‌ی تصمیم را در مثال بالا می‌توان به صورت زیر نوشت:

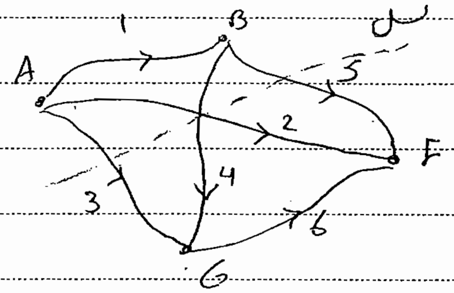
$$P(\xi_2 < \bar{x} < \xi_1 \mid H_0 \text{ فرض صفر صحیح است}) = \alpha$$

مثال: اختلاف ارتفاع زیر خطوط ترازیابی شده با خطای استاندارد $\pm 0.005\sqrt{d}$ اندازه‌گیری شده‌اند که در آن d طول مسیر ترازیابی برحسب km است. نتایج این اندازه‌گیری‌ها در جدول ذیل ارائه شده است

مسیر	Δh	d (km)
1	9.138	3
2	18.640	6
3	4.310	4
4	-4.786	4
5	9.500	5
6	14.293	2

الف) ارتفاع نقاط را نسبت با فرض ارتفاع معلوم برای نقطه‌ی A از شکل زیر محاسبه کنید

شکل ۲



ب) ارتفاع نقاط این شبکه را با فرض مقادیر اولیه زیر

$h_A^\circ = 100\ m$

$h_B^\circ = 109.138\ m$

$h_G^\circ = 104.352\ m$

$h_F^\circ = 118.616\ m$

به روش قیود داخلی حل کنید

$$\underline{Q}_l = \mathrm{diag}(3, 6, 4, 4, 5, 2) \times 0.005^2 \quad m^2$$

$$\underline{l} = [9.138, 18.640, 4.310, -4.786, 9.500, 14.296]^T_m$$

$$df = n - u_1 + 0$$

* در شبکه‌های ترازیابی متغیر توجیه مشخص است پس
و نقص مبنی

$$\begin{cases} l_1 = h_B - h_A^\circ \\ l_2 = h_F - h_A^\circ \\ l_3 = h_G - h_A^\circ \\ l_4 = h_G - h_B \\ l_5 = h_F - h_B \\ l_6 = h_F - h_G \end{cases}$$

$$df = 6 - \overset{u_1}{3} + 0 = 3$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} h_B \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix}$$

$$\hat{l} = [9.1286, 18.6279, 4.3306, -4.7980, 9.4993, 14.2973]^T$$

$$\hat{\sigma}_\circ^2 = \frac{\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}}{df} = 2.74$$

حال با فرض اینکه ارتفاع هیچ یک از نقاط معلوم نباشد: در اینجا با معلوم فرض کردن یک نقطه d.d حل می‌شود

$$x_A = \begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \Delta h_A \end{bmatrix} \quad \Delta x_A = \underline{x}_A^2 - \underline{x}_A^1 = \begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \cdot \end{bmatrix}$$

درصورتی که شبکه در حالت کلی نباشد
پس برای هر مشاهده می‌توان یک نقطه معلوم گرفت

Subject:
Date: No:

حال اگر سیستم نرمال باشد

$h_A^1 \neq h_A^2$

$h_B^1 \neq h_B^2$

$h_C^1 \neq h_C^2$

$h_D^1 \neq h_D^2$

در مواقعی که نمی‌شود هیچ نقطه‌ای ثابتی را برابر در ماتریس ما دارای کمبود مرتبه خواهد داشت پس باید از شروط / شبکه‌های داخلی استفاده کنیم

استفاده از قیود داخلی مستلزم این است که ما اطلاعات خارجی شبکه‌ای داشته باشیم

قبل از نرمال

$h_j - h_i = \Delta h_{ij}$

در شبکه‌های مسطحاتی داریم که کمبود مرتبه ماتریس A برابر ناشی از عدم تعریف مبدأ سیستم مختصات باشند $\Leftarrow$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = 0 \\ \sum \delta y_i = 0 \\ \sum \delta z_i = 0 \end{cases}$$

n : تعداد نقاط شبکه

در شبکه‌های ترازیابی ارتفاعی $\Leftarrow \sum \delta h_i = 0$

معادله مشاهدات

$h_j - h_i = \Delta h_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{A, B, C, D\}$ (1)

$\delta h_C = \delta \frac{\sum h_i}{n} = 0 \Rightarrow \sum \delta h_i = 0$

برای نوشتن معادلات مشاهدات به صورت ساده‌تر باید همه را نسبت به میانگین با قیود داخلی $\sum \delta h_i = 0$ کافی است به جای معادلات مدل ریاضی فوق را بر اساس این مدل جایگزین کنیم

$\delta(h_j - h_i) = \delta(\Delta h_{ij}) \Rightarrow \delta h_j - \delta h_i = \delta(\Delta h_{ij})$

$= \Delta h_{ij} - \Delta h_{ij}^{\circ}$ (2)

Δ مقادیر تقریبی اختلاف ارتفاع بین دو نقطه i و j

$$\begin{cases} \delta h_j - \delta h_i = \Delta h_{ij} - \Delta h_{ij}^{\circ} \\ \sum_k \delta h_k = 0 \quad (3) \\ \underline{v}^T \underline{p}\, \underline{v} = \min \end{cases}$$

$$\delta h_A = x_A \qquad \delta h_B = x_B \qquad \delta h_G = x_G \qquad \delta h_g = x_g \quad (4)$$

با قرار دادن (4) در دستگاه معادلات (3) به فرم زیر قابل بازنویسی است

$$\begin{cases} x_B - x_A = \Delta h_{AB} - \Delta h^{\circ}_{AB} + v_1 \\ x_F - x_A = \Delta h_{AF} - \Delta h^{\circ}_{AB} + v_2 \\ x_G - x_A = \Delta h_{AG} - \Delta h^{\circ}_{AG} + v_3 \qquad (5) \\ x_G - x_B = \Delta h_{BG} - \Delta h^{\circ}_{BG} + v_4 \\ x_g - x_B = \Delta h_{Bg} - \Delta h^{\circ}_{Bg} + v_5 \\ x_g - x_G = \Delta h_{Gg} - \Delta h^{\circ}_{Gg} + v_6 \\ x_A + x_B + x_G + x_g = 0 \\ \underline{v}^T P \underline{v} = \min \end{cases}$$

دستگاه معادلات (5) یک دستگاه معادلات شبیه به دستگاه معادلات تعریف شده مدل پارامتریک خطی است.

مقادیر مشاهده شده — با مقدار اولیه

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} \Delta H_{AB} - \Delta H^{\circ}_{AB} \\ \Delta H_{AF} - \Delta H_{AF} \\ \Delta H_{AG} - \Delta H^{\circ}_{AG} \\ \Delta H_{BG} - \Delta H^{\circ}_{BG} \\ \Delta H_{Bg} - \Delta H^{\circ}_{Bg} \\ \Delta H_{Gg} - \Delta H^{\circ}_{Gg} \\ 0 \end{bmatrix}$$

در سطر هفتم قید صفر داده شده

$$\underline{x} = [x_A, x_B, x_G, x_F]^T$$

$$\underset{7\times 4}{\underline{A}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_A & x_B & x_G & x_F \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{rank}[\underline{A}([1:6], :)] = 3$$

$$\text{rank}[\underline{A}([1:7], :)] = 4$$

در دستگاه فوق مدل شرط تحت قیود داخلی مطرح است

دستگاه معادلات یک پارامتری مقادیر عددی این مثال به صورت زیر است.

۱۰

$$\begin{cases} x_B - x_A = 0 + v_1 \\ x_F - x_A = 0.024 + v_2 \\ x_G - x_A = -0.042 + v_3 \\ x_G - x_B = 0 + v_4 \\ x_F - x_B = 0.022 + v_5 \\ x_F - x_G = 0.029 + v_6 \\ x_A + x_B + x_G + x_g = 0 \end{cases}$$

دستگاه معادلات نرمال تغییر یافته است

این جوابها خواهد بود.

$$\underline{N}\,\underline{x} = \underline{A}^T \underline{P}\,\underline{l}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0.75 & -0.33 & -0.25 & -0.17 & 1 \\ & -0.78 & -0.25 & -0.2 & 1 \\ \text{متقارن} & & 1 & 0.5 & 1 \\ & & & 0.87 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_G \\ x_F \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0065 \\ -0.0044 \\ -0.025 \\ 0.0229 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = [0.0047 \quad -0.0047 \quad -0.0167 \quad 0.0167 \quad 0.0609]^T$$

$$\hat{h}_A = h_A^\circ + \hat{x}_A = 100.0047\,m$$

$$\hat{h}_B = h_B^\circ + \hat{x}_B = 109.133\,m \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_A + \hat{x}_B + \hat{x}_G + \hat{x}_g = 0$$

$$\hat{h}_G = h_G^\circ + \hat{x}_G = 104.3353\,m$$

$$\hat{h}_g = h_g^\circ + \hat{x}_g = 118.6327\,m$$

سوال: در شبکه ترازیابی شکل زیر اختلاف ارتفاع‌های اندازه‌گیری شده عبارت اند از

$\Delta H_{51}=$ ایستگاه 1 بالاتر از ایستگاه 5 است 42.107 m

ایستگاه 1 بالاتر از ایستگاه 2 است 12.424 m

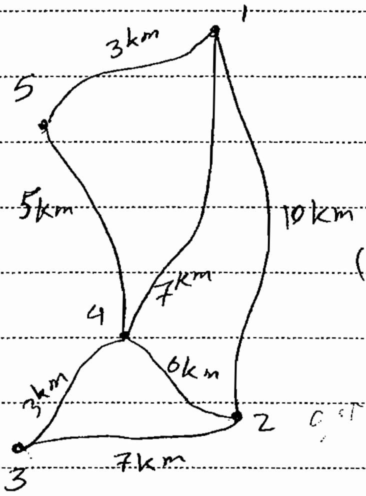
ایستگاه 2 بالاتر از ایستگاه 3 است 42.251 m

ایستگاه 4 بالاتر از ایستگاه 3 است 8.464 m

ایستگاه 5 بالاتر از ایستگاه 4 است 4.138 m

ایستگاه 1 بالاتر از ایستگاه 4 است 46.269 m

ایستگاه 2 بالاتر از ایستگاه 4 است 33.802 m



الف) با فرض $h_5 = 500.00$ m برآوردترین جوابات ارتفاع نقاط این شبکه را بدست آورید و ماتریس واریانس کوواریانس آن (پاسخ آن)

ب) با فرض $h_4 = 495.862$ برآوردترین جوابات ارتفاع نقاط این شبکه و دقت آن‌ها چیست؟

پ) با فرض ارتفاع اولیه زیر برای نقاط 1 تا 4 از این شبکه و دقت 20 برابر بیشترین خطای اندازه‌گیری مشاهدات این شبکه برای این نقاط برآوردترین جوابات ارتفاع نقاط این شبکه و دقت آن‌ها چیست؟

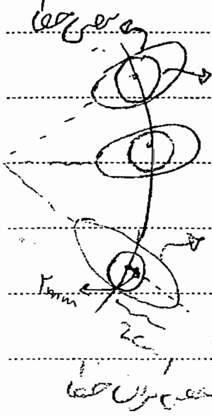
ایستگاه	1	2	3	4
ارتفاع اولیه	542	529.5	487.9	495.7

چون نقطه 5 را ثابت فرض کردیم دقت در 3 و 2 کم می‌شود ولی اگر ارتفاع 4 را ثابت داشته باشیم

دقت‌ها معقول‌تر ... وقتی همه اختلافات ... در ... نقاط

در تمام نقاط به یک نسبت هستند و دقت آن‌ها در تمام جهات یکسان می‌شود

الف ← ب کمترین



هر نقطه ... این بیضی ... حدود بیضی ها باشد

... 2mm ...

