اصول و فنون

ترکیبات

PRINCIPLES AND TECHNIQUES IN COMBINATORICS

CHEN CHUAN-CHONG
and
KOH KHEE-MENG

مترجمین: حسین ربیعی
حسین غفاری

گنجینه‌ی کتب المپیادهای ریاضی و کامپیوتر نشریه راه‌المپیاد

بسم الله الرحمن الرحیم

اصول و فنون ترکیبیات

ویژه علاقه‌مندان به المپیادهای

ریاضی و کامپیوتر

اصول و فنون ترکیبیات

ترجمه: حسین ربیعی- حسین غفاری

ناشر: نشر سالمی

نوبت چاپ: اول - تابستان ۱۳۷۹

تعداد: ۳۰۰۰ نسخه

حروف‌چینی: نشریه راه‌المپیاد

لیتوگرافی: پیام

چاپ و صحافی: چاپ محمد

تلفن مرکز پخش: ٦٩٤٢٦٣٦

بها [illegible] تومان

اصول و فنون ترکیبیات: ویژهٔ علاقه‌مندان به المپیادهای ریاضی و کامپیوتر / ترجمه حسین ربیعی؛ حسین غفاری.ـــ تهران: نشر سالمی،۱۳۷۹.

۲۷۰ ص.: جدول، نمودار.ـــ (گنجینه کتب المپیادهای ریاضی و کامپیوتر نشریه راه‌المپیاد؛ ۲)

ISBN 964-6947-07-7: ریال [illegible]

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. المپیادها (کامپیوتر). ۳.ریاضیات ترکیبی -- مسائل، تمرینها و غیره. ۴.ریاضیات -- مسائل، تمرینها و غیره. ۵.کامپیوتر -- مسابقه‌ها. ۶.ریاضیات -- مسابقه‌ها. الف.ربیعی، حسین، ۱۳۵۸ - ، مترجم. ب.غفاری، حسین، ۱۳۵۸ - ، مترجم.

۶ الف / ۲۴ / LB۳۰۶۰ ۳۷۳/۲۳۸

۱۳۷۹

کتابخانه ملی ایران ۶۹۱۱ - ۷۹م

به نام خداوند جان و خرد

پس از پیروزی انقلاب اسلامی، مسوؤلان آموزش و پرورش کشور دریافتند که میزان استقبال دانش‌آموزان، از رشتهٔ ریاضی کاهش یافته است. برای تحقیق در علّت این پدیده، کمیته‌ای مرکّب از استادان ریاضی دانشگاه‌ها و کارشناسان گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی تشکیل شد و طرحی برای تحقیق، تهیه و اجراء گردید. از جمله‌ی نتایج این تحقیق، این بود که روند کاهش درصد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی از سالهای قبل از پیروزی انقلاب اسلامی آغاز شده و همچنان ادامه یافته است. یک بررسی آماری نشان داد که درصد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی از ۲۶ درصد کل دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در سال ۱۳۵٤ به ۱۲ درصد در سال ۱۳۵٦ تنزّل یافته است و این احتمال قوّت گرفت که این کاهش شدید با تغییر نظام آموزشی اجرا شده در آن سالها و با تأسیس رشته‌های جدیدی مانند رشته‌ی «اقتصاد اجتماعی» ارتباط دارد.

کمیته‌ی بررسی علل افت کمّی دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی، برای حل این مشکل، از جمله پیشنهاد کرد همه ساله مسابقه‌ای علمی در سطح کشور میان دانش‌آموزان مستعدّ رشته‌ی ریاضی دبیرستانهای کشور برگزار شود و به دانش‌آموزانی که در این مسابقات رتبه‌های بالا را احراز می‌کنند، جوایز خاصی اعطا گردد تا موجبات تشویق دیگران فراهم آید. در اجرای این پیشنهاد نخستین مسابقه سراسری دانش‌آموزان رشته ریاضی دبیرستانهای کشور، در فروردین ماه سال ۱۳٦۳ در شیراز، با شرکت ۹۰ نفر از بهترین دانش‌آموزان این رشته که از سراسر کشور برگزیده شده بودند برگزار شد و از آن پس همه ساله این مسابقات با اهتمام و جدیّت روزافزونی، در دیگر مراکز استانهای کشور برگزار گردید و آثار مثبت آن در جلب توجّه و افزایش استقبال دانش‌آموزان از تحصیل در رشته‌ی ریاضی، به نحو رضایت بخشی آشکار گشت.

در سال ۱۳٦۵ به دنبال شرکت کارشناسانی از گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی، مقدّمات ارتباط با المپیاد جهانی فراهم شد.

شرکت تیم دانش‌آموزی ایران در المپیاد ریاضی که در سالهای پایانی جنگ تحمیلی صورت می‌گرفت، تعجّب سرپرستان تیمهای سایر کشورها را برانگیخت، امّا تعجّب آنان وقتی بیشتر شد که با اعلام نتایج مسابقات معلوم شد جمهوری اسلامی ایران در این نخستین بار، در جمع ٤۲ کشور شرکت کننده، مقام بیست‌وششم را احراز کرده، و یکی از دانش‌آموزان ما نیز موفّق به کسب مدال برنز شده است. تشکیل کمیتهٔ ملّی المپیاد ریاضی، مرکّب از استادان ریاضی دانشگاهها و دبیران با

تجربه و کارشناسان ریاضی دفتر تألیف کتب درسی نخستین اقدامی بود که با همکاری انجمن ریاضی ایران صورت گرفت.

عشق و علاقه به سربلندی ایران و اشتیاق به پیشرفت علمی کشور در اعضای کمیته در بیست‌ونهمین المپیاد ریاضی که در سال ۱۳۶۷ در استرالیا برگزار شد، نتیجه‌ی خود را آشکار ساخت و تیم جمهوری اسلامی ایران توانست با کسب یک مدال نقره و ۳ مدال برنز در جمع ۴۹ کشور به مقام بیستم نایل شود. از آن پس سیر صعودی مقام ایران در المپیاد ریاضی آغاز شد. در سال ۱۳۶۸ در آلمان، ایران با ۲ مدال نقره و ۳ مدال برنز و یک دیپلم افتخار در جمع ۵۰ کشور به مقام چهاردهم و در سال ۱۳۶۹ در چین با ٤ مدال نقره در جمع ٥٤ کشور، بار دیگر به مقام چهاردهم دست یافت. سال بعد در سوئد، ایران برای نخستین بار به مدال طلا دست یافت و تیم ما با دو مدال طلا و یک نقره و دو برنز توانست در جمع ٥٤ کشور به مقام هشتم ارتقاء یابد و در سال ۱۳۷۷ در سی‌ونهمین المپیاد جهانی ریاضی ایران اسلامی با کسب ۵ مدال طلا و یک نقره مقام اوّل را به دست آورد.

شوق و علاقه بسیار در بین جوانان کشور، ما را بر آن داشت که قدمی در این راستا برداریم. در ابتدا نشریه راه‌المپیاد را به صورت فصل‌نامه و با چهار موضوع ریاضی، کامپیوتر، فیزیک و شیمی به چاپ رساندیم. بعد از یک سال نشریه راه‌المپیاد با موضوع ریاضی و کامپیوتر به صورت فصل‌نامه ارایه گشت و برای موضوعات دیگر نیز فصل‌نامه‌هایی به چاپ رسیدند. استقبال جوانان کشور از نشریه راه‌المپیاد موجب شد تا دفتر نشریه با همکاری تعدادی از اساتید و دانشجویان نخبه کشور اقدام به چاپ گنجینه‌ای از کتب ریاضی و فیزیک ویژه المپیادهای ریاضی، کامپیوتر و فیزیک نماید.

کتاب حاضر دومین سری از گنجینه‌ی کتب ریاضی المپیادهای ریاضی و کامپیوتر است که توسط آقایان حسین ربیعی، حسین غفاری ترجمه گردیده است.

وظیفه خود می‌دانم در اینجا از زحمات مترجمین محترم و همچنین همکاران محترم دفتر نشریه خصوصاً جناب آقای محمد کریمی و سرکار خانم سیمین یگانه تشکر و قدردانی کرده، از خداوند منان برای همه‌ی آنها توفیق و سلامت مسئلت دارم.

عباس ذوقی‌پور

مدیر مسوؤل نشریه راه‌المپیاد

مقدمه

در طول سالیان گذشته، ریاضیات ترکیبی در دورهٔ دبیرستان تدریس می‌شود. اصول و روش‌های ترکیبیاتی روز به روز کاربردهای بیشتری در زمینه‌های دیگری نظیر علوم کامپیوتری و تحقیقات کاربردی پیدا می‌کند. مسایل ترکیبیات علاوه بر تحقیقات ریاضیات محض در مسابقه‌های ریاضی فراوانی مثلاً المپیاد ریاضی جهانی (IMO) ، دیده می‌شوند. نویسندگان این کتاب سال‌های زیادی این موضوع را در تیم المپیاد ریاضی سنگاپور تدریس می‌کرده‌اند.

و در تمام این سالیان به دنبال کتابی بوده‌اند که اهدافشان را شامل شود. بنابراین در نگارش این کتاب، دو هدف عمده را دنبال می‌کرده‌اند: (۱) این کتاب بتواند به عنوان یک کتاب درسی آموزش داده شود. (۲) بتواند در آموزش دانش‌آموزان تیم المپیاد سنگاپور مفید باشد. برای رسیدن به این هدف‌ها، سعی شده که متن کتاب بسیار ساده باشد به طوری که دانش‌آموزانی که دانش ریاضی فراوانی ندارند هم، بتوانند از آن بهره‌مند شوند و به علاوه، به خاطر این که دانش‌آموزان اغلب اصول اساسی ترکیبیات، مانند اصل جمع، اصل ضرب، اصل متمم، اصل تناظر یک به یک و ... را نادیده می‌گیرند، بر روی این اصول تأکید بسیاری شده است. با توجه به دقتی که در انتخاب مثال‌ها انجام شده، به نظر می‌رسد دانش‌آموزان بتوانند به خوبی این اصول اساسی و همچنین روش‌هایی نظیر توابع مولد و توابع بازگشتی را فراگیرند. این کتاب همچنین شامل حدود ۴۹۰ مسأله است که از نظر دشواری بازهٔ وسیعی را

شامل می‌شود و اغلب از مسابقات ریاضی نظیر IMO، مسابقات ریاضی پاتنام، مسابقات ریاضی داخلی آمریکا، المپیاد ریاضی آسیای جنوب شرقی و... انتخاب شده‌اند. بعضی از مسایل مستقیماً از منابعی مانند ماهنامه ریاضی آمریکا American Mathematical Monthly ، مجله ریاضیات دشوار Crux Mathematicoram ، مجله ریاضی دانشگاهی College Matghematics Journal آورده شده‌اند.

به خاطر سادگی خواندن، یک علامت ■ در انتهای هر اثبات و یا راه حل مثال آمده است. قسمت‌بندی بخش‌ها، برابری‌ها، مثال‌ها، شکل‌ها و جدول‌ها با خط تیره از هم جدا شده است. مثلاً" مسأله ۵-۳ به معنای مسأله پنجم از فصل سوم است و شکل ۱-۳-۲ به معنی اولین شکل از بخش سوم فصل دوم می‌باشد. حروف اختصاری منابع در داخل کروشه قرار داده شده است مانند[RO] ، که این ها مقالاتی هستند که در انتهای هر فصل نشانی دقیق آنها آمده است. منابع اساسی کتاب هم در آخر کتاب فهرست شده است. در پایان از تمامی کسانی که ما در نگارش این کتاب یاری کردند، تشکر می‌نماییم.

فهرست:

۱- تبدیل و ترکیب

۲- ضرایب دو جمله‌ای و ضرایب چند جمله‌ای

۳- اصل لانه کبوتری و اعداد رمزی

۴-اصل شمول و عدم شمول

۵- توابع مولد

۶- توابع بازگشتی

فصل ۱

تبدیل وترکیب

۱-۱ - اصول اساسی شمارش

در زندگی روزمره، ما اغلب به شمردن تعداد حالات پیشامدهایی نظیر قرار گرفتن اشیا در جاهای مشخص یا تقسیم شدن آنها طبق شرایطی معین، یا ایستادن افراد بر حسب ویژگی‌ها و...نیاز داریم.

برای مثال، ممکن است به این مسایل شمارش یا مسایلی مشابه برخورد کنیم:

«چندحالت برای به صف ایستادن ۵ دانش‌آموز کلاس اول و ۳ دانش‌آموز کلاس دوم وجود دارد به شرطی که هیچ دو دانش‌آموز کلاس دومی کنار هم قرار نگیرند؟»

« چند حالت برای تقسیم کردن ۹ نفر به سه گروه ۳،۴ و ۲ نفری وجود دارد؟»

اینها دو مثال خیلی ساده از مسایل شمارش هستندکه مربوط به موضوعاتی می‌شوند که ما آنها را « تبدیل و ترکیب» می‌نامیم. قبل از هر توضیحی راجع به تبدیل و ترکیب، لازم می‌دانیم به معرفی دو اصل اساسی در تمام انواع مسایل شمارش بپردازیم.

اصل جمع، طبق این اصل، می‌پذیریم که اگر

$n_۱$ حالت برای اتفاق افتادن پیشامد $E_۱$ ،

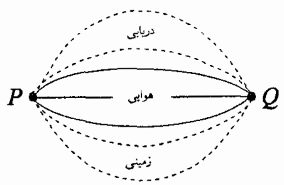
$n_۲$ حالت برای اتفاق افتادن پیشامد $E_۲$،

⋮

n_k حالت برای اتفاق افتادن پیشامد E_k،

وجود داشته باشد و این حالات برای پیشامدهای مختلفی باشند که هیچ دو تایی با هم اتفاق نیفتند، تعداد حالات برای اینکه حداقل یکی از پیشامدهای $E_۱$، $E_۲$،...، E_k اتفاق بیافتد برابر $\sum_{i=۱}^{k} n_i = n_۱ + n_۲ + ... + n_k$ است.

مثال ۱-۱-۱ فردی می‌تواند از سه مسیر هوایی، دریایی و زمینی از شهر P به شهر Q سفر کند. فرض کنید ۳ راه برای سفر هوایی، ۲ راه برای سفر دریایی و ۲ راه هم برای سفر زمینی وجود داشته باشد. آنگاه طبق اصل جمع، تعداد حالت رسیدن از شهر P به شهر Q برابر ۷=۲+۲+۳ راه است.■



شکل ۱-۱-۱

صورت معادل اصل جمع که بر اساس مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ها بیان می‌شود به صورت زیر است:

> فرض کنید A_1، A_2، ...، A_k، k مجموعه متناهی باشند و اشتراک هر دوتایشان تهی باشد آنگاه داریم:
>
> $$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \left|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\right| = \sum_{i=1}^{k} \left|A_i\right|$$

مثال ۲-۱-۱ تعداد جفت عددهای (x,y) از اعداد صحیح را بیابید به طوری که $x^2 + y^2 \leq 5$.

حل. ما می‌توانیم شرط مسأله را به ۶ بخش جدا از هم تقسیم کنیم: $x^2 + y^2 = 0,1,\dots,5$. و برای $i = 0,1,\dots,5$ تعریف می‌کنیم:

$$S_i = \{(x,y) \mid x,y \in Z, x^2 + y^2 = i\}$$

بنابراین داریم:

$$S_0 = \{(0,0)\}$$
$$S_1 = \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$$
$$S_2 = \{(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}$$
$$S_3 = \varnothing$$
$$S_4 = \{(0,2),(0,-2),(2,0),(-2,0)\}$$
$$S_5 = \{(1,2),(1,-2),(2,1),(2,-1),(-1,2),(-1,-2),(-2,1),(-2,-1)\}$$

و طبق اصل جمع، مقدار نهایی جفت‌های مطلوب برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{5} \left|S_i\right| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21 \quad \blacksquare$$

☜ تبصره:

۱) در مثال بالا می‌توان مقدار ۲۱ را با نوشتن تمام جفت‌های مطلوب بــه دست آورد ولـی روش بالا، ما را به راه حلی ساخت‌یافته راهنمایی می‌کند.

۲) مثال بالا را می‌توان به بخش‌های جــدا از هــم ۵و...و۱و $x^{۲} = ۰$ تقسیم کـرد و در دو بخش مقدار مطلوب را به دست آورد و سپس طبق اصل جمع به مقدار نهایی دست یافت.

اصل ضرب: طبق این اصل، ما می‌پذیریم که اگر پیشامد E را بتـوان بـه r پیشـامد پشت سرهم $E_۱$، $E_۲$،...، E_r تجزیه کرد که

$n_۱$ حالت برای اتفاق افتادن پیشامد $E_۱$،

$n_۲$ حالت برا ی اتفاق افتادن پیشامد $E_۲$،

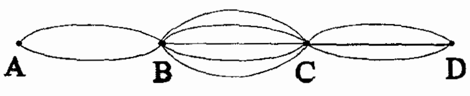
⋮

n_r حالت برای اتفاق افتادن پیشامد E_r،

وجـود داشـته باشـد، تعـداد حـالات اتفـاق افتــادن پیشــامد E برابــر اســت بــا:

$$n_۱ \times n_۲ \times \ldots \times n_r = \prod_{i=۱}^{r} n_i$$

مثال۳-۱-۱ برای رفتن از شهر A به شهر D بـاید طبـق شـکل از شـهرهای B و C عبور کرد.



شکل ۲-۱-۱

اگر ۲ راه برای رفتن از شهر A به شهر B، ۵ راه برای رفتن از شهرB به شهر C و ۳ راه برای رفتن از شهر C به شهر D وجود داشته باشد طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های

رسیدن از شهرA به شهرD که از شهرهایB و C بگذرند برابر است با ۳۰=۳×۵×۲. ■

صورت معادل اصل ضرب که از مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ها استفاده می‌کند، به صورت زیر است.

اگر:

$$\prod_{i=1}^{r} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r = \{(a_1, a_2, \ldots, a_r) | a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,r\}$$

نمایش دهندهٔ حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، ... ، A_r باشد. آنگاه

$$|\prod_{i=1}^{r} A_i| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_r| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|$$

یک دنباله از اعداد $a_1a_2\ldots a_n$، یک « دنباله در مبنای k » نامیده می‌شود، اگر $a_i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ برای $i = 1,2,\ldots,n$. طول دنباله که برابر با n است مشخص کنندهٔ تعداد جمله‌های یک دنباله است.

بنابراین{۱۱۱و ۱۱۰ و۱۰۱ و۱۰۰ و۰۱۱ و ۰۱۰ و۰۰۱ و ۰۰۰} مجموعه‌ی تمام ۸$(=2^3)$ دنباله در مبنای ۲ است که دارای طول ۳ می‌باشند. برای دوعدد داده شده $k,n \in N$، چند دنباله در مبنای k با طول n وجود دارد؟

مثال ۴-۱-۱ برای ساختن یک دنباله با طول n در مبنای k ابتدا عنصر a_1 را از مجموعه‌ی $B=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ انتخاب می‌کنیم. سپس a_2، a_3،... و بالاخره a_n را از مجموعه‌ی B انتخاب می‌کنیم. در هر مرحله‌ی ما k انتخاب داشتیم پس طبق اصل ضرب، تعداد دنباله‌ها در مبنای k با طول n برابر است با

$$\underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{n} = k^n \quad ■$$

مثال ۵-۱-۱ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ۶۰۰ را بیابید.

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که ۶۰۰ را می‌توان به صورت منحصر به فردی به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد: $۶۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۲$ و می‌دانیم که هر عدد m را که مقسوم‌علیه ۶۰۰ است، می‌توان به صورت $m = ۲^a \times ۳^b \times ۵^c$ نوشت که در آن:

$$a، b، c \in Z ، ۰ \le a \le ۳ ، ۰ \le b \le ۱ ، ۰ \le c \le ۲$$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های ۶۰۰ برابر است با تعداد سه تایی‌های مرتب(c و b و a) که در آنها

$$a \in \{۰، ۱، ۲، ۳\} \quad \text{و} \quad b \in \{۰، ۱\} \quad \text{و} \quad c \in \{۰، ۱، ۲\}$$

که طبق اصل ضرب تعداد این سه‌تایی‌های مرتب برابر است با ۴×۲×۳=۲۴.■

تبصره:

با به کار بردن اصل ضرب می‌توانیم به حالت کلی مثال فوق دست بیابیم:
«اگر عدد طبیعی n را بتوان به صورت $n = p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \dots p_r^{k_r}$ به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد، که در آن p_i ها اعداد اول متمایز و k_i ها اعداد صحیح مثبت باشند، آن گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های n برابر است با $\prod_{i=۱}^{r} (k_i + ۱)$ ».

در مثال‌های بالا، مشاهده شد که چگونه اصل‌های جمع و ضرب به طور جداگانه در حل مسایل شمارش به کار می‌روند. اما در حل مسایل پیچیده‌تر، ما ناچار می‌شویم که از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده کنیم. برای روشن شدن این مطلب به حل مثال زیر می‌پردازیم.

مثال۶-۱-۱ فرض کنید: {۱۰۰ و ... و ۲ و ۱}=X و فرض کنید:

$$S=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in X, a<b, a<c\}$$

$|S|$ را بیابید.

این مساله را می‌توان به بخش‌های جدا از هم با در نظر گرفتن $a=1,2,\ldots,99$ تقسیم کرد.

برای هر عدد $a=k\in\{1,2,\ldots 99\}$ ، تعداد حالات انتخاب b برابر k-۱۰۰ است و همچنین تعداد حالات انتخاب c نیز k-۱۰۰است. پس تعداد حالات انتخاب سه‌تایی مرتب (c و b وk) طبق اصل ضرب برابر با $(100-k)^2$است.

از آنجایی‌که k تمام مقادیر طبیعی بین ۱و ۹۹ را قبول می‌کند، با به کار بردن اصل جمع، داریم:

$$|S|=99^2+98^2+\ldots+1^2$$

و با استفاده از فرمول $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$، به دست می‌آوریم:

$$|S|=\frac{1}{6}\times 99\times 100\times 199=328350 \quad ■$$

در طبقه‌بندی ریاضی، اصول جمع و ضرب بسیار بدیهی هستند، و به همین دلیل اغلب توسط دانش‌آموزان، نادیده گرفته می‌شوند. ولی این دو اصل به واقع در حل مسایل شمارش نقش اساسی دارند. طوری که در این فصل دیدیم، یک مسأله ممکن است به چندین بخش تقسیم شود که در هر یک اصول جمع و یا ضرب کاربرد دارند.

۲-۱- تبدیل

در ابتدای بخش ۱-۱ این مسأله را عنوان کردیم: « چند حالت برای به صف

ایستادن ۵ دانش‌آموز کلاس اول و۳ دانش‌آموز کلاس دوم وجود دارد به شرطی که هیچ دو دانش‌آموز کلاس دومی کنار هم قرار نگیرند؟» این یک مسأله‌ی نمونه از مسایل کلی صف‌بندی است که در تمام آن مسایل، صورت مسأله تعداد حالات صف بندی یک گروه را با شرایطی خاص جویاست.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی n عضوی از اشیا متمایز باشد تبدیل r از n را تعداد حالات صف ایستادن r شی از این n شـی تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $0 \leq r \leq n$. در حالی که $r = n$، یک تبدیل n از r برابر تعداد حالات صف ایستادن n شخص است که تعداد جایگشت‌های n نام دارد.

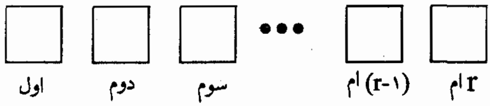
مثال ۱-۲-۱ $A = \{a, b, c, d\}$ را در نظر بگیرید. تمام تبدیل‌های ۳ تایی برای مجموعه‌ی A عبارتند از:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

که تعداد آنها ۲۴ تا است.■

اگر P_r^n نمایش دهندهٔ تبدیل‌های r از n باشد، از مثال ۱-۲-۱ به دست آمد: $P_3^4 = 24$. ما سعی می‌کنیم برای P_r^n با استفاده از اصل ضرب در حالت کلی یک فرمول به دست آوریم.

انتخاب یک تبدیل r از n را می‌توان به r قسمت جدا از هم تقسیم کرد. ابتدا، یک عضو از n عضو مجموعه‌ی A را برای اشغال خانه اول انتخاب می‌کنیم. این انتخاب n حالت دارد (شکل ۱-۲-۱ را نگاه کنید).



شکل ۱-۲-۱

سپس یک شی برای خانه‌ی بعدی از اشیاء باقی‌ماندهٔ A و همینطور تا خانه‌ی r ام.
همانطور که گفته شد برای خانه‌ی اول n حالت، برای خانه‌ی دوم $(n-1)$ حالت ،... و برای خانه‌ی r ام $n-(r-1)$ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \qquad (1-2-1)$$

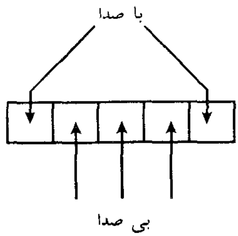
و اگر از تعریف فاکتوریل استفاده کنیم: $n! = n \times (n-1)\dots 2 \times 1$، شکل زیر از فرمول به دست می‌آید.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (1-2-2)$$

تبصره:

با تعریف $0! = 1$، مقدار $P_0^n = 1$ و $P_r^r = r!$ به دست می‌آید.

مثال ۲-۲-۱ فرض کنید $E = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و}\dots\text{ و } y \text{ و } z\}$ مجموعه‌ی تمام ۲۶ حرف الفبای زبان انگلیسی باشد. تعداد کلمات پنج حرفی را بیابید که حروف اول و آخر آن از حروف صدادار متفاوت و بقیه از حروف بی‌صدای متفاوت باشند.



شکل ۲-۲-۱

حل. در مجموعه‌ی E ، پنج حرف صدادار و بیست و یک حرف بی‌صدا وجود دارد. ساخت هر کلمه‌ی پنج حرفی را به دومرحله می‌توان تقسیم کرد:

مرحله‌ی اول - از مجموعه‌ی $\{a, e, i, o, u\}$ یک تبدیل ۲تایی در نظر می‌گیریم و حرف اول را در خانه‌ی اول و حرف دوم را در خانه‌ی آخر قرار می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم - از مجموعه‌ی $A=E-\{a, e, i, o, u\}$ یک تبدیل ۳ تایی در نظر می‌گیریم و حروف اول، دوم و سوم را در خانه‌های دوم، سوم و چهارم قرار می‌دهیم(شکل ۲-۲-۱).

طبق مطالب ذکر شده $P_{۲}^{۵}$ حالت برای انتخاب در مرحله‌ی اول و $P_{۳}^{۲۱}$ حالت برای انتخاب در مرحله‌ی دوم وجود دارد. بنابر اصل‌ضرب، تعداد حروف پنج حرفی با شرط مذکور برابر است با

$$P_{۲}^{۵} \times P_{۳}^{۲۱} = (۵ \times ۴) \times (۲۱ \times ۲۰ \times ۱۹) = ۱۵۹۶۰۰ . \blacksquare$$

مثال ۳-۲-۱ ۷ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک در اختیار داریم. به چند حالت می‌توانیم این کتاب‌ها را در یک قفسه بچینیم، چنانچه:

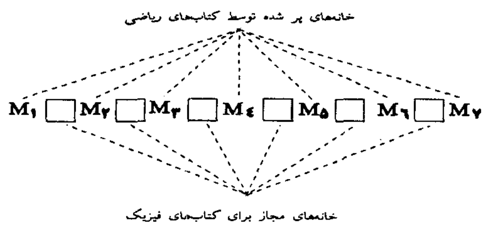
الف) کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند(بین هیچ دو کتاب فیزیکی، کتاب ریاضی قرار نداشته باشد)؟

ب) کتاب‌های اول و آخر کتاب‌های ریاضی باشند و هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم قرار نداشته باشند؟

حل. الف) از آنجا که کتاب‌های فیزیک کنار هم هستند، می‌توان مجموعه‌ی آنها را یک کتاب واحد در نظر گرفت. تعداد جایگشت‌های ۷ کتاب ریاضی با این کتاب واحد برابر با !(۱+۷) است. از طرفی، سه کتاب فیزیک نیز می‌توانند به !۳ حالت به آن کتاب واحد تبدیل شوند. پس طبق اصل ضرب، تعداد حالات نهایی برابر است با !۳ ×!۸

ب) در حل این مسأله، ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم و سپس کتاب‌های فیزیک را طبق شرط مسأله بین آنها قرار می‌دهیم.

برای چیدن کتاب‌های ریاضی در قفسه !۷ راه وجود دارد. یک جایگشت دلخواه ازکتاب‌های ریاضی خانه انتهایی توسط کتاب‌های ریاضی اشغال می‌شوند پس فقط ۶ خانه برای ۳ کتاب فیزیک P_1, P_2 و P_3 وجود دارد.



برای قرار دادن P_1، ۶ حالت داریم. از آنجا که هیچ دو کتاب فیزیکی نباید مجاور باشند برای قرار دادن P_2، ۵ حالت و برای P_3، چهار حالت داریم. پس طبق اصل ضرب، تعداد چیدن کتب برابر است با !۷ ×۴×۵×۶ . ■

☜ تبصره:

> مثال ۳-۲-۱ را می‌توان با چیدن کتاب‌های فیزیک حل کرد. ایـن راه حـل در مثـال ۲-۷-۱ بررسی خواهد شد.

✍مثال ۴-۲-۱ تعداد اعداد زوج را بین ۲۰۰۰۰ و ۷۰۰۰۰ با ارقام غیر تکراری بیابید.

حـل. اعـداد مطلـوب را بـه شـکل $\overline{abcde}$ نمـایش می‌دهیـم، عـدد a بـاید از مجموعـه‌ی $A=\{2,3,4,5,6\}$ وعـدد e بـاید از مجموعـه‌ی $E=\{0,2,4,6,8\}$ انتخاب شوند.

پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول
e	d	c	b	a
$\{0,2,4,6,8\}$				$\{2,3,4,5,6\}$

از آنجـا کـه $\{2,3,4,5,6\}\cap\{0,2,4,6,8\}=\{2,4,6\}$، مـا مسـأله را بـه دو بخـش نامتقاطع تقسیم می‌کنیم.

بخش ۱) $a\in\{2,4,6\}$

در این بخش برای انتخاب a، ۳ حالت وجود دارد و برای انتخاب e نـیز ۴(=۱−۵) حالت و برای $P_3^{10-2}=P_3^8$ حالت. پس طبق اصل ضرب، تعـداد اعـداد ایـن بخـش برابر است با $3\times4\times P_3^8=4032$.

بخش ۲) $a\in\{3,5\}$

در این بخش برای a، ۲ انتخاب، برای e ، ۵ انتخاب و برای bcd نیز P_3^8 انتخاب

وجود دارد. پس طبق اصل ضرب، تعداد اعداد این بخش برابر است با $۲ \times ۵ \times P_۴^۸ = ۳۳۶۰$. حال طبق اصل جمع، تعداد نهایی اعداد برابر است با ۷۳۹۲=۳۳۶۰+۴۰۳۲. ■

مثال ۵-۲-۱ فرض کنید S، مجموعه‌ی اعدادی باشد که با ارقام غیر تکراری از مجموعه‌ی {۷ و ۵ و ۳ و ۱} ساخته شده‌اند. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $|S|$

ب) $\sum_{n \in S} n$

حل. الف) مجموعه‌ی S را به پنج زیر مجموعه‌ی دو به دو نامتقاطع به صورتِ زیر تقسیم می‌کنیم.

۱- اعداد یک رقمی: ۷،۵،۳،۱؛

۲- اعداد دو رقمی: ۱۳، ۱۵،...؛

۳- اعداد سه رقمی: ۱۳۵، ۱۳۷،...؛

۴- اعداد چهار رقمی: ۱۳۵۷، ۱۳۷۵،...؛

$|S|$ را با به کار بردن اصل جمع می‌یابیم. به ازای i=۱،۲،۳،۴ ، فرض کنید S_i نمایش دهندهٔ مجموعه اعداد i رقمی باشد که با ارقام غیر تکراری از مجموعه‌ی {۷ و ۵ و ۳ و ۱} ساخته می‌شوند. طبق اصل جمع داریم :

$$|S| = \sum_{i=۱}^{۴} |S_i| = P_۱^۴ + P_۲^۴ + P_۳^۴ + P_۴^۴ = ۴ + ۱۲ + ۲۴ + ۲۴ = ۶۴$$

ب) فرض کنید $\alpha = \sum_{n \in S} n$ یافتن α، به وسیله‌ی جمع کردن همه‌ی ۶۴ عدد، کاری کسل‌کننده است و به نظر راه حل خوبی نمی‌آید. ما این روش را به کار

می‌بریم: فرض کنید α_1 نمایش دهندهٔ مجموع همه یکان‌ها در ۶۴ عدد، α_2 نمایش دهندهٔ مجموع همه‌ی ده‌گان‌ها در ۶۴ عدد، α_3 نمایش دهنده مجموع همه‌ی صدگان‌ها در ۶۴ عدد و α_4 نمایش دهنده مجموع همه‌ی هزارگان‌ها در ۶۴ عدد باشند. بنابراین داریم: $\alpha = \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4$.

ابتدا α_1 را می‌شماریم. واضح است که مجموع یکان‌ها در S_1 برابر است با ۱۶=۷+۵+۳+۱ . در S_2، P_1^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان ۱ باشد. همین طور P_1^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان ۳ باشد و ...

پس مجموع یکان‌ها در S_2 برابر است با :

$$P_1^3 \times (1+3+5+7) = 3 \times 16 = 48$$

در S_3، P_2^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان یک باشد. همین‌طور P_2^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان ۳ باشد و...

پس مجموع یکان‌ها در S_3 برابر است با :

$$P_2^3 \times (1+3+5+7) = 6 \times 16 = 96$$

S_4، P_3^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان ۱ باشد و P_3^3 عدد وجود دارند که یکان‌شان ۳ باشد و ...

پس مجموع یکان‌ها در S_4 برابر است با:

$$P_3^3 \times (1+3+5+7) = 6 \times 16 = 96$$

و طبق اصل جمع $\alpha_1 = 16 + 48 + 96 + 96 = 256;$

با روش مشابه به دست می‌آوریم:

$$\alpha_2 = P_1^3(1+3+5+7) + P_2^3(1+3+5+7) + P_3^3(1+3+5+7) = 240$$

$$\alpha_3 = P_2^3(1+3+5+7) + P_3^3(1+3+5+7) = 192$$

$$a_4 = P_3^3(1+3+5+7) = 96$$

بنابراین:

$$\alpha = \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4$$

$$\alpha = 256 + 2400 + 19200 + 96000 = 117856$$ ■.

☜ **تبصره:**

البته برای حل قسمت ب این مثال راه حل کوتاهی نیز وجود دارد. ۴ عدد مجموعه‌ی $\{1, 3, 5, 7\}$ را به جفت‌های $\{1،7\}$ و $\{3, 5\}$ تقسیم می‌کنیم. مجموع هر جفت ۸ است. ۱۲ عدد مجموعه‌ی S_2 را به جفت‌های $\{75,13\},\{73,15\},\{71,17\},\{53,35\}$ و ... تقسیم می‌کنیم. مجموع اعداد هر جفت ۸۸ است. به روش مشابه، ۲۴ عدد S_3 و ۲۴ عدد S_4 را به جفت‌هایی تقسیم می‌کنیم که مجموع هر جفت ۸۸۸ و ۸۸۸۸ است. بنابراین:

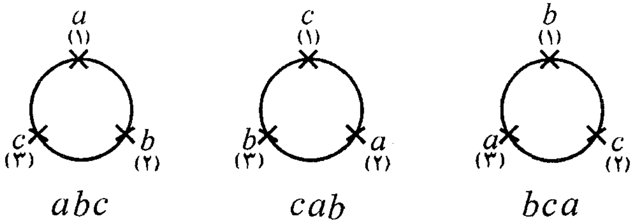
$$\alpha = 8 \times \frac{4}{2} + 88 \times \frac{12}{2} + 888 \times \frac{24}{2} + 8888 \times \frac{24}{2} = 117856$$

۳-۱- تبدیل دوری

مثال‌های تبدیلی که در بخش ۲-۱ بررسی شد، تماماً مربوط به چیدن اشیا در یک ردیف بود. اما در برخی مسایل، لازم است که اشیا را حول یک دایره بچینیم که به این مسایل، مسایل « تبدیل دوری» می‌گویند.

فرض کنید می‌خواهیم ۳ شیء متمایز a،b و c را در سه مکان، حول دایره‌ای قرار دهیم. فرض کنید مکان‌ها را با ۱،۲،۳ نشان دهیم. آنگاه سه حالتی که در شکل

(۱-۳-۱) نمایش داده شده‌اند یکسانند.



شکل ۱-۳-۱

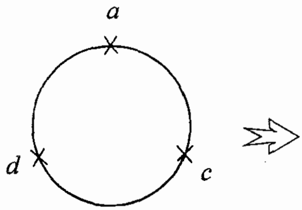
تنها فرق تبدیل دوری با تبدیل در یک ردیف این است که برای مثال؛ سه حالت نمایش داده شده در شکل (۱-۳-۱) یک حالت در تبدیل دوری به حساب می‌آیند و این حالات با چرخیدن به هم تبدیل می‌شوند.

فرض کنید A مجموعه‌ای از n شی متمایز باشند. یک تبدیل دوری r تایی $(\circ \le r \le n)$ از A، برابر تمام تبدیل‌های دوری است که زیر مجموعه‌های r تایی از A می‌توانند داشته باشند. Q_r^n را نمایش دهندهٔ تعداد تبدیل‌های دوری r تایی از مجموعه‌ی n عضوی A در نظر می‌گیریم. سعی می‌کنیم فرمولی برای Q_r^n به دست آوریم.

مثال ۱-۳-۱ تمام $P_۳^۴ (= ۲۴)$ تبدیل ۳ تایی از مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ که در مثال (۱-۲-۱) بررسی شدند در زیر نمایش داده شده‌اند. ما آنها را به ۸ گروه سه‌تایی تقسیم‌بندی می‌کنیم.

abc	cab	bca	acb	bac	cba
abd	dab	bda	adb	bad	dba
acd	dac	cda	adc	cad	dca
bcd	dbc	cdb	bdc	cbd	dcb

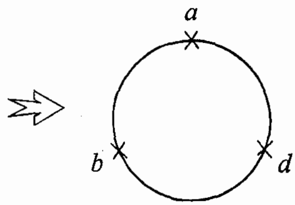
در واقع، ما تمام تبدیل‌هایی را که از یک تبدیل دوری به دست می‌آید در یک گروه قرار داده‌ایم.



$\{acd, dac, cda\}$

بالعکس هر مجموعه از ۸ مجموعه گفته شده، یک تبدیل دوری را نمایش می‌دهند.

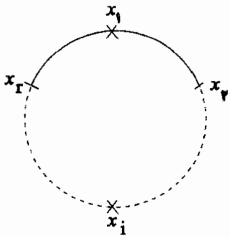
$\{adb, bad, dba\}$



مشاهده می‌شود $Q_۳^۴ = \frac{۲۴}{۳} = ۸$.■

مثال (۱-۳-۱) نشان داد که $Q_۳^۴ = \frac{۱}{۳} P_۳^۴$. به نظر شما چه رابطه‌ای بین Q_r^n و P_r^n وجود دارد؟

یک تبدیل دوری r تایی از اشیاء متمایز $x_۱, x_۲, \ldots, x_r$ در صفحه‌ی بعد نمایش داده شده است:



این تبدیل دوری r تبدیل r تایی به ما می‌دهد:

$$x_1x_2\ldots x_r, x_rx_1x_2\ldots x_{r-1}, \ldots, x_2x_3\ldots x_rx_1$$

بالعکس هر زیر مجموعه‌ی r تایی از تبدیل‌های r تایی (مانند مثال ۱-۳-۱) نمایش دهندهٔ یک تبدیل دوری است. پس تمام تبدیل‌های r تایی را می‌توان مجموعه‌های r تایی تقسیم کرد که هر کدام نمایش دهندهٔ یک تبدیل دوری باشد و داریم:

$$Q_r^n = \frac{P_r^n}{r} \qquad (۱-۳-۱)$$

و در حالت خاص ،

$$Q_n^n = \frac{P_n^n}{n} = (n-1)! \qquad (۱-۳-۲)$$

مثال ۲-۳-۱ به چند حالت ۳ فیزیکدان و ۵ ریاضیدان می‌توانند دور یک میز بنشینند اگر:

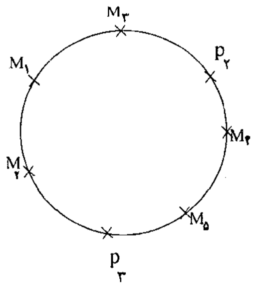
الف) هیچ شرطی مورد نظرشان نباشد.

ب) فیزیکدان P_1 و ریاضیدان M_1 مجاور هم نباشند.

ج) هیچ دو فیزیکدانی مجاور نباشند.

حل.الف) تعداد راه‌ها برابر است با $Q_8^8 = 7!$

ب) ۵ ریاضیدان و ۲ فیزیکدان P_2 و P_3 می‌توانند به !(۱−۷) حالت دور میز بنشینند. یک حالت دلخواه در شکل (۲−۳−۱) نشان داده شده است، حال P_1 برای نشستن (۲−۷=)۵ انتخاب دارد. که با M_1 مجاور نباشد. پس تعداد راه‌های نشستن برابر است با ۶!×۵=۳۶۰۰



شکل ۲−۳−۱

البته می‌توان این مسأله را با راه حل دیگری که به آن اصل متمم گفته می‌شود، حل کرد.

اصل متمم : این اصل بیان می‌کند که اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی متناهی مرجع U باشد. آنگاه

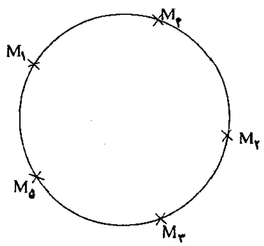
$$|A'|=|U-A|=|U|-|A|$$

تعداد راه‌های نشستن ۵ ریاضیدان و ۳ فیزیکدان دور یک میز به طوری‌که ریاضیدان M_1 کنار فیزیکدان P_1 نشسته باشد(با در نظر گرفتن $\{P_1, M_1\}$ به

عنوان یک فرد واحد) برابر است با ۱۴۴۰=۲×!(۱−۷) و طبق اصل متمم مقدار نهایی مسأله برابر است با: ۳۶۰۰=۱۴۴۰−!۷

ج) ابتدا ۵ ریاضیدان را دور میز می‌نشانیم که تعداد حالات انجام این کار برابر با !۴=!(۱−۵) است. یک حالت دلخواه در شکل (۳-۳-۱) نمایش داده شده، حال برای نشاندن P_1 پنج حالت داریم و از آنجا که هیچ دو فیزیکدانی نباید مجاور باشند برای نشستن P_2 و P_3، ۴ و ۳ حالت وجود دارد. پس مقدار نهایی برابر است با

۱۴۴۰=۳×۴×۵×!۴ .■



شکل ۳-۳-۱

مثال ۳-۳-۱ تعداد راه های نشستن n زوج زن و مرد را دور یک میز بیابید اگر

الف) مرد و زن‌ها یک در میان بنشینند.

ب) هر زنی کنار همسر خود نشسته باشد.

حل. الف) ابتدا n مرد را دور میز می‌نشانیم که این کار به $(n-1)!$ راه امکان‌پذیر است.سپس بین هر دو مرد، یک زن می‌نشانیم که تعداد راه‌های این نیز برابر با $n!$ است و تعداد حالات نهایی برابر با $(n-1)!\times n!$ به دست می‌آید.

ب) هر زوج زن و مرد را یک فرد واحد فرض می‌کنیم. تعداد راه‌های نشستن این افراد واحد دور یک میز برابر با $(n-1)!$ است.حال هر زوج می‌توانند به $2!$ حالت دور میز بنشینند پس تعداد حالت نهایی برابر است با $(n-1)!\times 2^n$. ■

☜ **تبصره:**

یک مسأله‌ی معروف و مشکل در این باره این است که: به چند راه n زوج مرد و زن می‌توانندور یک میز بنشینند $(n \geq 3)$ به طوری‌که مردها و زن‌ها یک در میان باشند و هیچ زنی کنار همسر خود ننشسته باشد؟این مسأله اولین بار توسط یک ریاضیدان فرانسوی به‌نام «فرانسیس ادوارد آناتولی لوکاس » (۱۸۹۱-۱۸۴۲) طرح شده است.

***یک راه حل برای این مسأله در فصل۴ آورده شده است.**

۱-٤- ترکیب

فرض کنید A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. یک ترکیب A، یک زیر مجموعه‌ی A است. به عبارت صحیح‌تر، یک ترکیب r تایی از A $(0 \leq r \leq n)$ یک زیر مجموعه‌ی r عضوی A است. برای مثال، اگر $A=\{a,b,c,d\}$ باشد، تمام ترکیب‌های ۳تایی از A به قرار زیر است:

$$\{a,b,c\} \quad \text{و} \quad \{a,b,d\} \quad \text{و} \quad \{a,c,d\} \quad \text{و} \quad \{b,c,d\}$$

فرض کنید C_r^n یا $\binom{n}{r}$ (انتخاب r از n یا ترکیبr ازn) نمایش دهنده تعداد ترکیب‌های r تایی از مجموعه‌ی n عضوی A باشد؛ پس $\binom{4}{3} = C_3^4 = 4$. اما به زودی فرمولی برای C_r^n می‌یابیم.

فرق تبدیل و ترکیب‌های یک مجموعه چیست؟ یک تبدیل، تعداد حالات چیده

شدن تعدادی معین از اعضای یک مجموعه در مکان‌هایی معین است. در حالی‌که یک ترکیب تعداد حالات انتخاب تعدادی معین از اعضای یک مجموعه است. پس

(الف) از هر ترکیب r تایی از مجموعه‌ی n عضوی می‌توان P_r^r تبدیل r تایی به دست آورد.

(ب) تمام تبدیل‌های rتایی که فقط مکان اعضایش تغییر می‌کنند یک ترکیب rتایی به وجود می‌آورند.

این دو جمله رابطه‌ای بین C_r^n و P_r^n می‌سازند:

$$P_r^n = r! \times C_r^n$$

و یا (۱-۴-۱)

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

و در حالت خاص داریم:

$$C_\circ^n = \binom{n}{\circ} = ۱ \qquad \text{و} \qquad C_n^n = \binom{n}{n} = ۱$$

نتیجه‌ی جالبی که به‌دست می‌آید این است که:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = C_{n-r}^n \qquad (۱-۴-۲)$$

یعنی

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

برای راحتی، در جدول (۱-۴-۱) مقادیر $\binom{n}{r}$ $(\circ \le r \le n \le ۹)$ را آورده‌ایم.

مثلاً $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ و $\binom{۹}{۴} = ۱۲۶$.

n \ r	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۱									
۱	۱	۱								
۲	۱	۲	۱							
۳	۱	۳	۳	۱						
۴	۱	۴	۶	۴	۱					
۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱		
۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
۹	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

جدول (۱-۴-۱). مقادیر $\binom{n}{r}, (0 \le r \le n \le ۹)$

نکته جالبی از این جدول به دست می‌آید.

$$\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}=۵۶+۷۰=۱۲۶=\binom{۹}{۴}$$

مثال ۱-۴-۱ ثابت کنید:

$$\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}=\binom{n}{r} \qquad (r,n \in N, r \le n) \qquad (۱-۴-۳)$$

اثبات.

اثبات جبری: طبق (۱-۴-۱) داریم:

$$\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}=\frac{(n-۱)!}{(r-۱)!(n-r)!}+\frac{(n-۱)!}{r!(n-r-۱)!}$$

$$=\frac{(n-۱)!r+(n-۱)!(n-r)}{r!(n-r)!}=\frac{(n-۱)!(r+n-r)}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-۱)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

اثبات ترکیبیاتی. فرض کنید $A=\{1,2,\dots,n\}$ طبق تعریف، $\binom{n}{r}$ راه برای انتخاب ترکیب‌های rتایی وجود دارد. حال ما انتخاب یک ترکیب rتایی را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم.

الف) انتخاب ترکیب‌هایی که عضو ۱ در آنها موجوداست. برای انتخاب این ترکیب‌ها باید باید $r-1$ عضو از $n-1$ عضو باقی‌مانده انتخاب کرد.

ب) انتخاب ترکیب‌هایی که عضو ۱ را شامل نمی‌شوند. برای انتخاب این ترکیب‌ها باید r عضو از $n-1$ عضو باقی‌مانده انتخاب کرد.

پس طبق اصل جمع داریم:

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \quad .\blacksquare$$

☜ تبصره:

در این مسأله، ما یکبار جواب را از یک راه به دست آوردیم و سپس مسأله را به دو بخش تقسیم و حل کردیم. اینکه جواب یک مسأله را از دو راه متفاوت حل کنیم راه حل پرکاربردی در حل مسایل ترکیبیاتی است.

✍ **مثال ۲-۴-۱** در مثال (۴-۱-۱) گفته شد که 2^7 دنباله با طول ۷ در مبنای دو وجود دارد. در چند تا از آنها دقیقاً ۳ بار صفر و ۴ بار یک آمده است؟

حل. برای ساختن یک دنباله با طول ۷ در مبنای دو

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)

ابتدا ۳ تا از ۷ خانه خالی را انتخاب می‌کنیم و در آنها صفر قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{7}{3}$ راه امکان پذیر است. سپس در ۴ خانه باقی‌مانده یک قرار می‌دهیم که

این کار به $\binom{4}{4} = 1$ حالت امکان دارد. پس تعداد اعداد دودویی با شرط ذکر شده برابر است با $\binom{7}{3}$.■

تبصره:

۱- در مسأله بالا می‌توان ابتدا ۴ خانه را انتخاب کرد و در آنها یک قرار داد. با این روش جواب مسأله برابر $\binom{7}{4}$ می‌شود که طبق اتحاد (۲-۴-۱) با $\binom{7}{3}$ برابر است.

۲- در حالت کلی تعداد دنباله‌های با طول n در مبنای ۲ که m عدد آن صفر و بقیه یک باشند برابر $\binom{n}{m}$ است.

مثال ۳-۴-۱ به چند روش می‌توان یک گروه پنج نفری از ۴ معلم و ۷ دانش‌آموز انتخاب کرد اگر:

الف) هیچ شرطی برای انتخاب وجود نداشته باشد؟

ب) در گروه دقیقاً ۲ معلم وجود داشته باشد؟

ج) در گروه حداقل ۳ معلم وجود داشته باشد؟

د) یک معلم خاص و یک دانش‌آموز خاص هر دو با هم در گروه حاضر نباشند؟

حل.الف) تعداد راه‌ها برابر با تعداد راه‌های انتخاب ۵ نفر از ۱۱ نفر است که برابر است با $\binom{11}{6} = 462$

ب) ابتدا۲ معلم را از۴ معلم انتخاب می‌کنیم و آنها را درگروه قرار می‌دهیم و سپس(۲-۵=)۳دانش‌آموز را از۷ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. تعداد راه‌ها برابر است با

$$\binom{4}{2} \times \binom{7}{3} = 6 \times 35 = 210$$

ج) این مسأله را به دو بخش نامتقاطع تقسیم می‌کنیم: ۳ معلم در گروه حضور

داشته باشند یا ۴ معلم.

در حالت اول تعداد راه‌ها برابر است با $\binom{۴}{۳}\binom{۷}{۲} = ۸۴$

و در حالت دوم تعداد راه‌ها برابر است با $\binom{۴}{۴}\binom{۷}{۱} = ۷$

و طبق اصل جمع، مقدار نهایی مسأله برابر است با ۸۴+۷=۹۱

د) T را معلم خاص و S را آن دانش‌آموز خاص فرض می‌کنیم. ما تعداد گروه‌های پنج نفری را می‌شماریم که در آنها هر دو نفر T و S حضور داشته باشند بدیهی است که برای انتخاب این گروه باید سه نفر از افراد دیگر را بدون هیچ شرطی انتخاب کنیم و سپس این دو نفر را هم به آنها بیفزاییم. پس برای انتخاب این گروه $\binom{۹}{۳}$ حالت وجود دارد. و طبق اصل متمم تعداد حالات انتخاب گروه‌هایی که در آنها هر دو نفر T و S با هم حضور نداشته باشند برابر با:

$$\binom{۱۱}{۵}-\binom{۹}{۳} = ۴۶۲-۸۴ = ۳۷۸ \qquad \blacksquare.$$

فرض کنید ۸ بازیکن h , g , f, e , d , c , b , a در یک مسابقه‌ی تنیس شرکت می‌کنند. در دور اول مسابقه ۴ بازی انجام می‌شود که در آن دو بازیکن مقابل هم قرار می‌گیرند. برای مثال:

(۱) a با b $\quad$ c با f $\quad$ d با a $\quad$ g با e

(۲) a با h $\quad$ b با g $\quad$ c با f $\quad$ d با e

تعداد راه‌هایی که دور اول مسابقه می‌تواند طبق آن انجام شود چقدر است؟ برای حل کردن اصولیِ این قبیل مسایل، به شکل زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید A ، مجموعه‌ای از $۲n$ شی متمایز باشد. یک جفت *شده* مجموعه‌ی A ، یک افراز مجموعه‌ی A است به زیر مجموعه‌های ۲ عضوی؛ به نحوی که اشتراک هر دوتایی تهی باشد و اجتماع همه‌شان A باشد.

برای مثال، اگر A مجموعه‌ی ۸ بازیکن $\{a , b , c , d , e , f, g , h\}$ باشد، آنگاه

$$\{\{a,h\},\{b,g\},\{c,f\},\{d,g\}\} \text{ و } \{\{a,b\},\{c,f\},\{d,f\},\{e,g\}\}$$

دو جفت شده A هستند.

مثال ۴-۴-۱ فرض کنید A مجموعه‌ای $2n$ عضوی باشد، تعداد جفت شده‌های مختلف A را بیابید.

حل. ما برای حل این مسأله، سه روش متفاوت ارایه می‌دهیم.

روش اول. یک عضو دلخواه x را در A در نظر می‌گیریم، تعداد راه‌های انتخاب عضو جفت شده با x، که آن را y می‌نامیم، برابر $(2n-1)$ است. از $(2n-2)$ عضو باقیمانده در A-$\{x,y\}$ یک عضو دلخواه z را در نظر می‌گیریم. تعداد راه‌های انتخاب عضو جفت شده با z برابر $(2n-3)$ است. طبق اصل ضرب مقدار نهایی جواب مسأله را به دست می‌آوریم $(2n-1)(2n-3)...5\times3\times1$.

روش دوم. ابتدا ما دو عضو A را انتخاب می‌کنیم و در زیر مجموعه‌ی اولی قرار می‌دهیم. برای این کار $\binom{2n}{2}$ راه داریم:

$$\underset{1}{\{\ ,\ \}} \qquad \underset{2}{\{\ ,\ \}} \qquad \underset{3}{\{\ ,\ \}} \qquad \cdots \qquad \underset{n}{\{\ ,\ \}}$$

سپس یک زیر مجموعه‌ی دو عضوی دیگر را از عضوهای باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم. برای این کار $\binom{2n-2}{2}$ راه داریم. همین کار را ادامه می‌دهیم طبق اصل ضرب، تعداد حالات چیدن زیر مجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه در یک ردیف برابر با $\binom{2}{2}\binom{4}{2}...\binom{2n-2}{2}\binom{2n}{2}$ به دست می‌آید. از آنجا که در صورت مسأله، مکان زیر

مجموعه‌ها مهم نیست پس جواب مسأله برابر است با: $\dfrac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{n!}$

روش سوم ابتدا $2n$ عضو را در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس عضوهای اول و دوم را در زیر مجموعه‌ی اول قرار می‌دهیم و به همین ترتیب عضوهای $2i-1$ و $2i$ را در زیر مجموعه‌ی i ام قرار می‌دهیم.

$$\underset{(1)\quad(2)}{\overset{(1)}{\{\quad ,\quad \}}} \quad \text{و} \quad \underset{(3)\quad(4)}{\overset{(2)}{\{\quad ,\quad \}}} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad \underset{(2n-1)\quad(2n)}{\overset{(n)}{\{\quad ,\quad \}}}$$

برای این کار $(2n)!$ راه داریم. اما از طرفی مکان اعضا در هر زیر مجموعه و مکان خود زیر مجموعه‌ها نیز مهم نیست پس جواب مسأله به دست می‌آید.

$$\frac{(2n)!}{\underbrace{2!\times 2!\times\cdots\times 2!}_{n}\times n!}=\frac{(2n)!}{n!\times 2^n}.\ \blacksquare$$

البته می‌توان نشان داد که سه جواب به دست‌آمده، با هم برابرند. مسأله‌ی بالا را می‌توان تعمیم داد. فرض کنید A یک زیر مجموعه kn عضوی باشد. یک زیر مجموعه‌ی k تایی شده A، یک افراز مجموعه‌ی A به زیر مجموعه‌های k عضوی است. که اشتراک هر دوتایی تهی و اجتماع همه‌شان برابر A است. برای مثال، اگر $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{12}\}$، آنگاه:

$$\{\{a_1,a_4,a_9,a_{12}\},\{a_2,a_5,a_8,a_{10}\},\{a_3,a_6,a_7,a_{11}\}\}$$

یک زیر مجموعه‌ی چهارتایی شده A است. تعداد زیر مجموعه‌های kتایی شده یک مجموعه‌ی kn عضوی چندتاست؟ (مسأله ۴۳-۱ را ببینید).

مثال ۵-۴-۱ [۱۹۸۹/۳ - المپیاد ریاضی جهانی]

فرض کنید n و k دوعدد صحیح‌اند و S، مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه است به طوری که :

(الف) هیچ سه نقطه‌ای از S روی یک خط نیستند.

(ب) به ازای هر نقطه‌ی P از مجموعه‌ی S، حداقل k نقطه از S یافت می‌شوند که از p به یک فاصله‌اند.

ثابت کنید $k < \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲n}$.

اثبات. تمام پاره خطهایی از صفحه را در نظر می‌گیریم که دو نقطه از S را به هم وصل کنند. فرض کنید تعداد آنها l باشد. ما در صفحه n نقطه داریم و هر دو نقطه از آنها یک پاره خط را مشخص می‌کند. پس داریم:

$$l = \binom{n}{۲}$$

حال برای هر نقطه مانند P از مجموعه‌ی S داریم که حداقل k نقطه از S یافت می‌شوند که از P به یک فاصله باشند. پس آن نقاط روی دایره‌ای به مرکز P قرار دارند. این k نقطه $\binom{k}{۲}$ پاره خط را می‌سازند. پس تعداد پاره خطها حداقل برابر $n \times \binom{k}{۲}$ است. اما، در این بین ممکن است یک پاره خط چند بار شمرده باشیم. اگر یک پاره خط را دوبار شمرده باشیم، باید این خط را روی دو دایره قرار گرفته باشد. و اگر یک پاره خط را بیشتر از دو بار شمرده باشیم باید دو نقطه دو سر پاره خط هر دو روی بیش‌تر از دو دایره قرار گرفته باشند. پس مراکز این دوایر که همه روی عمودمنصف این پاره خط قرار دارند با هم حداقل سه نقطه را می‌سازند که بر روی یک خط قرار دارند. که این با شرط**(الف)** ناسازگار است. پس هر پاره خط را حداکثر دو بار شمرده‌ایم و در نتیجه داریم، تعداد پاره خطهای شمرده شده در بار

دوم از دو برابر پاره خط‌های شمرده شده در بار اول بیشتر نیست پس:

$$n\binom{k}{۲}-\binom{n}{۲}\leq\binom{n}{۲}$$

$$n\binom{k}{۲}\leq ۲\binom{n}{۲}$$

$$\frac{n(k-۱)k}{۲}\leq ۲\frac{(n-۱)n}{۲}$$

$$k^{۲}-k-۲(n-۱)\leq ۰$$

$$k\leq\frac{۱+\sqrt{۱+۸(n-۱)}}{۲}<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸n}=\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲n}\quad\blacksquare$$

توضیحات:

در اثبات بالا مقدار l را از دو راه متفاوت پیدا کردیم ($l=C_{۲}^{n}$ و $l\leq n\binom{k}{۲}-\binom{n}{۲}$) که از ترکیب آن دو به فرمول مهم $n\binom{k}{۲}<۲\binom{n}{۲}$ رسیدیم. این که برای یک مقدار، دو رابطه متفاوت به دست آوریم یکی از روش‌های معمول و قوی در ترکیبیات است که در حل معادلات و نامعادلات، کمک فراوانی می‌کند.

مثال ۶-۴-۱ اگر قرار باشد که سر هر میز حداقل یک نفر بنشیند؛ به چند حالت ۶ نفر می‌توانند

(الف) دور دو میز بنشینند.

(ب) دور سه میز بنشینند.

(میزها با هم فرق ندارند)

حل.(الف) اگر تعداد افرادی را که دور یک میز نشسته‌اند را با دو عدد نشان دهیم آنگاه برای این دو عدد فقط ۳ حالت وجود دارد.

(۱) ۵+۱ (۲) ۴+۲ (۳) ۳+۳

حالت (۱). برای تقسیم ۶ نفر به دو گروه ۱ و ۵ نفری، $\binom{6}{5}$ حالت وجود دارد. طبق فرمول (۲-۳-۱)، اگر پنج نفر بخواهند دور یک میز بنشینند !(۱-۵) حالت و برای نشستن ۱ نفر دورمیز !۰حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب، تعداد حالات برابر است با

$$\binom{6}{5}\times 4!\times 0! = 144$$

حالت (۲). برای تقسیم ۶ نفر به دو گروه ۴ و ۲ نفری $\binom{6}{4}$ حالت وجود دارد. و با روش مشابه تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{6}{4}\times 3!\times 1! = 90$$

حالت (۳). این حالت نیاز به دقت بیشتری دارد. برای تقسیم ۶ نفر به دو گروه ۳ نفری $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$ حالت وجود دارد، زیرا دو گروه می‌توانند جای خود را عوض کنند. پس تعداد حالات برابر است با: $\frac{1}{2}\binom{6}{3}\times 2!\times 2! = 40$ و طبق اصل جمع، تعداد حالات نهایی برابراست با،

$$144+90+40=274$$

(ب) در این حالت هم اگر تعداد افراد دور میزها را با عدد نشان دهیم سه حالت وجود دارد.

(۱) $4+1+1$ (۲) $3+2+1$ (۳) $2+2+2$

و تعداد راه‌های نشستن افراد دور میزها به ترتیب

$$(1)\quad \frac{1}{2}\binom{6}{4}\binom{2}{1}\times 3!\times 0!\times 0! = 90$$

$$(2)\quad \binom{6}{3}\binom{3}{2}\times 2!\times 1!\times 0! = 120$$

$$(3)\quad \frac{1}{3!}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\times 1!\times 1!\times 1! = 15$$

و طبق اصل جمع، تعداد حالات نهایی برابر است با ۲۲۵=۱۵+ ۱۲۰+ ۹۰. ■

دو عدد صحیح r,n $(0 \le n \le r)$ داده شده‌اند. فرض کنید $s(r,n)$ نمایش‌دهندهٔ تعداد راه‌های قرار گرفتن r شی متمایزحول n دایره (نامتمایز) باشد به شرطی که دور هر دایره حداقل یک شی باشد. این گونه اعداد، *اعداد استرلینگ نوع اول* نامیده می‌شوند. که این اعداد را «جیمز استرلینگ» (۱۷۷۰-۱۶۹۲) ابداع کرده است. با توجه به مثال (۶-۴-۱) می‌توان نوشت ۲۷۴= s(۲و۶) و ۲۲۵=s(۳و۶) نتایج تقریباً واضح که ازتعریف به دست می‌آیند از قرار زیر است.

$$\begin{array}{ll} s(r,0) = 0 & r \ge 1 \\ s(r,r) = 1 & r \ge 0 \\ s(r,1) = (r-1)! & r \ge 2 \\ s(r,r-1) = \binom{r}{2} & r \ge 2 \end{array}$$

مثال ۷-۴-۱ نشان دهید که:

$$s(r,n) = s(r-1,n-1) + (r-1)\,s(r-1,n) \qquad (1-4-4)$$

اثبات، برای سادگی، فرض کنید اجسام را با $a_1,a_2,\dots,a_r$ نشان دهیم. عضو a_1 را در نظر بگیرید. این عضو یا تنهایی در یک دایره قرار گرفته است (حالت الف) و یا با اشیا دیگر در دایره قرار گرفته است(حالت ب).

در حالت الف $s(r-1,n-1)$ راه وجود دارد. **در حالت (ب)** ابتدا $(r-1)$ شی $a_2,a_3,\dots,a_r$ را درn دایره به $s(r-1,n)$ حالت قرار می‌دهیم. سپس عنصر a_1 می‌تواند به r-1 روش در سمت راست عناصر $a_2,a_3,\dots,a_r$ قرار گیرد. طبق اصل ضرب، برای حالت (ب) $(r-1)s(r-1,n)$ حالت وجود دارد و طبق اصل جمع

مقدار $s(r,n)$ از جمع دو حالت به دست می‌آید.■

با درنظر گرفتن مقـادیر اولیـه‌ی ۱=(۰ و ۰)s و ۰ =(۰ و ۱)s و !(۱−r)=(۱ و r)s و به کار بردن اتحاد(۴−۴−۱) مقـدار (n و r)s بـرای n و r کوچـک بـه دسـت می‌آیـد. مقادیر (n و r)s برای ۹ ≥ r,n در جدول (۲−۴−۱) آمده است.

r \ n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۱									
۱	۰	۱								
۲	۰	۱	۱							
۳	۰	۲	۳	۱						
۴	۰	۶	۱۱	۶	۱					
۵	۰	۲۴	۵۰	۳۵	۱۰	۱				
۶	۰	۱۲۰	۲۷۴	۲۲۵	۸۵	۱۵	۱			
۷	۰	۷۲۰	۱۷۶۴	۱۶۲۴	۷۳۵	۱۷۵	۲۱	۱		
۸	۰	۵۰۴۰	۱۳۰۶۸	۱۳۱۳۲	۶۷۶۹	۱۹۶۰	۳۲۲	۲۸	۱	
۹	۰			۱۱۸۱۲۴	۶۷۲۸۴	۲۲۴۴۹	۴۵۳۶	۵۴۶	۳۶	۱

جدول (۲−۴−۱)، مقادیر $s(r,n)$ برای $0 \leq n \leq r \leq 9$

۵−۱− تناظر یک به یک

فرض کنید یک گروه از n دانش‌آموز در یک سالن که ۲۰۰ صندلی دارد، جمع شده‌اند. اگر هر دانش‌آموز حداکثر یک صندلی اشغال کند و هیچ دو دانش‌آموزی با هم روی یک صندلی ننشینند، پس تقریباً واضح است که $n \leq 200$. اگر بدانیم

که هیچ صندلی خالی نمی‌ماند آن‌گاه ما بدون شمردن تعداد دانش‌آموزان مطمئن می‌شویم که $n=۲۰۰$. این یک مثال برای اصولی بود که در این بخش می‌خواهیم مطرح کنیم. قبل از هر چیز، چند تعریف ارایه می‌کنیم.

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند. یک نگاشت $f:A \to B$ را یک رابطه‌ی یک به یک می‌نامیم. اگر:

$$\forall a_۱,a_۲ \in A, a_۱ \neq a_۲ : f(a_۱), f(a_۲) \in B, f(a_۱) \neq f(a_۲)$$

و یک نگاشت $f:A \to B$ را پوشا می‌نامیم اگر:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$$

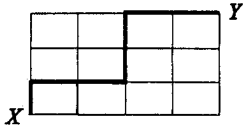
و رابط نگاشت $f:A \to B$ را یک تناظر یک به یک می‌نامیم اگر یک به یک و پوشا باشد.

اصل رابطه‌ی یک به یک فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی متناهی هستند. اگر یک رابطه‌ی یک به یک از A به B بر قرار باشد آنگاه مسلماً داریم: $|A|\leq|B|$

اصل تناظر یک به یک فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی متناهی هستند. اگر یک تناظر یک به یک از A و B بر قرار باشد آنگاه مسلماً داریم: $|A|=|B|$

این دو اصل همانند اصول قبلی در حل مسایل شمارش، کاربرد زیادی دارند.

مثال ۱-۵-۱ یک دانش‌آموز می‌خواهد از روی خیابان‌های شهر که نقشه‌ی آن در شکل (۱-۵-۱) نشان داده شده است، از نقطه X به نقطه Y برود. به چند روش می‌تواند با طی کمترین مسافت از X به Y برود.



شکل ۱-۵-۱

حل. فرض کنید، A مجموعه‌ی تمام مسیرهایی باشد که کمترین مسافت را دارند. حال ما سعی می‌کنیم که $|A|$ را بیابیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که هر مسیرکه در A باشد باید دارای هفت خیابان باشد و در نقشه، دارای هفت پاره خط با طول واحد که ۴ تای آنها افقی و ۳ تا عمودی هستند. بنابراین اگر ما هر مسیر افقی را با "۰" و هر مسیر عمودی را با "۱" نشان دهیم. آن گاه مسیر دانش‌آموز از X به Y دنباله‌ای را می‌سازد، با طول ۷ در مبنای ۲ که ۴ بار در آن صفر و ۳ بار یک آمده است. هر مسیری را که دانش‌آموز طی کند، می‌توان با چنین دنباله‌ای نشان داد. از طرفی، هر دنباله با طول ۷ در مبنای ۲ که ۴ بار صفر در آن آمده باشد؛ می‌تواند راهنمای دانش‌آموز برای رفتن از X به Y باشد. پس بین دنباله‌هایی با طول ۷ و در مبنای ۲ که ۴ بار صفر در آن آمده و مجموعه‌ی A، یک تناظر یک به یک وجود دارد. پس طبق اصل تناظر یک به یک و مثال (۲-۴-۱) داریم:

$|A|=$ تعداد دنباله‌های در مبنای ۲با طول ۷ که چهار بار صفر در آنها آمده $= \binom{7}{3}$. ■

☜ تبصره:

نقشه‌ای که در شکل (۱-۵-۱)نشان داده شده یک شبکه ۴×۵ است. درحالت کلی اگر یک شبکه $(n+1)\times(m+1)$ دارای $m+1$ خیابان افقی و $n+1$ خیابان عمودی باشد آنگاه تعداد راه‌های رسیدن از یک گوشه به گوشه‌ی دیگر به طوری که کوتاهترین مسافت طی شود برابر با $\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$ است.

مجموعه‌ی X را در نظر بگیرید: مجموعه‌ی توانی X، که با $P(X)$ نمایش داده می‌شود مجموعه‌ای است که اعضای آن تمام زیر مجموعه‌های X است. برای مثال اگر، $X=\{1,2,3\}$ آنگاه $P(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},X\}$

و ۸ $=|P(X)|$. در حالت کلی اگر مجموعه‌ی X، n عضوی باشد درباره‌ٔ $|P(X)|$ چه می‌توان گفت؟

مثال ۲-۵-۱ نشان دهید اگر $|X|=n$ آنگاه $|P(X)|=2^n$؛ $(n \in N)$

اثبات.

فرض می‌کنیم

$X = \{1,2,\ldots,n\}$ و $B = \left\{a_1a_2\ldots a_n \middle| a_i = 0 \text{ یا } 1, \quad i = 1,2,\ldots,n\right\}$ مجموعه دنباله‌های در مبنای دو با طول n باشد. نگاشت $f: P(X) \to B$ را اینگونه تعریف می‌کنیم: به ازای هر $S \in P(x)$

که در آن $f(S) = b_1b_2\ldots b_n$

$$b_i = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

(برای مثال اگر $X = \{1,2,\ldots 5\}$ و $S_1 = \{4\}$ و $S_2\{2,3\}$ آنگاه $f(S_1) = 00010$ و $f(S_2) = 01100$) به سادگی می‌توان نشان داد که یک تناظر یک به یک بین $P(X)$ و B برقرار است و طبق اصل تناظر یک به یک داریم $|P(x)|=|B|$. از طرفی در مثال (۴-۱-۱) بررسی شد که $|B|=2^n$ که حکم را به دست می‌دهد.■

مثال ۳-۵-۱ فرض کنید $X = \{1,2,\ldots,n\}$. نشان دهید تعداد ترکیب‌های rتایی از x که شامل هیچ عدد متوالی نباشند برابر است با:

$$\binom{n-r+۱}{r}$$

برای مثال، مجموعه‌ی $X=\{۱,۲,...,۷\}$ را در نظر بگیرید. تمام ترکیب‌های ۳ تایی از x که شامل هیچ دو عدد متوالی نباشند در زیر آمده‌اند.

{۱،۴،۷} و {۱،۴،۶} و {۱،۳،۷} و {۱،۳،۶} و {۱،۳،۵}

{۳،۵،۷} و {۲،۵،۷} و {۲،۴،۷} و {۲،۴،۶} و {۱،۵،۷}

مشاهده می‌شود که تعداد این ترکیب‌ها ده تاست و $\binom{۷-۳+۱}{۳}=۱۰$

اثبات. فرض کنید، A مجموعه‌ی ترکیب‌های r تایی از X باشد که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند و B مجموعه‌ی ترکیب‌های r تایی مجموعه‌ی Y است.

$$Y=\{۱,۲,...,n-(r-۱)\}$$

ما سعی می‌کنیم یک تناظر یک به یک از A به B برقرار کنیم.