... ماتریس ... برای ... بیضی خطا

باید ... کنیم

آزمون های پیش انداز شکلی :

آزمون واریانس :

σ یا σ^2

در این آزمون فرض صفر عبارت است از α ، $H_0 = \sigma^2 = a$

فرض مقابل به طور طبیعی برای بررسی درستی فرض صفر فوق در این آزمون استفاده می‌شود به این صورت است ، $H_1 : \sigma^2 > a$

برای بررسی درستی یا نادرستی این فرضیه آماری یک نمونه اندازه‌گیری نیاز داریم :

$$l = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T$$

آماره‌ی آزمون به صورت زیر است :

الف) اگر میانگین جامعه معلوم باشد

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (l_i - \mu)^2}{n} \quad (1)$$

ب) اگر میانگین جامعه معلوم نباشد

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2}{n-1} \quad (2)$$

از آمار و احتمالات به خاطر داریم که (حالت الف) توزیع k اسکوئر

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n \quad (3)$$

(حالت ب)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad (4)$$

در این روابط S انحراف معیار نمونه اندازه‌گیری است که در هر یک از دو حالت الف و ب با روابط 1 و 2 محاسبه می‌شود و درست (3) و (4) آماره این آزمون فرض (به ترتیب) در هر یک از این دو حالت است

قاعده‌ی تصمیم برای این آزمون فرض : آزمون یک طرفه مقدار بحرانی

الف)

$$P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \xi \,\middle|\, H_0 : true\right) = \alpha$$

ب)

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \xi \,\middle|\, H_0 : true\right) = \alpha$$

مثال: مقادیر زیر از تکرار اندازه‌گیری‌های یک زاویه به دست آمده است. درستی این فرض که دقت دستگاه زاویه‌یاب مورد استفاده ۵ s^2 است در سطح اعتبار ۵٪ بررسی کنید

$30^\circ\ 32'\ 15''$	$30^\circ\ 32'\ 16''$	$30^\circ\ 32'\ 17''$
$30^\circ\ 32'\ 16''$	$30\ 32'\ 13''$	$30\ 32'\ 14''$
$30\ 32'\ 18''$	$30\ 32'\ 15''$	$30\ 32\ 16''$
$30\ 32'\ 17''$	$30\ 32'\ 15''$	$30\ 32'\ 14''$
$30\ 32'\ 13''$	$30\ 32'\ 17''$	
$30\ 32'\ 14''$	$30\ 32'\ 14''$	
$30\ 32'\ 12''$	$30\ 32'\ 16''$	
$30\ 32'\ 17''$	$30\ 32'\ 14''$	

چون زاویه معلوم نیست پس باید s استفاده کنیم

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 30^\circ\ 32'\ 15''$$

$$s^2 = \frac{\sum (l_i - \bar{x})^2}{n-1} = 4.45$$

مقدار آماره $f = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{19 \times 4.45}{25} = 3.45$

$$H_0 = \sigma^2 = (15'')^2 \quad , \quad \alpha = 0.05 = 5\%$$

$$H_1 = \sigma^2 > (15'')^2$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \xi \;\middle|\; H_0 = \text{true}\right) = 0.05$$

$$\sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{19}$$

درجه آزادی

$$\xi = \chi^2_{19,\,0.05} = 8.91$$

چون مقدار آماره از مقدار آستانه کمتر است این فرضیه آماری را که دقت دستگاه اندازه‌گیری ۵" است نمی‌توان رد کرد (یعنی توانایی تقریباً ۵ را داشته است ولی در تمام نمونه‌ها)

(در فرضیه آماری)

آزمون میانگین

فرض صفر در این آزمون فرض صحت سیستم اندازه‌گیری است

این فرض صفر می‌گویند در مقابل $H_0: \mu = a \;,\; \alpha$

فرض مخالف تفکر اینکه دستگاه اندازه‌گیری دارای خطای سیستماتیک است

$H_1: \mu \neq a$

بسته به اینکه واریانس جامعه معلوم و یا مجهول باشد آماره‌ی آزمون از یکی از روابط زیر قابل محاسبه است

الف) σ^2 معلوم

$$\frac{\bar{l}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad (5)$$

ب) σ^2 مجهول

$$\frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad (6)$$

در روابط (5) و (6) s انحراف معیار اندازه‌گیری‌ها است و t تابع توزیع t_student است

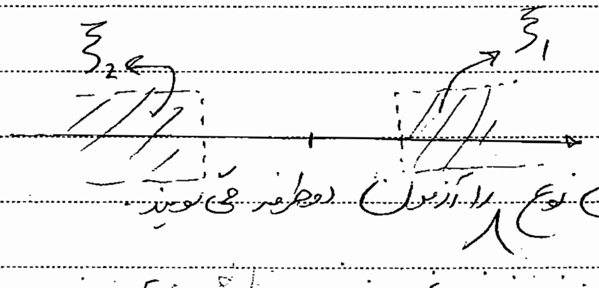
قاعده‌ی تصمیم در این آزمون فرض:

الف)

$$P\left(\frac{\bar{l}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \xi_1 \text{ or } \frac{\bar{l}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \xi_2 \;\middle|\; H_0: \text{true}\right) = \alpha$$

ب)

$$P\left(\frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \xi_1 \text{ or } \frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} < \xi_2 \;\middle|\; H_0: \text{true}\right) = \alpha$$



رد آزمون

آزمون‌های فرض بالا را برای این نوع را آزمون دو طرفه می‌نویسند

با فرض خالی مشابه با فرض مخالف این آزمون

مثال: می‌خواهیم ببینیم در مثال قبل این فرضیه که دستگاه زاویه‌یاب مورد استفاده دارای خطای سیستماتیک نیست بررسی کنیم. در این حالت به شرط سطح اعتبار آزمون ۰/۰۱ انتخاب کنید

$H_0: \mu = 30° \; 32' \; 11''$, $\alpha = 0.01$

$H_1: \mu \neq 30° \; 32' \; 11''$

آماره $\mathcal{L} = \dfrac{l - \mu}{s/\sqrt{n}} = 9.03$

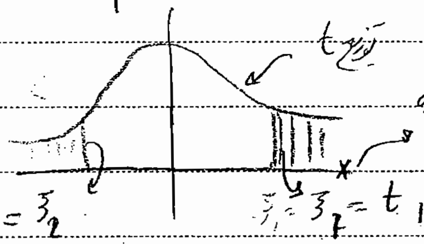
t_{n-1}

$$P\left(\frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \xi_1 \text{ or } \frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} < \xi_2 \,\middle|\, H_0 : \text{true} \right) = 0.01$$

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(\frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \xi_1 \,\middle|\, H_0 : \text{true} \right)}_{A} + \underbrace{P\left(\frac{\bar{l}-\mu}{s/\sqrt{n}} < \xi_2 \,\middle|\, H_0 : \text{true} \right)}_{B} = 0.01$$

می‌توانیم این احتمال ۱٪ را به طور مساوی بین دو احتمال A و B تقسیم کرد هر کدام برابر با نصف حدود خطای سیستماتیک است

$$\alpha \begin{cases} 0.005 \\ 0.005 \end{cases}$$



$-2.861 = \xi_2$ به دلیل تقارن تابع توزیع t

$\xi_1 = t_{19} = t_{n-1} = 2.861$

چون $\mathcal{L} > \xi_1$ پس با احتمال ۹۹٪ می‌توان گفت دستگاه زاویه‌یاب مورد استفاده دارای خطای سیستماتیک است

$\mu - \bar{x} = 30° \; 32' \; 11'' - 30° \; 32' \; 15'' = -4''$

با این حدود احتمال ۱٪ وجود دارد که در این ارزیابی مرتکب اشتباه شده باشیم

آزمون نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات

چنانچه از نام این آزمون پیداست هدف از این آزمون بررسی درستی این فرضیه است که اندازه‌گیری‌های انجام شده از تابع توزیع نرمال پیروی می‌کند

$H_0: l_i \in [l_1, l_2, \dots, l_n]^T \sim N(\mu, \sigma^2)$ و α

در مقابل این فرض که مشاهدات از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند

Subject:
Date: No:

این آزمون در ۴ حالت مختلف قابل بررسی است:

مجهول	معلوم	حالت	
—	μ , σ^2	1	
σ^2	μ	2	از برآورد s^2
μ	σ^2	3	
μ , σ^2	—	4	

- در حالت 2 از برآورد $s^2 = \frac{\sum (l_i - \mu)^2}{n}$ برای برآورد واریانس جامعه استفاده می‌کنیم

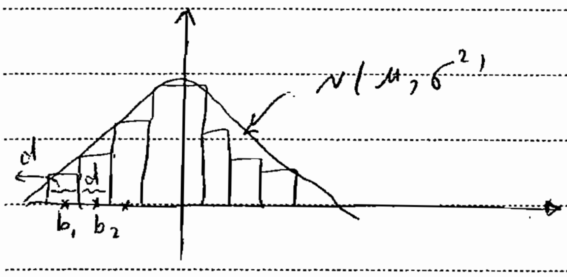
- در حالت 3 از برآورد $\bar{x} = \frac{\sum l_i}{n}$ برای برآورد میانگین جامعه استفاده می‌کنیم

- در حالت 4 از برآورد $\bar{x} = \frac{\sum l_i}{n}$ و $s^2 = \frac{\sum (l_i - \mu)^2}{n-1}$ برای برآورد میانگین و واریانس جامعه استفاده می‌کنیم

- آماره‌ی آزمون به صورت:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

در این رابطه o_i ها $i = 1, \dots, m$ فراوانی‌های تجربی مشاهدات هستند که از طریق تشکیل m کلاس مختلف و مقایسه‌ی برای مشاهدات با پهنای هر کلاس مشخص می‌شود



در واقع n مشاهده داریم که به m کلاس تقسیم می‌کنیم و تعداد جستجو برای آن را تقسیم و مقایسه می‌کنیم با تابع توزیع حقیقی که این مقدار برابر با چه آماره است

- در مقابل o_i ها e_i ها مقادیر فراوانی تئوری قابل محاسبه از مقادیر برآورد هر دسته با کلاس مشاهدات. آماره f دارای توزیع χ^2_ν با درجه‌ی آزادی که در آن

① $v = m-1$; ② $v = m-2$; ③ $v = m-2$, ④ $v = m-3$

مثال ۳: ۴۰ اندازه‌گیری زیر با استفاده از دستگاه طول‌یاب انجام شده است. این فراوانی آماری را که مشاهدات، از توزیع نرمال تبعیت می‌کند در سطح اعتبار ۵٪ بررسی کنید.

212.11	.17	212.13	212.17	.24	.21
.18	.16	212.17	.19	.16	.23
.16	212.19	212.15	.16	.20	.19
.15	212.24	212.20	.10	.21	.13
212.8	212.22	212.16	212.19		
212.17	212.17	212.22	212.13		
212.16	212.18	212.21	212.15		
212.19	212.16	212.17	212.18		

اول باید تعداد کلاس‌ها را مشخص کنیم

برای رسیدن به برآوردی قابل قبول از تعداد کلاس‌ها (m) پهنای هر کلاس (d) را 0.3 برابر انحراف معیار نمونه $d = 0.3\,S$ و (S انحراف معیار)

کوچکترین کرانه‌ی دسته را $b_{min} = \bar{l} - 6 \times S$ و بزرگترین کرانه‌ی دسته را

$b_{max} = \bar{l} + 6 \times S$

در نظر می‌گیریم در این صورت

$$m = \frac{b_{max} - b_{min}}{2d} + 1$$

$\bar{l} = 0.1735$ $S = 0.0358$

$d = 0.3 \times S = 0.0107$ $b_{min} = -0.0413$ $b_{max} = 0.3886$

$\Rightarrow m = 21$

PAUYAN

شماره کلاس	مقادیر کران کلاس	فراوانی تجربی در هر کلاس o_i
1	$[-0.0520\ ,\ -0.0306)$	0
2		0
⋮		0
6		0
7		1
8		2
9		3
10		10
11		9
12		7
13		5
14		3
15		0
⋮		0
21		0

فراوانی‌ها 6

3

-0.0413 b_{min}
$+0.0107$ d
-0.0306 کران بالا

کران پایین b می‌نویسیم.
این آزمون به فراوانی‌های کمتر از ۵ حساس است
آن‌هایی که فراوانی کمتر از ۵ دارند
ترکیب کرده و یک فراوانی می‌کنیم
در اینجا هم از کلاس اول تا انتهای فراوانی
آخر می‌کنیم پس دسته‌های
فراوانی‌ها تغییر می‌کند

$(2\times \text{شماره کلاس} - 2)\times d$

$$b_9 = b_{min} + (2\times 9-2)\times d$$

d

b_1 b_2

	کلاس‌های جدید	o_i	$[z_1, z_2)$	e_i
1	$[-0.0520\ ,\ b_9+d)$	6	$[-6.2988\ ,\ -0.8826)$	
2	$[0.1419\ ,\ 0.1635)$	10		
3	$[0.1635\ ,\ 0.1851)$	9		
4	$[0.1851\ ,\ 0.2067)$	7		
5	$[0.2067\ ,\ 0.2283)$	5		
6	$[0.2283\ ,\ 0.4011)$	3		

برای هر کلاس اندازه‌گیری با کران‌های b, a $\{[a, b)\}$ مقادیر تئوری e_i با استاندارد کردن کران‌های کلاس در توزیع نرمال به صورت زیر محاسبه می‌شود

Subject:
Date: . No.

مرز پایین

استفاده $z_1 = \frac{a-\bar{l}}{s}$ $\qquad z_2 = \frac{b-\bar{l}}{s}$

$$\Rightarrow e_i = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$ یا $$e_i = P(a<z<b) = P(z>a)+P(z<b)$$

$1 \quad z_1 = \frac{-0.0520-0.1785}{0.0358} = -6.2988 \qquad z_2 = \frac{0.1419-0.1735}{0.0358} = -0.8826$

نهایتاً $(O_i-e_i)^2$ و $(O_i-e_i)^2/e_i$

حال $\mathcal{L}$ را با مقدار بحرانی زیر مقایسه می‌کنیم $\quad \xi = \chi^2 = \chi^2_{\underbrace{6-3}_{df}} = \chi^2_{\underbrace{3}_{df},\,\underbrace{0.05}_{\alpha}}$

$\xi = \chi^2_{\nu,\alpha}$ $\qquad$ با احتمال ۹۵٪ مشاهدات دارای توزیع نرمال هستند اگر $\mathcal{L} > \xi$

این فرض که مشاهدات توزیع نرمال دارند نمی‌توان رد کرد اگر $\mathcal{L} < \xi$

آزمون ۲: تک تک مشاهدات

در قسمت قبلی مشاهده شد که یک بار انجام اندازه‌گیری الزاماً نمی‌شود چرا که در عین حال احتمال ارزیابی دقت مشاهدات و صحت آن‌ها وجود خواهد داشت

بلکه این آزمون بررسی صحت مشاهدات امکان‌پذیر است

به این ترتیب که مثلاً از طریق بررسی این فرضیه آماری که مشاهدات مختلف یا نمونه‌های اندازه‌گیری از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. بنابراین نمونه‌های اندازه‌گیری با توزیع نرمالی با پارامترهای مشخص تحقیق شده. بنابراین چنانچه مشاهده‌ای یا مشاهداتی خارج از تابع توزیع کلیه مشاهدات پیروی کند # صحت آن مشاهده مورد تردید قرار می‌گیرد

$H_0: l_i \in L \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad$ فرض صفر، فرض کامل در بررسی آماری این موضوع، مهم‌ترین رو خواهد بود

1

$H_1: l_i \in L \nsim N(\mu, \sigma^2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرضیات: ۱) در صورتی معتبرند که پارامترهای μ و σ^2 جامعه‌ی اندازه‌گیری معلوم باشد. در غیر این صورت (در صورتی که هر یک از این دو پارامتر مجهول باشد از برآورد حاصل از نمونه‌ی اندازه‌گیری استفاده می‌شود)