فرض کنید $S=\{s_۱,s_۲,...,s_r\}$ یک عضو A باشد و $s_۱<s_۲<...<s_r$ تعریف می‌کنیم:

$$f(S)=\{s_۱,s_۲-۱,s_۳-۲,...,s_r-(r-۱)\}$$

واضح است که اگر s_i و $s_{i+۱}$ متوالی نباشند، هیچ دو عضو $f(S)$ مساوی نیستند پس $f(S)\in B$، پس می‌توان دید که f یک رابطه‌ی یک به یک از A به B است. برای اثبات پوشا بودن f فرض کنید $T=\{t_۱,t_۲,...,t_r\}$ یک عضو B باشد و مجموعه‌ی $S=\{t_۱,t_۲+۱,...,t_r+(r-۱)\}$ را در نظر بگیرید. اگر $t_۱\langle t_۲\langle...\langle t_r$ باشد آنگاه هیچ دو عضو S متوالی نیستند و S عضو A است. و $f(S)=T$: طبق تعریف $f:A\to B$ یک تناظر یک به یک است و طبق اصل تناظر یک به یک

داریم: $|A|=|B|=\binom{n-r+1}{r}$. ■

☜ **تبصره:**

مسأله‌ی بالا می‌تواند به این روش تعمیم یابد. فرض کنید $S=\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که $a_1\langle a_2\langle\dots\langle a_r$. S یک زیر مجموعه mتایی جدا شده نامیده می‌شود اگر $a_i-a_{i-1}\geq m$ $(i=1,2,\dots r)$. در آن صورت یک مجموعه‌ی دو تایی جدا شده است اگر و فقط اگر شامل هیچ دو عدد متوالی نباشد. فرض کنید $X=\{1,2,\dots,n\}$، با استفاده از اصل تناظر یک به یک سعی کنید فرمولی برای زیر مجموعه‌های mتایی جدا شده X بیابید(مسأله ۹۱-۱ را ببینید).

در سه مثال بالا، برای سه مجموعه‌ی A(تعداد کوتاه‌ترین مسیر، تعداد عضوهای $P(X)$ و تعداد ترکیب‌های r تایی یک مجموعه که شامل هیچ دو عدد متوالی نباشند) سه مجموعه‌ی متناظر B (دنباله‌های در مبنای ۲ و طول ۷ که ۴ صفر دارند، دنباله‌های در مبنای ۲ با طول n و مجموعه‌ی ترکیب‌های r تایی یک مجموعه‌ی دیگر) در نظر گرفته شد. و با بر قرار ساختن یک تناظر یک به یک از A به B بدون شمردن تعداد اعضای A به تعداد اعضای B پی بردیم.

در مسایل فوق، محاسبه $|A|$ به تنهایی کار ساده‌ای نبود و ما با در نظر گرفتن مجموعه‌ی B یک مسأله‌ی مشکل را به یک مسأله‌ی ساده‌تر تبدیل کردیم.
این یک روش مطمئن در حل مسایل شمارش است. در مسایل بعدی ما مثال‌هایی ارایه می‌دهیم که از هر دو اصل تناظر یک به یک و اصل رابطه یک به یک استفاده شود.

مثال(۴-۵-۱) [۱۹۸۹/۶- المپیاد ریاضی جهانی] یک تبدیل $x_1x_2\dots x_{2n}$ را در صورتی خوب می‌نامیم که عضوهای آن از مجموعه‌ی $\{1،2،3،\dots،2n\}$ باشند و به ازای حداقل یک i، عضو $\{1،2،\dots،2n-1\}$، تساوی $|x_i-x_{i+1}|=n$ بر قرار باشد و یک

تبدیل را در صورتی بد می‌نامیم که خوب نباشد. ثابت کنید برای هر n، تعدادتبدیل‌های خوب از تبدیل‌های بد بیشتر است. برای این مسأله که در المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۸۹ به عنوان آخرین سؤال از ۶ سؤال آزمون توسط تیم اعزامی از لهستان پیشنهاد شده بود، راه حل طولانی و پیچیده‌ای به وسیله روابط بازگشتی توسط تیم پیشنهاد دهنده ارایه شده بود. ولی راه حلی کوتاه و بسیار زیبا توسط یکی از شرکت کنندگان چینی ارایه شد که تحسین همگان را بر انگیخت. قبل از این که به طرح این اثبات بپردازیم، با مثالی می‌خواهیم مسأله را بهتر بفهمیم. فرض کنید n=۲ و A و B به ترتیب مجموعه‌ی تبدیل‌های بد و خوب باشند:

A={۱۲۳۴،۱۴۳۲،۲۱۴۳،۲۳۴۱،۳۲۱۴،۳۴۱۲،۴۱۲۳،۴۳۲۱}

B={۱۲۴۳،۱۳۲۴،۱۳۴۲،۱۴۲۳،۲۱۳۴،۲۳۱۴،۲۴۱۳،۲۴۳۱،

۳۱۲۴،۱۳۲۴،۳۲۴۱،۳۴۲۱،۴۱۳۲،۴۲۱۳،۴۲۳۱،۴۳۱۲}

واضح است که $|B| = ۱۶ > ۸ = |A|$

اثبات. در حالت n=۱ ، مسأله به سادگی قابل بررسی است. فرض کنید $n \geq ۲$.

اگر A مجموعه تبدیل‌های بد باشد برای اثبات $|B|>|A|$ کافی است یک رابطه‌ی یک به یک وغیر پوشا از A به B بیابیم. برای سادگی کار، زوج $\{k،\ n+k\}$ $(k=۱،۲...n)$ را زوج متناظر نامیم و اگر k و $n+k$ در تبدیلی، متوالی باشند به آنها یک *زوج متناظر متوالی* می‌گوییم.

اگر $\alpha = x_1x_2\ldots x_{2n}$ یک عضو A باشد پس عضو متناظر x_1 باید در $\{x_3, x_4, \ldots, x_{2n}\}$ باشد، آن را x_r می‌نامیم. $(۳ \leq r \leq ۲n)$ و $f(\alpha)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(\alpha) = x_2x_3\ldots x_{r-1}\underline{x_1x_r}x_{r+1}\ldots x_{2n}$$

f عضو x_1 را به قبل از متناظرش منتقل می‌کند. مثلاً $f(1234)=2134$ و $f(2143)=1243$. واضح است که $f(\alpha)\in B$ و می‌توان به سادگی فهمید که در $f(\alpha)$ فقط و فقط یک زوج متناظر متوالی وجود دارد. پس f تبدیل‌های خوبی که در آنها بیشتر از یک زوج متناظر متوالی وجود دارد را نمی‌پوشاند و f پوشا نیست. حال برای اثبات یک به یک بودن آن فرض می‌کنیم:

$$\alpha = x_1x_2\ldots x_{2n}$$

$$\beta = y_1y_2\ldots y_{2n}$$

دو عضو A باشند. برای آن که $f(\alpha)=f(\beta)$ باشند باید:

(x_r و y_s متناضرهای x_1 و y_1 هستند.)

$$x_2x_3\ldots x_{r-1}x_1x_r\ldots x_{2n} = y_2y_3\ldots y_{s-1}y_1y_s\ldots y_{2n}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود $s = r$ و $x_1=y_1$ و $x_r=y_s$ و در نتیجه باید $x_i=y_i$؛ $(i=1,2,\ldots,2n)$ و $\alpha=\beta$. پس f یک تابع یک به یک و غیر پوشاست و طبق اصل روابط یک به یک نتیجه می‌شود که $f(A)\subset B$ و $|A|<|B|$. ■

۶-۱- چیدن وانتخاب با تکرار

در بخش‌های قبلی، ما چیدن و انتخاب اشیای یک مجموعه را بدون تکرار بررسی کردیم. در این بخش، به مطالعه‌ی چیدن و انتخاب اشیای یک مجموعه در صورتی که تکرار مجاز باشد می‌پردازیم.

مثال ۱-۶-۱ فرض کنید $A=\{a,b,c\}$. تمام تبدیل‌های دوتایی از A را بیابید به شرطی که تکرار مجاز باشد.

حل. $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ ■.

و در حالت کلی داریم:

(الف) تبدیل‌های r تـایی از مجموعـه $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، $r, n \in N$، در صورتـی که تکرار مجاز باشد برابر است با n^r

اثبات الف.

برای انتخاب شـی اول n حـالت انتخـاب داریـم. چـون تکـرار مجـاز اسـت بـرای انتخاب دومی هم n حالت انتخاب و این طور برای بقیه هم n حالت انتخاب پس طبـق اصل ضرب، تعداد حالات انتخاب برابر است با $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r} = n^r$

مثال ۲-۶-۱ می‌خواهیم یک ساختمان ۴ طبقه را با شش رنگ مختلـف رنـگ کنیم. هر طبقه با یک رنگ، رنگ می‌شود. چند راه برای رنگ کردن آن ساختمان وجـود دارد.

حل. جواب این مسأله در واقـع برابـر اسـت بـا تبدیل‌هـای ۴ تـایی از مجموعـه‌ی $\{1, 2, \ldots, 6\}$ به طوری که تکرار مجاز باشد، که طبق (الف) مقدار آن برابر 6^4 است.■

در تبدیل‌هایی که حـالت کلـی آنهـا در (الـف) آمـده، هـر شـی می‌توانـد بـه تعـداد نامحدودی در تبدیل‌ها ظاهر شود. حال ما، حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که در آنها هر شی به دفعات معینی می‌تواند ظاهر شود.

مثال(۳-۶-۱) تمام تبدیل‌ها۵ تایی a,a,a,b,c را بیابید.

حل. فرض کنید تعداد این تبدیل‌ها α باشد. یکی از تبدیل‌هـا (مثلاً $aabac$) را در نظر می‌گیریم. حال فرض کنید سه مقدار a متفاوت باشند آنهـا را بـا a_1, a_2, a_3 نشـان می‌دهیم.

اکنون می‌توان از هر تبدیل دلخواه تعدادی تبدیل به دست آورد.

$$\boxed{aabac} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a_1a_2ba_3c \\ a_1a_3ba_2c \\ a_2a_1ba_3c \\ a_2a_3ba_1c \\ a_3a_1ba_2c \\ a_3a_2ba_1c \end{array}}$$

از هر "abaac" می‌توان ۶= !۳ تبدیل از مجموعه‌ی $\{a_1, a_2, a_3, b, c\}$ به دست آورد و بالعکس. به علاوه برای مجموعه $\{a_1, a_2, a_3, b, c\}$!۵ تبدیـل وجـود دارد.

پس $\alpha \times 3! = 5! \Rightarrow \alpha = \frac{5!}{3!} = 20$. ■

در حالت کلی داریم:

(ب) یک مجموعه‌ی r عضوی شامل r_1 عضو از نوع اول، r_2 عضو از نـوع دوم،... و r_n عضو از نوع n ام را در نظر بگیرید که $r_1 + r_2 + \dots r_n = r$. تعداد تبدیل‌هـای ایـن مجموعه که با $P(r:r_1, r_2, \dots, r_n)$ نمایش داده شده است برابراست با

$$P(r:r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$$

*** البته می‌توان (ب) را با روشی که در مثال(۳-۶-۱)به کار رفت حل کرد. اما ما در اینجـا روش دیگری ذکر می‌کنیم.**

اثبات(ب). در هر تبدیل r_1 بار شی a_1، r_2 بار شـی a_2، ...، r_n بـار شـی a_n آمـده است. ابتدا تمام خانه‌هایی که در آنها شی نوع a_1 قرار می‌گیرد را انتخاب می‌کنیم.

تعداد راه‌های انجام این کار برابر $\binom{n}{r_1}$ است. در مرحلـه‌ی دوم از $(r-r_1)$ مکـان باقی‌مانده، r_2 مکان را انتخاب می‌کنیم و در آنها شی a_2 را قـرار می‌دهیم کـه تعـداد راه‌هـــای انجـــام ایـــن کـــار برابـــر $\binom{(r-r_1)}{r_2}$ اســـت و... و در مرحلـــه‌ی nام از $r-(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})$ مکان باقی‌مانده، r_n تا را انتخاب کرده، در آنها شی a_n قـرار می‌دهیم که تعداد راه‌های انجام این کار برابر $\binom{r-(r_1+\ldots+r_{n-1})}{r_n}$ است. پـس طبـق اصـل ضرب و فرمول (۱-۴-۱) داریم.

$$
\begin{aligned}
&P(r:r_1,r_2,\ldots,r_n)\\
&=\binom{r}{r_1}\binom{r-r_1}{r_2}\cdots\binom{r-(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})}{r_n}\\
&=\frac{r!}{r_1!(r-r_1)!}\cdot\frac{(r-r_1)!}{r_2![r-(r_1+r_2)]!}\cdots\frac{[r-r_n(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})]!}{r_n!}\\
&=\frac{r!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}
\end{aligned}
$$

یک شبه مجموعه را مجموعه‌ای از اشیای نه لزوماً متمایز تعریف می‌کنیـم. مثـلاً $\{a,b,a,c,b,a\}$ یک شبه مجموعه است که البته می‌توان آن را به این شکل هـم نشـان داد $M=\{3\times a,2\times b,c\}$ و در حالت کلی، یک شبه مجموعه به این شکل است.

$.M=\{r_1.a_1,r_2.a_2,\ldots,r_n.a_n\}$

که $n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ اعداد صحیح غیر منفی‌اند و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اشیاء متمایز هستند و M شامل r_1 تا شی a_1، r_2 تا شی $a_2, \ldots, r_n$ تا شی a_n است. r_i را عدد تکرار a_i نامیم و برای راحتی در نمایش اگر از شی a_i به تعداد نامحدودی در دست داشته باشیم r_i را ∞ قرار می‌دهیم. برای مثال، شبه مجموعه‌ای را که در آن b و e به تعدادی نامحدودی در دست باشند و c, a و d به ترتیب ۷،۴،۲ بار آمده باشند را به این شکل نمایش می‌دهیم $M = \{۲.a, \infty.b, ۴.c, ۷.d, \infty.e\}$. یک تبدیل r تایی از $M = \{r_1.a_1, r_2.a_2, \ldots r_n.a_n\}$ یک حالت قرار گرفتن r شی از M است که در آن از هر عضو a_i حداکثر r_i با استفاده شده باشد و یک جایگشت M، یک حالت قرار گرفتن تمام عضوهای M در یک صف است. یک تبدیل r تایی از شبه مجموعه‌ی M که $M = \{\infty.a_1, \infty.a_2, \ldots, \infty.a_n\}$ نیز تعداد راه‌های قرار گرفتن r شی از M تعریف می‌شود که درآن از هر عضو، به تعداد نامتناهی در دسترس باشد. از این عبارات، نتایج زیر را به دست می‌آوریم که در واقع بیان دیگری از الف و ب هستند.

(الف) تعداد تبدیل‌های r تایی از شبه مجموعه‌ی $\{\infty.a_1, \infty.a_2, \ldots, \infty.a_n\}$ برابر n^r است.

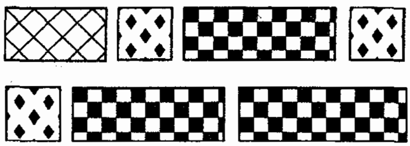
(ب) فرض کنید $M = \{r_1.a_1, r_2.a_2, \ldots r_n.a_n\}$ و $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$. آنگاه $P(r, r_1, r_2, \ldots, r_n)$ که برابر تعداد تبدیل‌های M است برابر است با:

$$p(r: r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}$$

مثال ۴-۶-۱ تعداد دنباله‌هایی با طول ۱۰ در مبنای ۳ را بیابید که در آنها ۲ بار عدد صفر، ۳ بار یک و ۵ بار دو آمده باشد.

حل. تعداد این گونه اعداد برابر تعداد جایگشت‌های شبه مجموعه‌ی {۲ . ۰، ۳ . ۱، ۵ . ۲} است که برابر است با $\frac{۱۰!}{۲!۳!۵!} = ۲۵۲$. ■

مثال ۵-۶-۱ تعداد راه‌های پوشاندن یک زمین مستطیل شکل ۷×۱ را با موزاییک‌های ۱×۱، ۲×۱، ۳×۱ بیابید اگر موزاییک‌های هم اندازه باهم فرق نداشته باشند. برای درستی کار، دو راه پوشاندن زمین در پایین نشان داده شده است.



حل. فرض کنید b_i نشان دهندهٔ یک موزاییک $۱\times i$ باشد. مثلاً حالت اول را با $b_۳b_۱b_۲b_۱$ که یک تبدیل از $\{۲.b_۱, b_۲, b_۳\}$ است نشان می‌دهیم و حالت دوم را با $b_۱b_۳b_۳$ که تبدیلی از $\{b_۱, ۲.b_۳\}$ است نمایش می‌دهیم و در هر نمایش، مجموع اعداد برابر ۷ است. از طرفی، تعداد شبه مجموعه‌هایی که مجموع اعداد پایین آنها ۷ باشد۸ تاست.

الف) $\{۷.b_۱\}$ ب) $\{۵.b_۱, b_۲\}$ ج) $\{۳.b_۱, ۲b_۲\}$ د) $\{b_۱, ۳.b_۲\}$

هـ) $\{۴.b_۱, b_۳\}$ و) $\{b_۱, ۲.b_۳\}$ ز) $\{۲.b_۱, b_۲, b_۳\}$ ح) $\{۲.b_۲, b_۳\}$

که تعداد تبدیل‌های شبه مجموعه‌های زیر به‌ترتیب برابرند با:

الف) ۱ ب) $\frac{۶!}{۵!} = ۶$ ج) $\frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$ د) $\frac{۴!}{۳!} = ۴$

$\text{ه)} \frac{5!}{4!} = 5$ $\quad$ $\text{و)} \frac{3!}{2!} = 3$ $\quad$ $\text{ز)} \frac{4!}{2!} = 12$ $\quad$ $\text{ح)} \frac{3!}{2!} = 3$

که طبق اصل جمع تعداد راه‌های نهایی برابر است با

$$1+6+10+4+5+3+12+3=44\ .\ \blacksquare$$

مثال ۶-۶-۱ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، $(4n)!$ مضربی از $2^{3n}\times 3^{n}$ است.

اثبات. شبه مجموعه‌ی $M=\{4.a_1,4.a_2,\ldots,4.a_n\}$ را در نظر بگیرید. طبق(ب) داریم:

$$P(4n{:}4,4,4,\ldots,4)=\frac{(4n)!}{4!\times 4!\times\ldots\times 4!}=\frac{(4n)!}{(4!)^n}$$
$$=\frac{(4n)!}{(2^3.3)^n}=\frac{(4n)!}{2^{3n}.3^n}$$

وحکم از این‌که $P(4n:4،4،...،4)$ عددی طبیعی است به‌دست می‌آید.■

فرض کنید $A=\{1،2،3،4\}$. $\binom{4}{3}$ حالت برای انتخاب یک ترکیب سه تایی از A وجود داردبه طوری که هر عضو، حداکثر یکبار در ترکیب بیاید حال سؤال جدیدی را مطرح می‌کنیم. چند ترکیب سه تایی از مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که تکرار مجاز باشد؟

جواب ۲۰ تا است:

{۳،۳،۳}	{۲،۲،۴}	{۱،۳،۴}	{۱،۲،۲}	{۱،۱،۱}
{۳،۳،۴}	{۲،۳،۳}	{۱،۴،۴}	{۱،۲،۳}	{۱،۱،۲}
{۳،۴،۴}	{۲،۳،۴}	{۲،۲،۲}	{۱،۲،۴}	{۱،۱،۳}
{۴،۴،۴}	{۲،۴،۴}	{۲،۲،۳}	{۱،۳،۳}	{۱،۱،۴}

فرض کنید $M=\{\infty.a_1,\infty.a_2,\ldots,\infty.a_n\}$ یک شبه مجموعه باشد؛ $A=\{m_1.a_1,m_2.a_2,\ldots,m_n.a_n\}$ که $m_i\in N$ و $m_1+m_2+\ldots+m_n=m$ را یک شبه زیر مجموعه‌ی m عضوی از M می‌نامیم. بنابراین ۲۰ شبه زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی از شبه مجموعه $\{\infty.1,\infty.2,\infty.3,\infty.4\}$ وجود دارد. فرض کنید H_r^n نمایش دهندهٔ تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی M باشد. آنگاه داریم $H_3^4=20$. ما سعی می‌کنیم یک فرمول برای H_r^n در حالت کلی بیابیم. برای این کار مثال بعد را حل می‌کنیم.

مثال ۷-۶-۱ یک رستوران، سه نوع ساندویچ A, B, C می‌فروشد. پسری می‌خواهد شش ساندویچ بخرد و از هر ساندویچ هر چند تا که بخواهد می‌تواند بخرد. به چند روش او می‌تواند ساندویچ‌ها را انتخاب کند؟

حل. در این مسأله، نیاز است که H_6^3 را بیابیم. در واقع باید از شبه مجموعه‌ی $\{\infty.A,\infty.B,\infty.C\}$ تعداد شبه زیر مجموعه‌های ۶ عضوی را بیابیم. جدول زیر چهار حالت مختلف انتخاب را نشان می‌دهد.

	A	B	C
(۱)	∘∘	∘	∘∘∘
(۲)	∘	∘∘∘∘	∘
(۳)		∘∘	∘∘∘∘
(۴)	∘∘∘		∘∘∘

حال در جدول بالا ما خط‌های عمودی را با "۱" و هر ساندویچ را با " ۰ " نشان

می‌دهیم. حالت اول به صورت (۰۰۰۱۰۱۰۰)در می‌آید و حالات دوم، سوم و چهارم به ترتیب به شکل‌های (۰۱۰۰۰۰۱۰)، (۰۰۰۰۱۰۰۱) و (۰۰۰۱۱۰۰۰) هستند. به این ترتیب، هر حالت انتخاب ساندویچ را می‌توانیم با دنباله‌ای در مبنای دو با طول هشت که دارای دو بار "۱" است نشان دهیم و هر دنباله‌ای با آن خصوصیات نشان دهندهٔ یک حالت انتخاب است. پس طبق اصل تناظر، یک به یک و تبصره ۲ از مثال(۲-۴-۱) مقدار نهایی برابر است با $H_6^3 = \binom{8}{2} = 28$ ■.

حال سعی می‌کنیم ایدهٔ بالا را برای حالت کلی H_r^n تعمیم دهیم. جدول زیر را نگاه کنید. سطر اول نمایش دهندهٔ n نوع شی از شبه مجموعه‌ی M $M = \{\infty a_1, \infty a_2, \ldots, \infty a_n\}$ است که با n-۱ خط از همدیگر جدا شده‌اند.

	a_1	a_2	a_3		a_n
S:	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{r_1}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{r_2}$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{r_3}$	$\cdots$	$\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{r_n}$

جدول بالا که نمایش دهندهٔ یک شبه زیر مجموعه $S = \{r_1.a_1, r_2.a_2, \ldots, r_n.a_n\}$ از شبه مجموعه‌ی M است رامی‌توان با یک دنباله به طول $r+n$-۱ در مبنای دو که دارای rتا" ۰" و (n-۱) تا "۱" است نشان داد. تعداد اینگونه دنباله‌ها برابر تعداد شبه زیر مجموعه‌های M است و هر شبه زیر مجموعه مانند یک دنباله. پس طبق اصل تناظر یک به یک و تبصره ۲ از مثال (۲-۴-۱) نتیجه زیر به دست می‌آید.

(ج) اگر $M = \{\infty.a_1, \infty.a_2, \ldots, \infty.a_n\}$ یک شبه مجموعه باشد، آنگاه H_r^n تعداد شبه زیر مجموعه‌های آن برابر است با: $H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$.

*** نتیجه (ج) را به روش دیگر هم می‌توان ثابت کرد.**

اثبات دیگر (ج). برای راحتی کار، هر شی a_i را با i نمایش می‌دهیم و شبه مجموعه‌ی M به این شکل در می‌آید: $M = \{\infty.1, \infty.2, \dots, \infty.n\}$. فرض کنید A مجموعه‌ی تمام شبه زیر مجموعه‌های r عضوی M و B مجموعه‌ی ترکیب‌های r تایی از مجموعه‌ی $\{1,2,3, \dots, r+n-1\}$ باشد. یک رابطه $f: A \to B$ را این گونه تعریف می‌کنیم:

برای هر شبه زیر مجموعه‌ی $S = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ از M که در آن $1 \le b_1 \le b_2 \le \dots \le b_r \le n$، $f(S)$ را اینگونه قرار می‌دهیم.

$$f(S) = \{b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \dots, b_r + (r-1)\}$$

می‌توان مشاهده کرد که اعضای $f(S)$ متمایزند و در نتیجه $f(S)$ در B موجود است. می‌توان به سادگی دید که f یک رابطه‌ی یک به یک است.

برای اثبات پوشا بودن f فرض کنید: $T = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ یک ترکیب r تایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, r+n-1\}$ باشد که در آن $c_1 < c_2 < \dots < c_r$. $S = \{c_1, c_2 - 1, \dots, c_r - (r-1)\}$ را در نظر بگیرید. می‌توان به سادگی دید که S در A موجود است و $f(S)=T$ پس f یک تناظر یک به یک از A به B است و در نتیجه طبق اصل تناظر یک‌به یک به دست می‌آوریم

$$H_r^n = |A| = |B| = \binom{r+n-1}{r} \ . \blacksquare$$

☜ **تبصره**

۱- فرض کنید $M = \{p_1.a_1, p_2.a_2, \dots, p_n.a_n\}$ یک شبه مجموعه باشد. تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی M به شرطی که $r \le p_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ برابر با $\binom{r+n-1}{r}$ است و در صورتی که برای بعضی از i ها $r > p_i$، اتحاد بالا صحیح نیست. این حالت در فصل ۵ بررسی خواهد شد.

۲-روش ذکر شده برای این اثبات شباهت زیادی به راه حل مثال(۳-۵-۱) دارد. در حقیقت تابع f در این اثبات، معادل تابع f^{-1} در مثال (۳-۵-۱) است.

۷-۱- مسایل توزیع

در این بخش، مسأله‌ی دیگری را مطرح می‌کنیم: به چند حالت می‌توان r شی را در n جعبه متمایز قرار داد؟ این مسأله را می‌توان به دوگونه تعبیر کرد: (الف) حالتی که اشیاء متمایز باشند.(ب) حالتی که اشیاء شبیه هم (نامتمایز) باشند.

حالت (الف):توزیع r شی متمایز در n جعبه متمایز

(۱) اگر قرار باشد که در هر جعبه، حداکثر یک شی قرار گیرد آنگاه تعداد حالات توزیع اشیاء برابر است با:

$$n(n-1)...(n-r+1) = P_r^n$$

زیرا برای قرار گرفتن شی اول n حالت، شی دوم $(n-1)$ حالت ، ... ،شی r ام $(n-r+1)$ حالت وجود دارد.

(۲)اگر برای قرار گرفتن اشیا در جعبه‌ها هیچ محدویتی وجود نداشته باشد آنگاه تعداد حالات توزیع اشیا برابر است با $n.n...n = n^r$.

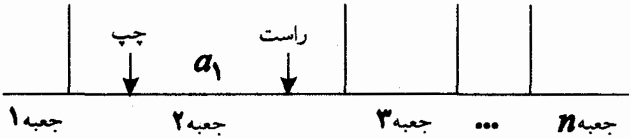
زیرا برای قرار گرفتن هر شی n حالت داریم.

(۳) فرض کنید هیچ محدودیتی برای قرار گرفتن اشیا در جعبه‌ها وجود نداشته باشد، ولی در هر جعبه ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم باشد.

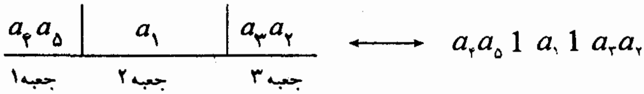
در این حالت هم اولین شی که آن را a_1 می‌نامیم n حالت برای قرار گرفتن در جعبه‌ها دارد. برای قرار گرفتن شی دوم $n+1$ حالت وجود دارد ($n-1$ جعبه باقیمانده و دو طرف راست و چپ شی a_1) و به همین ترتیب برای شی سوم $n+2$ حالت

وجود دارد. پس تعداد حالات این مسأله برابر است با:

$$.n(n+1)(n+2)\dots(n+(r-1))$$



راه دیگری نیز برای حل این مساله وجود دارد. فرض کنیدr=۵ و n=۳



n=۳ , r=۵

هم ارزی بالا در حقیقت یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی حالات قرار گرفتن r شی متمایز در n جعبه متمایز با تعداد جایگشت‌های شبه مجموعه‌ی $\{a_1,a_2,\dots,a_r,(n-1).1\}$ است (هر خط عمودی را با یک نمایش می‌دهیم). طبق اصل تناظر یک به یک و نتیجه(ب) در بخش (۶-۱) می‌توان نتیجه گرفت که جواب مساله برابر است با $\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!}$ که با مقدار به دست آمده از قسمت بالا برابر است.

حالت (ب): توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز

(۱) در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد(بنابراین $r \le n$).

در این حالت نیز می‌توان به سادگی بین حالت‌های توزیـع اشـیا در جعبـه‌ها و هـر ترکیب r تایی از جعبه n یک تناظر یک به یک برقرار کرد. پس تعداد حـالات توزیـع برابر است با $\binom{n}{r}$.

(۲) هیچ محدودیتی برای قرارگرفتن اشیا در جعبه‌ها وجود ندارد.

هر توزیع در این قسمت را می‌توان با $\{r_۱.a_۱,r_۲.a_۲,\dots,r_n.a_n\}$ نمایش داد کـه $r_۱+r_۲+\dots+r_n=r$ و r_i نمایش دهنده تعداد اشیا در جعبـه‌ی i ام اسـت. پـس هـر توزیع را می‌توان یـک شـبه زیـر مجموعـه از $M=\{\infty.a_۱,\infty.a_۲,\dots,\infty.a_n\}$ در نظر گرفت و هر شبه زیر مجموعه‌ی M نشان دهندهٔ یک توزیع است. پس طبق اصـل تناظر یک به یک ونتیجه (ج) از بخش (۶-۱) تعداد حالات برابر ا ست با

$$H_r^n=\binom{(r+n-۱)}{r}$$

(۳) در هر جعبه حداقل یک شی قرار گیرد و هیچ جعبه‌ای خالی نباشـد. ($r\ge n$)

در این حالت، ابتدا در هر جعبه یک شی قرار می‌دهیم تا هیچ جعبـه‌ای خـالی نباشـد. سپس $r\text{-}n$ شی باقیمانده را مانند حالت بالا در جعبه‌ها توزیع می‌کنیـم تعـداد حـالات برابر است با:

$$H_{r-n}^n=\binom{(r-n)+n-۱}{r-n}=\binom{r-۱}{r-n}$$

و طبق اتحاد (۲-۴-۱) مقدار بالا رامی‌توان به صورت $\binom{r-۱}{n-۱}$ نوشت.

مثال ۱-۷-۱ با حروف کلمه‌ی VISITING چند کلمه می‌تـوان سـاخت کـه در آنها هیچ دو I مجاور نباشند؟

حل. ***روش اول:*** حروفی که باید استفاده شوند ,G, N, T, S, V و ۳ تا I هستند. ابتـدا حروف ,G, N, T, S, V را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار به !۵ حـالت امکـان

دارد. یکی از آنها را در نظر می‌گیریم.

$$\_\_V\_\_S\_\_T\_\_N\_\_G\_\_$$

برای قرار گرفتن Iها ۶ خانه که با ۵ حرف از هم جدا شده‌اند وجود دارد. این مسأله معادل قرار گرفتن سه I در ۶ مکان است که هیچ دو I در یک مکان نباشند. طبق حالت (ب-۱) مقدار این مسأله برابر $\binom{۶}{۳}$ است و طبق اصل ضرب مقدار نهایی برابر است با $\binom{۶}{۳}\times ۵!$. ■

در راه حل بالا ابتدا حروف G, N, T, S, V, را به صف کردیم و سپس I ها را قرار دادیم. در روش بعدی، ترتیب را عکس می‌کنیم.

روش دوم ابتدا Iها را در یک ردیف قرار می‌دهیم:

$$\underset{(۱)}{\_\_}I\underset{(۲)}{\_\_}I\underset{(۳)}{\_\_}I\underset{(٤)}{\_\_}$$

حال فرض می‌کنیم که ۵ حرف G, N, T, S, V شبیه هم باشند. آنها را x می‌نامیم. از آنجا که هیچ دو I نباید مجاور باشند پس در خانه‌های (۲) و (۳) یک "x" قرار می‌دهیم:

$$\underset{(۱)}{\_\_}I\underset{(۲)}{\underline{x}}I\underset{(۳)}{\underline{x}}I\underset{(٤)}{\_\_}$$

حال سه x باقیمانده را در چهار خانه قرار می‌دهیم حالت (ب-۲) تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $\binom{۶}{۳}=\binom{۳+۴-۱}{۳}$ از آنجا که تمام حروف را با x نشان دادیم، برای تبدیل کردن xها به حرف !۵ راه داریم. پس طبق اصل ضرب مقدار نهایی مسأله برابر است با $C_۳^۶\times ۵!$. ■

مثال ۲-۷-۱ (بازبینی مثال (ب) ۳-۲-۱) به چند حالت می‌توان هفت کتاب ریاضی و سه کتاب فیزیک را در یک ردیف چید اگر بخواهیم کتب اول و آخر ریاضی باشند و هیچ دو کتاب فیزیک کنار هم نباشند؟ در مثال (۳-۲-۱) ابتدا یک جایگشت از کتب ریاضی در نظر گرفتیم و سپس کتب فیزیک را بین آنها قرار دادیم. اما در اینجا ترتیب را عکس می‌کنیم.

حل. سه کتاب فیزیک را می‌توان به !۳ حالت در یک ردیف چید. یکی از آنها را در نظر می‌گیریم.

$$\underset{(۱)}{\underline{\quad}}\ P_۱\ \underset{(۲)}{\underline{\quad}}\ P_۲\ \underset{(۳)}{\underline{\quad}}\ P_۳\ \underset{(۴)}{\underline{\quad}}$$

حال هفت کتاب ریاضی را همانند هفت "x" در نظر می‌گیریم. در هر کدام از خانه‌های ۴،۳،۲،۱ باید حداقل یک کتاب ریاضی باشد.

$$x\ \ p_۱\ \ \ x\ \ p_۲\ \ \ x\ \ p_۳\ \ \ x$$

سه x باقیمانده را باید در چهار خانه قرار داد که تعدادحالات برابر $C_۳^{۳+۴-۱} = C_۳^۶$ است (طبق(ب-۲)). و برای تبدیل xها به کتب ریاضی !۷ راه وجود دارد. طبق اصل ضرب مقدار نهایی برابر است با

$$۳!\times C_۳^۶ \times ۷! = ۷!\times ۶\times ۵\times ۴ \quad .\blacksquare$$

مثال ۳-۷-۱ (بازبینی مثال ۳-۵-۱)

مجموعه‌ی $X=\{۱،۲،۳،...،n\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد ترکیب‌های r تایی از X که شامل هیچ دو عضو متوالی نباشند برابر $\binom{n-r+۱}{r}$ است.

اثبات. ابتدا بین A ، مجموعه‌ی تمام ترکیب‌های مطلوب B,X مجموعه تمام

دنباله‌های با طول n در مبنای دو که دارای r یک هستند و بین دو "۱" حداقل یک "۰" آمده باشد، برقرار می‌کنیم. تابع $f: A \to B$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم: یک ترکیب r تایی $S = \{k_۱, k_۲, \ldots, k_r\}$ را در نظر می‌گیریم؛ که در آن:

$$۱ \leq k_۱ < k_۲ < \ldots < k_r \leq n.$$

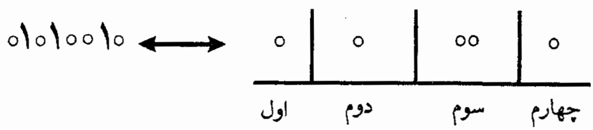
آنگاه $f(S)$ را دنباله $b_۱ b_۲ b_۳ \ldots b_n$ قرار می‌دهیم که در آن

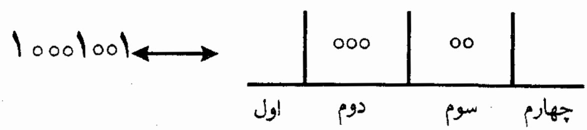
$$b_i = \begin{cases} ۱ & i = k_۱, k_۲, \ldots k_r \\ ۰ & i \neq k_۱, k_۲, \ldots k_r \end{cases}$$

برای مثال، اگر n=۸ و r =۳ باشند آنگاه:

$$f(\{۲،۴،۷\}) = ۰۱۰۱۰۰۱۰ \quad \text{و} \quad f(\{۱،۵،۸\}) = ۱۰۰۰۱۰۰۱$$

به سادگی می‌توان دید که f یک تناظر یک به یک بین A و B است. پس $|A|=|B|$ حال می‌کوشیم تا $|B|$ را بیابیم. یک دنباله که در B موجود باشد را می‌توان یک راه برای قرار دادن $n-r$ شی نامتمایز در $r+1$ جعبه متمایز در نظر گرفت به طوری که جعبه‌های دوم، سوم، ...r ام خالی نباشند.





برای این کار، ابتدا در جعبه‌های دوم، سوم، ... r ام یک شی قرار می‌دهیم سپس $(n-r)-(r-۱) = n-۲r+۱$ شی باقیمانده را همانند حالتی که در حالت

(ب-۲) بررسی شد در $(r+1)$ جعبه قرار می‌دهیم. که تعداد حالات آن برابر است با:

$$\binom{(n-2r+1)+(r+1)-1}{n-2r+1}$$

و داریم:

$$\blacksquare. \qquad |A|=|B|=\binom{n-r+1}{n-2r+1}=\binom{n-r+1}{r}$$

حال توجه‌مان را برای حل مسأله‌ای بسیار مهم در ترکیبیات جمع می‌کنیم که آن پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی خطی

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=r \qquad (1-7-1)$$

است. که در آن r و n دو عدد صحیح‌اند و $r\geq 0$ و $n\geq 1$.

یک دسته جواب صحیح معادله‌ی (۱-۷-۱) یک n تایی مرتب $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ است که معادله‌ی (۱-۷-۱) صدق می‌کند و e_i نمایش دهندهٔ x_i است. برای مثال (۰ و ۰ و۲)، (۷و-۴و-۱) ،(۱و۱و ۰) ،(۳و۴و-۵)، (۲و ۰و ۰) دسته جواب‌هایی برای معادله‌ی زیر هستند.

$$x_1+x_2+x_3=2$$

بدیهی است که دسته جواب‌های صحیح معادله (۱-۷-۱) نامحدودند. در این بخش ما جواب‌های نامنفی معادله را می‌یابیم. $(e_i\geq 0)$

مثال ۴-۷-۱ نشان دهید تعداد دسته جواب‌های نامنفی معادله‌ی (۱-۷-۱) برابر است با $\binom{(r+n-1)}{r}$

اثبات: هر دسته جواب نا منفی معادله‌ی (۱-۷-۱) را می‌توان راهی برای توزیع r شی شبیه هم در n جعبه متمایز در نظر گرفت.

واضح است که دسته جواب‌های معادله با هر توزیع، یک تناظر یک به یک می‌سازند. پس طبق اصل تناظر یک به یک و حالت (ب-۲) مقدار نهایی مساله برابر است با: $\binom{(r+n-1)}{r}$

حال، تمام مسایلی را که در این بخش مقدار $\binom{r+n-1}{r}$ را می‌دهند بررسی می‌کنیم.

تعداد حالات انتخاب r شی از n نوع شیء به طوری که تکرار مجاز باشد.
= تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی از شبه مجموعه‌ی
$\{\infty a_1, \infty a_2, \dots, \infty a_n\}$
= تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز
= تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$
$= \binom{r+n-1}{r}$
$= H_r^n$

بعضی از مسایل توزیع اشیا (متمایز یا نا متمایز) در جعبه‌های متمایز بررسی شدند. حال می‌خواهیم به بررسی مسأله‌ی توزیع اشیا متمایز به جعبه‌های نامتمایز بپردازیم. مسأله‌ی توزیع اشیا نامتمایز به جعبه‌های نامتمایز در فصل ۵ بررسی خواهد شد. فرض کنید $S(r,n)$ ، $(r,n \geq 0)$ نمایش دهندهٔ تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه نامتمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد نتایج زیر به وضوح به دست می‌آیند.

الف) $S(0,0) = 1$

ب) $S(r,0) = S(0,n) = 0$

ج) $S(r,n) > 0 \quad (r \geq n \geq 1)$

د) $S(r,n) = 0 \quad (n > r \geq 1)$

هـ) $S(r,1) = 1 \quad (r \geq 1)$

و) $S(r,r)=۱ \qquad (r\geq ۱)$

همچنین داریم(مسأله‌ی ۸۴-۱ را ببینید.)

ز) $S(r,۲)=۲^{r-۱}-۱$

ح) $S(r,۳)=\frac{۱}{۲}(۳^{r-۱}+۱)-۲^{r-۱}$

ط) $S(r,r-۱)=\binom{r}{۲}$

ی) $S(r,r-۲)=\binom{r}{۳}+۳\binom{r}{۴}$

نتایج اخیر با راه‌هایی تقریبا" شبیه به راه‌حل‌های مثال‌های (۱-۴-۱) و (۷-۴-۱) به دست می‌آیند.

مثال ۵-۷-۱ نشان دهید :

$$S(r,n)=S(r-۱,n-۱)+n\,S(r-۱,n) \qquad (۱-۷-۲)$$

اثبات. یک عضو ویژه $a_۱$ را از r شی متمایز در نظر می‌گیریم. در توزیع r شی به n جعبه نامتمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد دو حالت پیش می‌آید.

(الف) $a_۱$ به تنهایی درون جعبه‌ای قرار داشته باشد. **(ب)** $a_۱$ و عضوهای دیگری در جعبه‌ای قرار داشته باشند. در حالت **(الف)** تعداد حالات، برابر $S(r-۱,n-۱)$ است. و در حالت (ب) r-۱ شی باید در n جعبه قرار گیرند که تعداد راه‌های این کار $S(r-۱,n)$ است. حال عضو $a_۱$ می‌تواند در هر کدام از جعبه n قرار گیرد. پس تعداد حالات در حالت (ب) برابر $n\times S(r-۱,n)$ است و طبق اصل جمع، حکم به دست می‌آید. ■

با به کار بردن مقادیر اولیه و اتحاد (۲-۷-۱) می‌توان مقادیر $S(r,n)$ را برای r و n های کوچک به سادگی به دست آورد. این مقادیر در جدول (۱-۷-۱) آمده است.

r \ n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۱	۱								
۱		۱								
۲	۰	۱	۱							
۳	۰	۱	۳	۱						
۴	۰	۱	۷	۶	۱					
۵	۰	۱	۱۵	۲۵	۱۰	۱				
۶	۰	۱	۳۱	۹۰	۶۵	۱۵	۱			
۷	۰	۱	۶۳	۳۰۱	۳۵۰	۱۴۰	۲۱	۱		
۸	۰	۱	۱۲۷	۹۶۶	۱۷۰۱	۱۰۵۰	۲۶۶	۲۸	۱	
۹	۰	۱	۲۵۵	۳۰۲۵	۷۷۷۰	۶۹۵۱	۲۶۴۶	۴۶۲	۳۶	۱

جدول (۱-۷-۱) مقادیر استرلینگ نوع دوم: $S(r,n)$ برای $0 \le n \le r \le ۹$

مجموعه‌ی $A=\{۱،۲،...،r\}$ را در نظر بگیرید. یک افراز n تایی از A یک مجموعه‌ی $\{S_۱,S_۲,\ldots,S_n\}$ از زیر مجموعه‌های نا تهی A است به طوری که:

(الف) $S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ (ب) $\bigcup_{i=۱}^{n} S_i = A$

یک افزار A، یک *افراز* n تایی از A است که در آن $n=۱،۲،...،r$

یک رابطه دو تایی R روی A، یک *رابطه‌ی هم‌ارزی* روی A است اگر وفقط اگر

(الف) R بازتابی باشد، یعنی $\forall a \in A \Rightarrow aRa$

(ب) R تقارنی باشد، یعنی $\forall a,b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

(ج) R تراگذری باشد یعنی: $\forall a,b,c \in A: aRb, bRc \Rightarrow aRc$

فرض کنید $S=\{S_۱,S_۲,\ldots,S_n\}$ یک افراز از A باشد. رابطه‌ی دوتایی R را روی A این گونه تعریف می‌کنیم:

$$xRy \Leftrightarrow \exists i \in \{۱,۲,\ldots,n\}: x,y \in S_i$$

می‌توان به سادگی دید که R یک رابطه هم ارزی است که *رابطه هم ارزی تولید شده توسط* S خوانده می‌شود. افزارهای مختلف A رابطه‌های هم ارزی مختلف روی A تولید می‌کنند.

بر عکس، یک رابطه‌ی R روی A را در نظر بگیرید و فرض کنید $a \in A$. تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A | xRa\}$$

$[a]$ *یک کلاس هم ارزی تولید شده توسط* a *است* و می‌توان مشاهده کرد که مجموعه‌ی

$$S = \{[a] | a \in A\}$$

یک افراز از A است، که رابطه‌ی هم ارزی تولید شده توسط S، R است.

بحث بالا نشان داد که یک رابطه‌ی هم ارزی بین مجموعه‌ی افرازهای مجموعه A و مجموعه‌ی روابط هم ارزی روی A وجود دارد.

واضح است که تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز $۱، ۲، ...، r$ درجعبه‌های نامتمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند معادل تعداد افرازهای nتایی مجموعه‌ی $A=\{۱،۲،...،r\}$ است. پس طبق تعریف، $S(r,n)$ تعداد افرازهای n تایی A را می‌شمرد و

$$\text{تعداد کل افرازهای مجموعه } r \text{ عضوی } A = \sum_{n=۱}^{r} S(r,n)$$

$$= \text{تعداد روابط هم ارزی روی } \{۱،۲،...،r\}$$

مجموع $\sum_{n=۱}^{r} S(r,n)$ با B_r نمایش داده می‌شود و عدد *بل* نامیده می‌شود. که از نام «ای-تی- بِل (۱۹۶۰-۱۸۸۳) » گرفته شده است. اعداد نخستین بل برابرند با

$$B_۱ = ۱ \ , B_۲ = ۲ \ , B_۳ = ۵ \ , B_۴ = ۱۵ \ , B_۵ = ۵۲ \ , B_۶ = ۲۰۳, \ldots$$

❖ تمرینات فصل اول

۱- تعداد راه‌های انتخاب یک جفت عدد $\{a,b\}$ را از مجموعه‌ی اعداد $\{۰ ، ۱ ، ۲ ، ... ، ۵\}$ بیابید. $(a \neq b)$

به شرطی که :

(الف) $|a-b|=۵$ (ب) $|a-b| \leq ۵$

۲- ۱۲ کتاب داریم که ۵ تا از آنها فیزیک و ۷ تا ریاضی هستند. می‌خواهیم آنها را در یک ردیف بچینیم . این کار به چند حالت امکان دارد اگر

(الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد؟

(ب) هر ۵ کتاب فیزیک کنار هم باشند؟

(ج) هیچ دو کتاب فیزیک کنار هم نباشند؟

د) بین دو کتاب ریاضی ویژه $M_۱$ و $M_۲$ دقیقا" سه کتاب فیزیک باشد و هیچ کتاب ریاضی نباشد؟

۳- m کتاب ریاضی و n کتاب فیزیک داریم. می‌خواهیم آنها را در قفسه‌ای بچینیم. این کار به چند روش امکان دارد اگر

(الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

(ب) هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم نباشند؟ $(n \leq m+۱)$

(ج) کتاب‌های فیزیک همه کنار هم باشند؟

(د) یک کتاب فیزیک خاص و یک کتاب ریاضی خاص مجاور باشند.

٤- چند کلمه‌ی پنج حرفی از حروف $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ می‌توان ساخت که :

(الف) حروف هر کلمه متمایز باشند.

(ب) از حرف F, E, D, C, B, A فقط بتوان به عنوان اولین ، سومین و پنجمین حروف استفاده کرد و از بقیه حروف در بقیه مکان‌ها؟

۵- چند جایگشت از ۲۶ حرف انگلیسی وجود دارد که در آنها دقیقاً پنج حرف بین y,x باشد.

۶- تعداد اعداد فرد بین ۳۰۰۰ و ۸۰۰۰ رابیابید که از ارقام غیر تکراری ساخته شده‌اند.

۷- مقدار زیر را بیابید.

$$۱ \,.\, ۱! + ۲ \,.\, ۲! + ۳ \,.\, ۳! + \ldots + n \,.\, n!$$

۸- مقدار زیر را بیابید.

$$\frac{۱}{(۱+۱)!} + \frac{۲}{(۲+۱)!} + \ldots + \frac{n}{(n+۱)!}$$

۹- ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n ، عدد

$$(n+۱)(n+۲)\ \ldots\ (۲n)$$

بر ۲^n بخش پذیر است (المپیاد ریاضی اسپانیا، ۱۹۸۵).

۱۰- تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک $۱۰^{۴۰}$ و $۲۰^{۳۰}$ را بیابید.

۱۱- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n را که مضرب ۳ باشند بیابید اگر

الف) $n=۲۱۰$ **ب)** $n=۶۳۰$ ج) $n=۱۵۱۲۰۰$

۱۲- نشان دهید که به ازای هر مقدار n ، تعداد مقسوم‌علیه‌های $n^۲$ عددی فرد است.

۱۳- نشان دهید که تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $\underbrace{۱۱\ldots۱۱}_{۱۹۹۲}۰۰$ عددی زوج است.

۱٤- دو عدد طبیعی r, n $(r \le n)$ داده شده‌اند. اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $P_r^n = n \,.\, P_{r-۱}^{n-۱}$ (ب) $P_r^n = (n-r+۱) \,.\, P_{r-۱}^n$

ج) $P_r^n = \frac{n}{n-r} \ . P_r^{n-1}$ $(r < n)$

د) $P_r^{n+1} = P_r^n + r \ . \ P_{r-1}^n$

هـ) $P_r^{n+1} = r! + r(P_{r-1}^n + P_{r-1}^{n-1} + ... + P_{r-1}^r)$

۱۵- در یک گروه ۱۵ نفری، ۵ نفر، کلاس اولی و بقیه کلاس دومی هستند. به چند حالت می‌توان ۹ دانش‌آموز را از میان آنها انتخاب کرد، اگر قرار باشد دقیقاً سه دانش‌آموز کلاس اولی انتخاب شوند و

(الف) یک گروه تشکیل دهند؟

(ب) برای اینکه در گروه ۹ مسؤولیت مختلف به آنها سپرده شود؟

۱۶- ده صندلی در یک ردیف چیده شده است. هفت دانش‌آموز می‌خواهند روی هفت صندلی بنشینند. این کار به چند روش امکان دارد اگر قرار باشد هیچ دو صندلی خالی، مجاور نباشند؟

۱۷- هشت جعبه در یک ردیف چیده شده است. به چند روش می‌توان پنج توپ صندلی خالی، مجاور نباشند؟

۱۸- می‌خواهیم ۲۰ کتاب را که شامل ۳ کتاب ریاضی خاص و ۴ کتاب فیزیک خاص است در دوقفسه ۱۰ تایی بچینیم. این کار به چند روش امکان دارد اگر ملزم باشیم کتب ریاضی خاص را درقفسه‌ی اول و کتب فیزیک خاص را در قفسه‌ی دوم قرار دهیم؟

۱۹- به چند روش می‌توان ۷ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فیزیک را در یک قفسه چید اگر قرار باشد کتب فیزیک دقیقاً سه کتاب با هم فاصله داشته باشند.

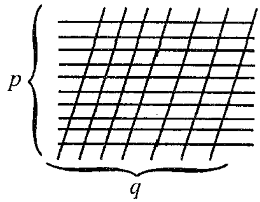
۲۰- در یک گروه ۱۵ نفری، ۳ نفر کلاس اولی و بقیه کلاس دومی هستند. اگر قرار باشد حداقل یک دانش‌آموز کلاس اولی انتخاب شود به چند روش می‌توان ۷ دانش‌آموز انتخاب کرد که

(الف) یک گروه تشکیل دهند؟

(ب) مسؤولیت مختلف در گروه به آنها سپرده شود؟

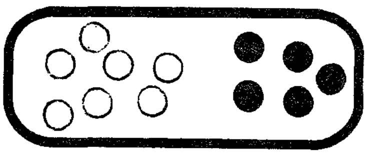
۲۱- تعداد اعداد $(m+n)$ رقمی در مبنای دو را بیابید که m بار "۰" و n بار "۱" داشته باشند و هیچ دو "۱" مجاور نباشند؟

۲۲- دو دسته خط موازی که شامل p و q خط هستند در نمودار زیر نشان داده شده‌اند. تعداد متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده در نمودار را بیابید.



۲۳- در یک دانشگاه، سال اول در رشته‌ای ۱۰ دانشجوی دختر و ۱۵ دانشجوی پسر و در سال دوم ۴ دانشجوی دختر و ۱۰ دانشجوی پسر درس می‌خوانند. می‌خواهیم یک گروه ۷ نفری را از دو پایه انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان دارد اگر ملزم باشیم دقیقاً ۴ دانشجوی سال دوم و ۵ پسر انتخاب کنیم.

۲۴- دریک جعبه، ۷ توپ سفید و یکسان و ۵ توپ سیاه یکسان وجود دارد. آنها یکی یکی به طور اتفاقی از جعبه خارج می‌شوند. احتمال این را بیابید که ششمین توپ خارج شده سفید باشد و قبل از آن، دقیقاً ۳ توپ سیاه خارج شده باشد.



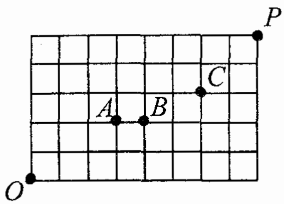
۲۵- در هر یک از حالات پایین، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی را بیابید که از O به P بروند و

(الف) از A بگذرند؟

(ب) از خیابان AB عبور کنند؟

(ج) از تقاطع‌های A و C بگذرند؟

(د) خیابان AB بسته باشد؟



۲۶- به چند حالت می‌توان یک گروه $۲k$ نفری از n زوج تشکیل داد که $(۲k \le n)$

(الف) در هر گروه k زوج وجود داشته باشد؟

(ب) هیچ گروهی شامل یک زوج نباشد؟

(ج) حداقل یک زوج در هر گروه باشد؟

(د) در هر گروه دقیقاً دو زوج وجود داشته باشد؟

۲۷- فرض کنید:

$S = \{۱,۲\ldots,n+۱\}$ ،$(n \ge ۲)$ و $T = \{(x,y,z) \in S^۳ | x < z, y < z\}$

با دوبار شمردن $|T|$ نشان دهید:

$$\sum_{k=۱}^{n} k^۲ = \binom{n+۲}{۲} + ۲\binom{n+۳}{۳}$$

۲۸- مجموعه‌ی نقاط A در صفحه‌ی x-y را در نظر بگیرید:

$$A = \{(a,b) | a,b \in z, ۰ \le a \le ۹, ۰ \le b \le ۵\}$$

(الف) تعداد مستطیل‌هایی را بیابید که رؤوسشان اعضای A باشند.

(ب) تعداد مربع‌هایی را بیابید که رؤوسشان اعضای A باشند.

۲۹- پانزده نقطه $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ و...و $P_{۱۵}$ در صفحه داده شده‌اند که به جز نقاط که بر روی یک خط واقعند. هیچ سه نقطه دیگری بر یک استقامت نیستند. پیدا کنید:

(الف) تعدد خطوط راستی را که از حداقل دو نقطه از این نقاط بگذرند.

(ب) تعداد مثلث‌هایی را که رؤوس آنها سه رأس از پانزده رأس باشد.

۳۰- در هر کدام از اعداد ۶ رقمی زیر، هر رقم که در عدد وجود دارد حداقل دوباره در عدد ظاهر شده است:

۷۰۷۰۹۹،۳۳۳۳۳۳،۲۲۵۵۲۲،۱۱۸۸۱۸

تعداد اعداد طبیعی ۶ رقمی را که خاصیت فوق را دارند بیابید؟

۳۱- در هر یک از اعداد ۷ رقمی زیر، هر رقم که در عدد وجود دارد، حداقل سه بار در عدد ظاهر شده است: ۵۵۵۰۰۰۰، ۱۰۰۱۰۱۱ ،۳۸۳۸۳۸۳،۷۷۷۷۷۷۷

تمام اعداد ۷ رقمی را که خاصیت فوق را دارند، بیابید.

۳۲- فرض کنید$X=\{۱, ۲,...,۱۰۰۰\}$ تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی $\{a,b\}$ از X را بیابید که $a\times b$ بر ۵ بخش پذیر باشد.

۳۳- مجموعه‌ی A را در صفحه‌ی x-y در نظر بگیرید.

$$A=\left\{(a,b)\middle| a,b\in z, |a|+|b|\leq ۲\right\}$$

پیدا کنید:

(الف) $|A|$

(ب) تعداد خطوطی راستی را که حداقل از دو نقطه‌ی A می‌گذرند.

(ج) تعداد مثلث‌هایی را که رؤوسشان، اعضا A باشد.

۳۴- فرض کنید P یک n ضلعی محدب $(n\geq ۶)$ باشد. تعداد مثلث‌هایی را که

رؤوسشان اعضا نامجاور P باشند، بیابید.

۳۵- ۶ ریاضیدان و ۵ فیزیکدان می‌خواهند دور یک میز بنشینند. این کار به روش امکان دارد اگر:

(الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد.

(ب) هیچ دو فیزیکدانی کنار هم ننشینند.

(ج) تمام فیزیکدانان کنار هم بنشینند.

(د) یک فیزیکدان مشخص P_1 با دو ریاضیدان M و M مجاور باشند.

۳۶- نشان دهید که تعداد تبدیل‌های دوری r تایی از n شی متمایز برابر است با:

$$\frac{n!}{(n-r)!r}$$

۳۷- دو عدد طبیعی k و n داده شده‌اند. نشان دهید تعداد راه‌های نشستن kn نفر دور k میز متمایز به طوری که دور هر میز n نفر نشسته باشند، برابر است با $\frac{(kn)!}{n^k}$.

۳۸- عدد طبیعی r را بیابید که

$$\frac{1}{\binom{9}{r}}-\frac{1}{\binom{10}{r}}=\frac{1}{6\binom{11}{r}}$$

۳۹- اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $(n\geq r\geq 1)؛\binom{n}{r}=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

(ب) $(n\geq r\geq 1):\binom{n}{r}=\frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$

(ج) $(n\geq r\geq 0):\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$

(د) $(n\geq m\geq r\geq 0):\binom{n}{m}\binom{m}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

۴۰- اتحاد $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ را با اصل تناظر یک به یک حل کنید.

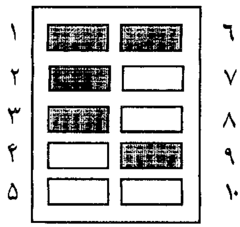
۴۱- فرض کنید $X=\{1,2,\ldots,n\}$ و $A=\{A\subseteq X|n\notin A\}$ و $B=\{B\subseteq X|n\notin A\}$، به وسیله‌ی اصل تناظر یک به یک نشان دهید که $|A|=|B|$.

۴۲- دو عدد طبیعی r و n داده شده‌اند. ثابت کنید حاصل ضرب $(n+1)(n+2)\ldots(n+r)$ بر $r!$ بخش‌پذیر است.

۴۳- فرض کنید که A یک مجموعه‌ی kn عضوی باشد. یک گروه‌بندی k تایی A، یک افراز A به زیر مجموعه‌های k عضوی است. تعداد گروه‌بندی‌های k تایی A را بیابید.

۴۴- بیست‌وپنج شوالیه دورمیزگردشان نشسته‌اند. سه نفر از آنها به دلخواه برای مبارزه با اژدها انتخاب می‌شوند. احتمال این که حداقل دو نفر از سه نفر انتخاب شده مجاور باشند را با کسر $p=\dfrac{a}{b}$ نشان می‌دهیم که نسبت به هم اولند. مجموع a و b را بیابید (مسابقات ریاضی آمریکا، ۱۹۸۳/۷).

۴۵- یک نوع قفل تجاری ده دکمه‌ای فقط در صورتی باز می‌شود که ۵ دکمه‌ی، به هر ترتیبی، درست فشار داده شود. برای مثال، در شکل زیر مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۶،۹} به عنوان ترکیب درست در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید این قفل طوری طراحی شود که مجموعه‌هایی که حداکثر نه دکمه و حداقل یک دکمه دارند به عنوان یک ترکیب درست در نظر گرفته شود. با این کار، تعداد ترکیب‌های اضافه شده به ظرفیت قفل چند تاست؟ (مسابقات ریاضی آمریکا۱۹۸۸/۱).

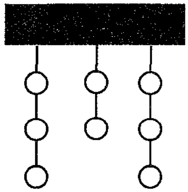


۴۶- در یک مسابقه‌ی تیراندازی، هشت هدف سفالی در دو ستون سه تایی و یک ستون دوتایی همانندشکل آویزان شده‌اند. یک تیرانداز ماهر می‌خواهد با این روش هر هشت هدف را بشکنند:

(۱) ابتدا او یک ستون را انتخاب می‌کند تا از آن هدفی را بشکند.

(۲) سپس او باید پایین‌ترین هدف سفالی را که قبلاً نشکسته است، هدف قرار دهد.

اگر او این روش را دنبال کند به چند روش می‌تواند هر هشت هدف را بشکند(مسابقات ریاضی آمریکا، ۱۹۹۰/۸)



۴۷- با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵، می‌توان ۱۲۰=!۵ عدد پنج رقمی با ارقام متمایز ساخت. آنها را از کوچک به بزرگ ردیف می‌کنیم.

۱۲۳۴۵	و ۱۲۳۵۴	و ۱۲۴۳۵	و ...	و ۵۴۳۲۱
(۱)	(۲)	(۳)		(۱۲۰)

(الف) عدد ۳۵۴۲۱ چندمین عدد در این ردیف است؟

(ب) ۱۰۰ امین عدد این ردیف چه عددی است؟

۴۸- $P_3^4 = 24$ تبدیل سه تایی از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۴} وجود دارد. آنها را از کوچک به بزرگ به ترتیب لغت‌نامه‌ای ردیف می‌کنیم.

۱۲۳،۱۲۴،۱۳۲،۱۳۴،۱۴۲،۱۴۳،۲۱۳،۲۱۴،...،۴۳۲

به این ترتیب تبدیل‌های "۱۳۲" و "۲۱۴" به ترتیب سومین و هشتمین اعداد هستند و در بین $P_4^9 = 3024$ تبدیل چهارتایی از مجموعه‌ی {۱،۲،...،۹} که به ترتیب

لغت‌نامه‌ای ردیف شده‌اند: تبدیل‌های "۴۵۶۷" و "۵۱۸۲" چندمین اعدادند؟

۴۹- $\binom{5}{3} = 10$ ترکیب سه‌تایی از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۴،۵} وجود دارد که می‌توان آنها را به ترتیب لغت‌نامه‌ای ردیف کرد:

{۱،۲،۳} و {۱،۲،۴} و {۱،۲،۵} و {۱،۳،۴} و {۱،۳،۵}

{۱،۴،۵} و {۲،۳،۴} و {۲،۳،۵} و {۲،۴،۵} و {۳،۴،۵}

به این ترتیب {۱،۳،۵} پنجمین ترکیب است. در بین $\binom{10}{4}$ ترکیب چهار عضوی از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،...،۱۰} ترکیب‌های {۳،۴،۵،۶} و {۳،۵،۷،۹} چندمین ترکیب‌ها هستند؟

۵۰- شش دانشمند بر روی پروژه‌ای کار می‌کنند. آنان می‌خواهند دستاوردهایشان را در صندوقی که دارای چند قفل است قرار دهند به شرطی که صندوق، فقط و فقط وقتی باز شود که هر سه نفر از آنان حاضر باشند. حداقل تعداد قفل‌های صندوق و حداقل تعداد کلیدهایی که هر دانشمند باید داشته باشد چندتاست؟

۵۱- می‌خواهیم یک ساختمان ۱۰ طبقه را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هر طبقه با یک رنگ ، رنگ‌آمیزی شود و لزومی ندارد که از همه‌ی رنگ‌ها استفاده شود. به چند روش می‌توان ساختمان را رنگ کرد اگر:

(الف) هیچ شرط دیگری وجود نداشته باشد؟

(ب) هر دو طبقه مجاور با دو رنگ مختلف رنگ شوند؟

۵۲- تعداد تمام شبه زیر مجموعه‌های شبه مجموعه‌ی $M = \{r_1.a_1, r_2.a_2, \ldots, r_n.a_n\}$ را بیابید.

۵۳- دو عدد طبیعی r و n $(r \leq n)$ را در نظر بگیرید. یک تبدیل $x_1x_2\ldots x_{2n}$ دارای خاصیت $p(r)$ است و اگروفقط اگر به ازای حداقل یک مقدار i در مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ ، رابطه‌ی $|x_i - x_{i+1}| = r$ بر قرار باشد. نشان دهید به

ازای هر r و n طبیعی، تعداد تبدیل‌های دارای خاصیت $P(r)$ از آنهایی که این خاصیت را ندارند، بیشتر است.

۵۴- با روش‌های ترکیبیاتی نشان دهید که به ازای هر مقدار طبیعی n، اعداد زیر اعدادی صحیح‌اند.

الف) $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ ب) $\frac{(6n)!}{5^n . 3^{2n} . 2^{4n}}$ ج) $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}$ د) $\frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$

۵۵- تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی از شبه مجموعه‌ی $M = \{1.a_1, \infty.a_2, \infty.a_3, \ldots, \infty.a_n\}$ را بیابید.

۵۶- شش رمز مختلف توسط یک کانال ارتباطی بین دو ایستگاه، رد و بدل می‌شود. ۱۸ فاصله خالی باید بین رمزها قرار گیرد و به طوری که بین هر دو رمز حداقل دو خانه‌ی خالی وجود داشته باشد. به چند حالت رمزها و جاهای خالی می‌توانند ردیف شوند؟

۵۷- به چند روش می‌توان ۱۱ حرف Y,Y,X,X,X,F,E,D,C,B,A را در یک ردیف قرار داد به طوری که هر حرف Y بین دو حرف X قرار گیرد؟(نه لزوما" مجاور)

۵۸- دو عدد n رقمی (صفر می‌تواند رقم اول باشد) هم ارز نامیده می‌شوند، اگر تبدیلی از یکدیگر باشند، مثلا" دو عدد ۱۰۰۷۵ و ۰۱۰۵۷ دو عدد هم ارز هستند.

الف) حداکثر تعداد اعداد پنج رقمی را بیابید که هیچ دوتایی از آنها هم ارز نباشند؟

ب) اگر قرار باشد از ارقام ۵ و۷ و ۹ حداکثر یک‌بار استفاده کنیم چند عدد غیر هم ارز داریم؟

۵۹- با استفاده از حروف e, d, c, b, a چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان ساخت اگر:

الف) هیچ شرطی مطرح نباشد؟

ب) هرکدام از حروف صدادار(a,e) سه‌بار و حروف بی‌صدا یک‌بار در کلمه بکاررود؟

ج) حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا باشند؟

د) هرحرف، حداقل یک بار استفاده شود و حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا باشند؟

۶۰- اعداد طبیعی k , n , r را در نظر بگیرید که $r \geq nk$. تعداد راه‌های توزیع r شی یکسان در n جعبه متمایز را به طوری که در هر جعبه حداقل k شی قرار بگیرد، حساب کنید.

۶۱- تعداد جایگشت‌های ۹ حرفی از حروف z,y,x,w,v,u,t,s,r را بیابید که y بین x و z قرار داشته باشد(لازم نیست که x و y یا y و z مجاور باشند).

۶۲- سه کتاب فیزیک A , B , C و نه کتاب ریاضی رامی‌خواهیم در یک قفسه بچینیم. اینکار به چند روش امکان دارد اگر بخواهیم که B بین A ,C باشد و A و B دقیقا" چهار کتاب ریاضی از هم فاصله داشته باشند.

۶۳- می‌خواهیم پنج کتاب فیزیک و یازده کتاب ریاضی را در یک قفسه بچینیم که ترتیب کتاب‌ها از چپ به راست این گونه باشد: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 به چند روش این کار امکان دارد اگر بخواهیم بین p_2, p_1 حداقل سه کتاب ریاضی و بین p_4 و p_5 حداکثر سه کتاب قرار گیرد؟

۶٤- دو عدد طبیعی r و n $(r \geq n)$ داده شده‌اند. $L(r,n)$ را برابر تعداد راه‌های توزیع r شی متمایزدر n جعبه همانند ، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد و اشیاء در جعبه‌ها در یک ردیف باشند، در نظر بگیرید. $L(r,n)$ را بر حسب r و n بیابید.

۶۵- تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 60$ را بیابید که:

الف) $x_i \geq i - 1$؛ $(i = 1,2,\dots,6)$

ب) $x_1 \geq 2$ و $x_2 \geq 5$ و $2 \leq x_3 \leq 7$ و $x_4 \geq 1$ و $x_5 \geq 3$ و $x_6 \geq 2$

۶۶- تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ را بیابید که :

الف) $x_i \geq 0$؛ $(i = 1,2,3,4)$

ب) $7 \ge x_1 \ge 2 , x_i \ge 0$ ؛$(i \neq 1)$

ج) $x_1 \ge -5 \;,\; x_2 \ge -1 \;,\; x_3 \ge 1 \;,\; x_4 \ge 2$

۶۷- تعداد چهارتایی‌های$(x \;, y \;, z \;, w)$ را بیـابید کـه در آنهـا $w,x,y,z \in N^*$ و در معادله‌ی زیر صدق کنند.

$$w + x + y + z \le 1992$$

۶۸- تعداد دسته جواب‌های صحیح نامنفی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند.

$$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

۶۹- تعداد دسته جواب‌های صحیح نامنفی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند.$(k,r,n \in N)$

$$rx_1 + x_2 + \ldots x_n = kr$$

۷۰- تعداد اعداد صحیح نامنفی را بیابیدکه در معادله‌ی زیر صدق کنند.

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

۷۱- تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 77$$

۷۲- تعداد دسته جواب‌های صحیح نا منفی معادله‌ی زیر را بیـابید (P یـک عـدد اول است.)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = P$$

۷۳- ۵ راه برای نوشتن عدد ۴ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی وجود دارد:

۴=۴+ ۰ =۳+۱=۲+۲=۱+۳= ۰ +۴

اعداد طبیعی r و n داده شده‌اند. چند راه برای نوشتنr بـه صـورت مجمـوع n عـدد صحیح نامنفی وجود دارد؟

۷٤- ۶ راه برای نوشتن عدد ۵ به صورت مجموع سه عدد طبیعی وجود دارد:

۵ =۳+۱+۱=۲+۲+۱=۲+۱+۲=۱+۳+۱=۱+۲+۲=۱+۱+۳

دو عدد طبیعی r,n $(r \ge n)$ داده شده‌اند. چند راه برای نوشتن r به صورت n عدد طبیعی وجود دارد؟

۷۵- یک عدد طبیعی d را صعودی می‌نامیم اگر نمایش دهدهی آن به صورت $d = d_m d_{m-۱} \dots d_۲ d_۱$ باشد و $۰ < d_m \le d_{m-۱} \le \dots \le d_۲ \le d_۱$. برای مثال، اعداد ۱۳۳۷ و ۲۴۵۵۵۶۷۹۹ اعدادی صعودیند. تعداد اعداد صعودی کوچکتر از $۱۰^۹$ را بیابید.

۷۶- عدد طبیعی d را اکیداً صعودی می‌نامیم اگر نمایش دهدهی آن به صورت $d = d_m d_{m-۱} \dots d_۱$ باشد و $۰ < d_m < d_{m-۱} < \dots < d_۲ < d_۱$ تعداد اعداد طبیعی اکیداً صعودی

الف) کوچکتر از $۱۰^۹$ **ب)** کوچکتر از $۱۰^۵$ را بیابید.

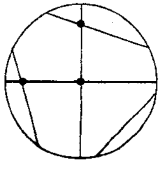
۷۷- مجموعه‌ی $A=\{۱،۲، ...، n\}$ را در نظر بگیرید.

الف) عدد طبیعی $k \in A$ داده شده است. نشان دهید تعداد زیر مجموعه‌های A که در آنان k بزرگترین عضو است برابر با $۲^{k-۱}$ است.

ب) با استفاده از (الف) ثابت کنید:

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} ۲^i = ۲^n - ۱$$

۷۸- در یک دایره، $n \ge ۲$ وتر دلخواه رسم شده‌اند که هیچ سه‌تایی از آنها در داخل دایره هم‌رأس نیستند. فرض کنید بین این وترها، m نقطه تقاطع با هم در دایره وجود داشته باشد عدد r را که نشان‌دهندهٔ تعداد پاره‌خط‌هایی است که به وسیله‌ی تقسیم کردن وترها نقاط با تقاطعشان به‌دست آمده است، حساب کنید.(در شکل پایین $n=۵$، $m=۳$ و $r=۱۱$).



۷۹- $p \leq ۶$ نقطه روی یک دایره داده شده‌اند و هر دو نقطه از آن به وسیله یک وتـر به هم وصل شده‌اند.

الف) تعداد این وترها را بیابید.

فرض کنید هیچ سه تایی داخل دایره متقاطع نباشد.

ب) تعداد نقاط تقاطع وترها را با هم در داخل دایره بیابید.

ج) تعداد پاره خط‌هایی را که به وسیله‌ی تقسیم وترها بـا نقـاط تقاطشـان بـه دسـت آمده، حساب کنید.

د) تعداد مثلث‌هایی را که رؤوسشـان نقـاط تقـاطع و اضلاعشـان روی وترهـا باشـد، حساب کنید.

۸۰- به چند روش می‌توان n+۱ جایزه متفاوت را به n دانش‌آموز داد به طوری که بـه هر دانش‌آموز حداقل یک جایزه برسد.

۸۱- اعداد طبیعی k, n, m را در نظر بگیرید و فرض کنید $N_k = \{۱,۲,\ldots,k\}$.

الف) تعداد توابع از N_n به N_m را بیابید.