مثلاً در صورتی که هر دو پارامتر μ و σ^2 مجهول باشند:

$$H_0: l_i \in L \sim N(\bar{l}, s^2)$$

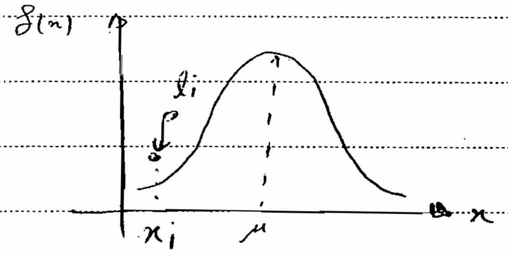
2

$$H_1: l_i \in L \nsim N(\bar{l}, s^2)$$

به این ترتیب انجام این آزمون به ۴ حالت زیر قابل تفکیک است

الف) μ و σ^2 هر دو معلومند: در این حالت آماره‌ی آزمون:

$$f = \frac{l_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$



باید مقایسه این تابع توزیع نشان دهنده‌ی $l = f(x_i)$ حد واقعی اندازه‌گیری حال اگر آن اندازه‌گیری تابع مقایسه و مقیاس تبعیت کند آن اندازه‌گیری درست نیست

$N(\bar{l}, s^2)$

ب) μ معلوم و σ^2 مجهول:

$$f = \frac{l_i - \mu}{s} \sim t_{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (l_i - \mu)^2}{n}$$

ج) μ مجهول و σ^2 معلوم

$$f = \frac{(l_i - \bar{l})}{\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\bar{l} = \frac{\sum l_i}{n}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) μ و σ^2 هر دو مجهول باشند

$$f = \frac{l_i-\bar{l}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s} \sim \tau_{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i-\bar{l})^2}{n-1}, \quad \bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \qquad \tau_n = n^{1/2}\, t_{n-1}\left(n-1+t_{n-1}^2\right)^{-1/2}$$

مثال: طول مبنای پایه 1021.341 m توسط طولیاب با دقت 5 mm اندازه‌گیری شده است

1021.350 1021.320 1021.340 1021.339 1021.335

هدف: بررسی این موضوع است که هر یک از مشاهدات فوق از توزیع نرمال مربوطه پیروی می‌کند.

$$H_0: l_i \in L \sim N(1021.341, 25) \quad \forall i=1,\dots,5$$

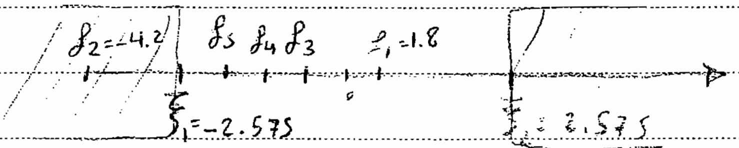
$$H_1: l_i \in L \nsim N(1021.341, 25) \qquad \alpha = 1\%$$

$$f_i = \frac{l_i-\mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1021.350-1021.341}{5} \times 10^{3} = \frac{9}{5} = 1.8 \\ f_2 = -4.2 \\ f_3 = -0.2 \\ f_4 = -0.4 \\ f_5 = -1.2 \end{cases}$$

$$\forall i \quad P(\xi_1 < f_i < \xi_2 \mid H_0 : \text{true}) = \alpha$$

اعداد مقادیر α در جدول توزیع نرمال

$$\xi_1 = -2.575 \qquad \xi_2 = 2.575$$



بنابراین با احتمال 99٪ می‌توان
گفت مشاهده دوم
(1021.320) مشکوک به اشتباه است ولی
در بقیه مشاهدات
را می‌توان بدون تردید قرار داد
پس قبل از سرشکنی ابتدا آن مشاهده را حذف می‌کنیم

PAPCO

همچنین ازین برای حذف مشاهدات اشتباه از $\bar{l} - \sigma < l_i < \bar{l} + \sigma$ است. برابر
از اعداد خارج ازین محدوده بود حذف کنیم. یک روش هم همین روش سه‌سیگمایی است. این مقدار
بالا چون یک فاصله و یا یک ناحیه‌ی تصادفی است که با یک احتمال مشخص مشاهدات در آن ناحیه هستند
به این فضاها فاصله‌ی اطمینان می‌گویند.

برآورد فواصل اطمینان:

فاصله‌ی اطمینان ناحیه‌ی تصادفی است که پارامتر یا پارامترهای خاصی از جامعه با احتمالی مشخص در آن فاصله قرار می‌گیرد

مثال: برآورد فاصله‌ی اطمینان برای میانگین جامعه‌ی اندازه‌گیری: هدف: تعیین مقادیر ξ_1 و ξ_2 است به طوری که $P(\xi_1 < \mu < \xi_2) = 1-\alpha$ باشد.

در حالت اول: فرض کنید σ (واریانس جامعه) معلوم باشد. در این صورت:

$$P(-\xi_1 > -\mu > -\xi_2) = 1-\alpha$$

$$P(\bar{l}-\xi_1 > \bar{l}-\mu > \bar{l}-\xi_2) = 1-\alpha \Rightarrow P\Big(\underbrace{\frac{\bar{l}-\xi_1}{\sigma}}_{\eta_1} > \frac{\bar{l}-\mu}{\sigma} > \underbrace{\frac{\bar{l}-\xi_2}{\sigma}}_{\eta_2}\Big) = 1-\alpha$$

$$P\Big(\eta_1 > \underbrace{\frac{\bar{l}-\mu}{\sigma}}_{f} > \eta_2\Big) = 1-\alpha \qquad f = \frac{\bar{l}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

بر این ترتیب می‌توان مقادیر η_1 و η_2 را از تابع توزیع f (نرمال استاندارد) محاسبه کرد. با معلوم بودن η_1 و η_2 می‌توان نوشت

$$\frac{\bar{l}-\xi_1}{\sigma} = \eta_1 \Rightarrow \xi_1 = \bar{l} - \eta_1 \cdot \sigma$$

$$\frac{\bar{l}-\xi_2}{\sigma} = \eta_2 \Rightarrow \xi_2 = \bar{l} - \eta_2 \cdot \sigma$$

در نتیجه فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای پارامتر میانگین:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{\bar{l} - \eta_2 \sigma > \mu > \bar{l} - \eta_1 \sigma}$$

در حالت دوم یعنی وقتی که واریانس جامعه (σ^2) معلوم نباشد می‌توان نوشت مراحل مشابه قبل را عمل کرد با این تفاوت که به جای σ از S استفاده کنیم بنابراین مقادیر η_1 و η_2 از نتایج توزیع متفاوتی قابل محاسبه خواهند بود.

ناحیه اطمینان واریانس یک جامعه

به دنبال تعیین مقادیر ξ_1 و ξ_2 هستیم به نحوی که

$$P(\xi_1 < \sigma^2 < \xi_2) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\xi_1} > \frac{1}{\sigma^2} > \frac{1}{\xi_2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\Big(\overbrace{\frac{ns^2}{\xi_1}}^{m_1} > \underbrace{\frac{ns^2}{\sigma^2}}_{f \sim \chi^2} > \overbrace{\frac{ns^2}{\xi_2}}^{m_2}\Big) = 1-\alpha$$

بنابراین مقادیر η_1 و η_2 از توزیع χ^2 های اسکوئر قابل محاسبه‌اند

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{ns^2}{\xi_1} \Rightarrow \xi_1 = \frac{ns^2}{\eta_1} \\ \eta_2 &= \frac{ns^2}{\xi_2} \Rightarrow \xi_2 = \frac{ns^2}{\eta_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{ns^2}{\eta_2} > \sigma^2 > \frac{ns^2}{\eta_1}}$$

ناحیه اطمینان فوق زمانی برآورد صحیح از ناحیه اطمینان واریانس جامعه است که μ (میانگین جامعه) معلوم باشد در غیر این صورت n با $n-1$ عوض می‌شود یعنی اگر μ میانگین معلوم نباشد:

عوض

$$\frac{(n-1)s^2}{\eta_1} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\eta_2}$$

$$f = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

فاصله‌ی اطمینان تک تک مشاهدات:

به دنبال تعیین مقادیر ξ_1 و ξ_2 هستیم به نحوی که

که ما داریم:

$$P(\xi_1 < l_i < \xi_2) = 1-\alpha$$

- برای حالت میانگین و واریانس جامعه معلوم حل می‌کنیم:

$$P(\xi_1 - \mu < l_i - \mu < \xi_2 - \mu) = 1-\alpha$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{\xi_1-\mu}{\sigma}}_{\eta_1} < \underbrace{\frac{l_i-\mu}{\sigma}}_{f} < \underbrace{\frac{\xi_2-\mu}{\sigma}}_{\eta_2}\Big) = 1-\alpha \qquad f = \frac{l_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

بنابراین مقادیر جزئی η_1 ، η_2 را می‌توان از توزیع نرمال استاندارد در سطح اطمینان مورد بررسی پیدا کرد.

$$\frac{\xi_1-\mu}{\sigma} = \eta_1 \Rightarrow \xi_1 = \mu + \eta_1\sigma$$

$$\frac{\xi_2-\mu}{\sigma} = \eta_2 \Rightarrow \xi_2 = \mu + \eta_2\sigma$$

- برای حالتی که میانگین و واریانس جامعه معلوم نیست

$$P(\xi_1 < l_i < \xi_2) = 1-\alpha$$

$$P(\xi_1 - \bar{l} < l_i - \bar{l} < \xi_2 - \bar{l}) = 1-\alpha$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{\xi_1-\bar{l}}{(\frac{n-1}{n})^{1/2}S}}_{m_1} < \underbrace{\frac{l_i-\bar{l}}{(\frac{n-1}{n})^{1/2}S}}_{f} < \underbrace{\frac{\xi_2-\bar{l}}{(\frac{n-1}{n})^{1/2}S}}_{m_2}\Big) = 1-\alpha$$

$$f = \frac{l_i-\bar{l}}{(\frac{n-1}{n})^{1/2}S} \sim t_{n-1}$$

$$\frac{\xi_1 - \bar{l}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s} = \eta_1 \Rightarrow \xi_1 = \bar{l} + \eta_1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s$$

$$\frac{\xi_2 - \bar{l}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s} = \eta_2 \Rightarrow \xi_2 = \bar{l} + \eta_2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s$$

$$\bar{l} + \eta_1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s < l_i < \bar{l} + \eta_2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} s$$

به همین ترتیب ۲ روش زیر قابل محاسبه است

آزمون های بعد از سرشکنی :

آزمون در روش تائو یا بارده :

قبل از سرشکنی پس از انجام مشاهدات می بایست ابتدا از نرمال بودن تابع توزیع مشاهدات اطمینان حاصل کرد خطاهای اتفاقی برای این کار از آزمون نرمال بودن توزیع مشاهدات استفاده می کنیم سپس از وجود یا عدم وجود خطای مشاهدات سیستماتیک در اندازه گیری ها از طریق انجام آزمون پایین بررسی کرده . در ادامه پیروی یا انطباق تک تک مشاهدات با تابع توزیع نرمال مشاهدات از طریق آزمون آماری تک تک مشاهدات مورد بررسی قرار می گیرد تا از این طریق مشاهداتی که از صحت کافی برخوردار نیستند از فهرست مشاهدات حذف گردند در ادامه با این سری از اطمینان تک تک مشاهدات در سطح اعتبار مورد نظر مشاهداتی را که از نظر اندازه با سایر مشاهدات سازگاری ندارند یافته و از فهرست مشاهدات حذف می کنیم نهایتا با انجام آزمون پایانی جهت دستگاه معادلات ها را ارزیابی می کنیم

پس از اطمینان از برقراری پیش فرض های مورد نیاز از استفاده از روش سرشکنی کمترین مربعات از طریق طی مراحل مدل خطاهای اتفاقی مشاهدات را با این روش سرشکن کرده ماتریس واریانس کوفاکتور را تعیین می کنیم

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}}{df} \quad (1)$$

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 C_l^{-1}$$

$$\sigma_0^2 Q = C_l$$

میزان اختلاف $\hat{\sigma}_0^2$ (برآورد واریانس $\hat{\sigma}_0^2$) با σ_0^2 (واریانس فاکتور اولیه) از طریق آزمونی به نام آزمون فاکتور واریانس ثانویه انجام می‌شود

آزمون واریانس فاکتور ثانویه

$\hat{x}, \hat{l}$, $\underbrace{C_{\hat{x}}, C_{\hat{v}}, C_{\hat{l}}}$

متغیرهای تحت تأثیر خطاهای ماتریس وزن هستند

هدف از آزمون، صرف بررسی وجود یا عدم وجود تفاوت معنی‌دار بین مقادیر واریانس فاکتور اولیه (σ_0^2) و ثانویه ($\hat{\sigma}_0^2$) است. با بررسی فرض صفر در این فرضیه آماری به صورت زیر است

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad , \alpha$$

$$H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2$$

در صورتی که نتیجه این آزمون وجود تفاوت معنی‌دار بین $\hat{\sigma}_0^2$ و σ_0^2 باشد این تفاوت بر اساس مطالب زیر می‌تواند ناشی از ① باشد

1. خطای سیستماتیک در اندازه‌گیری‌ها
2. وجود خطای اشتباه
3. نامناسب بودن خطای ماتریس کوواریانس مشاهدات باشد

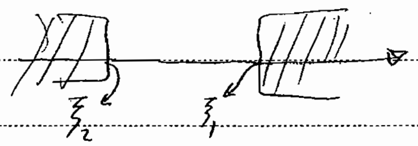
آماره آزمون:

$$f = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot df}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{df}$$

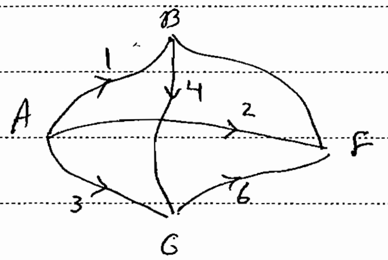
df درجه آزادی سیستم است.

ناحیه تصمیم عبارت است از

$$P\left(\frac{df \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \xi_1 \text{ or } \frac{df \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \geq \xi_2 \,\middle|\, H_0 : true\right) = \alpha$$



مثال: شبکه ارتفاعی شکل زیر را قبلاً به روش inner constraint و minimum constraint سرشکن شده فرض کنید



$$\hat{l}_{min} = [9.1286,\ 18.6279,\ 4.3206,\ -4.7980,\ 9.4993,\ 14.2873]^T_m$$

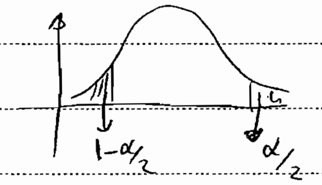
$$l = [9.138,\ 18.640,\ 4.310,\ -4.786,\ 9.500,\ 14.293]$$

$$\hat{l} - l = \hat{v} = [-0.0094,\ -0.0121,\ 0.0206,\ -0.0120,\ -0.0007,\ 0.0043]^T$$

$$Q_l = diag[3, 6, 4, 4, 5, 2] \times 0.005^2\ (m^2)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T Q^{-1} \hat{v}}{df} = 2.74 \qquad df = 6 - 3 = 3$$

$$f = \frac{\hat{\sigma}_0^2\, df}{\sigma_0^2} = \frac{2.74}{1} \times 3 = 8.22$$



$$\xi_1 = \chi^2_{df,\,1-\alpha/2},\ \alpha = 0.05 = \chi^2_{3,\,0.975}$$

$$\xi_2 = \chi^2_{df,\,\alpha/2} = \chi^2_{3,\,0.025}$$

حال اگر تست دو دامنه را یک طرفه انجام دهیم دیگر α را نصف نمی‌کنیم

$$\xi = \chi^2_{df,\,\alpha} = \chi^2_{3,\,0.05} = 0.35$$

حال وقتی f مقدارش بزرگتر از ξ باشد فرض رد می‌شود که در اینجا رد می‌شود

Subject:
Date: No:

آزمون کشف مشاهدات اشتباه:

فرض صفر در این آزمون به این صورت است:

$H_0: \hat{v}_i \in L \sim N(0, \sigma^2_{\hat{v}_i})$ و α

$H_1: \hat{v}_i \in L \nsim N(0, \sigma^2_{\hat{v}_i})$ آزمون دو طرفه

آماره آزمون: ξ_i

$$f = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \sim N(0,1)$$

چنانچه برای مشاهده i ام $f_i > \xi_1$ یا $f_i < \xi_2$

مشاهده i ام مشاهده‌ای اشتباه تشخیص داده می‌شود

ولی باید دقت کرد این مشاهدات اشتباه را اصلاح کرد و سپس سرشکنی مجدد انجام شود اگر درست شد این نشان می‌دهد که این مشاهده اشتباه یا اشتباه فرض شده درست است زیرا یک مشاهده اشتباه روی باقی مانده‌های مشاهدات دیگر نیز اثر می‌گذارد.

تکنیک‌های روباست در تشخیص مشاهدات اشتباه robust out lines dedection

برخلاف آزمون کشف مشاهدات که مبتنی بر فرض نرمال بودن توزیع مشاهدات پس از سرشکنی است در روش‌های تخمین موسوم به robust estimation برای تشخیص مشاهدات اشتباه و تخمین پارامترهای مدل ریاضی این فرض در نظر گرفته نمی‌شود

فرض نرمال بودن توزیع خطای برخی پارامترهای مشاهدات بلافاصله برای ... فرض صحیح نیست به عنوان مثال می‌توان ثابت کرد که چنانچه x و y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند، $\frac{x}{y}$ از توزیع نرمال برخوردار نیست

روش‌های تشخیص مشاهدات اشتباه از طریق تکنیک‌های روباست robust تخمین پارامترهای مدل ریاضی مبتنی بر تعیین وزن هر یک از مشاهدات در بررسی میزان تأثیر آن بر اختلاف بین

$S_w = S_0$

مقادیر و وزن‌ها با ثانیه وابسته است

به عنوان مثال یکی از الگوریتم‌های حساب شده در این روش به صورت زیر است.

$$P_{j+1}^i = P_j^i \, f(v_i)$$

V_i باقی‌مانده‌ی مشاهده P_i وزن اولیه مشاهده

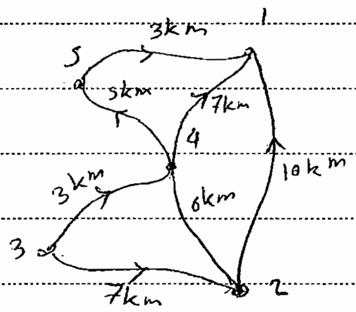
P_{i+1} وزن جدید آن برای بررسی اشتباه بودن یا اشتباه نبودن این مشاهده است

$$f(V_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } \dfrac{|V_j|\sqrt{P_1}}{\sigma_0} < C \quad \text{مشکوک به اشتباه نیست} \\[2ex] \exp\left[-\dfrac{|V_j|\sqrt{P_1}}{C\sigma_0}\right] & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مقدار ثابت c به طور تجربی بین 2.5 تا 3 انتخاب می‌شود.

یعنی هر مشاهده‌ای که مقدار باقی‌مانده‌ی آن خیلی بزرگ باشد اگر با وزن‌های اولیه باشد از مقدار وزن اولیه را در $f(V_i)$ که همان $p_i \times \exp\left[-\frac{|V_i|\sqrt{P_1}}{C\sigma_0}\right]$ ضرب می‌کنیم. این کار را انجام می‌دهیم برای کشف مشاهدات.

مثال:



$\Delta H_{51} = 42.107 \text{ m}$

$\Delta H_{21} = 12.424 \text{ m}$

$\Delta H_{32} = 42.251 \text{ m}$

$\Delta H_{34} = 8.464 \text{ m}$

$\Delta H_{45} = 46.138 \text{ m}$

$\Delta H_{41} = 46.269 \text{ m}$

$\Delta H_{24} = 33.802 \text{ m}$

با تغییرهای وزن حل در این مسئله

ایستگاه	1	2	3	4
ارتفاع	542	529.5	487.5	495.7

دقت مشاهدات $\sigma_{DH}^{mm} = \sqrt{L_{DH}}$ فرض شده

دقت پارامترهای وزن دار 20 برابر بزرگتر از بیشترین خطای اندازه‌گیری مشاهدات است

معادلات مشاهدات

[illegible] = ۷ معادله

$v_1 + l_1 = \Delta H_{S1} = H_1 - H_5 \quad , \quad \sigma_{l_1}^2 = 3\, mm^2$

$v_2 + l_2 = H_1 - H_2 \quad , \quad \sigma_{l_2}^2 = 10\, mm^2$

$v_3 + l_3 = H_2 - H_3 \qquad \sigma_{l_3}^2 = 7\, mm^2$

$v_4 + l_4 = H_4 - H_3 \qquad \sigma_{l_4}^2 = 3\, mm^2$

$v_5 + l_5 = H_5 - H_4 \qquad \sigma_{l_5}^2 = 5\, mm^2$

$v_6 + l_6 = H_1 - H_4 \qquad \sigma_{l_6}^2 = 7\, mm^2 \qquad \underline{x} = [H_1, H_2, H_3, H_4, H_5]^T$

$v_7 + l_7 = H_4 - H_2 \qquad \sigma_{l_7}^2 = 6\, mm^2$

$l_8 = H_1 = 542\, m \qquad \sigma_{l_8}^2 = 4000\, mm^2$

$l_9 = H_2 = 529.5\, m \qquad \sigma_{l_8}^2 = 4000\, mm^2 \qquad \underline{l}_x = [H_1, H_2, H_3, H_4]^T$

$l_{10} = H_3 = 487.2 \qquad \sigma_{l_{10}}^2 = 4000\, mm^2$

$l_{11} = H_4 = 495.7 \qquad \sigma_{l_{11}}^2 = 4000\, mm^2$

حل مسئله

$$\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{\delta}} = -\left(A_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} A_1 + \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \underline{H}\right)^{-1} \left(A_1^T \underline{C}_{w_1}^{-1} \underline{w}_1 - \underline{H}^T \underline{C}_{l_x}^{-1} \underline{w}_2\right)$$

$$\underset{-1}{A} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون مسئله خطی است

$\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{\delta}}$

$l = Ax \qquad l = w$

یعنی بین l و x ضرب شود ضرب شود

ها را به ما میدهد

$$
\underline{H} = \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\underline{C}_w = \underline{B}_1 \underline{C}_l \underline{B}_1^T$$

تصحیحات   مجهولات

$v_1 + \underline{l} = \underline{A}_1 x$ $\underline{A}_1 \underline{\delta} + \underline{B}_1 \underline{\hat{v}}_1 + \underline{W}_1 = 0 \quad (\mathrm{I})$ برای مدل ترکیبی

$\underline{l}_x = \underline{x}$ $l = A_1 x$

$$\Rightarrow \underline{C}_{w_1} = (-\underline{I})\, \underline{C}_l\, (-\underline{I})^T$$

$$\underline{C}_l = \mathrm{diag}(\sigma_{l_1}^2, \quad \sigma_{l_7}^2)$$

$\Rightarrow \underline{C}_{w_1}$ در اینجا چون مدل (I) مدل ترکیبی است پس باید پارامترها را تعیین کنیم

پس B_1 ها را تبدیل به ماتریس یکانی می‌شود v_1 پس باید $B_1 = -I$ شود تا مدل به صورت $l = Ax$ شود

$$\Rightarrow \underline{C}_{w_1} = \underline{C}_l = \mathrm{diag}(3, 10, 7, 3, 5, 7, 6)$$

$$\underline{C}_{lx} = \mathrm{diag}(\sigma_{l_8}^2, \sigma_{l_9}^2, \sigma_{l_{10}}^2, \sigma_{l_{11}}^2) = 4000\, \underline{I}_{4\times4}$$

در اینجا برای نقاط ثابت دقت خیلی بد داریم به طوری که مقادیر آن‌ها بیشتر از سرشکنی عوض باشد پس پارامترها به دقت‌های بدی دارند جواب با قید شل می‌گویند یعنی دقت مقادیر پارامترهای مدل دارای خیلی بد است و خیلی بالا برای پارامترهای مدل داخلی متغیر با مقدار اولیه‌ی آن‌ها است loosely constraint solution قید شل

جواب با قید سخت tightly constraint solution

برای حالتی که دقت‌ها را اتصال کوچک بگیریم مثلاً $\sigma_i = 0.4\,mm$

که در اینجا پارامترهای مدل تغییر چندانی با مقدار اولیه‌شان داشته باشند

PULYAN

$\underline{w}_1$ در مدل ترکیبی $= \underline{f}(\underline{x}^\circ, \underline{l}^\circ)$

$\underline{w}_1$ در مدل پارامتریک $= \underline{l} - \underline{A}_1 \underline{x}^\circ$

در ترکیبی $H_s \Rightarrow H'_1 - H_s = 42.107$

$H_s^\circ = H_1^\circ - 42.107 = 542 - 42.107 = 499.893$

$$\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 42.107 \\ 12.424 \\ 42.251 \\ 8.464 \\ 46.138 \\ 46.269 \\ 33.802 \end{bmatrix} - \underline{A}_1 \begin{bmatrix} 542 \\ 529.5 \\ 487.2 \\ 495.5 \\ 499.893 \end{bmatrix}$$

سؤال: جواب بهترین جواب دستگاه معادلات under-determined زیر را به دست آورید

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} \\ \underline{v}^T P \underline{v} + \lambda\, \underline{x}^T \underline{x} = \min \end{cases}$$

که در آن λ ثابتی مشخص است

حل در تمرینات بوده

سؤال: جواب بهترین جواب مدل ترکیبی را با استفاده از جواب بهترین جواب مدل پارامتریک به دست آورید:

$\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = 0$

با استفاده از بسط تیلور ای برای معادلات به صورت خطی سازی تابع ضمنی تیلور

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = \underline{f}(\underline{x}^\circ, \underline{l}^\circ) + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\Big|_{\substack{x = x_\circ \\ l = l_\circ}} \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}^\circ)}_{= \delta} + \frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{\substack{x^\circ \\ l^\circ}} \underbrace{(\underline{l} - \underline{l}^\circ)}_{= v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{A}\,\delta + \overbrace{\underline{B}\,\underline{v}}^{\bar{v}} + \underline{w} = 0 \\ \underline{v}^T P \underline{v} = \min \end{cases} \Rightarrow \hat{\delta} = -(\underline{A}^T \underline{C}_w^{-1} A)^{-1} A^T \underline{C}_w^{-1} \underline{w}$$

$$\underline{C}_w = B\, \underline{C}_l\, B^T$$

$\underline{l} = \underline{f}(\underline{x})$

$$l = f(\underline{x}^\circ) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{A}\Big| \underbrace{(x - x_\circ)}_{\delta} \Rightarrow \underbrace{l - f(\underline{x}^\circ)}_{w} = \underline{A}\,\delta$$

$$\Rightarrow \bar{v} + \underline{w} = \underline{A}\,\delta$$

با تعبیر متغیر $-\underline{\tilde{V}} = \underline{B}\,\underline{\ell}$

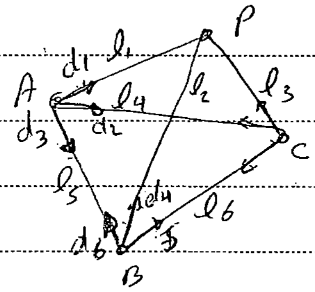
$$\Rightarrow \underline{A}\,\underline{\delta} - \underline{\tilde{V}} + \underline{W} = 0 \Rightarrow \underline{\tilde{V}} - \underline{W} = \underline{A}\,\underline{\delta}$$

$$\hat{\underline{\delta}} = (\underline{A}^T \underline{C}_{\tilde{V}}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_{\tilde{V}}^{-1} (-\underline{W})$$

$$\underline{\tilde{V}} = -\underline{B}\,\underline{\ell} \Rightarrow \underline{C}_{\tilde{V}} = (-\underline{B})\,\underline{C}_{\ell}\,(-\underline{B})^T$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{\delta}} = -\left(\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{C}_{\ell}\,\underline{B}^T)^{-1} \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{C}_{\ell}\,\underline{B}^T)^{-1} \underline{W}$$