ب) تعداد توابع یک به یک از N_n به N_m را بیابید $(n \leq m)$.

ج) یک تـابع $f: N_n \to N_m$ اکیـدا" صعـودی گفتـه می‌شـود کـه اگـر در آن a از b کوچکتر باشد آنگـاه $f(a)$ نـیز از $f(b)$ کوچکتـر باشـد. تعـداد توابـع اکیـدا" صعـودی از N_n به N_m را بیابید.

د) تعداد توابع از N_n روی N_m را بر حسـب $s(n,m)$ بیـابید(عـدد اسـترلنیگ نـوع دوم= $s(n,m)$).

۸۲- اعداد صحیح r و n داده شده‌اند $(۰ \leq n \leq r)$. عدد اسـترلنیگ نـوع اول $s(r,n)$ برابر با تعداد راه‌های چیدن r شی متمایز حول n دایره یکسان بـه طـوری کـه در هـر دایره حداقل یک شی باشد، تعریف می‌شود. نشان دهید:

الف) $s(r,1) = (r-1)!$

ب) $s(r,2) = (r-1)!(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1})$

ج) $s(r,r-1) = \binom{r}{2}$

د) $s(r,r-2) = \frac{1}{24}r(r-1)(r-2)(3r-1)$

هـ) $\sum_{n=0}^{r} s(r,n) = r!$

۸۳- عدد استرلنیگ نوع اول ضرایب جملات x^n در حاصل ضرب $x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1)$ است. برای مثال، اگر $r=3$ باشد.

$$x(x+1)(x+2) = 2x+3x^2+x^3 = s(3,1)x+s(3,2)x^2+s(3,3)x^3$$

و اگر $r=5$ باشد

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24x+50x^2+35x^3+10x^4+x^5 =$$
$$s(5,1)x+s(5,2)x^2+s(5,3)x^3+s(5,4)x^4+s(5,5)x^5$$

نشان دهید.

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+r-1) = \sum_{n=0}^{r} s(r,n)x^n$$

۸٤- اعداد صحیح r و n داده شده‌اند $(0 \le n \le r)$ عدد استرلینگ نوع دوم $S(r,n)$ برابر با تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه همانند است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. نشان دهید:

الف) $S(r,2) = 2^{r-1}-1;$

ب) $S(r,3) = \frac{1}{2}(3^{r-1}+1)-2^{r-1};$

ج) $S(r,r-1) = \binom{r}{2};$

د) $S(r,r-2)=\binom{r}{3}+3\binom{r}{4}$;

۸۵- فرض کنید $(x)_0=1$ و $(x)_n=x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$

اعداد استرلنیگ نوع دوم به صورت ضرایب $(x)_n$ در بسط x^r بر حسب جملات $(x)_n$ ظاهر می‌شوند. برای مثال، وقتی $r=2,3,4$، داریم

$$x^2=x+x(x-1)=(x)_1+(x)_2=S(2,1)(x)_1+S(2,2)(x)_2$$
$$x^3=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=$$
$$=S(3,1)(x)_1+S(3,2)(x)_2+S(3,3)(x)_3$$
$$x^4=x+7x(x-1)+6x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)=$$
$$=S(4,1)(x)_1+S(4,2)(x)_2+S(4,3)(x)_3+S(4,4)(x)_4$$

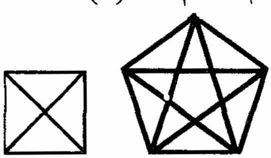
نشان دهید برای هر مقدار صحیح نامنفی x

$$x^r=\sum_{n=0}^{r}S(r,n)(x)_n$$

۸۶- فرض کنید m وتر در یک دایره رسم شده‌اند، به طوری که هیچ سه تایی از آنها در داخل دایره همرأس نیستند. اگر n برابر تعداد نقاط تقاطع این وترها با هم در داخل دایره باشد، نشان دهید تعداد نقطه‌هایی که به وسیله وترها در دایره ایجاد شده، برابر $m+n+1$ است.

۸۷- برای عدد $n\geq 4$ ، $r(n)$ را برابر تعداد ناحیه‌های داخلی یک n ضلعی محدب که با رسم اقطارش به وجود آمده، تعریف می‌کنیم به طوری که هیچ سه قطری در داخل n ضلعی هم رأس نباشند مثلاً $r(4)=4$ و $r(5)=11$

ثابت کنید: $r(n)=C_4^n+C_2^{n-1}$



۸۸- برای عدد طبیعی n چند جفت (x,y) وجود دارد که در معادله‌ی $\frac{xy}{x+y} = n$ صدق کند (پاتنام، ۱۹۶۰).

۸۹- مجموعه‌ی $S=\{1,2,\ldots,1992\}$ را در نظر بگیرید. در هر کدام از حالات ذکر شده، تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی را بیابید که اعضای آن از S انتخاب شوند و

الف) $3 \mid (a+b+c)$ **ب)** $4 \mid a+b+c$

۹۰- یک دنباله از حروف الفبای انگلیسی انتخاب می‌شود که طولش ۱۵ حرف باشد (یک حرف می‌تواند چند بار انتخاب شود). احتمال این که کلمه‌ی UNIVERSITY در دنباله ظاهر شود چقدر است؟

۹۱- به مجموعه‌ی $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ از اعداد طبیعی یک مجموعه‌ی m تایی *جدا شده* می‌گویند اگر به ازای i=۲ و ۳ و... و r داشته باشیم $a_i - a_{i-1} \geq m$. فرض کنید $X = \{1,2,\ldots,n\}$. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی m تایی جدا شده را بیابید اگر $0 \leq r \leq n-(m-1)(r-1)$.

۹۲- فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند و S_k مجموع همه‌ی حاصل ضرب‌های k تایی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باشد. نشان دهید. رابطه‌ی

$$S_k S_{n-k} \geq \left(C_k^n\right)^2 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

به ازای $k=1,2,\ldots,n-1$ بر قرار است (مسابقات ریاضی آسیای جنوب شرقی، ۱۹۹۰).

۹۳- برای مجموعه‌ی $\{1,2,3,\ldots,n\}$ و تمام زیر مجموعه‌های غیر تهی آن، *مجموع متناوب* را این‌گونه تعریف می‌کنیم. اعضای یک زیر مجموعه را به ترتیب نزولی می‌نویسیم و اعضای آن را یک در میان به علاوه و منها می‌کنیم. مثلاً برای زیرمجموعه‌های $\{2,4,6,9\}$ و $\{15\}$ مجموع متناوب برابر $9-6+4-2=5$ و ۱۵ است. مجموع تمام مجموعه‌های متناوب را برای $n=7$ بیابید(مسابقات ریاضی آمریکا ۱۹۸۳/۱۳).

۹٤- یک باغبان می‌خواهد سه درخت افرا، چهار درخت بلوط و پنج درخت چنـار را در یک ردیف بکارد. اگر $\frac{m}{n}$ احتمال این باشد که هیچ دو درخت چنـاری کنار هـم قـرار نگیرند(m و n نسبت بـه هـم اولنـد)، $m+n$ چقـدر اسـت؟(مسـابقات ریـاضی آمریکا۱۱/۱۹۸۴).

۹۵- در یک تورنومنت هر دو شرکت کننده‌ای دقیقا" یکبار با هـم بـازی می‌کننـد. در هر بازی به نفر برنده ۱ امتیاز تعلق می‌گیرد و اگر بازی مساوی شـود بـه هـر شـرکت کننده $\frac{1}{2}$امتیاز و در صورت باخت، بـه فـرد بـازنده امتیـازی تعلـق نمی‌گـیرد. بعـد از رده‌بندی امتیازها می‌فهمیم هر کدام از ده نفر آخر، نصف امتیازشان را در بازی بـا نـه نفر دیگر به دست آورده‌اند. تعداد شرکت کننده‌ها چقـدر اسـت؟ (مسـابقات ریـاضی آمریکا، ۱۴/۱۹۸۵).

۹۶- فرض کنید S مجموع لگاریتم‌های مقسوم‌علیه‌های غیر بدیهـی 10^6 در مبنـای ۱۰ باشد. نزدیکترین عدد طبیعی به S چیست؟ (مسابقات ریاضی آمریکا،۸/۱۹۸۶).

۹۷- یک سکه را چند بار به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر روبیاید آن را با T و اگـر پشـت بیاید آن را با H نشان می‌دهیم. اگر بعد از یک بار رو آمدن، بلافاصله پشـت بیـاید آن را با TH نمایش می‌دهیم و اگر دو بار پشت سر هم پشت بیاید با HH . بـرای مثـال، اگر ۱۵ بار سکه انداختن را با $HHTTHHHHTHHTTTT$ نمایش می‌دهیم در آن پنـج بار HH، سه بار HT، دوبار TH و چهار بار TT آمده است. در چند دنبالـه از انداختـن ۱۵ سـکه ، دقیقـا" دوبـار HH ، سـه بـار HT، چهـار بـار TH و پنـج بـار TT می‌آیـد (مسابقات ریاضی آمریکا،۱۳/۱۹۸۶).

۹۸- یک جفت عدد (m,n) از اعـداد صحیـح نـامنفی سـاده نـامیده می‌شـود، اگـر در عملیات جمع کردن $m+n$ نیاز به عمل ده بر یک نداشته باشیم. تعداد جفت‌های ساده را بیابید که مجموع دو عدد

الف) ۱۴۹۲ باشد (مسابقات ریاضی آمریکا،۱/ ۱۹۸۷). **ب)**۱۹۹۲ باشد.

۹۹- فرض کنید $\frac{m}{n}$ (n,m نسبت به هم اولند)، احتمال این باشد که یک مقسوم‌علیه انتخاب شدهٔ عدد 10^{99}، مضرب 10^{88} باشد. $m+n$ را بیابید(مسابقات ریاضی آمریکا، ۱۹۸۸/۵).

۱۰۰- سطح یک چند وجهی از ۱۲ مربع، ۸ شش ضلعی منتظم و ۶ هشت ضلعی منتظم تشکیل شده است . چند تا از اقطار این چند وجهی موازی وجوه هستند، اگر بدانیم در هر راس این چند وجهی یک مربع و یک شش ضلعی و یک هشت ضلعی تلاقی دارند(مسابقات ریاضی آمریکا،۱۰/ ۱۹۸۸).

۱۰۱- روشن است که $6!=8\times9\times10$ بزرگترین عدد مثبت n را بیابید که $n!$ حاصل ضرب ($n-3$) عدد متوالی باشد(مسابقات ریاضی آمریکا،۱۹۹۰/۱۱).

۱۰۲- فرض کنید $S=\{1,2,\dots,n\}$ تعداد زیر مجموعه‌های A از S را بیابید که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) $A=\{a,a+d,\dots\dots\dots,a+kd\}$ ؛ $(a,k,d\in N)$

ب)اگر $x\in S-A$ ، در $A\cup\{x\}$ هیچ دو عضو متوالی با فاصله‌ی بیشتر از d وجود نداشته باشد(مسابقات ریاضی چین ،۱۹۹۱).

۱۰۳- تمام زوج اعداد طبیعی n,m را بیابید که

$$1!\,3!\,5!\dots(2n-1)!=m!$$

(این مسأله توسط کوکورزنیو به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۱۹۸۹،۹۴، ۱۹۰) پیشنهاد شده است).

۱۰٤- نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n رابطه

$$\sum_{r=0}^{n}P_r^n=[n!e]$$

برقرار است که در آن $[x]$ بزرگترین عــدد صحیـح نابیشـتر از x و ... e=۲/۷۱۸ اسـت (این مساله توسط د. اولسون به مجله‌ی ریاضی دانشــگاهی (۲۶۰،۱۹۸۷،۲۰) پیشـنهاد شده است).

۱۰۵- مجموعـه‌ی S={۱،۲،...،۱۹۹۰ } را در نظـر بگـیرید. یـک زیـر مجموعــه‌ی ۳۱ عضوی S خوب نامیده می‌شود اگر مجموع اعضایش بر پنج بخش پذیر باشـد. تعـداد زیـر مجموعـه‌های ۳۱ عضـوی خـوب S را بیـابید(ایـن مسـاله در ۳۱ امیـن مسـابقات بین‌المللی ریاضی توسط تیم اعزامی از هندوستان پیشنهاد شده بود) .

۱۰۶- مجموعه‌ی ۱۹۹۰ عضوی S را در نظر بگیرید و فـرض کنیـد P مجموعـه‌ای از دنباله‌های ۱۰۰ عضوی $(a_1,a_2,\ldots,a_{99},a_{100})$باشد که a_i ها عضوهـایی متمـایزی از S هســتند. یــک زوج (x,y) را *آشــکار* می‌نــامیم اگــر در یکــی از دنبالــه‌های $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{100})$ هر دو عضو y,x موجــود باشـند. اگـر هـر زوج (x,y) از S حداکثر در یک دنباله از P آشکار شده باشد؛ ثابت کنید: $|P|\leq 800$ (این مساله در ۳۱ امین مسابقات بین‌المللی ریاضی توسط تیم اعزامی از ایران پیشنهاد شده بود.)

۱۰۷- فرض کنید $M=\{r_1.a_1,r_2.a_2\ldots,r_n.a_n\}$ یـک شـبه مجموعـه باشـد کـه در آن $r_1+r_2+\ldots+r_n=r$. نشــان دهیــد تعــداد تبدیل‌هــای r تــایی M بــا تعــداد تبدیل‌های(r-۱) تایی M برابر است.

۱۰۸- ثابت کنید نمی‌توان هفت خط راست در صفحه اقلیدسی رسم کرد که حداقل ۶ نقطه‌ی تقاطع روی سه خط (و نه بیشتر)و حداقل ۴ نقطه‌ی تقـاطع روی دو خـط (و نه بیشتر)داشته باشند (پانتام، ۱۹۷۳).

۱۰۹- بـرای کـدام اعــداد طبیعــی n، یــک تبدیــل $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ از اعــداد $(1،2،\ldots n)$وجود دارد که تمام $|x_k-k|$ها مختلف باشند؟

(این مسأله توسط م.ج.پلینگ به ماهنامه ریاضی آمریکا ۸۴۳،۱۹۸۹،۹۶) پیشنهاد شده است).

۱۱۰- اعداد $d(n,m)$ را که n,m در آن اعداد صحیــح هسـتند و $0\leq m\leq n$، این گونـه

تعریف می‌کنیم.

$$d(n,0) = d(n,n) = 1 \quad n \geq 0$$

$$m.d(n,m) = m.d(n-1,m) + (2n-m).d(n-1,m-1)$$

ثابت کنید که $d(n,m)$ ها اعدادی صحیح‌اند (انگلستان ،۱۹۸۷).

۱۱۱- در یک مسابقه‌ی ریاضی کـه در دو روز برگـزار می‌شـود ۲۸ مسـأله در مجمـوع مطرح شده است .هر شرکت کننده‌ای ۷ مسأله را حل می‌کند. می‌دانیـم کـه بـرای هـر جفت مسأله، دقیقاً دو نفر وجود دارند که هر دوی آنها را حل کرده‌اند. ثابت کنید که یک شرکت کننده وجود دارد که یا در روز اول هیچ مسأله‌ای حل نکرده، یا حداقل ۴ مسأله حل کرده است(مسابقات ریاضی آمریکا ، ۱۹۸۴/۴).

۱۱۲- پنج نقطه را طوری در صفحه در نظر بگیرید که هـیچ دو خطـی کـه از دوتـایی آنها می‌گذرد موازی، منطبق و عمود بر هم نباشند. از هر کدام از نقاط عمودهـایی بـر خطوطی که از چهار نقطه دیگر عبور می‌کنند رسم می‌شود. حداکثر تعداد نقاط تقاطع این خطوط عمود با هم چقدر است(مسابقات‌ریاضی‌جهانی، ۱۹۶۴/۵).

۱۱۳- n نقطه در صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید کمتر از $2n^{\frac{3}{2}}$ جفت از آنها وجود دارد که فاصله‌شان یک باشد(پانتام، ۱۹۷۸).

۱۱۴- بـرای اعـداد صحیـح بزرگـتر از یـک m,c ، مقـدار $n(c,m)$ نشـان دهنـدهٔ تعـداد cتایی‌های $(n_1,n_2,\ldots,n_c)$ است که از مجموعـه‌ی $\{1،2،\ldots،m\}$ انتخـاب شـده‌اند و $n_2 < n_1$ و $n_2 \leq n_3 \leq \ldots \leq n_{c-1} \leq n_c$ $n(c,m)$ را بیابید(این مساله توسـط اسپلمن به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا(۳۸۳،۱۹۸۷،۹۴) پیشنهاد شده است).

۱۱۵- مجموعـــــــــه‌های $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ و $Y = \{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ و $A \subseteq X \times Y$ را در نظر بگیرید.

برای $x_i \in X$ فرض کنید

$$.A(x_i,\circ) = (\{x_i\} \times Y) \bigcap A$$

و برای $y_i \in Y$ فرض کنید.

$$A(\circ, y_i) = (X \times \{y_i\}) \bigcap A$$

الف) قضیه فوبینی را ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{m} |A(x_i, *)| = |A| = \sum_{i=1}^{n} |A(*, y_i)$$

ب) با استفاده از **(الف)** یا با هر راه دیگری، مساله‌ی زیر را حل کنید:

$n \geq 3$ نقطه در صفحه طوری داریم که با هر سه نقطه‌ی آن یک مثلث قائم‌الزوایه ساخته می‌شود حداکثر مقدار n را بیابید(مسابقات ریاضی مسکو، بیست وسومین دوره).

فصل ۲

ضرایب دو جمله‌ای و ضرایب چند جمله‌ای

۱-۲- مقدمه

اعداد صحیح n و r را با فرض $0 \le r \le n$ در نظر بگیرید، عدد $\binom{n}{r}$ یا C_r^n در فصل ۱ به عنوان ترکیب r عضو از n عضو تعریف شده است. برای راحتی، ما جلوتر تعریف می‌کنیم که $\binom{n}{r}=0$ اگر $r>n$ یا $r<0$. بنابراین با توجه به نتیجه‌ی (۴-۱-۱) به ازای هر $n \in z$ و با شرط $n \ge 0$ خواهیم داشت:

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!(n-r)!} & 0 \le r \le n \\ 0 & r>n \ \text{یا} \ r<0 \end{cases}$$

در تمرین‌های فصل یک ، بعضی از خواص اساسی و مهم عدد $\binom{n}{r}$ را یاد گرفتیم. این خواص مفید را در ذیل آورده‌ایم:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad (۲-۱-۱)$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1};(r\geq 1) \text{ اگر} \qquad (۲-۱-۲)$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1};(r\geq 1) \text{ اگر} \qquad (۲-۱-۳)$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \qquad (۲-۱-۴)$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r} \qquad (۲-۱-۵)$$

اعداد $\binom{n}{r}$ شاید مهم‌ترین و پرمعنی‌ترین اعداد در مبحث شمارش هستند و اکثر اوقات *ضرایب دو جمله‌ای* نامیده می‌شوند. زیرا به عنوان ضرایب بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ ظاهر می‌شوند. در این فصل، خواص اساسی و مفید بیشتری دربارهٔ ضرایب دو جمله‌ای به دست خواهیم آورد. روش‌های مختلفی که در به دست آوردن این خواص به کار رفته‌اند، مطرح خواهد شد. همچنین اندیشه‌ی *ضرایب چند جمله‌ای* را که تعمیم یافته‌ی ضرایب دو جمله‌ای هستند معرفی و مطالعه خواهیم کرد.

۲-۲- نظریه‌ی دو جمله‌ای‌ها

بحث را با ساده‌ترین قضیه‌ی دو جمله‌ای‌ها که توسط« ایزاک نیوتـن» (۱۷۲۷-۱۶۴۶) در سال ۱۶۷۶ کشف شده است، شروع می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱-۲-۲ برای هر عدد صحیح $n\geq 0$ داریم:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

اثبات اول - استقرای ریاضی

برای $n=0$ نتیجه به راحتی بدست می‌آید:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$$

فرض می‌کنیم قضیه برای $n=k$، $k \geq 0$، بر قرار باشد، یعنی:

$$.\ (x+y)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r}y^r$$

حال مقدار $n=k+1$ را در نظر بگیرید، مشاهده می‌شودکه:

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = (x+y)\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r}y^r$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r+1}y^r + \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r}y^{r+1}$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \binom{k}{2}x^{k-1}y^2 + \ldots + \binom{k}{k}xy^k$$

$$+\binom{k}{0}x^k y \quad + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 \quad + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

با به کار بردن (۴-۱-۲) و این نتیجه ساده که $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ و $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$، خواهیم داشت:

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \ldots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

بنابراین نتیجه با استقراء دنبال می‌شود.■

اثبات دوم - روش ترکیباتی

کافی است ثابت کنیم که ضریب $x^{n-r}y^r$ در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ برابر $\binom{n}{r}$است.

برای بسط حاصل‌ضرب $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$، باید از هر

عامل $(x+y)$، x یا y را انتخاب کنیم و سپس در هم ضرب کنیم. بنابراین برای شکل‌گیری $x^{n-r}y^r$ باید اول r عامل از n عامل $(x+y)$ را انتخاب کنیم سپس y را از آنها برداریم(و البته x را هم از بین n-r عامل باقیمانده انتخاب می‌کنیم). مرحله‌ی اول را به $\binom{n}{r}$ حالت می‌توان انتخاب کرد در حالی‌که برای مرحله‌ی دوم یک راه بیشتر نداریم. بنابراین تعداد راه‌های شکل‌گیری عبارت $x^{n-r}y^r$ برابر $\binom{n}{r}$ است.■

۳-۲-خواص ترکیبیاتی

قضیه‌ی دو جمله‌ای یک نتیجه‌ی اساسی در ریاضیات است که استعمال زیادی دارد. در این بخش، مشاهده خواهیم کرد که قضیه‌ی۱-۲-۲ مجموعه‌ای از خواص جالب را درباره‌ٔ ضرایب دو جمله‌ای، نتیجه می‌دهد.

مثال ۱-۳-۲ نشان دهید به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$ داریم:

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r} = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \ldots + \binom{n}{n} = ۲^n \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۱)$$

اثبات اول. با فرض $x = y = ۱$ در قضیه‌ی ۱-۲-۲، فوراً به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r} = (۱+۱)^n = ۲^n$$

اثبات دوم. X را مجموعه‌ی n عضوی و $P(X)$ را مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. می‌توانیم $|P(X)|$ را به دو روش بشماریم.

به ازای $r = ۰,۱,\ldots,n$، طبق تعریف تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی X برابر $\binom{n}{r}$ است. بنابراین:

$$|P(X)| = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \ldots + \binom{n}{n}$$

از طرفی طبق نتیجه‌ی مثال ۲-۵-۱ داریم $|P(x)| = ۲^n$. پس خواهیم داشت:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\ldots+\binom{n}{n} = ۲^n$$

مثال ۲-۳-۲ نشان دهید به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ داریم:

$$\text{(الف)}\ \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r\binom{n}{r} = \binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\ldots+(-۱)^n\binom{n}{n} = ۰ \qquad (۲-۳-۲)$$

$$\text{(ب)}\ \binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{۲k}+\ldots = \binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{۲k+۱}+\ldots = ۲^{n-۱} \qquad (۲-۳-۳)$$

اثبات. با در نظر گرفتن $x=۱$ و $y=-۱$ در قضیه‌ی ۱-۲-۲ به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}(-۱)^r = (۱-۱)^n = ۰$$

قسمت(ب) با استفاده از(الف) ورابطه‌ی (۱-۳-۲) به‌دست می‌آید.■

تبصره:

مجموعه‌ی ناتهی A را زوج عضو (یا فرد عضو) گویند اگر $|A|$ زوج (یا فرد) باشد. خاصیت (۲-۳-۳) نشان می‌دهد که تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی مجموعه‌ی X با n عضو با هم برابرند. خواننده تشویق می‌شود که یک تناظر بین اعضای زیر مجموعه‌های زوج عضوی و فرد عضوی مجموعه‌ی X بر قرار کند(مسأله‌ی ۱۰-۲ را ببینید).

مثال ۳-۳-۲ نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sum_{r=۱}^{n} r\binom{n}{r} = \binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲} + \ldots + n\binom{n}{n} = n.۲^{n-۱} \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۴)$$

اثبات اول. با در نظر گرفتن $x=۱$ در قضیه‌ی ۱-۲-۲ خواهیم داشت:

$$(۱+y)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} y^r$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به y به دست می‌آید:

$$n(۱+y)^{n-۱} = \sum_{r=۱}^{n} r\binom{n}{r} y^{r-۱}$$

سرانجام با قرار دادن $y=۱$ در تساوی فوق خواهیم داشت:

$$n.۲^{n-۱} = \sum_{r=۱}^{n} r\binom{n}{r} \quad \blacksquare$$

اثبات دوم. تساوی (۲-۱-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-۱}{r-۱}$$

پس بدین‌صورت ادامه می‌دهیم:

$$\sum_{r=۱}^{n} r\binom{n}{r} = \sum_{r=۱}^{n} n\binom{n-۱}{r-۱} = n\sum_{r=۱}^{n}\binom{n-۱}{r-۱}.$$

$$= n\sum_{s=۰}^{n-۱}\binom{n-۱}{s} \quad (\text{با فرض } s=r\text{-}۱)$$

$$= n.۲^{n-۱} \quad (\text{با توجه به } (۱-۳-۲))$$

☜ **تبصره:**

با بسط راه حل‌های ارایه شده در مثال قبل می‌توان نشان داد که به ازای هر $n \in N$ داریم:
(مسأله‌ی ۴۷-۲ را ببینید).

$$\sum_{r=۱}^{n} r^{۲}\binom{n}{r} = n(n+۱)۲^{n-۲}$$

$$\sum_{r=۱}^{n} r^{۳}\binom{n}{r} = n^{۲}(n+۳)۲^{n-۳}$$

در حالت کلی برای مجموع $\sum_{r=۱}^{n} r^{k}\binom{n}{r}$ و $k \in N$ چه می‌توان گفت؟

نتیجه‌ی ذیل توسط ریاضیدان فرانسوی «آ. ت. واندرموند» (۱۷۹۶-۱۷۳۵) در سال ۱۷۷۲ منتشر شد.

مثال ۴-۳-۲ (رابطه‌ی واندرموند) به ازای هر $r \in N$ و n و m نشان دهید:

$$\sum_{i=۰}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m}{۰}\binom{n}{r} + \binom{m}{۱}\binom{n}{r-۱} + \ldots + \binom{m}{r}\binom{n}{۰} = \binom{m+n}{r} \quad (۲-۳-۵)$$

اثبات اول. دو طرف تساوی زیر را بسط می‌دهیم:

$$(۱+x)^{m+n} = (۱+x)^{m}(۱+x)^{n}$$

با استفاده از قضیه‌ی ۱-۲-۲ داریم:

$$\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)$$
$$=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\left\{\binom{m}{0}\binom{n}{1}+\binom{m}{1}\binom{n}{0}\right\}x$$
$$+\left\{\binom{m}{0}\binom{n}{2}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{0}\right\}x^2+\ldots+\binom{m}{m}\binom{n}{n}x^{m+n}$$

حال با مقایسه‌ی ضرایب x^r در طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.\blacksquare$$

اثبات دوم. فرض کنید $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ مجموعه‌ای $m+n$ عضوی باشد. می‌توانیم تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A در X را بشماریم.

فرض کنیم A شامل دقیقاً i عضو از a_jها باشد که $i=0,1,\ldots,r$. پس $r-i$ عضو با قیماندهٔ A لزوماً از b_jها انتخاب می‌شود. و در این‌حالت تعداد راه‌ها برای تشکیل A، $\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$ خواهد بود. چون i می‌تواند اعداد $0,1,\ldots,r$ را شامل شود پس تعداد روش‌های انتخاب مجموعه‌ی r عضوی برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=\binom{m+n}{r}\qquad .\blacksquare$$

تبصره:

اگر در رابطه‌ی (۵-۳-۲) قراردهیم $m=n=r$ و رابطه‌ی (۱-۱-۲) را به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}\qquad(۲-۳-۶)$$

حال برای نشان دادن کاربرد رابطه‌ی واندرموند مثالی می‌آوریم. در بخش ۶-۱، نشان داده شد که H_r^n، تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی $M=\{\infty.a_1,\infty.a_2,\ldots,\infty.a_m\}$، برابر است با $\binom{r+n-1}{r}$.

حال، ماتریس ۳×۳ زیر را در نظر بگیرید که درایه‌های آن H_r^n است.

$$A=\begin{pmatrix} H_1^1 H_2^1 H_3^1 \\ H_1^2 H_2^2 H_3^2 \\ H_1^3 H_2^3 H_3^3 \end{pmatrix}$$

مقدار دترمینان چیست؟ مشاهده می‌کنیم که:

$$A=\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} \\ \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

و به سادگی به‌دست می‌آید که $\det(A)=1$. به طور کلی، به یک نتیجه‌ی جالب می‌رسیم، که در منبع [N] (صفحات ۱۶۷-۲۵۶) یافت می‌شود.

مثال ۵-۳-۲ فرض کنید $A=\left(H_r^n\right)$ که در آن A یک ماتریس مربعی مرتبه k می‌باشد و $r\in\{1,2,\ldots,k\}$ و n. به علاوه در درایه‌ی (n,r) عدد H_r^n قرار دارد.

نشان دهید که $\det(A) = 1$.

اثبات. فرض کنید $C=(C_{ij})$ و $B=(B_{ij})$ دو ماتریس مربعی مرتبه k باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند، $c_{ij}=\binom{j-1}{j-i}$ و $b_{ij}=\binom{i}{j}$ بنابراین:

$$C=\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{k-1}{k-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{k-1}{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k-1}{0} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \cdots & \binom{k}{k} \end{pmatrix}$$

ادعا می‌کنیم که $A=BC$.

در واقع اگر a_{nr} بر درایه‌ی (n,r) که از BC تولید شده است، دلالت کند، خواهیم داشت:

$$a_{nr}=\sum_{i=1}^{k} b_{ni}c_{ir}=\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\binom{r-1}{r-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\binom{n}{i}\binom{r-1}{r-i} \quad \left(i>r \Rightarrow \binom{r-1}{r-i}=0\right)$$

$$=\binom{r+n-1}{r} \qquad \text{(طبق رابطه‌ی واندرموند)}$$

$$=H_r^n$$

پس $BC=A$، همان چیزی که ادعا کرده بودیم.

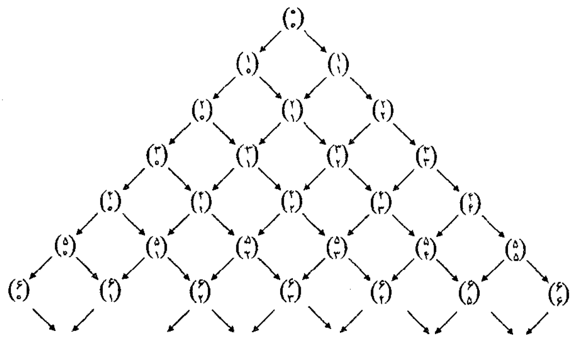
حال

$$\det(A)=\det(BC)=\det(B)\det(C)$$

$$\left[\binom{1}{1}\binom{2}{2}\cdots\binom{k}{k}\right]\left[\binom{0}{0}\binom{1}{0}\binom{2}{0}\cdots\binom{k-1}{0}\right]=1\ .\blacksquare$$

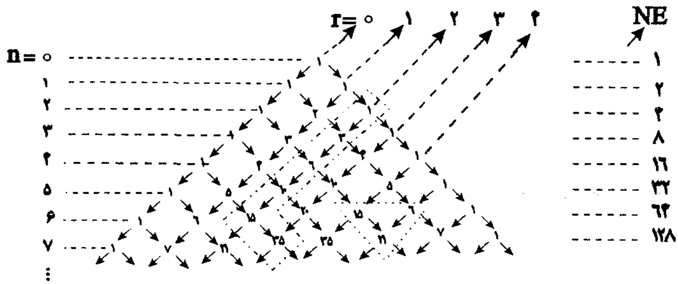
٤-۲- مثلث خیام- پاسکال

مجموعه‌ی ضرایب دو جمله‌ای $\binom{n}{r}$ به راحتی در یک شکل مثلثی قرار می‌گیرند که از بالا به پایین در جهت افزایش n و از چپ به راست درجهت افزایش r است که در شکل ۱-۴-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-٤-۲

این نمودار یکی از مهم‌ترین و با ارزش‌ترین الگوهای عددی در تاریخ ریاضیات است، که مثلث خیام- پاسکال نامیده می‌شود. در فهماندن این الگوی عددی «بلز پاسکال» (۱۶۶۲-۱۶۲۳) ریاضیدان فرانسوی سهم بسزایی داشت.این مثلث قبلاً توسط خیام، ریاضی‌دان و فیلسوف ایرانی کشف شده بود ولی کاربرد چندانی نداشت و پاسکال، کاربرد آن را پیدا کرد و پس از آن این مثلث مهم و قابل توجه شد.



شکل ۲-٤-۲

از مشاهدهٔ شکل ۲-۴-۲ می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد.

(۱) ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{r}$ که در مرتبه n ام از بالای شکل و مکان r ام از سمت چپ قرارداد، تعداد راه‌های مختلف برای رسیدن از محل $\binom{۰}{۰}$ به محل $\binom{n}{r}$ با کوتاهترین مسیر است. این همان راهی است که در مثال ۱-۵-۱ مشاهده شد.

(۲) برای تحقیق $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ توجه می‌کنیم که تمام مثلث نسبت به خط قائم گذرنده از محل $\binom{۰}{۰}$ قرینه است، و قرینه‌ی $\binom{n}{r}$ نسبت به آن خط، $\binom{n}{n-r}$ است و این دو با هم برابرند.

(۳) رابطه‌ی (۱-۳-۲) نشان می‌دهد که مجموع ضرایب دوجمله‌ای در مرتبه n ام برابر است با ۲^n، و رابطه‌ی (۶-۳-۲) نشان می‌دهد که مجموع مربعات ضرایب دو جمله‌ای مرتبه n ام برابر است با $\binom{۲n}{n}$.

(۴) رابطه‌ی (۴-۱-۲) یعنی $\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}$ به سادگی نشان می‌دهد که هر ضریب دو جمله‌ای در درون مثلث با مجموع دو ضریب دو جمله‌ای که درست در مرتبه‌ی بالایی و روی آن در سمت چپ و راست واقع است برابر است. برای مثال،

۶+۱۵=۲۱ که در شکل ۲-۴-۲ نشان داده شده است.

۵-۲- رابطه‌ی چو شی- چی

حال با مشاهده‌ای دیگر در شکل ۲-۴-۲ پیش می‌رویم. پنج ضریب دو جمله‌ای متوالی زیر را در نظر بگیرید.

$$\binom{۲}{۲}=۱،\ \binom{۳}{۲}=۳،\binom{۴}{۲}=۶،\binom{۵}{۲}=۱۰\ ،\binom{۶}{۲}=۱۵$$

در امتداد راستای NE در سمت راست مثلث نشان داده شده وقتی r=۲ ، مجموع پنج عدد برابر است با ۱+۳+۶+۱۰+۱۵=۳۵ که نخستین عدد پس از گردش به چپ در آخر دنباله‌ی ۱و۳ و۶ و۱۰و۱۵ است.

دلیل آن چیست؟ $\binom{۳}{۳}$ را به جای $\binom{۲}{۲}$ جایگزین می‌کنیم و نتیجه‌ی (۴) را در مثلث بکار می‌بریم. داریم:

$$\begin{aligned}
&\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\\
&=\binom{۳}{۳}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\\
&=\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\\
&=\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}\\
&=\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۲}\\
&=\binom{۷}{۳}=۳۵
\end{aligned}$$

بدیهی است که استفادهٔ این برهان در حالت کلی رابطه‌ی (۱-۵-۲) را نتیجه می‌دهد.

این رابطه که در زیر آمده، توسط «چوشی-چی» در سال ۱۳۰۳ -م کشف شده است.

مثال ۱-۵-۲ نشان دهید که:

الف) به ازای هر $r, n \in N$ با شرط $n \geq r$ ،

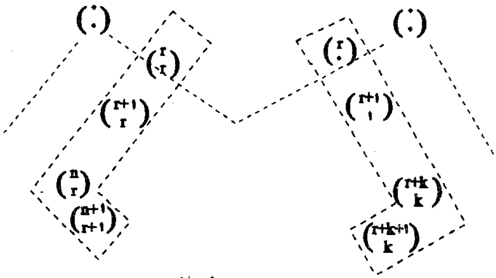
$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1} \qquad (۱-۵-۲)$$

ب) به ازای هر $r, k \in N$:

$$\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\ldots+\binom{r+k}{k}=\binom{r+k+1}{k} \qquad (۲-۵-۲)$$

روابط (۱-۵-۲) و (۲-۵-۲) با توجه به شکل ۱-۵-۲ هم ارز هستند.

با توجه به قرینه بودن مثلث پاسکال، روابط (۱-۵-۲) و (۲-۵-۲) معادل هستند پس. (۲-۵-۲) $\Leftrightarrow$ (۱-۵-۲).