مثال [illegible]



$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_6 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_9 \end{bmatrix} \Big\}\ 15 \quad \text{[illegible]}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \vdots \\ x_P \\ y_P \\ z_{0A} \\ z_{0B} \\ z_{0C} \end{bmatrix}\ 11$$

استقلال d_1 و d_2 و d_3
با نقطه A جهت مشخص می‌کنند
B هم استقلال d_4 و d_5 و d_6 و
C نیز d_7 و d_8 و d_9 را خواهیم

$\ell = \ell - \ell^0$

$df = 15 - 11 = 4$

$$v_1 + l_1 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$\vdots$$

$$Az_{AP} = d_1 + z_{0A}$$

$$v_6 + l_6 = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$v_7 + d_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_P - x_A}{y_P - y_A}\right) - z_{0A}$$

$$\vdots$$

$$v_{15} + d_9 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C}\right) - z_{0C}$$

۳ شرط دیگر باید اضافه کنیم یکی برای مبدأ سیستم مختصات

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \delta x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} \delta y_i = 0 \\ \sum (x_i\, \delta y_i + y_i\, \delta x_i) = 0 \end{cases}$$

توجیه سیستم مختصات

با ابتدا مدل را خطی کنیم

$$\underline{l} - \underline{l}^{\circ} = \underline{A}\,\underline{\delta} \qquad \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta x_A \\ \delta y_A \\ \vdots \\ \delta x_P \\ \delta y_P \end{bmatrix}$$

۱۴ تا

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{(x_P - x_A)}{l_1} & -\frac{(y_P - y_A)}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_P - x_A}{l_1} & \frac{y_P - y_A}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{(x_C - x_B)}{l_6} & -\frac{(y_C - y_B)}{l_6} & \frac{x_C - x_B}{l_6} & \frac{y_C - y_B}{l_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y_P - y_A}{d_1^2} & \frac{x_P - x_A}{d_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_P - y_A}{d_1^2} & \frac{x_P - x_A}{d_1^2} & -1 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \frac{x_B - x_C}{d_9^2} & \frac{y_B - y_C}{d_9^2} & -\frac{x_B - x_C}{d_9^2} & -\frac{y_B - y_C}{d_9^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_A & -x_A & y_B & -x_B & y_C & -x_C & -y_B & -x_P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این سه سطر معادلات مجهولات را در ماتریس A اضافه کنیم مجهولات همان δ ها هستند

اول این کار را باید در ماتریس l خود سه تا صفر اضافه کنیم

در اینجا چون مدل غیر خطی است و مدل خطی δ ها را داریم نوشتن ماتریس ها

آسان است مدل خطی یا درجه یک دارد

Subject:
Date: No:

$$dx_G = \cancel{ct} = \frac{\sum dx_i}{n} \Rightarrow \sum dx_i =$$

$$dy_G = \cancel{ct} = \frac{\sum dy_i}{n} \Rightarrow \sum dy_i =$$

$$= \frac{1}{n} \sum d\left(tg^{-1}\frac{x_i - x_G}{y_i - y_G}\right) = \cancel{ct}$$

$$dAz_G = \frac{\sum dAz_{Gi}}{n} = \cancel{ct}$$

$\alpha_1 \theta_1 + \alpha_2$

subject:
Year: Month: Date: ( )

حل تمرین

استقلال بردارهای پایه: سه بردار $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$

$$\alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2} + \alpha_3 \vec{V_3} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

اثبات مستقل بودن ۳ بردار متعامد:

$\vec{v_3}, \vec{v_2}, \vec{v_1}$ همه بر هم عمودند

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v_1} = \alpha_1 \vec{v_1} \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cancel{\vec{v_2} \cdot \vec{v_1}} + \alpha_3 \cancel{\vec{v_3} \cdot \vec{v_1}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|^2}$$

$$\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{\vec{v} \, v_i}{\|v_i\|^2} = 0$$

می‌توانند استقلال دو بردار غیر متعامد را ثابت کنند

مستقل بودن دو بردار آماری یعنی ناهمبستگی CoV (کوواریانس)

اثبات فرم درجه quadratic

$$\frac{\partial}{\partial B} \operatorname{trace}(BAk) = Ak \qquad B_{m \times n} \; A_{n \times n} \; k_{n \times m}$$

$$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

سطرها

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & & k_{1m} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & & k_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{bmatrix}$$

ستون‌ها

PARSCO

subject:

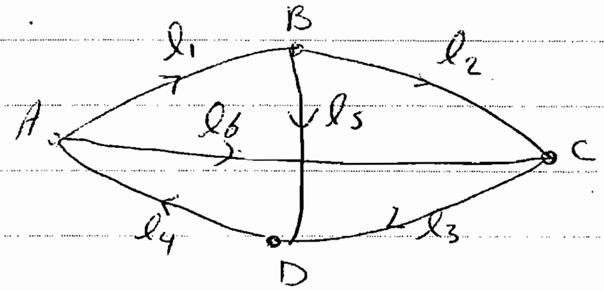
Year: Month: Date: ( )

$$B A = \begin{bmatrix} b_1 A \\ b_2 A \\ \vdots \\ b_m A \end{bmatrix} \quad ; \quad B A k = \begin{bmatrix} b_1 A k_1 & b_1 A k_2 & \cdots & b_1 A k_m \\ b_2 A k_1 & b_2 A k_2 & & b_2 A k_n \\ \vdots & & & \\ b_m A k_1 & b_m A k_2 & & b_m A k_m \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\phi = \operatorname{trace}(BAk) = b_1 A k_1 + b_2 A k_2 + \cdots + b_m A k_m$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial b_1} & \frac{\partial \phi}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial b_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A k_1 & A k_2 & \cdots & A k_m \end{bmatrix} = Ak$$

مثال:



$$l = \begin{bmatrix} 10.505 \\ 5.36 \\ -8.523 \\ -7.348 \\ 3.187 \\ 15.881 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \sigma \\ 0.006 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.012 \end{array}$$

$l_1 = H_B - H_A$

$l_2 = H_C - H_B$

$l_3 = H_D - H_C$

$l_4 = H_A - H_D$

$l_5 = H_B - H_D$

$l_6 = H_C - H_A$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} H_A & H_B & H_C & H_D \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

کمترین مربعات بدون وزن:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T L =$$

PARSCO

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix}$$

وابستگی سطرهای این ماتریس باعث singular شدن آن می‌شود یعنی det=0

$e_1+e_2+e_3+e_4=0 \Rightarrow$ وابسته هستند $c_1v_1+c_2v_2+\dots c_nv_n=0$

مفهوم singular بودن یعنی بی‌نهایت جواب است.

singular شدن شبکه - دلیل بی‌صورت کردن شبکه است یا شناخت از ... حاصل است

راههایی وجود دارد برای برطرف شدن یا singular که از این بی‌نهایت جواب یک جواب را در نظر بگیریم مثلاً ۱. ثابت کردن یک نقطه ۲. استفاده از شبه معکوس

$H_A = 437.59$

پس ما H_A را fix کردیم یعنی نقطه‌ی A بین مجهولات الحاق کردیم. پس ماتریس A ستون اول حذف می‌شود

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPl \quad l = \begin{bmatrix} l_1 + H_A \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 - H_A \\ l_5 \\ l_6 + H_A \end{bmatrix} = l$$

$$X = \begin{bmatrix} 448.108 \\ 453.46 \\ 444.943 \end{bmatrix}$$

subject:

Year: Month: Date: ( )

مثال: بررسی اهمیت ماتریس P

دقت

تغییرات P باعث تغییر $C_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1}$ می‌شود. ولی در $\hat{x}$ تغییری حاصل نمی‌شود.

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad l = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\underbrace{\delta p}_{\text{متغیر}} \end{bmatrix}$$

$n \times u$ ، 3 ، مجهولات

$$\delta p = -1 \longrightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} +3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta p = 0 \longrightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

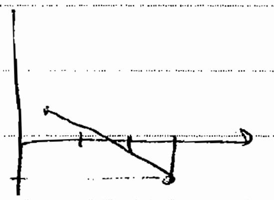
$$\delta p = 1 \longrightarrow$$

$$\delta p = \infty \longrightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 5/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$$

با نامتناهی شدن وزن‌ها سبب انجام جبری جواب
ایجاد جواب مشابه ای از آن می‌شود.

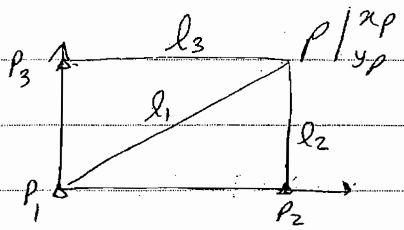
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 1 + 2y = 1 \\ -x + y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \end{cases}$$

نقش مشاهده در تعداد سبب adjustment به وزن
آن مشاهده بستگی دارد.



هر چه وزن δp بالاتر رود به سمت معادله سوم می‌رویم داشت معادلات
آخر بالاتری دارد.

مثال: بیابید دقت مشاهدات



$$\begin{cases} \Delta x_i = x_p - x_i \\ \Delta y_i = y_p - y_i \end{cases} \qquad \sigma_{\Delta x_i} = \sigma_{\Delta y_i} = k\, l_i$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad rank(A) = 2$$

هدف: بیابید دقت مشاهدات :

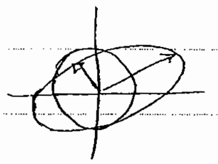
شرط: اگر بیضی خطا دایره باشد به شعاع 1cm

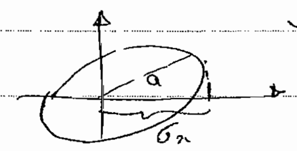
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2 l_1^2} & & & \\ & \frac{1}{k^2 l_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{k^2 l_3^2} \end{bmatrix}_{6\times 6} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 1/l_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/l_3^2 \end{bmatrix}$$

$$C_x = (A^T P A)^{-1} = k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ پس بیضی خطا دایره است

$$C_x = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0 \Longrightarrow$$ بیضی خطا دایره نیست

دایره شدن یعنی خطاها در همه جا یکسان است



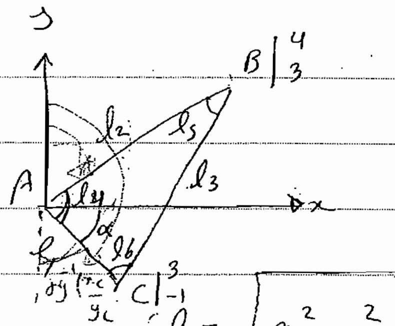


$$a^2 = b^2 = \frac{k^2}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} = \left(\frac{1}{100}\right)^{2\,m} = 1\,cm$$

$$k = \left(\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}\right) / 100$$

subject:

Year: Month: Date: ( )



حل تمرین adjustment

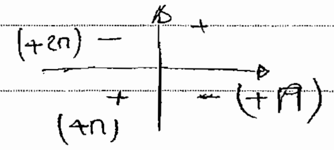
الف) α مقدار معلوم

ب) α مشاهده

ج) α مجهول

$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$

الف)



$$l_1 = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$l_2 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

$$l_3 = \sqrt{(x_B - x_c)^2 + (y_B - y_c)^2}$$

$$l_4 = Az(AC) - Az(AB) =$$

$$Az = tg^{-1}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) + C$$

$$l_4 = tg^{-1}\left(\frac{x_c}{y_c}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_B}{y_B}\right) + C_4$$

$$l_5 = Az(BA) - Az(BC) = tg^{-1}\left(\frac{+x_B}{+y_B}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}\right) + C_5$$

$$l_6 = Az(CB) - Az(CA) = tg^{-1}\left(\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_C}{y_C}\right)$$

۶ معادله ۴ مجهول

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

ب) α مشاهده

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{x_c}{y_c}\right) + \pi/2$$

ج) α مجهول

$$l_4 = \pi/2 - tg^{-1}\left(\frac{x_B}{y_B}\right) + \alpha$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \\ \alpha \end{pmatrix}$$

PARSCO

$$N = (A^T P A)^{-1} \qquad A = \frac{\partial l}{\partial x}$$

$$l = f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{l_0} + f'(x_0)(x - x_0) \ldots$$

$$\Rightarrow l - l^0 = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}}_{A} (x - x_0)$$

syms x_c y_c ...

$$N = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} l_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$$N = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.78 & 0.69 & -0.11 & -0.44 & -0.12 \\ & 1.34 & -0.25 & -0.05 & 0.16 \\ & & 1.0325 & -0.127 & 0 \\ \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_{A_n} & & & 1.175 & \ldots \end{array}\right]_{5\times 5} \quad l_n$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x_B} & \frac{\partial l_1}{\partial y_B} & \frac{\partial l_1}{\partial x_C} & \frac{\partial l_1}{\partial y_C} & \frac{\partial l_1}{\partial \alpha} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial l_6}{\partial x_B} & \ldots & & & \frac{\partial l_6}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

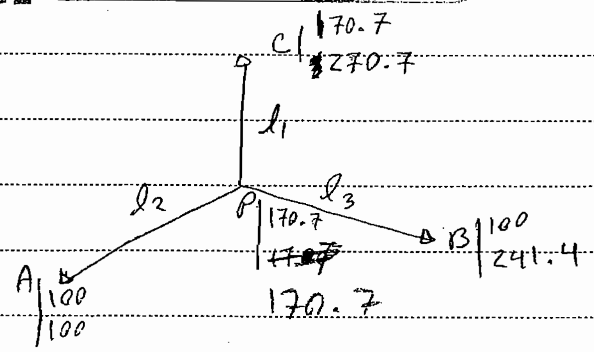
وقتی رنک ماتریس را بگیریم ۴ می‌شود یعنی یکی وابسته است که می‌توانیم بر حسب بقیه بنویسیم

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = e_5$$

$$A_n \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = l_n \quad \Leftarrow$$ اگر این دستگاه حل شود یعنی ماتریس وابستگی دارد

$$\underline{\alpha} = (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T l_n = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ همان مختصات C و B است

پس مجهول بودن α باعث Singular شدن ماتریس می‌شود طوری که یکی از ستون‌ها وابسته می‌شود



حل:

$$\underline{l} = \begin{bmatrix} 100.01 \\ 100.02 \\ 100.03 \end{bmatrix} \qquad \sigma_l = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix}$$

الف) بدون وزن ب) با وزن

با داشتن این مشاهدات به دست آوردن مختصات مجهول P.

$$X = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

$$l_1 = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$
$$l_2 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$
$$l_3 = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$A = \frac{\delta l}{\delta x}\Big|_{x = x_0} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}_{n \times u} 3\times 2$$

$$\hat{x} = x_0 + \delta x$$
$$x_0 + (A^T A)^{-1} A^T \delta l = \begin{pmatrix} 170.723 \\ 170.702 \end{pmatrix}$$

بدون در نظر گرفتن ماتریس وزن به دست بیاوریم

$$\hat{x} = x_0 + A^+ \delta l = \begin{pmatrix} 170.732 \\ 170.702 \end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن ماتریس P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{l_1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{l_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{l_3}^2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = x_0 + (A^T P A)^{-1} A^T P \delta l = \begin{pmatrix} 170.713 \\ 170.682 \end{pmatrix}$$

در برآورد x ماتریس وزن در این اثری ندارد چون نسبت وزن‌ها باهم متفاوت است اگر نبود جواب من $\hat{x}$ مثل هم می‌دهد.

شبه معکوس

$$\hat{x} = x_0 + A^+ \delta l = \begin{pmatrix} 170.723 \\ 170.702 \end{pmatrix}$$

چون که شبه معکوس می‌دهد جواب ماتریس وزن یکه است. حال راه حل چیست؟ یکه کردن ماتریس وزن

Subject:

Date: No:

هر ماتریس متقارن و مثبت را می‌توان به صورت ماتریس
بالا مثلثی و پایین مثلثی نوشت

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} = LU = LL^T = U^T U$$

بجای P ، $U^T U$ را می‌گذاریم

$$\Rightarrow \hat{x} = (A^T U^T U A)^{-1} A^T U^T U L$$

$$= [\underbrace{(UA)}_{A_n}{}^T UA]^{-1} (UA)^T \underbrace{UL}_{l_n} = [A_n^T A_n]^{-1} A_n^T l_n$$

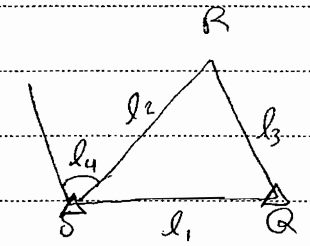
یعنی سیستم با وزن یک تبدیل شده

$$\hat{x} = x_0 + A_n^+ \delta l = \begin{pmatrix} 170.713 \\ 170.682 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^+ \Rightarrow A = \underset{\text{chol}(P)}{U}A \qquad L = U^T = U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{l_1}} & & \\ & \frac{1}{\sigma_{l_2}} & \\ & & \frac{1}{\sigma_{l_3}} \end{bmatrix}$$

[illegible]

سوال: میخواهیم را شبکه بگیریم که ۲ تا نقطه ثابت وجود داشته باشد



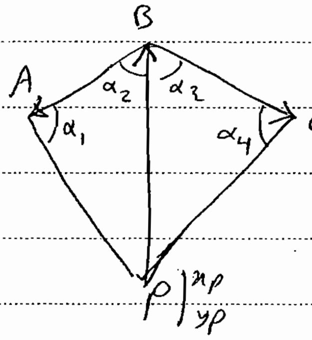
این شبکه over_constrant است یعنی تعداد
مشاهدات بیشتر است یعنی l_1 و l_4 زائد هستند
چون S و Q ثابت هستند و l_1 و l_4 مشخص

S $\left| \begin{matrix} 100 \\ 100 \end{matrix} \right.$ Q $\left| \begin{matrix} 150 \pm 1cm \\ 98 \pm 1cm \end{matrix} \right.$ حال اگر این S و Q Constrant وزن داشته باشند مجهول باشند

$l_1 = \ldots$

$l_2 \ldots$

Subject
Date



برای حالت شرط . می‌خواهیم نقطه‌ی P را بسنجیم

data_defect → { دوران → بدون آزیموت ؛ مقیاس → بدون طول ثابت ؛ انتقال { x, y

در شبکه‌های مسطحاتی

شبکه‌های ارتفاعی → { یک نقطه ثابت

$$df = n - u + (d-d)$$

در این مثال defect= است چون A و B و C ثابت هستند پس دوران مقیاس و انتقال نداریم

$$df = 4 - 2 = 2$$

I) $A\hat{B}C = Az\,BA - Az\,BC = \alpha_2 + \alpha_3$

$$\begin{cases} \dfrac{\Sigma\alpha_1}{BP} = \dfrac{\Sigma\left[\pi-(\alpha_1+\alpha_2)\right]}{AB} \\ \dfrac{\Sigma\alpha_4}{BP} = \dfrac{\Sigma\left[\pi-(\alpha_3+\alpha_4)\right]}{BC} \end{cases} \Rightarrow \boxed{BP = \frac{\Sigma\alpha_1}{\Sigma(\alpha_1+\alpha_2)}\,AB = \frac{\Sigma\alpha_4}{\Sigma(\alpha_3+\alpha_4)}\,BC}$$

$$g(\hat{l}) = 0$$

$$g(\hat{l}) = \underbrace{g(l)}_{w} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial l}}_{B}\underbrace{(\hat{l}-l)}_{\hat{v}}$$

$$w + B\hat{v} = 0$$

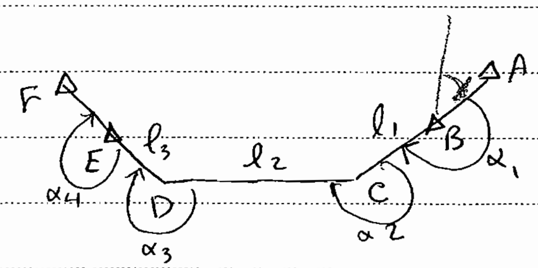
شبکه‌ای که c defect دارد وارد adjustment نمی‌شود

ارتفاع c و α_4 نبود مسئله c_defect باشد

Subject

Date

مثال، نقطه A fix و B را داریم، E و F نیز fix هستند



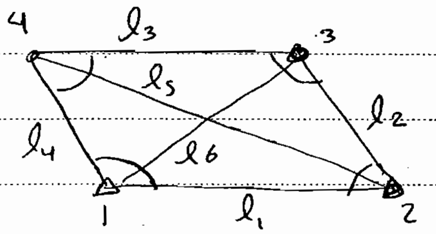
$df = n - u + d - d = 7 - 4 + 0 = 3$

I) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{Az_{BA} + \alpha_1 + \pi}_{Az_{CB}} + \alpha_2 + \pi}_{Az_{DC}} + \alpha_3 + \pi}_{Az_{ED}} + \alpha_4 = Az_{EF}$

II) $\sum x_i = 0 \Rightarrow x_B + l_1 \Sigma(Az_{BC}) + l_2 \Sigma(Az_{CD}) + l_3 \Sigma(Az_{DE}) = x_E = 0$

III) $\sum y_i = 0 \Rightarrow y_B + l_1 \cos(Az_{BC}) + l_2 \cos(Az_{CD}) + l_3 \cos(Az_{DE}) - y_E = 0$

مثال، نقاط ۱ و ۲ fix ، $y_1 = y_2$



$df = n - u + d - d = 6 - 5 = 1$

اطلاعات اضافی

یا $df = (n+s) - u + d - d$

$(6+3) - 8 = 1$

$l_1^2 + l_4^2 - 2 l_1 l_4 \cos(\hat{1}) = l_5^2$ $\qquad \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 2\pi$

$$\hat{1} = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_4^2 - l_5^2}{2 l_1 l_4}\right)$$

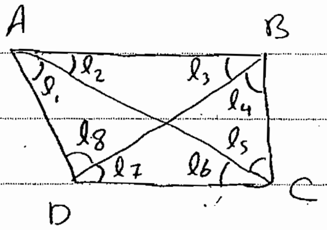
$$\hat{2} = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - l_6^2}{2 l_1 l_2}\right)$$

$$\hat{3} = \cos^{-1}\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_5^2}{2 l_3 l_2}\right)$$

$$\hat{4} = \cos^{-1}\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 + l_6^2}{2 l_3 l_4}\right)$$

subject:

Year: Month: Date: ( )



حل:

$$df = n - u + d.d = 8 - 8 + 4 = 4$$

شبکه‌ها → d.d:

- 2D → x, y, آزیموت, مقیاس
- 1D → H
- 3D → x_0, y_0, z_0 ; سه دوران α, β, γ ; مقیاس

$$\begin{cases} l_1 + l_8 + l_7 + l_6 = \pi \\ l_7 + l_6 + l_5 + l_4 = \pi \\ l_5 + l_4 + l_3 + l_2 = \pi \end{cases}$$ سه معادله

برای شرط ضلع شرط Sها را با هم بعد حذف کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{S l_1}{DC} = \dfrac{S l_6}{AD} \quad (1) & \dfrac{S l_5}{AB} = \dfrac{S l_2}{BC} \quad (3) \\ \dfrac{S l_7}{BC} = \dfrac{S l_4}{DC} \quad (2) & \dfrac{S l_3}{AD} = \dfrac{S l_8}{AB} \quad (4) \end{cases}$$

۴ معادله ۴ مجهول

$$1, 2 \Rightarrow \cancel{DC} = \frac{S l_1}{S l_6} AD = \frac{S l_4}{S l_7} BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{S l_6}{S l_1} \frac{S l_4}{S l_7} BC \underset{\text{از } (4)}{=} \frac{S l_3}{S l_8} AB$$

$$\Rightarrow BC = \underbrace{\frac{S l_1}{S l_6} \frac{S l_7}{S l_4} \frac{S l_3}{S l_8}}\, AB \underset{(3)}{=} \underbrace{\frac{S l_2}{S l_5}}\, AB \Rightarrow$$

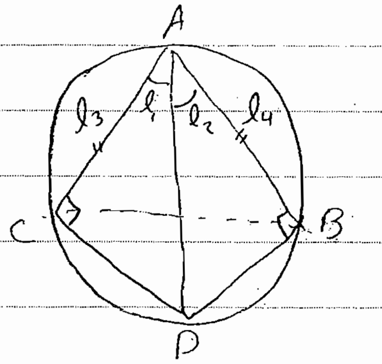
معادله چهارم:

$$S l_1 \, S l_3 \, S l_5 \, S l_7 = S l_2 \, S l_4 \, S l_6 \, S l_8$$

۲/

subject:

Year: Month: Date: ( )



نقاط A و B و C و d محیطی یک دایره قرار دارند

زاویه‌های B و C مساوی ۹۰

$df = \underset{n+s}{n} - u + d\,d =$

$(4+2)$ $\quad (n+s) + d - d$

ماتریس دایره را بیابید $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $\quad (x_0, y_0, R)$ مجهولات دایره

$df = \underset{\text{کامپایلر}}{(4} + \underset{\substack{\text{functional}\\\text{code}}}{2)} - (\underset{\text{تخمین نقاط}}{4} + \underset{\text{مجهولات معادله دایره}}{3}) + 3 = 2$

$4+2-1$

$BD = l_4 \ \text{tg}\ l_2$ $\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$CD = l_3 \ \text{tg}\ l_1$

I) $AD^2 = l_4^2 + BD^2 = l_3^2 + CD^2$

II $BC^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2\, l_3 l_4 \cos(l_1 + l_2)$

$= CD^2 + BD^2 + 2\, CD \cdot BD \cos(l_1 + l_2)$

مدل ترکیبی :

$$f(\hat{x},\hat{l})=0 \Rightarrow f(\hat{x},\hat{l})=\underbrace{f(x^\circ,l^\circ)}_{W_{r\times 1}}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{A_{r\times u}}\Big|_{\substack{x=x^\circ\\ l=l^\circ}}\underbrace{(\hat{x}-x_\circ)}_{\delta x_{u\times 1}}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial l}}_{B_{r\times n}}\Big|_{\substack{\hat{l}=l\\ \hat{x}=x}}\underbrace{(\hat{l}-l)}_{\hat{v}}=0$$

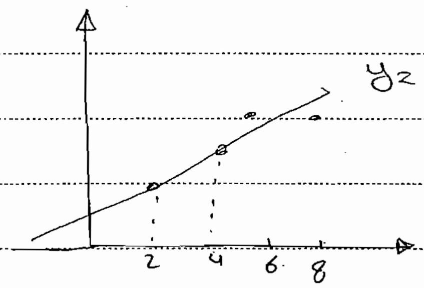
l بردار مشاهدات است

$$W+A\,\delta\hat{x}+B\hat{v}=0$$

$$\delta\hat{x}=-(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}W \qquad M=BP^{-1}B^T$$

$$\hat{v}=P^{-1}B^TM^{-1}\left[A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^T-M\right]M^{-1}W$$