شکل ۱-۵-۲

حال برای رابطه‌ی (۱-۵-۲) یک اثبات به روش ترکیبیاتی می‌آوریم.

اثبات. مجموعه‌ی $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1-r}, \ldots, a_{n+1}\}$ را که مجموعه‌ای از $n+1$ عضوی است، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تعداد زیر مجموعه‌های $r+1$ عضوی را بشماریم، توجه کنید که $n+1-r$ حالت زیر به وجود می‌آید:

(۱) : $a_1 \in A$، حال برای تشکیل A، r عضو دیگر را باید از مجموعه‌ی $X-\{a_1\}$ انتخاب کنیم که $\binom{n}{r}$ راه مختلف برای تشکیل A وجود دارد.

(۲) : $a_1 \notin A$ و $a_2 \in A$، حال برای تشکیل A ، r عضو دیگر باید از مجموعه‌ی $X-\{a_1,a_2\}$ انتخاب کنیم که $\binom{n-1}{r}$ راه مختلف برای تشکیل A وجود دارد.

...

$(n\text{-}r)$: $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1-r} \notin A$ و $a_{n-r} \in A$. این‌بار برای تشکیل A ، r عضو دیگر را باید از مجموعه‌ی $X-\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-r}\}$ انتخاب کنیم که $\binom{(n+1)-(n-r)}{r}=\binom{r+1}{r}$ راه مختلف برای تشکیل A وجود دارد.

$(n+1\text{-}r)$: $a_1,a_2,\ldots,a_{n-r} \notin A$ و باز برای تشکیل A ، $r+1$ عضو باقیمانده را باید از مجموعه‌ی $X-\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-r+1}\}$ که $r+1$ عضو دارد انتخاب کنیم که فقط $\binom{r+1}{r+1}=1$ راه برای انتخاب داریم.

ملاحظه می‌کنیم که $n+1\text{-}r$ حالت فوق تمام حالت‌های مسأله را شامل است، پس با توجه به اصل جمع داریم:

$$\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\ldots+\binom{r+1}{r}+\binom{r}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

که اثبات رابطه‌ی (۱–۵–۲) است.■

به دو مثال توجه کنید.

مثال ۲–۵–۲ (مسابقات ریاضی جهانی، ۱۹۸۱/۲) با فرض $1 \le r \le n$, و تمام زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ را در نظر بگیرید، تمام این زیر مجموعه‌ها یک کوچکترین عضو دارد. برای تمام این زیر مجموعه‌ها این کوچکترین

عضوها را در نظر می‌گیریم: فرض کنیم $F(n,r)$ واسطه‌ی حسابی این اعداد باشد، ثابت کنید:

$$F(n,r)=\frac{n+۱}{r+۱}$$

قبل از اثبات نتیجه، برای درک بهتر مسأله، مثال روشنی می‌آوریم. $n=۵$ و $r=۳$ را در نظر بگیرید، تمام زیر مجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۴،۵} و کوچکترین عضوهای آنها در جدول ۱-۵-۲ نشان داده شده است.

زیر مجموعه‌هایی ۳عضوی {۱،۲،۳،۴،۵}	کوچکترین عضو
{۱،۲،۳}	۱
{۱،۲،۴}	۱
{۱،۲،۵}	۱
{۱،۳،۴}	۱
{۱،۳،۵}	۱
{۱،۴،۵}	۱
{۲،۳،۴}	۲
{۲،۳،۵}	۲
{۲،۴،۵}	۲
{۳،۴،۵}	۳

شکل ۱-۵-۲

بنا براین داریم: $F(۵,۳)=\frac{۱}{۱۰}\left(\left(۶\times۱\right)+\left(۳\times۲\right)+\left(۱\times۳\right)\right)=\frac{۱}{۱۰}\left(۱۵\right)=\frac{۳}{۲}$

از طرفی $\frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۴}=\frac{n+۱}{r+۱}$ که با هم برابرند.

در اینجا دو سؤال مطرح می‌شود. اول این‌که کدام اعداد از مجموعه‌ی $\{۱،۲,...,n\}$ می‌توانند در زیر مجموعه‌های r عضوی، کوچکترین عضو باشند؟ دوم این‌که هر کدام از این کوچکترین عضوها در چند زیر مجموعه وجود دارد. مشاهده می‌شود که زیر مجموعه‌ی $\{n\text{-}r+۱, n\text{-}r+۲, ..., n\}$ دارا ی $n\text{-}(n\text{-}r+۱)+۱=r$ عضو است، و آن زیر مجموعه‌ی r عضوی شامل بزرگترین عضوهای ممکن می‌باشد. پس اعداد $۱،۲,...,n\text{-}r+۱$ تمام اعدادی هستند که می‌توانند در یک زیر مجموعه r عضوی کوچک‌ترین عضو باشند. این جواب سؤال اول، حال عدد $m=۱،۲,...,n\text{-}r+۱$ را فرض کنید. تعداد دفعاتی که m در مجموع ظاهر می‌شود برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی $\{۱،۲,...,n\}$ به‌طوری که m کوچک‌ترین عضو آن زیر مجموعه باشد. و این برابر است با تعداد راه‌های تشکیل یک زیر مجموعه‌ی $(r\text{-}۱)$ عضوی از مجموعه‌ی $\{m+۱,m+۲,...,n\}$. پس تعداد دفعات تکرار m در مجموع برابر است با $\binom{m-n}{r-۱}$ که جواب سؤال دوم است. حال می‌خواهیم ببینیم که رابطه‌ی (۱–۵–۲) چگونه در اثبات مثال (۲–۵–۲) به کار می‌رود.

اثبات. به ازای $m=۱،۲,...,n\text{-}r+۱$ تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی که کوچک‌ترین عضو آنها m باشد برابراست با $\binom{n-m}{r-۱}$. بنابراین S مجموع تمام کوچک‌ترین عضوهای زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی $\{۱،۲,...,n\}$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
S &= ۱\binom{n-۱}{r-۱} + ۲\binom{n-۲}{r-۱} + ۳\binom{n-۳}{r-۱}+\ldots+(n-r+۱)\binom{r-۱}{r-۱} \\
&= \binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۲}{r-۱} + \binom{n-۳}{r-۱}+\ldots+\binom{r-۱}{r-۱} \\
&\qquad + \binom{n-۲}{r-۱} + \binom{n-۳}{r-۱}+\ldots+\binom{r-۱}{r-۱} \\
&\qquad\qquad + \binom{n-۳}{r-۱}+\ldots+\binom{r-۱}{r-۱} \qquad \text{سطر } (n\text{-}r+۱) \\
&\qquad\qquad\qquad +\ldots+\binom{r-۱}{r-۱} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\binom{r-۱}{r-۱}
\end{aligned}$$

اکنون رابطه‌ی(۱-۵-۲) را برای هر ردیف جداگانه به کار می‌بریم خواهیم داشت:

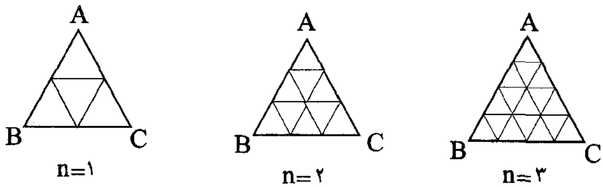
$$S=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r}+\ldots+\binom{r}{r}$$

حال اگر رابطه‌ی (۱-۵-۲) را یک‌بار دیگر به کار ببریم مقدار S برابر با $\binom{n+1}{r+1}$ به دست می‌آید.

از طرفی تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ برابر است با $\binom{n}{r}$. پس میانگین یا واسطه‌ی حسابی این کوچکترین عضوها که برابر است با مجموع، تقسیم بر تعداد. این چنین به‌دست می‌آید:

$$F(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}\cdot\frac{r!(n-r)!}{n!}=\frac{n+1}{r+1}\quad .\blacksquare$$

حال به مثال دیگری توجه می‌کنیم. به ازای هر $n\in N$ ، تقسیم‌بندی n ام مثلث متساوی الاضلاع شکلی است که دو خاصیت زیر را دارا باشد: (۱) هر ضلع آن به $n+1$ قسمت مساوی با n نقطه تقسیم شده باشد. و (۲) داشتن $3n$ پاره خط برای متصل کردن $3n$ جفت نقاطی که بر روی دو ضلع مجاور قرار دارند به‌طوری که تمام پاره‌خط‌ها با ضلع سوم مثلث موازی باشد.این شکل برای $n=1,2,3$ در شکل (۲-۵-۲) نمایش داده شده است.



شکل ۲-۵-۲

حال $g(n)$ را برابر تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که در n امین تقسیم‌بندی مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد، تعریف می‌کنیم. برای $n=۱،۲،۳$ با توجه به شکل به‌دست می‌آید.

$$g(۱)=۳ \qquad و \qquad g(۲)=۱۵ \qquad و \qquad g(۳)=۴۵$$

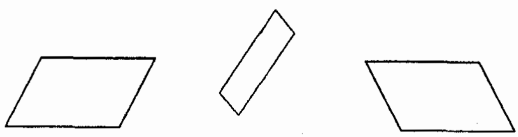
در زیر به حالت کلی $g(n)$ می‌پردازیم.

مثال ۳-۵-۲ به ازای هر $n \in N$، $g(n)$ را محاسبه کنید.

تبصره:

این مسأله که در $[MM]$ نیز یافت می‌شود در مسابقات ریاضی سال ۱۹۹۰ طرح شده که یک جوان ۱۴ ساله‌ی سنگاپوری به نام« لین زیوه » در عرض یک ساعت آن را حل کرده بود. راه حل وی را در زیر می‌آوریم.

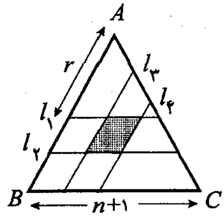
حل. در مثلث سه نوع متوازی‌الاضلاع موجود است.



۱ ۲ ۳

با توجه به تقارن مسأله، تعداد متوازی‌الاضلاع هر نوع با هم برابرند، پس لازم است که فقط تعداد یک نوع آنها را بدانیم مثلاً" نوع اول.

هر متوازی الاضلاع نوع اول از چهار پاره‌خط $l_۱,l_۲,l_۳,l_۴$ تشکیل می‌شود که در شکل ۳-۵-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳-۵-۲

طول هر ضلع مثلث ABC ، $n+1$ واحد است. هرگاه l_1 ، r امین واحد از سمت A باشد برای انتخاب l_2 ، $n+1-r$ حالت وجود دارد. و تعداد راه‌های انتخاب جفت $\{l_3, l_4\}$ برابر است با $\binom{r+1}{2}$. متوازی‌الاضلاع‌های نوع اول برابر است با:

$$\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)\binom{r+1}{2}$$

$$=\binom{2}{2}n+\binom{3}{2}(n-1)+\binom{4}{2}(n-2)+\dots+\binom{n+1}{2}1$$

$$=\left.\begin{matrix}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\\ +\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2}\\ \vdots\\ +\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\\ +\binom{2}{2}\end{matrix}\right\} n \text{ ردیف}$$

$$=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\dots+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}$$ (طبق رابطه‌ی ۱-۵-۲)

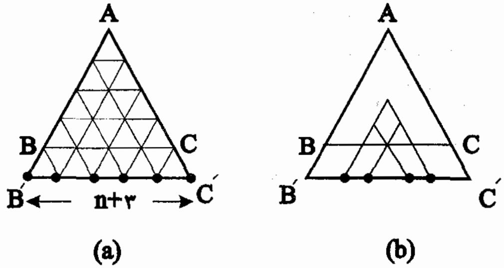
$$=\binom{n+3}{4}$$ (طبق رابطه‌ی ۱-۵-۲)

در نتیجه $g(n)=3\binom{n+3}{4}.$ ■

☜ **تبصره:**

برای محاسبه‌ی $g(n)$ که یک ضریب دو جمله‌ای است، راه‌های ترکیبیاتی ساده و مستقیم بسیاری وجود دارند که نتیجه را اثبات می‌کنند. یکی از آنها را در زیر می‌آوریم: اضلاع AB و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ترتیب تا AB' و AC' امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که بین آنها نسبت روبه‌رو برقرار باشد. $\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{n+۱}{n+۲}$. بنابراین n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC قسمتی از $(n+۱)$ امین تقسیم‌بندی مثلث $A\ B'C'$ است (شکل ۲-۵-۴(a) را ببینید).

با در نظر گرفتن B' و C'، دقیقاً $n+۳$ نقطه روی $B'C'$ وجود دارد که $(n+۱)$ امین تقسیم‌بندی مثلث $AB'C'$ را تشکیل می‌دهند. حال، مشاهده می‌کنیم که هر متوازی‌الاضلاع نوع دوم در n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC، مطابق است بر یک مجموعه‌ی یکتای ۴ عضوی از مجموعه نقاط روی $B'C'$ که در شکل ۲-۵-۴(b) نشان داده شده است. یعنی هر متوازی‌الاضلاع نوع دوم چهار نقطه‌ی مختلف را روی $B'C'$ نمایش می‌دهند و هر چهار نقطه روی $B'C'$ نشانگر یک متوازی‌الاضلاع نوع دوم است.



شکل ۲-۵-٤

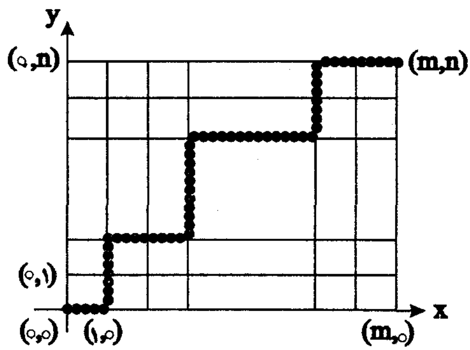
در نتیجه یک تناظر یک‌به‌یک بین متوازی‌الاضلاع‌های نوع دوم در n امین تقسیم‌بندی و زیرمجموعه‌های ۴عضوی از نقاط روی $B'C'$ پیدا می‌شود. پس طبق اصل تناظر یک به یک تعداد متوازی‌الاضلاع‌های نوع دوم در n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های ۴عضوی از $n+۳$ نقطه‌ی روی $B'C'$. که این آخری برابر است با $\binom{n+۳}{۴}$،

پس خواهیم داشت: $g(n)=۳\binom{n+۳}{۴}$ ■.

۶-۲- کوتاهترین مسیرها در شبکه‌های مربعی

نقطه‌ی (a,b) در مختصات x-y نقطه‌ی شبکه‌ای، نامیده می‌شود اگر a و b اعداد صحیحی باشند. شکل ۱-۶-۲ یک شبکه مربعی را در مختصات x-y نشان می‌دهد که شامل $(m+1)\times(n+1)$ نقطه‌ی شبکه‌ای است و یکی از کوتاهترین مسیرها از نقطه‌ی $(0,0)$ به نقطه‌ی (m,n) در شکل نمایش داده شده‌است.

از مثال ۱-۵-۱ به خاطر داریم که تعداد کوتاهترین مسیرها از $(0,0)$ به (m,n) برابر با $\binom{m+n}{m}$ یا $\binom{m+n}{n}$ است.



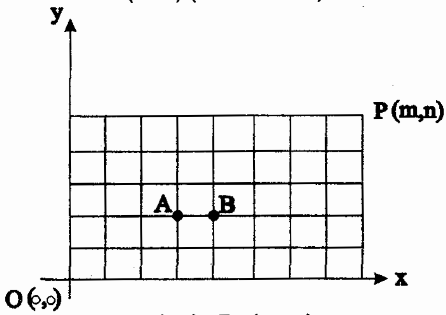
شکل ۱-۶-۲

در این بخش، روش‌های مختلفی را برای شمارش تعداد کوتاهترین مسیرها بین دو نقطه‌ی شبکه‌ای خواهیم دید که با استفاده از آنها می‌توانیم تعداد روابط ترکیبیاتی بین ضرایب دو جمله‌ای به‌دست آوریم. برای شروع، دو مشاهده مفید را که به مثال ۵-۲-۱ ارتباط دارد بیان می‌کنیم.

۱) در شکل ۲-۶-۲، تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از نقطه‌ی $O(0,0)$ به $A(x,y)$ برابر $\binom{x+y}{x}$ است. و کوتاهترین مسیرها برای رفتن از نقطه‌ی $A(x,y)$ به

$P(m,n)$ برابراست با $\binom{(m-x)+(n-y)}{m-x}$. بنابراین تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $O(0,0)$ به $P(m,n)$ که از $A(x,y)$ بگذرد برابر است با:

$$\binom{x+y}{x}\binom{(m-x)+(n-y)}{m-x}$$



A=(x,y) , B=(x+1,y)

شکل ۲-۶-۲

۲) درشکل ۲-۶-۲، تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $O(0,0)$ به $A(x,y)$ برابر است با $\binom{x+y}{x}$ و تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $B(x+1,y)$ به $P(m,n)$ برابر است با $\binom{(m-x-1)+(n-y)}{m-x-1}$ بنابراین تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $O(0,0)$ به $P(m,n)$ طوری که پاره‌خط AB را شامل شود برابر است با:

$$\binom{x+y}{x}\binom{(m-x-1)+(n-y)}{m-x-1}$$

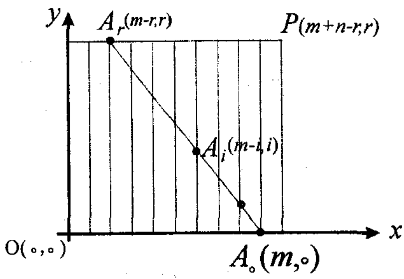
به عنوان اولین مثال، رابطه‌ی واندرموند (۵-۳-۲) را با استفاده از روش‌های شمارش کوتاهترین مسیرها به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱-۶-۲ نشان دهید که:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$$

mو n و r طبیعی هستند و $m,n \geq r$.

اثبات. شبکه‌ی مربعی را که در شکل (۳-۶-۲) نشان داده شده است، در نظر بگیرید.



شکل ۳-۶-۲

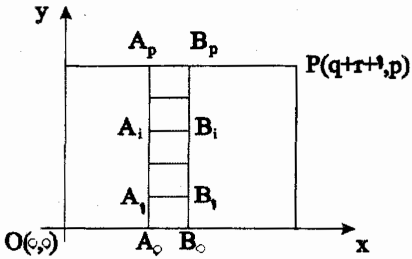
تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $O(0,0)$ به $P(m+n-r,r)$ برابر است با $\binom{m+n-r+r}{r}=\binom{m+n}{r}$.

حال با راه دیگری این تعداد را می‌شماریم. به پاره‌خطی که نقاط $A_0(m,0)$ و $A_1(m-1,1)$ و...و $A_r(m-r,r)$ را در شکل ۳-۶-۲ به هم وصل کرده توجه کنید. بدیهی است که هر کوتاهترین مسیر از $O(0,0)$ به $P(m+n-r,r)$ فقط و فقط از یکی از نقاط $A_i(i=0,1,\ldots,r)$ روی پاره خط می‌گذرد، و تعداد کوتاهترین مسیرها که از A_i می‌گذرند طبق نتیجه‌ی (۱) برابراست با: $\binom{m-i+i}{i}\binom{(m+n-r-m+i)+(r-i)}{r-i}=\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$ طبق اصل جمع رابطه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید. مثال بعدی کاربرد مشاهدهٔ (۲) را نشان می‌دهد.■

مثال ۲-۶-۲ نشان دهید به ازای هر $p,q,r \geq 0$

$$\binom{p+q}{q}\binom{r}{r}+\binom{p+q-1}{q}\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{q}{q}\binom{r+p}{r} = \binom{p+q+r+1}{q+r+1} = \binom{p+q+r+1}{p} \qquad (۱-٦-۲)$$

اثبات. به شبکه‌ای که در شکل ٤-٦-۲ نشان داده است توجه کنید.



$A_i = (r,i)$ و $B_i = (r+1,i)$ و $i = 0,1,\ldots,P$

شکل ٤-۶-۲

تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از $O(0,0)$ به $P(q+r+1,p)$ برابر است با

$$\binom{q+r+1+p}{p}$$

راه دیگر برای شمارش این تعداد به‌صورت زیر است؛ به پاره‌خطهای به طول واحد A_0B_0 و A_1B_1 و... و A_pB_p که $A_i=(r,i)$ و $B_i=(r+1,i)$ و ($i=0,1,\ldots,P$) توجه کنید.خواهیم دید که هر کوتاهترین مسیر از O به P فقط وفقط از یکی از این پاره‌خطها می‌گذرد. پس طبق نتیجه‌ی (۲) تعداد کوتاهترین مسیرها که شامل A_iB_i می‌شود برابر است با:

$$\binom{r+i}{r}\binom{(q+r+۱-r-۱)+(p-i)}{q}=\binom{r+i}{r}\binom{p+q-i}{q}$$

پس طبق اصل، جمع رابطه‌ی (۱-۶-۲) به سادگی به‌دست می‌آید.■

از اینجا به بعد، مجموعه‌ی $N_k=\{۱,۲,\ldots,k\}$ را، که $k\in N$ تعریف می‌کنیم. در مسأله‌ی۸-۱ ، تعداد نگاشت‌های $(n,m\in N)$ $\alpha: N_n \to N_m$ را که شرایط اضافه‌ای داشتند، شمردیم. این نتایج در جدول زیر جمع‌آوری شده‌اند.

$\alpha: N_n \to N_m$	تعداد α
α یک نگاشت است	m^n
α یک به یک باشد $(n\le m)$	$P_n^m=m(m-۱)\ldots(m-n+۱)$
α پوشا باشد $(n\ge m)$	$m!S(m,n)$
α اکیدا" صعودی باشد	$\binom{m}{n}$

هدف بعدی ما به کار بردن روش‌های شمارش کوتاهترین مسیرها برای شمارش دو نوع ویژه و خاص از نگاشت‌ها است.

یک نگاشت $\alpha: N_n \to N_m$ را صعودی گویند هرگاه برای هر $a\le b$ داشته باشیم $\alpha(a)\le\alpha(b)$. اولین مسأله که دربارهٔ آن بحث می‌کنیم شمارش نگاشت‌های صعودی $\alpha: N_n \to N_m$ است.

برای هر نگاشت صعودی $\alpha: N_n \to N_m$ یک کوتاهترین مسیر به نام $R(\alpha)$ از (۱و۱) به $(n+۱,m)$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

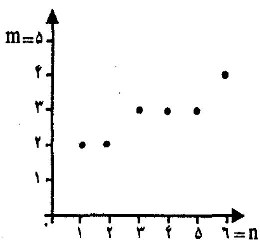
۱)(۱و۱) را به $(1,\alpha(1))$ متصل کنید اگر $1<\alpha(1)$.

۲) به ازای هر $i=1,2,\ldots,n-1$،

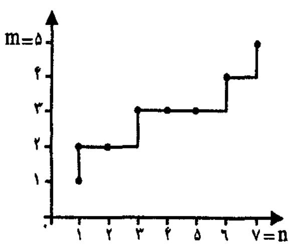
$(i,\alpha(i))$ را به $(i+1,\alpha(i+1))$ متصل می‌کنیم اگر $\alpha(i)=\alpha(i+1)$؛ $(i,\alpha(i))$ را به $(i+1,\alpha(i))$ و $(i+1,\alpha(i))$ را بـه $(i+1,\alpha(i+1))$ متصـل می‌کنیم اگر $\alpha(i)<\alpha(i+1)$.

۳) $(n,\alpha(n))$ را به $(n+1\ \ \alpha(n))$ وصل می‌کنیم اگر $\alpha(n)=m$ $(n,\alpha(n))$ را به $(n+1,\alpha(n))$ و $(n+1,\alpha(n))$ را به $(n+1,m)$ متصل می‌کنیم اگر $\alpha(n)<m$.

برای نمونه، اگر $\alpha: N_6 \to N_5$ یک نگاشت صعودی تعریف شده در شکل داخلی ۵-۶-۲ باشد آنگاه $R(\alpha)$ کوتاهترین مسیر در شکل(ب) ۵-۶-۲ است. اگـر R کوتاهترین مسیر از (۱و۱) به (۷،۵) باشد که در شکل(الف) ۶ -۶-۲ نشـان داده شـده است، پس $R=R(\alpha)$ ، که $\alpha: N_6 \to N_5$ یک نگاشـت صعـودی اسـت کـه در شکل (ب)۶-۶-۲ نشان داده شده است (با توجه به روال بالا).



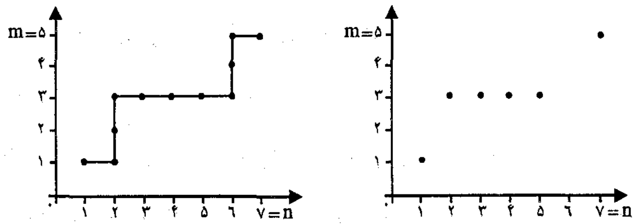
(الف) α



(ب) R(α)

i	$\alpha(i)$
۱	۲
۲	۲
۳	۳
۴	۳
۵	۳
۶	۴

شکل ۵-۶-۲



(الف) R　　(ب) (b) α

i	$\alpha(i)$
۱	۱
۲	۳
۳	۳
۴	۳
۵	۳
۶	۵

شکل ۶-۶-۲

مثال ۳-۶-۲ نشان دهید که تعداد نگاشت‌های صعودی از N_n به N_m $(m,n \in N)$ برابر است با تعداد کوتاهترین مسیرها از نقطه‌ی شبکه‌ای (۱و۱) به نقطه‌ی شبکه‌ای با مختصات $(n+1,m)$ که آن‌هم برابر است با $\binom{n+m-1}{n}$.

اثبات. مجموعه X را شامل تمام نگاشت‌های صعودی $\alpha: N_n \to N_m$ در نظر بگیرید و Y را مجموعه‌ی کوتاهترین مسیرها از نقطه‌ی (۱و۱) به نقطه‌ی $(n+1,m)$ فرض کنید. تابع $f: X \to Y$ را طوری تعریف می‌کنیم که به ازای هر $\alpha \in X$ $f(\alpha) = R(\alpha)$. به راحتی می‌توان تحقیق کرد که f، یک نگاشت دو سویی از X به Y است. بنا براین طبق اصل تناظر یک به یک می‌توان نتیجه گرفت:

$$|X| = |Y| = \binom{(n+1-1)+(m-1)}{n} = \binom{m+n-1}{n} \quad .\blacksquare$$

تبصره:

۱-خواننده باید بفهمد چرا به جای نقطه‌ی شبکه‌ای (n,m) نقطه‌ی $(n+1,m)$ را در اثبات بالا به عنوان نقطه‌ی پایانی در نظر گرفتیم.

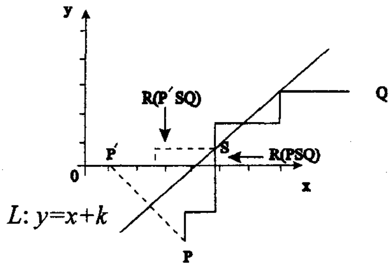
تبصره:

۲- جواب مثال ۳-۶-۲، برابرست با $H_n^m = \binom{m+n-1}{n}$. پس راه دیگری برای یافتن $|X|$ پیشنهاد می‌کنیم. در حقیقت، هر نگاشت صعودی $\alpha: N_n \to N_m$، یک شبه زیر مجموعه‌ی n عضوی $\{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n)\}$ از شبه مجموعه‌ی $M = \{\infty.1, \infty.2, \ldots, \infty.m\}$ است و نیز از هر شبه زیر مجموعه‌ی n عضوی M یک نگاشت صعودی $\alpha: N_n \to N_m$ به دست می‌آید.(بنابراین نگاشت شکل (الف)۵-۶-۲ یک شبه زیر مجموعه‌ی ۶ عضوی {۲/۲، ۳/۳، ۱/۴} از شبه مجموعه‌ی $M = \{\infty.1, \infty.2, \ldots, \infty 5\}$ و نگاشت شکل (ب) ۶-۴-۲ منطبق با {۱/۱،۴/۳،۱/۵} از M است.) این تناظر یک به یک بین نگاشت‌های صعودی $\alpha: N_n \to N_m$ و شبه زیر مجموعه‌های n عضوی شبه مجموعه‌ی $M = \{\infty.1, \infty.2, \ldots, \infty.m\}$ نتیجه می‌دهد که : $|X| = H_n^m$.

حال فرض کنید $N_k^* = \{0\} \cup N_k$. مسأله‌ی بعدی ما، شمارش تعداد نگاشت‌های صعودی $\alpha: N_n \to N_{n-1}^*$ است به طوری که برای هر $a \in N_n$ رابطه‌ی $\alpha(a) < a$ باشد. قبل از هر چیز ما یک نکته‌ی مهم و مفید را دربارهٔ کوتاهترین مسیرها در شبکه که ***قانون قرینه*** نامیده می‌شود، اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم $(k \in Z) L: y = x + k$ یک خط با ضریب زاویه‌ی ۱ در صفحه‌ی مختصات x-y باشد. فرض کنید P و Q دو نقطه شبکه‌ای در یک طرف خط L باشند و P' قرینه‌ی P نسبت به L باشد که در شکل ۷-۶-۲ نشان داده شده است. در این صورت خواهیم داشت:

قانون قرینه (RP). تعداد کوتاهترین مسیرها برای رفتن از P به Q به طوری که با L برخورد داشته باشند برابر است با تعداد کوتاه‌ترین مسیرها برای رفتن از P' به Q.



شکل ۷-۶-۲

اثبات. فرض کنید X مجموعه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها از P به Q باشند به طوری که با خط L برخورد داشته باشند و Y مجموعه‌ی تمام کوتاه‌ترین مسیرها از P' به Q باشد. اگر یک تناظر دو سویی بین X و Y پیدا کنیم آنگاه داریم $|X|=|Y|$.

فرض کنید $R(PSQ)$ یک عضو X باشد که S اولین نقطه‌ی شبکه‌ای است که $R(PSQ)$ در مسیر خود از P به Q با L برخورد می‌کند. (شکل ۷-۶-۲ را ببینید). $R(P'SQ)$ را از دو قسمت (۱)، کوتاه‌ترین مسیر از P' به S که قرینه‌ی قسمتی از مسیر $R(PSQ)$ از P تا S است، و (۲)، کوتاه‌ترین مسیر از S به Q که $R(PSQ)$ شامل آن بود. واضح است که $R(P'SQ)$ یک عضو Y است و به راحتی تناظر زیر قابل تحقیق است.

$$R(PSQ) \rightarrow R(P'SQ)$$

و در حقیقت این یک تناظر دوسویی بین X و Y است. پس $|X|=|Y|$ اصل قرینه به دست می‌آید.■

مثال ۴-۶-۲. نشان دهید که تعداد نگاشت‌های $\alpha: N_n \rightarrow N^*_{n-1}$ ، $(n \in N)$ با شرطی که $\alpha(a) < a$، برابر است با $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

برای نمونـه، اگـر $n=۳$ ، $\frac{۱}{۳+۱}\binom{۶}{۳}=۵$ نگاشـت از $N_۳$ بـه $N_۲^*$ بـا شـرط مثـال وجود دارد که در جدول زیر آمده‌اند.

i	$\alpha_۱(i)$	$\alpha_۲(i)$	$\alpha_۳(i)$	$\alpha_۴(i)$	$\alpha_۵(i)$
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	۱	۱
۳	۰	۱	۲	۱	۲

اثبات. با توجه بـه اثبـات مثـال ۳-۶-۲ نتیجـه می‌شـود کـه تعـداد نگاشـت‌های صعودی $\alpha:N_n \to N_{n-۱}^*$ به طوری که $\alpha(a)<a$ برابر است با تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از (۰،۱) به ($n-۱$ و $n+۱$) به طوری که بـا خـط $y=x$ برخـورد نداشـته باشـد. برای راحتی، $\delta_۱$ را همین تعداد ، $\delta_۲$ راتعداد کل کوتـاه‌ترین مسـیرها بـرای رفتـن از (۰،۱) به ($n-۱$ و $n+۱$) و $\delta_۳$ را تعداد کوتاه‌ترین مسـیرها از (۰،۱)بـه ($n-۱$ ،$n+۱$) نامیم به طوری که با خط $y=x$ برخورد داشته باشد.

واضح است که $\delta_۱=\delta_۲-\delta_۳$ و $\delta_۲=\binom{(n+۱-۱)+(n-۱)}{n}=\binom{۲n-۱}{n}$.

پس کافی است کـه $\delta_۳$ را حسـاب کنیـم. اولاً می‌دانیـم قرینـه‌ی نقطـه‌ی (۰،۱) نسبت به خط $y=x$ نقطه‌ی (۱، ۰) است. پس بنا به اصل قرینه، $\delta_۳$ برابـر اسـت بـا تعداد کوتاه‌ترین مسیرها برای رفتن از (۱، ۰) به ($n-۱$ و $n+۱$):

$$\delta_۳=\binom{(n+۱)+(n-۱-۱)}{n+۱}=\binom{۲n-۱}{n+۱}$$

بنابراین:

$$\delta_۱=\delta_۲-\delta_۳=\binom{۲n-۱}{n}-\binom{۲n-۱}{n+۱}=\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n} \quad ■$$

☜ **تبصره:**

(۱) هم ایدهٔ قضیه قرینه و هم عبارت بالا اساساً متعلق به یک ریاضیدان فرانسوی به نام «دزایر آندره» (۱۹۱۷-۱۸۴۰) است، کسی که آنها را برای حل مسایل موسوم به *مسایل بالوت* در سال ۱۸۸۷ به کار برد. این مسایل را «ژزوف لوئیس فرانکویس برتراند» (۱۹۰۰-۱۸۲۲) مطرح کرده بود. اگر خوانندگان محترم علاقمند به یادگیری نکات جالبی دربارهٔ تاریخچه و مسایل کلی در این زمینه باشند می‌توانند به کتاب [BM] مراجعه کنند.

(۲) چند عدد اول دنباله‌ی $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ یعنی ۱، ۲، ۵، ۱۴، ۴۲، ۱۳۲، ۴۲۹، ۱۴۳۰ هستند، که به آنها *اعداد کاتالان* گویند. بعد از آن که ریاضیدان بلژیکی «اوجن کارلز کاتالان» (۱۸۹۴-۱۸۱۴) رشته‌ای از اعداد را هنگام شمارش تعداد راه‌ها برای قرار دادن پرانتز در بین n عدد جستجو می‌کرد. راه‌های قرار دادن پرانتز در بین n عدد برای $n=۲،۳،۴$ اینگونه است:

یک راه برای $n=2$: (x_1x_2)،

۲ راه برای $n=3$: $((x_1x_2)x_3)$ ، $(x_1(x_2x_3))$

۵ راه برای $n=4$: $(((x_1x_2)x_3)x_4)$، $((x_1(x_2x_3))x_4)$، $((x_1x_2)(x_3x_4))$، $(x_1((x_2x_3)x_4))$؛ $(x_1(x_2(x_3x_4)))$.

مسایل دیگری که به اعداد کاتالان مربوط می‌شود بعداً در فصل ۶ بررسی خواهد شد.

۲-۷- چند خاصیت ضرایب دوجمله‌ای

در بخش قبلی، ما چندین خاصیت و رابطه را بین ضرایب دو جمله‌ای مطالعه کردیم و روش‌های گوناگونی برای به دست آوردن آنها به کار بردیم. در این بخش، تعدادی از روابط و خواص مهم و مؤثر بین ضرایب دو جمله‌ای را بدون اثبات مطرح

خواهیم کرد. اول از همه خاصیت مشروط زیر را بیان می‌کنیم:

۱) به ازای هر عدد زوج طبیعی n داریم:

$$\binom{n}{۰}<\binom{n}{۱}<\dots<\binom{n}{\frac{n}{۲}}>\dots>\binom{n}{n-۱}>\binom{n}{n} \qquad (۲-۷-۱)$$

و به ازای هر عدد فرد طبیعی n:

$$\binom{n}{۰}<\binom{n}{۱}<\dots<\binom{n}{\frac{n-۱}{۲}}=\binom{n}{\frac{n+۱}{۲}}>\dots>\binom{n}{n-۱}>\binom{n}{n} \qquad (۲-۷-۲)$$

(۲)عدد طبیعی $n \geq ۲$ را در نظر بگیرید« مان وشانکس» [MS] نشان دادند:

n عدد اول است، اگر وفقط اگر $n|\binom{n}{r}$ به ازای تمام r=۱،۲،...، n-۱

اخیرا" این نتیجه توسط **ز.هاو** ثابت شده است. که عدد طبیعی $n > ۲$ اول است

اگروفقط اگر $n\left|\binom{n}{۶k\pm ۱}\right.$

به ازای هر k با شرط $۱\leq k \leq \left[\frac{\sqrt{n}}{۶}\right]$ ([x] بزرگترین عدد صحیح تعریف می‌شود که از عدد حقیقی x تجاوز نکند.)

(۳)برای $a,b,c \in z$ می‌نویسیم $a \equiv b$ (پیمانه‌ی c) اگروفقط اگر $c|a$-b . تمام نتایج زیر متعلق به ریاضیدان فرانسوی به نام «ای.لوکاس» (۱۸۹۱-۱۸۴۲)بوده است.

فرض کنید P یک عدد اول باشد. پس خواهیم داشت.

(الف) به ازای هر عدد طبیعی n رابطه‌ی (پیمانه‌ی P) $\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right]$ برقرار است.

(ب) به ازای هر عدد طبیعی r با شرط $۱ \leq r \leq p-۱$، (پیمانه‌ی p) $\binom{p}{r} \equiv ۰$

(ج) به ازای هر عدد طبیعی r با شرط $۲ \le r \le p-۱$، (پیمانه‌ی p) $\binom{p+۱}{r} \equiv ۰$

(د) به ازای هر عدد طبیعی r با شرط $۰ \le r \le p-۱$، (پیمانه p) $\binom{p-۱}{r} \equiv (-۱)^r$

(ه) به ازای هر عدد طبیعی r باشرط $۰ \le r \le p-۲$،

$$\binom{p-۲}{r} \equiv (-۱)^r(r+۱) \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

(و) برای هر عدد طبیعی r باشرط $۰ \le r \le p-۳$،

$$\binom{p-۳}{r} \equiv (-۱)^r\binom{r+۲}{۲} \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

(۴) عدد اول p را در نظر بگیرید، همیشه یک n عضو N^* پیدا می‌شود که $P \nmid \binom{n}{r}$ که تساوی به ازای p-۱ و....و۲و۱و ۰ =n دست می دهد.(به خواص (د) و (ه) توجه کنید). به غیر از این جواب‌ها، جواب‌های دیگری نیز وجود دارد. عدد اول p را در نظر بگیرید و اعضای مجموعه‌ی زیر را مشخص کنید.

$$A = \{n \in N | P \nmid \binom{n}{r},\ r = ۰,۱,\dots,n\}$$

بر اساس منبع هانس‌برگر $[H۲]$، این مساله توسط دو ریاضیدان هندی با نام‌های «م.ر. رایکار» و« م.ر.مداک» در سال ۱۹۷۶ مطرح و حل شده است. آنها ثابت کردند که $n \in A$ اگروفقط اگر $n = kp^m - ۱$

که m عدد صحیح نامنفی است و k=۱،۲،...،p-۱

(۵) اعداد طبیعی r, n و عدد اول p را در نظر بگیرید. n , r را بر حسب توان‌های p به صورت زیر می‌نویسیم:

$$n = n_۰ + n_۱p + n_۲p^۲ + \dots + n_k p^k,$$

$$r = r_۰ + r_۱p + r_۲p^۲ + \dots + r_k p^k,$$

که در آن k یک عدد نامنفی است و $n_i, r_i \in \{۰,۱,\dots,p-۱\}$ (i= ۰ ،۱،...،k) در سال ۱۷۸۷ « لوکاس» نتیجه‌ی مهم زیر را اثبات کرد:

$$\binom{n}{r} \equiv \binom{n_۰}{r_۰}\binom{n_۱}{r_۱}\dots\binom{n_k}{r_k} \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

در حالت خاص اگر $p=۲$ و n و r را در مبنای ۲ بنویسیم:

$$n=(n_k n_{k-۱}\dots n_۱ n_۰)_۲$$
$$r=(r_k r_{k-۱}\dots r_۱ r_۰)_۲$$

که $n_i\in\{۰,۱\}$ و r_i ($i=۰$ ،۱،...،k) نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

(۲-۷-۳) $\binom{n}{r}$ فرد است اگروفقط اگر $n_i\ge r_i$ ($i=۰$ ،۱،...،k)

برای مثال، فرض کنید $a=۱۱=(a_۳a_۲a_۱a_۰)_۲=(۱۰۱۱)_۲$ و $b=۹=(b_۳b_۲b_۱b_۰)=(۱۰۰۱)_۲$ و $c=۶=(c_۳c_۲c_۱c_۰)=(۰۱۱۰)_۲$. چون $a_i\ge b_i$ به ازای $i=۰$ ،۱،۲،۳، پس $\binom{a}{b}=\binom{۱۱}{۹}$ فرد است. و چون $a_۲<c_۲$ پس $\binom{a}{c}=\binom{۱۱}{۶}$ زوج است.

(۶) بر اساس منبع هانس برگر $[H۱]$، مسأله زیر توسط فاین[F] بررسی و حل شده است. عدد ثابت $n\in N$ را در نظر بگیرید، چند تا از ضرایب دو جمله‌ای در ردیف n ام مثلث پاسکال فرد هستند. ما نتیجه (۳-۷-۲)را برای حل این سوال به کار می‌بریم.

عدد n را می‌توان در مبنای دو بصورت $n=(n_k n_{k-۱}\dots n_۱ n_۰)_۲$ نوشت. فرض کنید $w(n)=\sum_{i=۰}^{k} n_i$، که برابر با تعداد ۱ها در شبه مجموعه‌ی $\{n_۰,n_۱,\dots,n_k\}$ است. عدد صحیح r را با شرط $۰\le r\le n$ در نظر بگیرید. r را در مبنای دو به صورت مقابل بنویسید: $r=(r_k r_{k-۱}\dots r_۱ r_۰)_۲$. طبق نتیجه‌ی (۳-۷-۲)، $\binom{n}{r}$ فرد است اگروفقط اگر $r_i\le n_i$. برای این منظور $r_i=۰$ اگر $n_i=۰$ و $r_i\in\{۰,۱\}$ اگر $n_i=۱$. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب r، $۲^{w(n)}$است. بنابراین در پایان تعداد ضرایب دو جمله‌ای فرد در ردیف n ام مثلث پاسکال را $۲^{w(n)}$ به دست آوریم.

به عنوان مثال $n=۱۱=(۱۰۱۱)_۲$، پس از میان ۱۲ ضریب دو جمله‌ای که در

یازدهم مثلث پاسکال قرار دارند، $۸ = ۲^۳$ تا ضریب دو جمله‌ای زیر فرد هستند:

$$\binom{۱۱}{۸} = \binom{۱۱}{۳} = ۱۶۵ \text{ و } \binom{۱۱}{۹} = \binom{۱۱}{۲} = ۵۵ \text{ و } \binom{۱۱}{۱۰} = \binom{۱۱}{۱} = ۱۱ \text{ و } \binom{۱۱}{۱۱} = \binom{۱۱}{۰} = ۱$$

۸-۲- ضرایب چند جمله‌ای و قضیه‌ی چند جمله‌ای

با جانشین کردن $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب به جای x و y بسط دو جمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x_۱ + x_۲)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} x_۱^r x_۲^{n-r}$$

طبیعتا" خواست ما این است که ضرایب را در بسط حاصل‌ضرب عمومی‌تر زیر به دست آوریم:

$$(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_m)^n \qquad (۲-۸-۱)$$

که در آن $n,m \in N$ و $m \geq ۲$. برای انجام این کار، اجازه دهید اول خانواده‌ای از اعداد را که ممکن است در گسترش ضرایب دو جمله‌ای مورد توجه قرار گیرد، معرفی کنیم. تعریف می‌کنیم :

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, \ldots, n_m} \qquad (۲-۸-۲)$$

که تعداد راه‌های توزیع n شی متمایز داخل m جعبه‌ی متمایز به طوری که $n_۱$ تعداد اشیا در جعبه‌ی اولی، $n_۲$ تعداد اشیا در جعبه‌ی دومی، ... و n_m تعداد اشیا در جعبه‌ی m امی است و $n_m, \ldots, n_۲, n_۱, m, n$ اعداد صحیح نامنفی هستند و در شرط

$$n_۱ + n_۲ + \ldots + n_m = n \qquad (۲-۸-۳)$$

صدق می‌کنند.

دربارهٔ عدد (۲-۸-۲) وقتی $m=۲$ باشد چه می‌توان گفت؟ چون $\binom{n}{n_۱}$ راه برای

انتخاب n_1 شی از n شی مختلف و قرار دادن آنها در جعبه‌ی اول داریم و یک راه برای قرار دادن $n_2 = n - n_1$ شیء باقیمانده در جعبه‌ی دوم. می‌بینیم که $\binom{n}{n_1,n_2}$ همان ضریب دو جمله‌ای معمولی است.

در حقیقت اعداد به فرم (۲-۸-۲) در حالت کلی قابل بیان به صورت حاصل‌ضرب تعدادی ضرایب دو جمله‌ای هستند. از n شی متمایز :

$\binom{n}{n_1}$راه برای انتخاب n_1 شی و قرار دان آنها در جعبه‌ی اولی،

$\binom{n-n_1}{n_2}$ راه برا ی انتخاب n_2 شی از اشیا باقیمانده و قرار دادن آنها در جعبه‌ی دومی،

⋮

$\binom{n-(n_1+n_2+...+n_{m-2})}{n_{m-1}}$ راه برای انتخاب n_{m-1} شیء از اشیاء باقیمانده و قرار دادن آنها در جعبه‌ی $(m-1)$ امی

و $\binom{n-(n_1+...+n_{m-1})}{n_m} = 1$ راه را برای قرار دادن اشیا باقیمانده در جعبه‌یm امی.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_m} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+...+n_{m-1})}{n_m} \qquad (۲-۱-۴)$$

توجه داریم بنا به اثبات ارایه شده در بخش ۶-۱ حاصلضرب سمت راست تساوی (۴-۸-۲) برابر است با $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}$ و داریم:

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!} \qquad (۲-۸-۵)$$

اکنون نقشی را که خانواده اعداد(۲-۸-۲) در حاصل‌ضرب (۱-۸-۲) ایفاء

خواهند کرد مشاهده می‌کنیم.

در بسط حاصل‌ضرب،

$$(x_1 + x_2+\ldots+x_m)^n = \underbrace{(x_1 + x_2+\ldots+x_m)\ldots(x_1 + x_2+\ldots+x_m)}_{n}$$

از هر کدام از n عامل یک متغیر x_i را انتخاب می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم. پس هر عبارت در بسط به شکل زیر است:

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m} \qquad (۶-۸-۲)$$

که اعداد $n_1,n_2,\ldots,n_m$ اعداد صحیح نامنفی هستند و در شرط $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ صدق می‌کنند. چنانچه عبارت‌های متشابه با هم جمع شوند، آنگاه ضریب عبارت (۶-۸-۲) پیدا می‌شود. فرض کنید A مجموعه‌ی راه‌هایی باشد که عبارت (۶-۸-۲) می‌تواند شکل بگیرد و B مجموعه‌ی راه‌های توزیع n شیء متمایز داخل m جعبه‌ی متمایز باشد به نحوی که به ازای هر i=۱،۲،...،n، n_i شیء داخل جعبه‌ی i ام قرار گیرد و $\sum_{i=0}^{m} n_i = n$ ادعا می‌کنیم که $|A|=|B|$. تابع $f: A \to B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، برای هر عدد به شکل $a = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$ که عضو A باشند، $f(a)$ را تعداد راه‌های قرار دادن n_i شیء در جعبه i(i را منطبق بر x_i در نظر بگیرید) تعریف می‌کنیم. بدیهی است که f یک تابع دوسویی از A به B است و بنابراین $|A|=|B|$ خواهد بود.

پس بحث را پایان می‌دهیم با این نتیجه که ضرایب عبارت (۶-۸-۲) در بسط برابرند با

$$|A|=|B|=\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}$$

از ترکیب این رابطه و رابطه‌ی (۵-۸-۲) به حالت کلی‌تر و عمومی قضیه‌ی دو جمله‌ای می‌رسیم که اولین بار توسط« ج- وی- لایبنیتز» (۱۷۱۶-۱۶۴۶) فرمول بندی شده و سپس توسط« جان برنولی» (۱۷۴۸-۱۶۶۷) اثبات شد.

قضیه‌ی ۱-۸-۲ (قضیه‌ی چند جمله‌ای)

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_m\right)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$$

که مجموع برای تمام mتایی‌های $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ از اعداد صحیح نامنفی با شرط $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ و $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$ حساب می‌شود.

مثال ۱-۸-۲ برای حالتی که $n=4$ و $m=3$ باشدطبق قضیه‌ی ۱-۸-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
&\left(x_1 + x_2 + x_3\right)^4 = \\
&\binom{4}{4,0,0} x_1^4 + \binom{4}{3,1,0} x_1^3 x_2 + \binom{4}{3,0,1} x_1^3 x_3 \\
&+ \binom{4}{2,2,0} x_1^2 x_2^2 + \binom{4}{2,1,1} x_1^2 x_2 x_3 + \binom{4}{2,0,2} x_1^2 x_3^2 \\
&+ \binom{4}{1,3,0} x_1 x_2^3 + \binom{4}{1,2,1} x_1 x_2^2 x_3 + \binom{4}{1,1,2} x_1 x_2 x_3^2 \\
&+ \binom{4}{1,0,3} x_1 x_3^3 + \binom{4}{0,4,0} x_2^4 + \binom{4}{0,3,1} x_2^3 x_3 \\
&+ \binom{4}{0,2,2} x_2^2 x_3^2 + \binom{4}{0,1,3} x_2 x_3^3 + \binom{4}{0,0,4} x_3^4
\end{aligned}$$

$$= x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 4x_1^3x_3 + 6x_1^2x_2^2 + 12x_1^2x_2x_3 + 6x_1^2x_3^2$$
$$+4x_1x_2^3 + 12x_1x_2^2x_3 + 12x_1x_2x_3^2 + 4x_1x_3^3 + x_2^4$$
$$+4x_2^3x_3 + 6x_2^2x_3^2 + 4x_2x_3^3 + x_3^4$$

بخاطر قضیه‌ی ۱-۸-۲ اعداد به شکل (۲-۸-۲) را معمولاً" ضرایب چند جمله‌ای می‌نامند. از آنجایی که ضرایب چند جمله‌ای حالت کلی‌تر ضرایب دوجمله‌ای هستند، انتظار می‌رود بعضی از خواص ضرایب دو جمله‌ای در ضرایب چند جمله‌ای نیز موجود باشد.

این قضیه را با مختصر بحثی در این مورد خاتمه می‌دهیم.

(۱) رابطه‌ی $\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n-n_1}$ را برای ضرایب دوجمله‌ای می‌توان بدین‌گونه نوشت: $\binom{n}{n_1,n_2} = \binom{n}{n_2,n_1}$ در اینجا $n = n_1 + n_2$. با توجه به رابطه‌ی (۵-۸-۲) به راحتی می‌توان دید که در حالت کلی:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_m} = \binom{n}{n_{\alpha(1)}, n_{\alpha(2)}, \ldots, n_{\alpha(m)}} \qquad (۲\text{-}۸\text{-}۷)$$

که $\{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(m)\} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

(۲) خاصیت $\binom{n}{n_1} = \binom{n-1}{n_1-1} + \binom{n-1}{n_1}$ برای ضرایب دو جمله‌ای رامی‌توان نوشت:

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1}$$

و در حالت کلی داریم: (۸-۸-۲)

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \binom{n-1}{n_1-1,n_2,\ldots,n_m} + \binom{n-1}{n_1,n_2-1,\ldots,n_m} + \ldots$$
$$+\binom{n-1}{n_1,n_2,\ldots,n_m-1} \qquad (۲\text{-}۸\text{-}۸)$$

(۳) برای ضرایب دوجمله‌ای داریم $\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}=۲^n$. با در نظر گرفتن $x_۱=x_۲=\ldots=x_m=۱$ در قضیه‌ی چند جمله‌ای داریم:

$$\sum\binom{n}{n_۱,n_۲,\ldots,n_m}=m^n \qquad (۹\text{–}۸\text{–}۲)$$

که مجموع برای تمام m تایی‌های $(x_۱,x_۲,\ldots,x_m)$ از اعداد صحیح نامنفی با شرط $\sum_{i=۱}^{m}n_i=n$ حساب می‌شود.

رابطه‌ی (۹–۸–۲) به سادگی بیان می‌کند که مجموع ضرایب در بسط $(x_۱+x_۲+\ldots+x_m)^n$ برابر است با m^n. بنابراین در **مثال ۱–۸–۲**، مجموع ضرایب در بسط $(x_۱+x_۲+x_۳)^۴$ برابر است با $۸۱=۳^۴$.

(۴) در بسط دو جمله‌ای $(x_۱+x_۲)^n=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x_۱^r x_۲^{n-r}$، تعداد عبارت‌های متمایز برابر $n+۱$ است. عبارت‌های متمایز که در بسط $(x_۱+x_۲+x_۳)^۴$ به دست آمده‌اند در زیر نشان داده شده است.

$$x_۱^۴ \to \{۴\times x_۱\}$$
$$x_۱^۳x_۲ \to \{۳\times x_۱,x_۲\}$$
$$x_۱^۳x_۳ \to \{۳\times x_۱,x_۳\}$$
$$x_۱^۲x_۲^۲ \to \{۲\times x_۱,۲\times x_۲\}$$
$$x_۱^۲x_۲x_۳ \to \{۲\times x_۱,x_۲,x_۳\}$$
$$x_۱^۲x_۳^۲ \to \{۲\times x_۱,۲\times x_۳\}$$
$$x_۱^۲x_۲^۲ \to \{۲\times x_۱,۲\times x_۲\}$$
$$x_۱x_۲^۲x_۳ \to \{x_۱,۲\times x_۲,x_۳\}$$
$$x_۱x_۲x_۳^۲ \to \{x_۱,x_۲,۲\times x_۳\}$$
$$x_۱x_۳^۳ \to \{x_۱,۳\times x_۳\}$$
$$x_۲^۴ \to \{۴\times x_۲\}$$

$$x_2^3 x_3 \to \{3 \times x_2, x_3\}$$
$$x_2^2 x_3^2 \to \{2 \times x_2, 2 \times x_3\}$$
$$x_2 x_3^3 \to \{x_2, 3 \times x_3\}$$
$$x_3^4 \to \{4 \times x_3\}$$

مشاهده می‌شود هر کدام از آنها یک شبه زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی از شبه مجموعه‌ی $M = \{\infty . x_1, \infty . x_2, \infty . x_3\}$ است و بر عکس، که در سمت راست فلش‌های بالا نشان داده شده‌اند. بنابراین با توجه به اصل تناظر یک به یک، تعداد عبارت‌های متمایز در بسط $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ برابر است با تعداد شبه زیر مجموعه‌های ۴ عضوی شبه مجموعه‌ی M، که برابر است با: $H_4^3 = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$. در حالت کلی نیز قابل اثبات است که (مسأله‌ی (۶۲-۲) را ببینید):

تعداد عبارت‌های متمایز در بسط $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ برابر است با $H_n^m = \binom{n+m-1}{n}$.

در حالت خاص، برای عبارت دوجمله‌ای، داریم $H_n^2 = \binom{2+n-1}{n} = n+1$، همان چیزی که قبلاً به دست آورده بودیم.

(۵) از روابط (۱-۷-۲) و (۲-۷-۲) داریم که برای عدد مثبت n، بیشترین مقدار ضرایب دو جمله‌ای $\binom{n}{r}$ به ازای $r = 0$، ۱،...،n برابر است با :

$$\begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{برای } n \text{ های زوج} \\ \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} & \text{برای } n \text{ های فرد} \end{cases}$$

در مورد بیشترین مقدار ضرایب چند جمله‌ای $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_m}$ چه می‌توان گفت؟ این مساله به تازگی توسط« وو» [W] حل شده است. برای $m,n \geq 2$، در نظر بگیرید:

$$M(n,m)=\max\left\{\binom{n}{n_1,n_2,...,n_m}\middle| n_i \in N^* \ , \ \sum_{i=1}^{m} n_i = n\right\}$$

حالت اول: $m|n$

فرض کنید $n=mr$ به ازای $r \in N$. پس $M(n,m)=\binom{n}{r,r,...,r}=\frac{n!}{(r!)^m}$ و $\binom{n}{r,r,...,r}$ تنها عبارتی است که بیشترین مقدار را دارد.

حالت دوم: $m \nmid n$

فرض کنید $n=mr+k$ که $r,k \in N$ با شرط $1 \leq k \leq m-1$. پس

$$M(n,m)=\binom{n}{r,r,...,r \ , \ (r+1),(r+1),...,(r+1)}$$

$$=\frac{n!}{(r!)^{m-k}((r+1)!)^k}=\frac{n!}{(r+1)^k(r!)^m}$$

و $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_m}$، که در آن $\{n_1,n_2,\dots,n_m\}=\{(m-k).r, \ \ k.(r+1)\}$

$\binom{m}{k}$عبارتی است که بیشترین مقدار را می‌پذیرند.

برای نمونه در مثال ۱-۸-۲ داریم:

$r=1$ و $k=1$ و $m=3$ و $n=4$

بنابراین بزرگترین ضریب برابر است با

$$M(۴,۳) = \frac{۴!}{۲!(۱!)^۲} = ۱۲$$

که توسط $\binom{m}{k} = ۳$ عبارت زیر به آن می‌توان رسید:

$$\binom{۴}{۱,۱,۲} \;,\; \binom{۴}{۱,۲,۱} \;,\; \binom{۴}{۲,۱,۱}$$

❖ تمرینات فصل دوم

۱- عدد ۴ را می‌توان به صورت مجموع یک یا چند عدد صحیح مثبت بیان کرد. این کار را به ۸ صورت می‌توان انجام داد،

$$۴=۱+۳=۳+۱=۲+۲=۱+۱+۲=۱+۲+۱=۲+۱+۱=۱+۱+۱+۱$$

در حالت کلی برای $n \in N$، به چند طریق می‌توان n را به صورت بالا بیان کرد؟

۲- تعداد اعداد $۲n$ رقمی در مبنای ۲ را به طوری که تعداد صفرها در n رقم اول برابر تعداد یک‌ها در n رقم آخر باشد، به دست آورید.

۳- فرض کنید $m,n,r \in N$ باشد. تعداد شبه زیر مجموعه‌های r عضوی شبه مجموعه‌ی $M=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n,m.b\}$ را با هر شرط زیر به دست آورید:

الف) $r \le m, r \le n$;

ب) $n \le r \le m$;

ج) $m \le r \le n$;

۴- ده نقطه روی یک دایره مشخص شده‌اند. تعداد چند ضلعی‌های محدب متمایز با سه ضلع یا بیشتر که رؤوس آن تعدادی یا تمام نقاط روی دایره باشند را بیابید.(دو چند ضلعی متمایزند مگر این که تمام رؤوسشان منطبق باشند).(مسابقات ریاضی آمریکا،۱۹۸۹/۲)

۵- ضریب $x^۵$ را در بسط $(۱+x+x^۲)^۸$ بیابید.

۶- ضریب $x^۶$ را در بسط $(۱+x+x^۲)^۹$ بیابید.

۷- ضریب $x^{۱۸}$ را در بسط $(۱+x^۳+x^۵+x^۷)^{۱۰۰}$ بیابید.

۸- ضریب $x^{۲۹}$ را در بسط $(۱+x^۵+x^۷+x^۹)^{۱۰۰۰}$ را بیابید.

۹- در بسط $(1+x+x^{2}+\ldots+x^{10})^{3}$ ضریب عبارات زیر را بیابید.

الف) x^{5}

ب) x^{8}

۱۰- مجموعه‌ی n عضوی X را، ($n\in N$)، در نظر بگیرید. فرض کنید $E=\{A\subseteq X|\ |A|$ فرد باشد$\}$ و $O=\{A\subseteq X|\ |A|$ زوج باشد$\}$. با برقرار کردن یک تناظر دو سویی بین O و E ؛ نشان دهید $|O|=|E|$.

۱۱- تعداد تبدیل‌های شبه مجموعه‌ی $\{m\times 1, n\times 2\}$ را بیابید که در آنها دقیقاً m بار "۱" آمده باشد.

۱۲- فرض کنید $1\le r\le n$ و تمام زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ را در نظر بگیرید. هر کدام از این زیر مجموعه‌ها دارای یک بزرگترین عضو است. $H(n,r)$ را میانگین حسابی این بزرگترین عضوها تعریف می‌کنیم. $H(n,r)$ را پیدا کرده و آنرا به ساده‌ترین صورت در آورید(مثال۲-۵-۲ را ببینید)

۱۳- به ازای $n\in N$، $\Delta(n)$ را تعداد مثلث‌های XYZ در n امین تقسیم بندی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC (شکل ۲-۵-۲) که در آن $YZ||BC$ و X و A در یک طرف ضلع YZ قرار دارند، تعریف می‌کنیم. مقدار عددی $\Delta(n)$ را پیدا کنید. (برای دیدن مسایلی از این قبیل ، مقاله م.ای.لارنس، مثلث‌های بی‌انتها- تاریخچه‌ی مسایل شمارشی، مجله‌ی ریاضی دانشگاهی ۲۰۰ ، ۱۹۸۷؛ ۳۷۸-۳۷۰ را ببینید).

۱۴- ضرایب x^{n} و $x^{n+r}(1\le r\le n)$ را در عبارت زیر به دست آورید.

$$(1+x)^{2n}+x(1+x)^{2n-1}+x^{2}(1+x)^{2n-2}+\ldots+x^{n}(1+x)^{n}$$

۱۵- چند جمله‌ای بر حسب x به صورت زیر تعریف شده است.

$$a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\ldots+a_{2n}x^{2n}=(x+2x^{2}+\ldots+nx^{n})^{2}$$

نشان دهید:

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$$

۱۶- نشان دهید:

$$P_r^r + P_r^{r+1} + \dots + P_r^{2r} = P_r^{2r+1}$$

که در آن r یک عدد صحیح نامنفی است.

۱۷- $r,n,m \in N^*$ را با شرط $r<n$ در نظر گرفته نشان دهید:

$$P_r^n + P_r^{n+1} + \dots + P_r^{n+m} = \frac{1}{r+1}(P_{r+1}^{n+m+1} - P_{r+1}^n)$$

(مسأله‌ی ۳۵-۲ را ببینید)

۱۸- نشان دهید که:

(الف) به ازای اعدادطبیعی زوج n،

اگر $0 \le i < j \le \frac{n}{2}$، $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$

اگر $\frac{n}{2} \le i < j \le n$، $\binom{n}{i} > \binom{n}{j}$

(ب) برای اعدادطبیعی فرد n،

اگر $0 \le i < j \le \frac{1}{2}(n-1)$، $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$

اگر $\frac{1}{2}(n+1) \le i < j \le n$، $\binom{n}{i} > \binom{n}{j}$

۱۹- هر کدام از روابط زیر را با سه روش اثبات کنید.

(الف) $\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$

(ب) $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

۲۰- یک روش ترکیباتی برای اثبات رابطه‌ی زیرا ارایه دهید.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

۲۱- نشان دهید برای $n\in N^*$

$$\sum_{r=۰}^{n}\frac{(۲n)!}{(r!)^۲((n-r)!)^۲}=\binom{۲n}{n}^۲$$

۲۲- با استفاده از رابطه‌ی $(۱-x^۲)^n=(۱+x)^n(۱-x)^n$ ، نشان دهید که به ازای هر $m\in N^*$ با شرط $m<n$ ،

$$\sum_{i=۰}^{۲m}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{n}{۲m-i}=(-۱)^m\binom{n}{m}$$

و

$$\sum_{i=۰}^{۲m+۱}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{n}{۲m+۱-i}=۰$$

و نتیجه بگیرید:

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}^۲=\begin{cases}(-۱)^{\frac{n}{۲}}\binom{n}{\frac{n}{۲}} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ ۰ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

۲۳- مقدار مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$S=m!+\frac{(m+۱)!}{۱!}+\frac{(m+۲)!}{۲!}+\ldots+\frac{(m+n)!}{n!}$$

(مسابقه‌ی ریاضی بیجینگ(۱۹۶۲))

با فرض $m,n\in N^*$ ، روابطی که در مسایل ۴۳-۲۴ آمده را اثبات کنید.

۲۴- $\sum_{r=0}^{n} 3^r \binom{n}{r} = 4^n$

۲۵- $\sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} = (n+2)2^{n-1}$

۲۶- $\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1}\binom{n}{r} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

۲۷- $\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n}{r} = \frac{1}{n+1}$

۲۸- $\sum_{r=m}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m} \quad (m \le n)$

۲۹- $\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{n}{r} = \begin{cases} (-1)^m \binom{n-1}{m} & m < n \\ 0 & m = n \end{cases}$

۳۰- $\sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{m}$

۳۱- $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r r\binom{n}{r} = 0$

۳۲- $\sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n-1}{r} = 2^{2n-2}$

۳۳- $\sum_{r=0}^{n} \binom{2n}{r} = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$

۳۴- $\sum_{r=0}^{n} r\binom{2n}{r} = n2^{2n-1}$

۳۵- $\sum_{r=k}^{m} \binom{n+r}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$ $(k \in N^*$ و $k \le m)$

۳۶- $\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}\binom{n-1}{r-1} == \binom{2n-1}{n-1}$

۳۷- $\sum_{r=m}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{r}{m} = \begin{cases}(-1)^m & m=n\\ 0 & m<n\end{cases}$

۳۸- $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)^2\binom{n-1}{n-r} = n(n-1)2^{n-3}$ (مساله‌ی(الف) ۴۷-۲ را ببینید)

۳۹- $\sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{r}^2 = \frac{1}{2}[\binom{4n}{2n}+\binom{2n}{n}^2]$

٤۰- $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2\binom{r}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$ $(0 \le k \le n$ و $k \in N^*)$

٤۱- $\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{m+r}{n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{m}{r}2^r$

٤۲- $\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{n}{r}\binom{p+r}{m+n} = \binom{p}{m}\binom{p}{n}$ $(p \ge m,n$ و $p \in N)$

(لی‌شانلن، ۱۸۸۲-۱۸۱۱)

٤۳- $\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\binom{n}{r}\binom{p+m+n-r}{m+n} = \binom{p+m}{m}\binom{p+n}{n}$ $(p \in N)$

(لی‌شانلن)

٤٤- روابط زیر را با استفاده از کوتاه‌ترین مسیر در شبکه اثبات کنید.

(الف) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = 2^n$

(ب) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}$

٤۵- با استفاده از روش یافتن تعداد کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌ی مربعی رابطـه‌ی زیـر را اثبات کنید.

$$\binom{p}{q}\binom{r}{0}+\binom{p-1}{q-1}\binom{r+1}{1}+\ldots+\binom{p-q}{0}\binom{r+q}{q} = \binom{p+r+1}{q}$$

٤۶- یک اثبات ترکیبیاتی برای رابطه‌ی زیر بیان کنید.

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n.2^{n-1}$$

۴۷- فرض کنید $n \in N$ نشان دهید:

(الف) $$\sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

(پاتنام، ۱۹۶۲)

(ب) $$\sum_{r=1}^{n} r^3\binom{n}{r} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

(ج) $$\sum_{r=1}^{n} r^4\binom{n}{r} = n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}$$

۴۸- **(الف)** به ازای $k \in N$ و r ثابت کنید.

$$r^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(r-1)^{k-i}$$

(ب) به ازای r و $k \in N$ تعریف می‌کنیم:

$$R(n,k) = \sum_{r=1}^{n} r^k\binom{n}{r}$$

نشان دهید:

$$R(n,k) = n.\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}R(n-1,j)$$

تبصره:

دو معلم چینی " وی گوژن" و "وانگ کای" (۱۹۸۸) نشان دادند که

$$\sum_{r=1}^{n} r^k\binom{n}{r} = \sum_{i=1}^{k} S(k,i).\, P_i^n.2^{n-i}$$

که درآن $k \le n$ و $S(k,i)$ اعداد استرلینگ نوع دوم هستند.

۴۹- ثابت کنید که:

$$\sum_{r=۱}^{n}\frac{۱}{r}\binom{n}{r}=\sum_{r=۱}^{n}\frac{۱}{r}(۲^{r}-۱)$$

۵۰- برای رابطه‌ی زیر دو اثبات مختلف ارایه دهید:

$$\sum_{r=۱}^{n}r\binom{n}{r}^{۲}=n\binom{۲n-۱}{n-۱}\qquad(n\in N)$$

۵۱- فرض کنید p یک عدد اول باشد. به ازای هر r با شرط $۱\le r\le p-۱$ نشان دهید:

$$\binom{p}{r}\equiv ۰\ (\text{پیمانه‌ی } p)$$

سپس نتیجه بگیرید:

$$(۱+x)^{p}\equiv(۱+x^{p})\ (\text{پیمانه‌ی } p)$$

۵۲- فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد. نشان دهید که

$$\binom{۲p}{p}\equiv ۲\ \ (\text{پیمانه‌ی } p)$$

۵۳- فرض کنید p ,n ,m اعداد صحیح با شرط $۱\le p\le m\le n$ باشند.

(الف) تعداد نگاشت‌های $f:N_n\to N_m$ با شرط $|f(N_n)|=p$ را بر حسب $S(n,p)$ بیان کنید.

(ب) تعداد نگاشت‌های $f:N_n\to N_m$ با شرط $N_p\subseteq f(N_n)$ را بر حسب $S(n,k)$ ها که $(p\le k\le m)$ بیان کنید.

۵۴- به یاد آورید که به ازای هر r ,n صحیح نامنفی داشتیم $H_r^n=\binom{n+r-۱}{r}$. حال هر کدام از روابط زیر اثبات کنید.

(الف) $$H_r^n=\frac{n}{r}H_{r-۱}^{n+۱}$$

(ب) $H_r^n = \dfrac{n+r-1}{r} H_{r-1}^n$

(ج) $H_r^n = H_{r-1}^n + H_r^{n-1}$

(د) $\sum\limits_{k=0}^{r} H_k^n = H_r^{n+1}$

(ه) $\sum\limits_{k=1}^{r} kH_k^n = nH_{r-1}^{n+2}$

(و) $\sum\limits_{k=0}^{r} H_k^m H_{r-k}^n = H_r^{m+n}$

۵۵- به ازای $n,k \in N$ با شرط $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n$ فرض کنید.

$$d_k = \left|\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right|$$

$$d_{\min}(n) = \min\{d_k(n) | 1 \leq k \leq n\}$$

نشان دهید:

(الف) $d_{\min}(n) = 0$ اگروفقط اگر n فرد باشد.

(ب) به ازای n های فرد $d_k(n) = 0$ اگروفقط اگر $k = \frac{1}{2}(n+1)$

فرض کنید $\{d^*_{\min}(n) = \min\{d_k(n) | 1 \leq k \leq n$ و $k \neq \frac{1}{2}(n+1)\}$، نشان دهید که

(ج) به ازای $n \neq 4$، $d^*_{\min}(n) = n-1$،

(د) به ازای $n \neq 4$ و $n \neq 6$،

$d_k(n) = n-1$ اگر و فقط اگر $k=1$ یا $k = n$

(هـ) $d_k(6) = 5$ اگرو فقط اگر $k=1,3,4,6$

(مقاله‌ی ز. شان و ای.تی.ح. وانگ، فاصله‌های بین ضرایب چند جمله‌ای متوالی،

مجله‌ی ریاضی (۶۳، ۱۹۹۰؛ ۱۲۴-۱۲۲)را ببینید).

۵۶- ثابت کنید:

(الف) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}$ ؛ $(n \in N)$

(ب) $\binom{\binom{n}{2}}{3} > \binom{\binom{n}{3}}{2}$ ؛ $(n \in N, n \geq 3)$

(ج) $$\binom{\binom{n}{r}}{2} = \sum_{j=1}^{r} \binom{\binom{r}{j}+\varepsilon_j}{2}\binom{n+r-j}{2r}$$

که در آن $r \leq n$ و $n,r \in N$ و

$$\varepsilon_j = \begin{cases} & \text{اگر } j \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } j \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

(د) $$\binom{\binom{n}{r}}{2} = \sum_{j=1}^{r} \binom{2j-1}{j}\binom{r+1}{2j}\binom{n}{r+j}$$

به ازای $n,r \in N$ با شرط $r \leq n$.

(برای رسیدن به نتایج بیشتری درباره ضرایب دوجمله‌ای تکراری مقاله اس.وی.گالب، ضرایب دو جمله‌ای تکراری ، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۸۷، ۱۹۸۰؛ ۷۲۸-۷۱۹) را ببینید).

۵۷- فرض کنید $a_n = 6^n + 8^n$، باقیمانده‌ی تقسیم a_{83} بر ۴۹ را پیدا کنید. (مسابقات ریاضی آمریکا،۱۹۸۳/۶)

۵۸- دنباله‌ی صعودی...،۱۳،۱۲، ۱۰،۹،۴،۳،۱ شامل اعدادیست که یا توانی از۳ هستند یا مجموع اعداد متمایزی که توان۳ هستند (مثلاً"۳+۱=۴ ، ۹+۱=۱۰، $3^2 = 9$ و...) صدمین عضو دنباله را پیدا کنید (۱ اولین عضو، ۳ دومین و الی آخر) (مسابقات ریاضی آمریکا، ۱۹۸۶/۷).

۵۹- چند جمله‌ای $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{16} - x^{17}$ را می‌توان به شکل

$a_\circ + a_\backslash y + a_۲ y^۲ + \ldots + a_{۱۶} y^{۱۶} + a_{۱۷} y^{۱۷}$ نوشت به طوری که $y=x+۱$ و a_i ها پارامترهای ثابت هستند. مقدار $a_۲$ را پیدا کنید(مسابقات ریاضی آمریکا،۱۱/۱۹۸۶).