مثال : اگر x معلوم باشد



$$X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \qquad l=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}$$

$$\hat{x}=(A^TPA)^{-1}A^TPL$$

$$y_i=ax_i+b$$

$$\begin{cases}y_1=2a+b\\ y_2=4a+b\\ y_3=6a+b\\ y_4=8a+b\end{cases}$$ مدل پارامتریک

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\\6&1\\8&1\end{bmatrix} \qquad \delta_l=\begin{bmatrix}y_1-2a^\circ-b^\circ\\ y_2-4a^\circ-b^\circ\\ y_3-6a^\circ-b^\circ\\ y_4-8a^\circ-b^\circ\end{bmatrix}$$

وقتی y مشاهده است معادله‌ها پارامتریک است

حال اگر هم x و y مشاهده باشند مدل باید ترکیبی شود

فرض کنید m نقطه مشاهده شود

$$f_i=y_i-ax_i-b=0$$

معادلات $r=m$

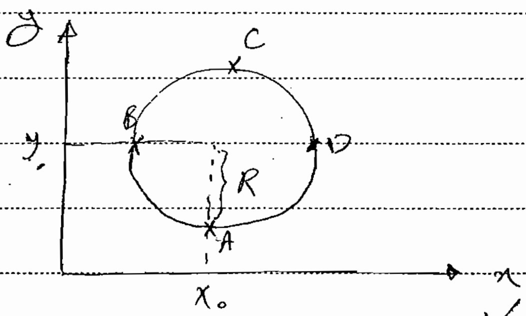
$u=2$ مجهولات

$n=2m$ مشاهدات

$n = y_+$

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x} = \begin{bmatrix} -x_1 & -1 \\ -x_2 & -1 \\ \vdots & \\ -x_m & -1 \end{bmatrix}_{m\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \cdots & & & & -a & 1 \end{bmatrix}_{m \times 2m}$$

$$w = \begin{bmatrix} y_1^\circ - a^\circ x_1^\circ - b^\circ \\ y_2^\circ - a^\circ x_2 - b^\circ \\ \vdots \\ y_m^\circ - a^\circ x_m^\circ - b^\circ \end{bmatrix}$$



مثال: فرض کنید ما ۴ تا مشاهده داریم
با استفاده از مشاهدات مختصات A و B و C و D
(۸ تا مشاهده) ۳ تا مجهول را برآورد کنید

مسئله جواب ندارد برای ۴ تا نقطه. پس می‌رویم یک دایره‌ای را پیدا می‌کنیم
که جواب بهترین حالت باشد

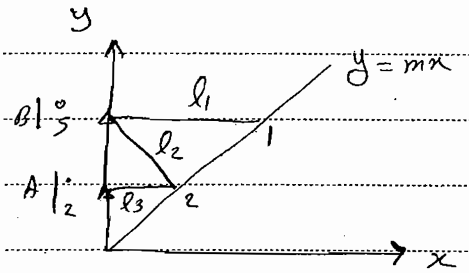
$$(\hat{x}_A - \hat{x}_\circ)^2 + (\hat{y}_A - \hat{y}_\circ)^2 - R^2 = 0$$
$$(\hat{x}_B - \hat{x}_\circ)^2 + (\hat{y}_B - \hat{y}_\circ)^2 - R^2 = 0$$
$$(\hat{x}_C - \hat{x}_\circ)^2 + (\hat{y}_C - \hat{y}_\circ)^2 - R^2 = 0$$
$$(\hat{x}_D - \hat{x}_\circ)^2 + (\hat{y}_D - \hat{y}_\circ)^2 - R^2 = 0$$

$$\underset{4\times 8}{B} = \begin{bmatrix} 2(x_A - x_\circ) & 2(y_A - y_\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & & 2(x_D - x_\circ) & 2(y_D - y_\circ) \end{bmatrix}_{4\times 8}$$

$$\underset{4\times 3}{A} = \begin{bmatrix} -2(x_A^\circ - x_\circ) & -2(y_A^\circ - y_\circ) & -2R \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$W = \begin{bmatrix} (x_A^\circ - x_\circ^\circ)^2 + (y_A^\circ - y_\circ^\circ)^2 - R^2 \\ \vdots \\ (x_D^\circ - x_\circ^\circ)^2 + (y_D^\circ - y_\circ^\circ)^2 - R^2 \end{bmatrix}$$

functional constraint



الف) فرض میکنیم نقاط 1 و 2 روی خط نشسته باشند

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ m \end{pmatrix}$$

تعداد مشاهدات نقاط + تعداد

$$df = n + s - u$$

$$(4+2)$$

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 5)^2} \\ l_2 = \sqrt{(x_2^2 + (y_2 - 5)^2} \\ l_3 = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 2)^2} \end{cases}$$

$$g(\hat{x}) = \begin{cases} g_1 = y_1 - m x_1 = 0 \\ g_2 = y_2 - m x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial l}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{l_1} & \frac{y_1 - 5}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

$$A_C = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} -m^\circ & 1 & 0 & 0 & -x_1^\circ \\ 0 & 0 & -m^\circ & 1 & -x_2^\circ \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

$A\,p\,\delta l \quad \left| \frac{\delta l}{\ldots} \right.$

$$\delta\hat{x} = (A^T p A + A_C^T A_C)^{-1} (A^T p\, \delta_l + A_C^T W_C)$$

$$W_C = \begin{bmatrix} y_1^\circ - m^\circ x_1^\circ \\ y_2^\circ - m^\circ x_2^\circ \end{bmatrix}$$

در مدل پارامتریک به اندازه‌ی تعداد مشاهدات معادله داریم

در مدل ترکیبی ... معادله ... به اندازه‌ی ... شرط ... اندازه‌ی ...

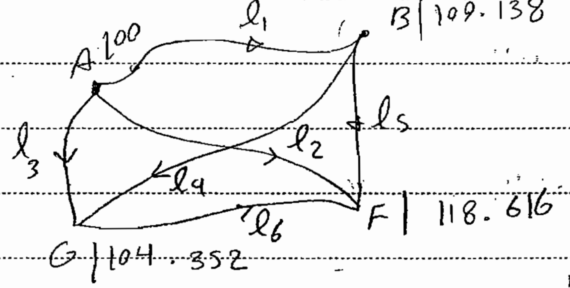
A_C

$$\begin{cases} \hat{l} = f(\hat{x}) \\ g(\hat{x}) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{v} = A\,\delta\hat{x} - \delta l \\ W_C + A_C A \hat{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{v}^T p \hat{v} = \min \\ W_C + A_C A \hat{x} = 0 \end{cases}$$

با ضریب لاگرانژ

$\Rightarrow \delta\hat{x}$

مثال ۲ :



$$l = \begin{bmatrix} 9.138 \\ 18.640 \\ 4.310 \\ -4.786 \\ 14.293 \end{bmatrix} \rightarrow 9.5$$

اگر A ارتفاعش معلوم

$\hat{H}_A = H_A^\circ + \delta x_1$

معادلات

$$\begin{cases} \hat{H}_A = H_A^\circ + \delta x_1 \\ \hat{H}_B = H_B^\circ + \delta x_2 \\ \hat{H}_F = H_F^\circ + \delta x_3 \\ \hat{H}_G = H_G^\circ + \delta x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{l}_1 = \hat{H}_B - \hat{H}_A = (H_B^\circ + \delta x_2) - (H_A^\circ + \delta x_1) \\ \hat{l}_2 = \hat{H}_F - \hat{H}_A \\ \hat{l}_3 = \hat{H}_G - \hat{H}_A \\ \hat{l}_4 = \hat{H}_G - \hat{H}_B \\ l_5 = \hat{H}_F - H_B \\ l_6 = \hat{H}_F - \hat{H}_G \end{cases}$$

$H_A - 100$

$$\boxed{\hat{v} = A\,\delta\hat{x} - \delta l}$$

$(H_A - 100) = 0$

$$A = \frac{\partial l}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس A singular است

چون نقطه fix نداریم این مسئله راه‌حل ندارد

با min کردن و یک Constraint حل می‌کنیم

$A\,\delta x + W = 0$

داریم: فرض می‌کنیم ارتفاع A قبل و بعد از سرشکنی تغییر نکند

$\hat{H}_A = \overset{\circ}{H}_A \longrightarrow \delta\hat{x}_1 = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_C} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix}}_{\delta\hat{x}} + \underset{W_C}{0} = 0 \qquad \delta_l = \begin{bmatrix} l_1^{\circ} - \overset{\circ}{H}_B + \overset{\circ}{H}_A \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\delta\hat{x} = (A^T P A + A_C^T A_C)^{-1} (A^T \delta_l) = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.0094 \\ -0.024 \\ 0.0119 \end{bmatrix}$$

جواب این معادلات با بالایی یکی است اگر A در سرشکنی ثابت باشد معادلات $H_A - 100 = 0$ را اعمال کرده‌ایم

یعنی نقطه مشخص شده است

ب) فرض میانگین ارتفاعات قبل و بعد از سرشکنی ثابت باشد

$$\frac{1}{n}\sum \overset{\circ}{H}_i = \frac{1}{n}\sum \hat{H}_i \Rightarrow \sum(\overset{\circ}{H}_i - \hat{H}_i) = 0 \Rightarrow \sum_i \delta\hat{H}_i = 0$$

$\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4 = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_C} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} + \underset{W_C}{0} = 0$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A \\ A_C \end{bmatrix} \qquad P^* = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_C \end{bmatrix} \qquad \delta_l^* = \begin{bmatrix} \delta_l \\ W_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{\circ} - H_B + H_A \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

از تئوری ثابت بودن بی‌نهایت می‌گیریم

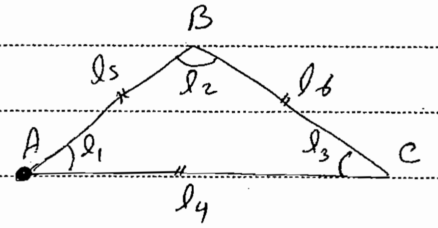
$$\boxed{\delta\hat{x} = (A^{*T} P^* A^*)^{-1} A^{*T} P^* \delta l^*}$$

حالت کلی:

یعنی فرض A حذف داشته باشد

$$A^* = \begin{bmatrix} A \\ \hline 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \end{bmatrix} \qquad P^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & \\ & 6\times6 \end{bmatrix}_{7\times7} \qquad \delta_l^* = \begin{bmatrix} \delta_l \\ 0 \end{bmatrix}$$

وقتی به A وزن آمی دهیم جواب معادلات پارامتریک است. اگر بعد یکی بالا برود به مدل بیشتر می‌رسد.



مثال:

فرض کنید مختصات نقطه A و طول ضلع را ثابت و آزیموت AB هم به همین صورت باشد.

$$\begin{cases} 1 & \hat{x}_A - \overset{\circ}{x}_A = 0 \longrightarrow \delta\hat{x}_A = 0 \longrightarrow g_1(\hat{x}) = 0 \\ 2 & \hat{y}_A - \overset{\circ}{y}_A = 0 \longrightarrow \delta\hat{y}_A = 0 \longrightarrow g_2(\hat{x}) = 0 \\ 3 & \hat{\alpha}_{AB} - \overset{\circ}{\alpha}_{AB} = 0 \longrightarrow tg^{-1}\left(\dfrac{\hat{x}_B - \hat{x}_A}{\hat{y}_B - \hat{y}_A}\right) - tg^{-1}\left(\dfrac{\overset{\circ}{x}_B - \overset{\circ}{x}_A}{\overset{\circ}{y}_B - \overset{\circ}{y}_A}\right) = 0 \end{cases}$$

برای معادله 3: $\overset{\circ}{\alpha}_{AB} + \left.\dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial x}\right|_{x=\overset{\circ}{x}} (\hat{x} - \overset{\circ}{x}) - \overset{\circ}{\alpha}_{AB} = 0$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial x_A} & \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial y_A} & \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial x_B} & \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial y_B} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{x}_A \\ \delta\hat{y}_A \\ \delta\hat{x}_B \\ \delta\hat{y}_B \\ \delta\hat{x}_C \\ \delta\hat{y}_C \end{bmatrix} + 0 = 0$$

$\hat{X}_0 = x_A$

$\hat{Y}_A$

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial \hat{x}} & & & \end{bmatrix}$$

A_C I.n.c.

(δx)

$$\Rightarrow \delta\hat{x} = (A^T P A + A_C^T A_C)^{-1} (A^T P \delta l)$$

معادلات $\begin{cases} l_1 = \ldots g(x) \\ l_2 \ldots \\ l_3 \ldots \end{cases}$

۶ معادله

فرض کنید میانگین مختصات ها ثابت باشد و آزیموت AB ثابت باشد.

$$\begin{cases} \delta x_A + \delta x_B + \delta x_C = 0 \\ \delta y_A + \delta y_B + \delta y_C = 0 \\ \hat{\alpha}_{AB} - \overset{\circ}{\alpha}_{AB} = 0 \end{cases} \qquad A_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & \dfrac{\partial \alpha_{AB}}{\partial \hat{x}} & & & \end{bmatrix}$$

اگر inner شود $\Rightarrow \delta\hat{\alpha}_{AG} + \delta\hat{\alpha}_{BG} + \delta\hat{\alpha}_{GG} = 0$

inner شرط

POUYAN

$$\Rightarrow \delta\hat{x} = (A^T P A + A_{I.c}^T A_{I.c})^{-1} (A^T P \delta l)$$

سرشکن شبکه

یعنی میانگین مختصات ها و آزیموت های نقاط به مرکز ثقل شبکه ثابت باشد (inner است

برای حل می خواهیم و است functional c بنویسیم

$$\begin{cases} \delta x_A + \delta y_A + \delta x_C = \\ \delta y_A + \delta y_A + \delta y_C = \\ \delta \alpha_{AG} + \delta \alpha_{BG} + \delta \alpha_{CG} = 0 \end{cases} \qquad A_{C \atop i.c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ y_A & -x_A & y_B & -x_B & y_C & - \end{bmatrix}$$

یعنی $\Rightarrow \|\delta \hat{x}\| \to \min$

یعنی طوری تصحیحات را انجام می دهد

شکل I.C بین است هیچ توجیه فیزیکی ندارد این مسئله کاملاً ریاضی است

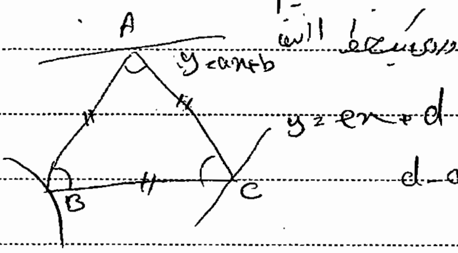
$$\Rightarrow \delta \hat{x} = (A^T P A + \underbrace{D^T D}_{A_{I.C}})^{-1} (A^T P \delta l)$$

ل فرض کنید نقطه A روی یک خط است پس ۲ تا defect داریم دوران ا انتقال

حال فرض کنیم نقطه B روی یک دایره است و روی یک خط انتقال

پس ۱ d.d داریم انتقال

حال اگر روی یک خط $y=ex+d$ باشد ۰ d.d



$$df = (n+s) - u + d.d = (6+3) - 6 = 3$$

$$\begin{cases} \text{I)}\ y_A - a x_A - b = \\ \text{II)}\ (x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2 - R^2 = \\ \text{III)}\ y_C - e x_C - d = 0 \end{cases} \qquad W_C \neq 0 \qquad W_C = \begin{cases} y_A^0 - a x_A \\ (x_B^0 - x_0)^2 \\ y_C^0 - e x \end{cases}$$

تمرین سری 9-2

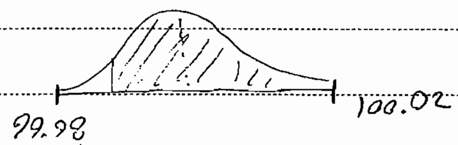
تمرین: در میان شرایط چون در حقیقت می‌دانیم $\hat{\theta}$ آخری بزرگتر است فرض کنید $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P \hat{V}}{df}$

می‌دانیم خیلی کوچکتر است پس باید $l - \hat{l} = \hat{\theta}$ بیندازیم.

توضیح:

$l = 100\,m$

$l = 100^m + 2cm$ ← با شک نسبت $l = 100$ (ممکن است)



تست میانگین نمونه؛ (آزمون فرض‌های آماری)

$\bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum y_i$

$n \to \infty \Rightarrow \bar{y} \to \mu$

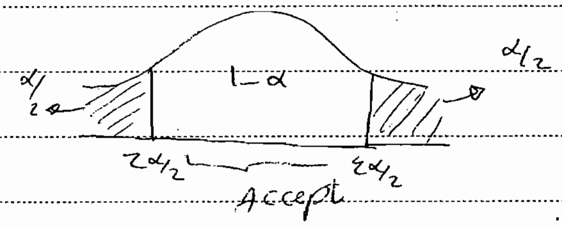
الف) فرض کنید واریانس معلوم باشد؛

- توزیع نرمال:

$$\begin{cases} H_0: \bar{y} = \mu \\ H_a: \bar{y} \neq \mu \end{cases}$$

آماره $Z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ منطقه‌ی پذیرش فرض $|Z| < z_{\alpha/2}$

$P\left(|Z| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$



ب) واریانس مجهول باشد

- توزیع t_student

$$\begin{cases} H_0: \bar{y} = \mu \\ H_a: \bar{y} \neq \mu \end{cases}$$

$$t = \frac{\bar{y} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{\alpha/2,\, n-1}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

مثال /

طول یک مسافت طویل (طول معلوم) به مقدار $\mu = 400.008\,m$ ، 20 بار اندازه‌گیری شد

انحراف معیار نمونه $S = \pm 0.002^m$ ، میانگین نمونه $\bar{y} = 400.012$. مطلوب

$$\begin{cases} H_0 : \bar{y} = \mu \\ H_a : \bar{y} \neq \mu \end{cases}$$

اطمینان 95% تحقیق کنید آیا خطای سیستماتیک در اندازه‌گیری وجود دارد؟ است رد می‌شود

$$t = \frac{\bar{y}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{400.012-400.008}{0.002/\sqrt{20}} = 8.949 \qquad |t| > t_{\alpha/2,\, n-1}$$

$$P\left(-t_{\alpha/2,\nu} < \frac{\bar{y}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,\nu}\right) = 1-\alpha$$

فاصله قبول

$$t_{\alpha/2,\, n-1} = t_{0.025,\, 19} = 2.093$$

چون $|t| > t_{\alpha/2,\, n-1}$ است پس H_0 با احتمال 95% رد می‌شود

$$\bar{y} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2,\, n-1} < \mu_1 < \bar{y} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2,\, n-1}$$

معادله‌ای که برای میانگین ما بدست می‌آید برای چه جامعه‌ای است؟ یعنی در چه رنجی است

$$\boxed{400.11 < \mu_1 < 400.13} \Rightarrow$$

با احتمال 95% مقدار

طول مشاهده شده در بازه‌ی بالا است (برطول)

هرچه سطح اطمینان پایین‌تر باشد بازه‌ی ما بازتر می‌شود

سیستم نمونه‌گیری

1000

10 $\bar{y}_{10}$, σ^2_{10}

20 $\bar{y}_{10}$

⋮

n

$$\begin{cases} \mu \text{ جامعه} \\ \sigma^2 \end{cases}$$

(1000)

وقتی n به سمت بی‌نهایت برود میانگین نمونه‌ها به میانگین جامعه میل می‌کند

از یک جمعیتی ۱۰ تایی.

$$\begin{cases} \bar{y}_1 , \sigma_1^2 \\ \bar{y}_2 , \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \bar{y}_n , \sigma_n^2 \end{cases}$$

میانگین‌ها و واریانس‌های مختلفی برای ۱۰ تا به دست می‌آوریم
این نشان می‌دهد که میانگین و واریانس نمونه یک متغیر تصادفی است
ولی برای جامعه یک پارامتر ریاضی است.

در توزیع t student اگر توزیع ما از ۳۰ تا مشاهده بالا برود تقریباً با تست نرمال برابری می‌شود

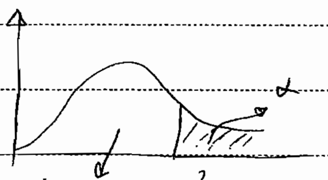
آزمون واریانس (دقت دستگاه)

توزیع — χ^2

آماره $\chi^2 = \frac{vs^2}{\sigma_0^2}$

$$\begin{cases} H_0 = s^2 = \sigma^2 \\ H_a = s^2 > \sigma^2 \end{cases}$$

منطقه‌ی رد فرض H_0 ؛ $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, n-1}$



مثال: فرض کنید دقت اسمی یک زاویه‌یاب "1.5 باشد. اگر پس از 30 بار مشاهده
(تست واریانس باید مقدار معلوم باشد چون ما می‌خواهیم) با انحراف معیار "S = 1.7
برسیم سطح اطمینان ٪95 آیا دقت ادعا شده برای دستگاه قابل قبول است یا نه؟

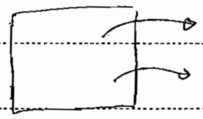
$$\begin{cases} H_0 : s^2 = \sigma^2 = (1.5'')^2 \\ H_a : s^2 > \sigma^2 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \frac{vs^2}{\sigma^2} = \frac{(30-1)(1.7'')^2}{(1.5)^2} = 37.24$$

$$\chi^2_{\alpha, n-1} = \chi^2_{0.05, 29} = 42.56$$

$\chi^2 \not> 42 \Longleftarrow$ فرض H_0 پذیرفته می‌شود

تست فاکتور واریانس



$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T p \hat{v}}{df}$$

$\bar{y}_1 , s_1^2$ ، $\bar{y}_2 , s_2^2 \Rightarrow \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F$

فرض کنید از دو جامعه دو نمونه استخراج کنید نسبت بین دوتا از توزیع فیشر تبعیت می کند (F)
توزیع F و χ^2 از توزیع نرمال ایجاد می شوند.

در اینجا در $\hat{x} = (A^T p A)^{-1} A^T p l$ این $Q_{\hat{v}} = c_l$ ، $p = c_l^{-1}$ در این تست جواب واریانس ها
چنین واریانس است

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 1 \\ H_a : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \neq 1 \end{cases}$$

آماره $= \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1,\alpha}$

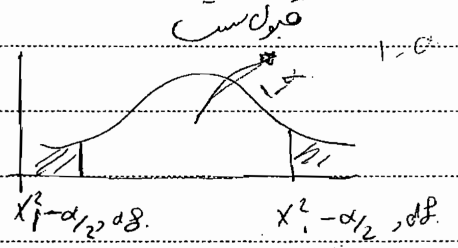
چون متغیر تصادفی است
پس توزیع F می شود

$$p = \sigma_0^2 c_l^{-1}$$

استفاده از توزیع χ^2 به توزیع F می رسیم $\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} = F$

$$\chi^2 = (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) \sim \chi^2_{n-1}$$

وقتی واریانس جامعه را ندانیم از نمونه استفاده می کنیم که $n-1$ می شود



$$\frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$$

این σ^2 را تغییر بدهیم $\hat{\sigma}^2$ نیز
تغییر می کند بطوری که بازه این نسبت
درداخل بازه می افتد

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T p \hat{v}}{df} = \frac{\hat{v}^T (\sigma_0^2 c_l^{-1}) \hat{v}}{df} \Rightarrow df\,\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2\, \hat{v}^T c_l^{-1} \hat{v}$$

$$\Rightarrow \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \hat{v}^T c_l^{-1} \hat{v}$$

فاکتور واریانس اولیه ربطی به این رابطه ندارد این جزو که تغییر داده می شود حساسیت
تست به ماتریس کوواریانس نمونه ها بستگی دارد

عوامل رد تست:

۱. خطای سیستماتیک

۲. مدل ریاضی غلط

۳. تست وزن مشاهدات (اگه تست‌ها را با برابری بگذاریم تست وزن‌ها به هم می‌خورد اگر طول و زاویه با هم داشته باشیم)

۴. (درجه آزادی پایین) ضعف هندسی شبکه

یک خطای سیستماتیک در طول است که خودش را نشان می‌دهد آن خطای scale است

$S_M = (+a)\ S_{scale}$

این خطا باعث رد تست واریانس می‌شود چون $\hat{v}$ها را زیاد می‌کند

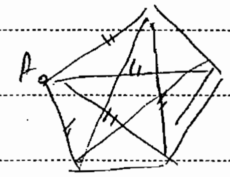
$$l = 2\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

اگر فرض کنیم تست را رد می‌کند به این خاطر است. مثلاً مشاهدات را ۲ برابر کنیم چون $\hat{v}$ اولیه را حساب کردیم بعد ۲ برابر کردیم در $\hat{v}$ها تاثیری ندارد. خطا $\hat{v}$ تصحیح است. وقتی ما شبکه را سرشکن کردیم و $\hat{v}$ها محاسبه شده وقتی طول‌ها ۲ برابر شده این تاثیر ندارد

تست هم‌وزنی داده‌های مشاهدات غلط:

پس ارزش‌های رد و حذف مشاهدات این است که اگر یک جهت را حذف کنیم درجه آزادی کم می‌شود و همین باعث رد می‌شود به جای این کار وزن را افزایش می‌دهیم

مفهوم singular بی‌نهایت جواب داریم. حال می‌خواهیم آن را محدود کنیم برای این کار اضافه کردن هر چیزی که بی‌نهایت بودن را بگیرد با استفاده از Constriant های زیاد در حقیقت در واقع برای جلوگیری از خطاهای Functional Constraint است



این شبکه ۳ تا d.d دارد پس می‌تواند بی‌نهایت جواب داشته باشیم چون می‌تواند حرکت کند حال در نقطه A یک مقدار ثابت با ... ثابت باشد singular بودن را حذف می‌کنیم

Constraint ها

بر سطرها اضافه کنیم

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial x} \\ \hline 1 \; 0 \; \cdots \\ 0 \; 1 \; \cdots \\ \frac{\partial \alpha_{AD}}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad x_A = 1\cdot \quad y_A = 1\cdot \qquad \delta l^* = \begin{bmatrix} \delta l \\ \hline w_c \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_l & \\ \hline & P_c \end{bmatrix}$$

باید حالت تیره هم داریم یعنی این Constrain ها را باید حساب
معلوم حساب کنیم یعنی از مجهول ها کم کنیم

$$A = \begin{bmatrix} x_B & y_B & \cdots & y_E \\ & & & \end{bmatrix}$$

حال حالت دارد $Az_B = \alpha \pm \delta x \quad y_A = 1\cdot\cdot \pm 2^{cm} \quad , \quad x_A = 100 \pm 2^{cm}$
در این حالت این مثل یک مشاهده رفتار می کند در ماتریس وزن اضافه می کنیم
پس مقدار وزن هم این پارامترها هم تصحیح می گیرند

حال در کجا هم از بیرون Constraint اضافه کنیم و از داخل اضافه کنیم inner constraint در گرد
در inner ترضیحات کار را بگیریم با نشان آن ها می شود
و کنستریت ها وزن ∞ دارند

$$\delta x_A + \delta x_B + \cdots + \delta x_E = 0$$

$$\delta G_{ig} + \delta G_{Bj} + \cdots + G_{BG} = 0$$ برای ترازیاب

$$A_{IC} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_A & y_A & x_B & y_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ y_A - x_A & 0 & \cdots & & y_E & -x_E \\ x_A & y_A & \cdots & & x_E & y_E \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{انتقال} \\ \\ \text{آزیموت} \end{array}$$

$$\delta x = (A^T P A + A_{IC}^T A_{IC})^{-1} A^T P \, \delta l$$

POUYAN

۲

Subject:

Date: No.