۶۰- مدیر یک شرکت در ساعات مختلف روز، نامه‌هایی را برای تایپ به منشی‌اش می‌دهد. او برای این کار نامه‌ها را در کشوی میز منشی‌روی هم قرار می‌دهد، منشی در زمان‌هایی که برای تایپ فرصت پیدا می‌کند نامه‌ی رویی را بر می‌دارد و تایپ می‌کند در طول روز رییس نه نامه را با شماره‌های۱ و۲ و۳ و۴ و۵ و۶ و۷ و۸ و۹و با همین ترتیب در کشوی میز منشی قرار می‌دهد. هنگام ظهر منشی به همکارش می‌گوید که نامه‌ی ۸ را هم اکنون تایپ کرده است ولی راجع به نامه‌هایی که صبح تایپ کرده چیزی نمی‌گوید. همکارش می‌خواهد بداند که کدام نامه‌ها و با چه ترتیبی در بعد ازظهر تایپ می‌شوند. با توجه به اطلاعات بالا چند روش برای تایپ نامه‌های باقیمانده ممکن است. (مسابقات ریاضی آمریکا،۱۵/ ۱۹۸۸)

۶۱- عبارت $(۱+\circ/۲)^{۱\circ\circ\circ}$ را با توجه به قضیه‌ی دو جمله‌ای‌ها بسط می‌دهیم داریم:

$$(۱+\circ/۲)^{۱\circ\circ\circ} = \binom{۱\circ\circ\circ}{\circ}(\circ/۲)^{\circ} + \binom{۱\circ\circ\circ}{۱}(\circ/۲)^{۱} + \binom{۱\circ\circ\circ}{۲}(\circ/۲)^{۲} + \ldots + \binom{۱\circ\circ\circ}{۱\circ\circ\circ}(\circ/۲)^{۱\circ\circ\circ}$$

$$= A_\circ + A_۱ + A_۲ + \ldots + A_{۱\circ\circ\circ}$$

که در آن $A_k = \binom{۱\circ\circ\circ}{k}(\circ/۲)^k$ و $k=\circ$ ،۱،۲،... ،۱۰۰۰ به ازای کدام k ، A_k بزرگترین است؟ (مسابقات ریاضی آمریکا،۱۹۹۱/۳)

۶۲- ثابت کنید که تعداد عبارات متمایز در بسط $(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_m)^n$ برابر است با

$$H_n^m = \binom{m+n-۱}{n}$$

۶۳- با دو روش نشان دهید که:

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, \ldots, n_m} = \sum_{i=۱}^{m} \binom{n-۱}{n_۱, \ldots, n_i - ۱, n_{i+۱}, \ldots, n_m}$$

۶۴- برای $m \in N$ و n نشان دهید که:

$$\sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = m!\, S(n,m)$$

که مجموع برای تمام m تایی‌های $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ که $n_i \neq 0$ برای هر i و $S(n,m)$ اعداد استرلینگ نوع دوم است .

۶۵- ثابت کنید که :

$$\sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} (-1)^{n_2 + n_4 + n_6 + \cdots} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

که مجموع برای تمام m تایی‌های $n_1, n_2, \ldots, n_m$ از اعداد صحیح نامنفی با $\sum_{i=1}^{m} n_i = m$ حساب می‌شود.

۶۶- رابطه‌ی کلی« واندرموند» را برای ضرایب چند جمله‌ای اثبات کنید.

$$\binom{p+q}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \sum \binom{p}{j_1, j_2, \ldots, j_m} \binom{q}{k_1 - j_1, k_2 - j_2, \ldots, k_m - j_m}$$

که مجموع برای تمام mتایی‌های $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ از اعداد صحیح نامنفی با شرط $j_1 + j_2 + \ldots + j_m = p$ حساب می‌شود.

۶۷- فرض کنید که p یک عدد اول شد و $m \in N$. نشان دهید:

$$\binom{p}{n_1, n_2, \ldots, n_m} \equiv 0 \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

که در آن $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = p$ و به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, m$، $p \neq n_i$ و اعداد n_i صحیح نامنفی هستند.

و سپس نتیجه بگیرید که :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^p \equiv \sum_{i=1}^{m} x_i^p \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

۶۸- فرض کنید p یک عدد اول باشد وعدد طبیعی n را در مبنای p به صورت زیر

می‌نویسیم:

$$n = n_{0} + n_{1}p + n_{2}p^{2} + \ldots + n_{k}p^{k}$$

که در آن به ازای هر $i=1,2,\ldots,k$ ، $n_i \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$.

$m \in N$ را در نظر بگیرید نشان دهید در بسط

$$\left(x_{1} + x_{2} + \ldots + x_{m}\right)^{n}$$

تعداد عباراتی که ضرایب آنها بر p بخش پذیر نباشد برابر است با $\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i+m-1}{m-1}$

(مقاله‌ی اف.تی.هاوارد، تعداد ضرایب یک جمله‌ای که بر یک عدد اول ثابت بخش‌پذیر باشد مجله ریاضی اقیانوسه، ۱۹۷۴،۵۰؛ ۱۰۸–۹۹).

۶۹- نشان دهید

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^{2}\binom{2n+m-r}{2n} = \binom{m+n}{n}^{2}$$

(لی‌جن‌شو)

۷۰- نشان دهید که برای هر $n \in N$:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{n}{r} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

۷۱- فرض کنید $r \in N$ و $r \geq 2$، نشان دهید .

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{r}} = \frac{r}{r-1}$$

(مقاله‌ی ه. وی. گولد، روابط ترکیبیاتی ، مورگان تاون، ۱۹۷۲،۱۹–۱۸).

۷۲- مجموعه‌ی $S=\{1,2,\ldots,n\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $A \subseteq S$ که $A \neq \varnothing$ ، تعریف می‌کنیم $M(A)=Max\{x|x \in A\}$ و $m(A)=min\{x|x \in A\}$ و $\alpha(A)=M(A)+m(A)$. مطلوبست میانگین حسابی $\alpha(A)$ را وقتی A تمام زیر مجموعه‌های ناتهی S را در بر می‌گیرد.

۷۳- فرض کنید $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ و $n \in N$، نشان دهید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \; a_n = ۲$$

(پاتنام، نوامبر ۱۹۸۵)

۷٤- تعریف می‌کنیم $(z)_0 = ۱$ وبه ازای هر $n \in N$ تعریف می‌کنیم:

$$(z)_n = z(z-۱)(z-۲)\ldots(z-n+۱)$$

به ازای هر $n \in N^*$ نشان دهید:

$$(x+y)_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x)_i (y)_{n-i}$$

(پاتنام،۱۹۶۲)

۷۵- به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا n را در یک ردیف چید، به طوری که بـه جـز چپ‌ترین عدد برای بقیه‌ی اعداد حداقل یک عدد در سمت چپش یافت شود که فقط یک واحد اختلاف با آن داشته باشد.(پاتنام، ۱۹۶۵)

۷۶- نشان دهید برای هر عدد صحیح و مثبت n

$$\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor} \left\{ \frac{n-۲r}{۲} \binom{n}{r} \right\}^{۲} = \frac{۱}{n} \binom{۲n-۲}{n-۱}$$

(پاتنام، ۱۹۶۵)

۷۷- به ازای هر $n \in N$ که $n \geq ۲$، نشان دهید.

$$\sum_{r=۱}^{n} r\sqrt{\binom{n}{r}} < \sqrt{۲^{n-۱} n^{۳}}$$

(مسابقات ریاضی اسپانیا،۱۹۸۸).

۷۸- فرض کنید r و n اعداد طبیعی باشند و $r \leq n$ ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشـترک اعداد زیر را k می‌نامیم.

$$\binom{n}{r},\binom{n+1}{r},\ldots,\binom{n+r}{r}$$

نشان دهید $k=1$

۷۹- نشان دهید، چهار ضریب دوجمله‌ای متوالی $\binom{n}{r}$ و $\binom{n}{r+1}$ و $\binom{n}{r+2}$ و $\binom{n}{r+3}$ با شرط $n,r \in N$ و $r+3 \leq n$ وجود ندارند که تشکیل تصاعدی حسابی دهند (پاتنام، ۱۹۷۲)

۸۰- بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد زیر را بیابید.

$$\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},\ldots,\binom{2n}{2n-1}$$

(پیشنهادی ان.اس.مندلسون، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۲۰۱:۱۹۷۱،۷۸) را ببینید).

۸۱- فرض کنید $n \in N$. نشان دهید $\binom{n}{r}$ به ازای هر $r \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ فرد است اگروفقط اگر $k \in N$ یافت شود که $n = 2^k - 1$.

۸۲- یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم. مقدار میانگین |H-T| را حساب کنید. H تعداد دفعاتی است که سکه رو آمده و T تعداد دفعاتی است که سکه پشت آمده است. به عبارت دیگر مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k<\frac{n}{2}}(n-2k)\binom{n}{k}$$

(پاتنام، ۱۹۷۴)

۸۳- به ازای تمام اعداد صحیح p و a و b که p عدد اول است و $a \geq b \geq 0$ ثابت کنید:

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \quad (\text{پیمانه‌ی } p)$$

(پاتنام، ۱۹۷۷)

۸۴- میانگین هندسی k عدد مثبت $a_1,a_2,\ldots,a_k$ برابر ریشه k ام حاصلضرب آنها تعریف می‌شود. به عنوان مثال میانگین هندسی ۱۸،۴،۳ برابر است با ۶. نشان دهید که

میانگین هندسی مجموعه‌ی S تشکیل شده از n عضو مثبت برابر است با میانگین هندسی، میانگین‌های هندسی زیر مجموعه‌های ناتهی S (مسابقات ریاضی کانادا، ۱۹۸۳).

۸۵- به ازای $k \in N$ و n تعریف می‌کنیم: $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots n^k$ نشان دهید که

الف) $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} S_k(n) = (n+1)^m - 1$

ب) $S_m(n) - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_k(n) = n^m$

۸۶- فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد و در آن به ازای هر $k=1,2,\dots,n+1$ و $p(k) = 2^k$ مطلوب است $p(n+2)$ (پیشنهادی م.کلمکین، مجله‌ی $\pi\mu\epsilon$ (۴،۱۹۶۴؛۷۷ مساله‌ی ۱۵۸)

۸۷- فرض کنید $X = \{1,2,\dots,10\}$ و $A = \{A \subset X \| A| = 4\}$ و $f: A \to X$ یک نگاشت دلخواه است. نشان دهید مجموعه‌ی $S \subset X$ موجود است به طوری که $|S| = 5$ که به ازای هر $r \in S$ داشته باشیم $f(S - \{r\}) \neq r$

۸۸-**(الف)** با بکار بردن نامساوی واسطه‌های حسابی و هندسی برای اعداد

$$\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n+1}{n}$$

نشان دهید به ازای هر $n \in N$،

$$\left(2^{n+1} - 2\right)^n \geq n^n \prod_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r}$$

(ب) نشان دهید:

$$(n!)^{n+1} = \left(\prod_{r=1}^{n} r^r\right)\left(\prod_{r=1}^{n} (r!)\right)$$

(ج) با استفاده از (الف) و(ب) یا هر روشی دلخواهی نشان دهید:

$$\left(\frac{n(n+1)!}{2^{n+1}-2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{(n!)^{n+1}}{\prod_{r=1}^{n} r^r}$$

(د) نشان دهید که در معادله‌ی قسمت (ج) تساوی فقط و فقط در حالت $n=1$ یا $n=2$ امکان دارد (مجله‌ی ریاضیات دانشگاهی، ۲۰، ۳۴۴:۱۹۸۹).

۸۹- با اثبات، تعداد اعداد صحیح مثبت را بیابید که نمایش آنها در مبنای n دارای ارقام متمایز باشد با این خاصیت که به جز سمت چپ‌ترین رقم، اختلاف هر رقم با حداقل یکی از ارقام سمت چپش[1] $\pm$ باشد (جواب باید تابعی ساده و صریح از n باشد.) (مسابقات ریاضی آمریکا، ۱۹۹۰/۴).

۹۰- عدد $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n)^{\frac{1}{2n}} = 2$$

(مسابقات بهاری بلغارستان، ۱۹۸۵)

۹۱- (الف)اگر $f(n)$ برابر تعداد ارقام "۰" در نمایش دهدهی عدد طبیعی n باشد. مجموع زیر را به دست آورید.

$$S = 2^{f(1)} + 2^{f(2)} + \ldots + 2^{f(\underbrace{11111111111}_{10})}$$

(ب) عدد حقیقی وغیرصفر a و اعداد طبیعی m, k, b را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(k)$ برابر تعداد صفرها در نمایش عدد k در مبنای $b+1$ باشد. مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^{f(k)}$$

که در آن $n = (b+1)^m - 1$.

☜ **تبصره:**

قسمت (الف) از مسابقات ریاضی مجارستان (۱۹۸۱) انتخاب شده است. قسمت (ب) که تعمیم قسمت(الف) است توسط "ام.اس. کلمکین" فرمول بندی شده است (مجله‌ی ریاضیات دشوار،۹،۱۹۸۳؛۱۸-۱۷)

۹۲- نشان دهید تعداد اعداد دودویی با طول n که دقیقاً m بار در آنها "۰۱" آمده برابر با $\binom{n+1}{2m+1}$ است. (مسابقات ریاضی انگلستان، ۱۹۸۲/۶)

۹۳- در یک میهمانی، n نفر حضور دارند. بعضی از آنها با هم آشنا و بعضی دیگر نا آشنا هستند. هر دو نفر نا آشنا دقیقاً دو آشنای مشترک در جمع دارند و هر دو آشنایی، هیچ آشنای مشترکی ندارند. نشان دهید تعداد آشناهای همه افراد در میهمانی با هم برابر است(مسابقات ریاضی مسکو، ۲۳ امین دوره)

۹۴- عدد $n \in N^*$ را در نظر بگیرید. به ازای عدد $p=1,2,\ldots$ فرض کنید.

$$A_p(n) = \sum_{0\le k\le \frac{n}{2}} (-1)^k \left\{\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right\}^p$$

به ازای n های فرد ثابت کنید.

$$A_2(n) = nA_1(n)$$

(پیشنهادی توسط اچ.گولد به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، ۸۰،۱۹۷۳؛۱۱۴۶).

۹۵- عدد $n \in N^*$ را در نظر بگیرید. به ازای عدد $p=1,2,\ldots$ فرض کنید:

$$B_p(n) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left\{\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right\}^p$$

مقدار $B_2(n)$ رابیابید.(پیشنهادی توسط ای.تی اردمن به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، ۸۰،۱۹۷۳؛۶۶ ۱۰.)

۹۶- به ازای اعداد r و n طبیعی نشان دهید:

(الف) $\binom{2n-1}{r}^{-1} = \frac{2n}{2n+1}\left\{\binom{2n}{r}^{-1}+\binom{2n}{r+1}^{-1}\right\}$.

(ب) $\sum_{r=1}^{2n-1}(-1)^{r-1}\binom{2n-1}{r}^{-1}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{j} = \frac{2n}{2n+1}\sum_{r=1}^{2n}\frac{1}{r}$

(پیشنهادی توسط ای.کاکی به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، ۱۹۷۱، ۷۸؛ ۹۰۸).

۹۷- به ازای اعداد $n\in N^*$ و m و l به شرط $n\le m$ و l مجموع دوگانه زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{i=0}^{l}\ \sum_{j=0}^{i}\ (-1)^j\binom{m-i}{m-l}\binom{n}{j}\binom{m-n}{i-j}$$

(پیشنهادی توسط دی.بی.وست به ماهنامه ریاضی آمریکا، ۹۷ ، ۱۹۹۰ ، ۴۲۸-۴۲۹)

۹۸- نشان دهید:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{p}{r+s}\binom{q+r}{m+n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{q}{m+r}\binom{p+r}{n+s}$$

که در آن $m,n,p,q,s\in N^*$. (مقاله‌ی آر، سی، ینس، و رموز مجموع دوگانه، ریاضیات دشوار ۹، ۱۹۸۳؛ ۱۹۴ را ببینید).

فهرست مراجع:

[BM] D.E. Borton and C.L.Mallows , Some aspects of the random sequence, Annals of Math. Stat.۳۶ (۱۹۶۵),۲۳۶-۲۶۰.

[E] A.W.F. Edwards , Pascal's Arithmetical Triangle , Oxford University Press , ۱۹۸۷.

[F] N.J.Fine, Binomial coefficients modulo a prime , Amer. Math. Monthly , ۵۴ (۱۹۴۷), ۵۸۹.

[H۱] R. Honsberger, Mathematical GemsII, The Mathematical. Association of America , ۱۹۷۶.

[H۲] R. Honsberger, Mathematical Gems, Two-Year college Mathematics Tournal, ۱۱ (۱۹۸۰), ۱۱۶-۱۱۹.

[MM] Mathematics Magazine, ۵۱ (۱۹۷۸), ۲۴۶.

[MS] H.B. Mann and D. Shanks , A necessary and sufficient condition for primality, and its source, J.Combinatorial Theory (A), ۱۳(۱۹۷۲),۱۳۱-۳۴.

[N] E.A. Netto , Lehrbuchder Kombinatorik, Leipzig, (qo).

[W] Q.Wu , Maximal coefficient of the multinomial $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n$ Southeast Asian Bulletin of Maths. ۱۵(۱۹۹۱),۷۷.

فصل ۳

اصل لانه کبوتری و اعداد رمزی

۱-۳- مقدمه

ممکن است در زندگی روزمره به مسایلی برخورد کرده باشید که از لحاظ به ریاضی یک شکل باشند مانند:

« در هر گروه از افراد، حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان‌شان در گروه برابر است.»

«دربین هر پنج نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول یک، حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله‌شان از $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است.″

″از هر مجموعه‌ی پنج عضوی، می‌توان سه عضو را چنان انتخاب کرد که مجموع‌شان بر سه بخش پذیر باشد.»

«در هر دنباله از ده عدد، یا یک زیر دنباله‌ی صعودی از چهار عدد یا یک دنباله‌ی نزولی از چهار عدد وجود دارد.»

در این‌گونه مسایل، ما به دنبال یک نوع خاص تساوی، انتخاب یا چیدن نیستیم، و می‌خواهیم یک تساوی را به طور کلی ثابت کنیم.

در این فصل، به بررسی یک اصل دیگر در ترکیبیات می‌پردازیم که در حل این‌گونه مسایل کمک زیادی می‌کند و در آخر فصل نیز با استفاده از این اصل یک دسته عدد، به نام اعداد رمزی را بررسی می‌کنیم .

۲-۳- اصل لانه کبوتری

اگر سه کبوتر دو لانه داشته باشند، بدیهی است که حداقل دو تا از آنها باید در یک لانه زندگی کنند. حالت کلی این مسأله، به نام *اصل لانه کبوتری*، در پایین آمده است.

اصل لانه کبوتری. فرض کنید k و n دو عدد طبیعی‌اند. اگر بخواهیم بیشتر از $nk+1$ شی را در n جعبه قرار دهیم، حداقل یک جعبه وجود دارد که در آن حداقل $k+1$ شی قرار گرفته باشد. در حالت خاص، اگر حداقل $n+1$ شی را در n جعبه قرار دهیم، جعبه‌ای وجود دارد که در آن حداقل دو شی قرار گرفته باشد.

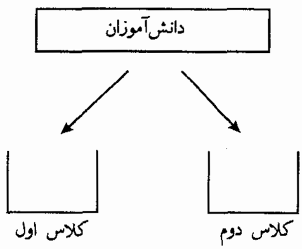
اثبات این اصل بسیار ساده است. اگر در هیچ جعبه‌ای $k+1$ شی یا بیشتر قرار نگرفته باشد، در هر جعبه حداکثر k شی قرار دارد و در n جعبه حداکثر nk شی؛ که با فرض تعداد اشیای مسأله متناقض است.■

اصل لانه کبوتری به *اصل دیریکله* هم معروف است. زیرا« پیتر دیریکله»

ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۹-۱۸۰۵) از این اصل برای حل مسایل فراوانی در نظریه اعداد استفاده کرد. این اصل ممکن است بسیار بدیهی و پیش پا افتاده به نظر بیاید. اما خواهیم دید که با استفاده از این اصل، می‌توان مسایل بسیار مهمی را حل کرد.

مثال ۱-۲-۳ در هر گروه ۷ نفری از دانش‌آموزان کلاس اول و دوم، چهار نفر وجود دارند که از یک پایه باشند.

می‌خواهیم با استفاده از اصل لانه کبوتری به این مسأله جواب دهیم. ۷ دانش‌آموز را ۷ شی در نظر بگیرید. می‌خواهیم ۷ شی را در دو جعبه که اولی نشان‌دهنده دانش‌آموزان کلاس اول و دومی نشان دهنده دانش‌آموزان کلاس دوم است، قرار دهیم.



اگر یک دانش‌آموز کلاس اولی باشد، آن را در جعبه اول قرار می‌دهیم. بنابراین ۷(=۱+۲×۳) شی را می‌خواهیم در ۲ جعبه قرار دهیم. طبق اصل لانه کبوتری در یک جعبه ۱+۳ شی یا بیشتر قرار می‌گیرد. و یا در یک جعبه حداقل چهار دانش‌آموز همپایه قرار می‌گیرند.■

با استفاده از اصل لانه کبوتری به روش مشابه، می‌توانید مثال‌های بعد را حل کنید.

مثال ۲-۲-۳ در هر گروه ۱۳ نفری، حداقل دو نفر وجود دارند که روز

تولدشان در یک ماه باشد.

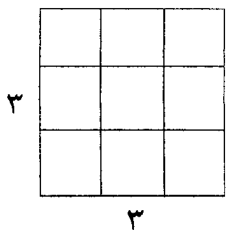
مثال ۳-۲-۳ در هر گروه از ۳۰۰۰ نفر، حداقل ۹ نفر وجود دارند که در یک روز از سال متولد شده‌اند.

در مسایل بالا اشیاء و جعبه‌ها معلوم بودند. ولی پیدا کردن شی و جعبه در بعضی مسایل نیاز به تفکر بیشتری دارد.

مثال ۴-۲-۳ نشان دهید که اگر ۱۰ نقطه در داخل یک مربع به طول ضلع ۳ داشته باشیم، حداقل دونقطه وجود دارد که فاصله‌شان از هم حداکثر $\sqrt{۲}$ است.

در این مسأله اشیاء و جعبه‌ها چه می‌توانند باشند؟ واضح است که ۱۰ نقطه را می‌توانیم مانند ۱۰ شی در نظر بگیریم، و از آنجا که حکم برای ۲ نقطه مطرح شده پس $k+۱=۲$ و یا $k=۱$ پس باید مربع را طوری به n قسمت($n<۱۰$) تقسیم کنیم که فاصله هر دو نقطه در هر قسمت حداکثر $\sqrt{۲}$ باشد.

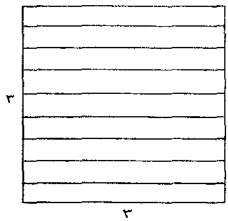
حل. مربع را به ۹ مربع ۱×۱ تقسیم می‌کنیم. A را مجموعه‌ی ۱۰ نقطه (اشیا) در نظر بگیرید که از مربع انتخاب شده‌اند. هر عضو A در یک قسمت از ۹ قسمت مربع قرار دارد و از آنجا که $۹<۱۰$ است، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دونقطه وجود دارند که در یک قسمت (یک جعبه) قرار گرفته‌اند. فاصله این دو نقطه نمی‌تواند از قطر مربع به طول واحد که برابر $\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$ است بیشتر باشد.



تبصره:

۱- اصل لانه کبوتری فقط به ما می‌گوید جعبه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k+1$ شی قرار گرفته باشد و خود جعبه و اشیاء را مشخص نمی‌کند. حتی نمی‌تواند راجع به تعداد دقیق اشیای قرار گرفته در جعبه چیزی بیان کند.

۲- در مثال ۴-۲-۳ می‌توانستیم مربع ۳×۳ را مانند شکل زیر به ۹ قسمت تقسیم کنیم و طبق اصل لانه کبوتری، دو نقطه وجود داشتند که متعلق به یک قسمت بودند.



با این قسمت بندی به این حکم می‌رسیدیم که دونقطه وجود دارند که فاصله‌شان حداکثر $\sqrt{\frac{۸۲}{۹}}$ است. این حکم، حکم قبلی را نقض نمی‌کند.

۳-۳- چند مثال دیگر

در بخش قبل، چند مثال ساده را با استفاده از اصل لانه کبوتری حل کردیم. در آن مثال‌ها، اشیا و جعبه‌ها به سادگی قابل تشخیص بودند. امّا همیشه و همه‌ی مثال‌ها این‌گونه نیستند. در این بخش چند مثال پیچیده و سفسطه‌آمیز را بررسی می‌کنیم که با استفاده از اصل لانه کبوتری قابل حل هستند. امیدواریم که خواننده در لابه‌لای این بخش‌ها به کاربرد داشتن و قوی بودن اصل لانه کبوتری به عنوان یک ابزار ریاضی پی ببرد.

مثال ۱-۳-۳ فرض کنید که $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_۵\}$ مجموعه‌ای از پنج

عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید که بـرای هـر جایگشـت $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}, a_{i_5}$ از مجموعه A حاصل‌ضرب $\left(a_{i_1}-a_1\right)\left(a_{i_2}-a_2\right)\ldots\left(a_{i_5}-a_5\right)$ عددی زوج است.

برای مثال اگر

$$a_{i_1}=a_4 \qquad a_{i_2}=a_3 \qquad a_{i_3}=a_5 \qquad a_{i_4}=a_1 \qquad a_{i_5}=a_2$$

$$a_1=2 \qquad a_2=5 \qquad a_3=7 \qquad a_4=3 \qquad a_5=8$$

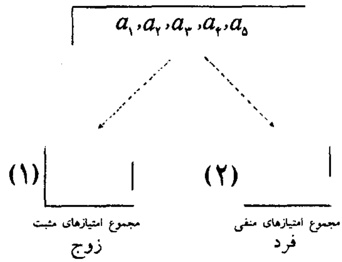
آنگاه حاصل‌ضرب

$$(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_5-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_5)$$
$$=(3-2)(7-5)(8-7)(2-3)(5-8)=6$$

عددی زوج است.

این مسأله را نمی‌توان همانند مسایل مطرح شده در بخش (۲-۳) حل کرد. پـس باید ابتدا مسأله را ساده و بررسی کنیم. برای این که اثبـات کنیـم کـه حـاصل ضـرب عبارات عددی زوج است، کافی است ثابت کنیم یکی از عامل‌های حـاصل‌ضرب کـه آن را $(a_{i_k}-a_k)$ می‌نامیم عددی زوج است. و می‌دانیم که $(a_{i_k}-a_k)$ فقط و فقط در صورتی زوج است کـه دو عـدد a_k و a_{i_k} از نظـر زوجیـت یکسـان باشـند و بـه عبارت دیگر هر دو زوج یاهر دو فرد باشند. پس می‌توانیم جعبه‌ها را بـر مبنـای زوج بودن قرار دهیم. دو جعبه در نظر می‌گیریم که یکی برای اعداد زوج و دیگـری بـرای اعداد فرد است.

حل. طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه $|A|=5$، به سادگی در می‌یابیم که حداقل ۳ عضو از A وجود دارند که دارای زوجیت یکسانی هستند. بدون این کـه بـه کلیت مسأله لطمه بخورد آنها را a_1, a_2, a_3 در نظر می‌گیریم.



روشـن اسـت کـه $\{a_1,a_2,a_3\}\bigcap\{a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}\}\neq\phi$ (زیـرا در آن صـورت مجموعـه‌ی A بایست حداقل دارای ۶ عضـو $\{a_1,a_2,a_3,\ a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}\}$ باشـد.) بنابراین می‌توانیم مثلاً a_1 را برابر a_{i_3} در نظر بگیریم. پس $a_{i_3}-a_3=a_1-a_3$. ولی a_1 و a_3 از نظر زوجیت یکسان هستند و در نتیجه $a_{i_3}-a_3$ عددی زوج است و اثبات کامل است. ■

تبصره:

> ۱- با این راه حل می‌توان مساله را برای تمام اعداد صحیح و مثبت $a_1,a_2,\ldots,a_{2p+1}$ ثابت کرد(مساله ۶-۳ را ببینید).
> ۲- نتیجه مثال (۱-۳-۳) برای $|A|=2p$، صحیح نیست.

مثال ۲-۳-۳ ده شطرنج باز، در یک دوره مسابقه‌ی شطرنج شرکت کرده‌اند. هر دو نفر دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند. در هر بازی به نفر برنده ۱+ امتیاز و بـه نفر بازنده ۱- امتیاز تعلق می‌گیرد و در صورت تساوی به هـیچ کـدام امتیـازی تعلـق نمی‌گیرد. بعد از پایان بازی‌ها می‌فهمیم که بیش از ٪ ۷۰ بازی‌هـا بـه تسـاوی کشـیده شده است. نشان دهید که دو شرکت کننـده وجـود دارنـد کـه امتیـاز مسـاوی کسـب

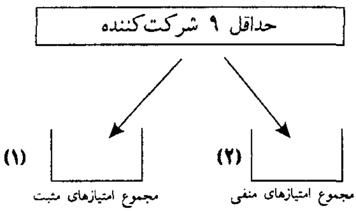
کرده‌اند.

با در نظر گرفتن آخرین قسمت مسأله می‌توان ۱۰ شرکت کننده را ۱۰ شی در نظر بگیریم. و جعبه‌ها نیز نشانگر امتیازهای نهایی باشند. ولی امتیازها چند مقدار می‌توانند داشته باشند؟ و با توجه به اینکه باید تعداد اشیاء از تعداد جعبه‌ها بیشتر باشد در می‌یابیم که با راه حل ساده نمی‌توان به مساله پاسخ داد. حال روش غیر مستقیمی را به کار می‌بریم.

حل. از آنجا که هر دونفر یک و فقط یک بار با هم بازی کرده‌اند پس در این دوره $۴۵ = \binom{۱۰}{۲}$ بازی انجام شده است و از بین بازی‌ها حداقل $۳۲ = \lceil ۳۱/۵ \rceil = \lceil ۴۵ \times ۷۰\% \rceil$ بازی به تساوی کشیده شده است. که $\lceil x \rceil$ نشان دهندهٔ کوچکترین عدد ناکمتر از x است. بنابراین:

(*) حداکثر ۱۳=۳۲-۴۵ بازی به تساوی نکشیده است.

حال با برهان خلف پیش می‌رویم. فرض کنید که ۱۰ شرکت کننده، ۱۰ امتیاز مختلف به دست آورده باشند. پس حداکثر یک شرکت کننده امتیاز "۰" کسب کرده و بقیه دارای امتیازات مثبت و منفی‌اند. حال ۹ نفر را مانند ۹ شی در نظر می‌گیریم و دو جعبه را یکی برای افراد با امتیاز مثبت و یکی را برای افراد با امتیاز منفی در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۵ نفر وجود دارند که امتیازشان مثبت است و یا حداقل ۵ نفر وجود دارند که امتیازشان منفی است.



بدون این که به کلیت مسأله لطمه بخورد، فرض می‌کنیم ۵ نفر وجود دارند که امتیازشان مثبت است. و از آنجا که امتیاز هر پنج نفر تفاوت دارد، مجموع امتیازات این ۵ نفر حداقل برابر است با

$$۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$$

ولی این نتیجه مستلزم آن است که حداقل ۱۵ بازی به تساوی کشیده نشده باشد که با(*) متناقض است. پس دونفر وجود دارند که امتیازشان برابر است.■

مثال ۳-۳-۳ فرض کنید A مجموعه‌ای نا تهی از m عدد صحیح مثبت باشد. ثابت کنید، زیر مجموعه‌ی B از A وجود دارد که $\sum(x|x\in B)$ بر m بخش پذیر باشد. برای مثال اگر $A=\{۳،۹،۱۴،۱۸،۲۳\}$ و $|A|=m=۵$ می‌توانیم زیر مجموعه $B=\{۳،۱۴،۱۸\}$ را در نظر بگیریم:

$$\sum(x|x\in B)=۳+۱۴+۱۸=۳۵.$$

در این مسأله نیاز به بخش پذیری بر m داریم. که می‌توانیم آن را به رابطه هم نهشتی تغییر بدهیم.

$a\equiv b($ پیمانه‌ی $m)$ اگروفقط اگر $m|(a-b)$

با استفاده از این گزاره راه حل زیر را به کار می‌بریم.

حل. مجموعه‌ی $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_m\}$ را در نظر بگیرید. m زیر مجموعه از A را این‌گونه در نظر می‌گیریم.

$$A_۱=\{a_۱\} \text{ و } A_۲=\{a_۱,a_۲\} \text{ و } \ldots \text{ و } A_m=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_m\}$$

$$a_۱ \quad \text{و} \quad a_۱+a_۲ \text{ و } \ldots \text{ و } a_۱+a_۲+\ldots+a_m$$

اگر یکی از مجموع‌های نوشته شده بر m بخش پذیر باشد، زیرمجموعه‌ی متناظر با آن را به عنوان مجموعه‌ی B در نظر می‌گیریم.حال اگر هیچ کدام از مجموع‌های

نوشته شده بر m بخش پذیر نباشند، داریم:

$$a_۱ \equiv r_۱(m)$$

$$a_۱ + a_۲ \equiv r_۲(m)$$

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_m \equiv r_m(m)$$

که در آن $r_i \in \{۱, ۲, \ldots, m-۱\}$، $(i=۱،۲،\ldots،m)$ حال می‌توانیم m مجموع را مانند m شی و $m-۱$ کلاس هم نهشتی را مانند $m-۱$ جعبه در نظر بگیریم:

طبق اصل لانه کبوتری دو مجموع

$$(i<j)\ a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i . + \ldots + a_j \quad و \quad a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i$$

وجود دارند که در یک جعبه و یک کلاس هم نهشتی به پیمانه m قرار می‌گیرند.

$X \equiv ۱$ (پیمانه m) $\quad X \equiv ۲$ (پیمانه m) $\quad X \equiv m-۱$ (پیمانه m)

پس داریم:

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i . + \ldots + a_j \equiv a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i (m)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$m \big| \left(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i . + \ldots + a_j\right) - (a_۱ + a_۲ + \ldots + a_i)$$

$$m \big| (a_{i+۱} + a_{i+۲} + \ldots + a_j)$$

پس می‌توان B را برابر $\{a_{i+۱}, a_{i+۲}, \ldots, a_j\}$ در نظر گرفت. ■

مثال بعدی در مسابقات ریاضی جهانی ۱۹۷۲/۱ مطرح شده است.

مثال ۴-۳-۳ زیر مجموعه ۱۰ عضوی X از مجموعه‌ی {۱،۲، ... ، ۹۹} انتخاب شده است. نشان دهید می‌توان دو زیر مجموعه‌ی نامتقاطع Y و Z از X را طوری انتخاب کرد که $\sum(y|y\in Y)=\sum(z|z\in Z)$

برای مثال اگر از مجموعه اعداد ۱ تا ۹۹ زیر مجموعه‌ی {۲،۷،۱۵،۱۹،۲۳،۵۰ ،۵۶،۶۰ ،۶۶،۹۹} را انتخاب کنیم می‌توان زیرمجموعه‌های
Y={۱۹،۵۰ } و Z={۲،۷،۶۰ } را در نظر گرفت.

$$\sum(y|y\in Y)=۱۹+۵۰=۶۹=۲+۷+۶۰=\sum(z|z\in Z)$$

برای حل این مسأله می‌توانیم زیر مجموعه‌های X را اشیاء و مقادیر ممکن مجموع‌ها را جعبه‌ها در نظر بگیریم. اگر تعداد اشیاء از تعداد جعبه‌ها بیشتر باشد حکم به دست‌آید. حال، تعداد اشیاء و جعبه‌ها را می‌یابیم:

حل. از آنجا که $|X|=۱۰$ ، طبق مثال۲-۵-۱ تعداد زیر مجموعه‌های ناتهی حقیقی X برابراست با:

$$۲^{۱۰}-۲=۱۰۲۲$$

از طرف دیگر برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی حقیقی A از X داریم:

$$۱\leq\sum(a|a\in A)\leq ۹۱+۹۲+...+۹۹=۸۸۵$$

حال ۱۰۲۲ زیر مجموعه‌ی حقیقی ناتهی X را مانند ۱۰۲۲ شی فرض می‌کنیم و ۸۸۵ مقدار ممکن را ۸۸۵ جعبه از آنجا که ۸۸۵< ۱۰۲۲ است، طبق اصل لانه کبوتری دو زیر مجموعه‌ی ناتهی B و C از X یافت می‌شود که:

$$\sum(b|b\in B)=\sum(c|c\in C)$$

از آنجا که Y و Z بایست نامتقاطع باشند وممکن است B وC متقاطع باشند می‌توان Y و Z را این گونه ساخت.

$$Z=C-(B\cap C) \qquad Y=B-(B\cap C)$$

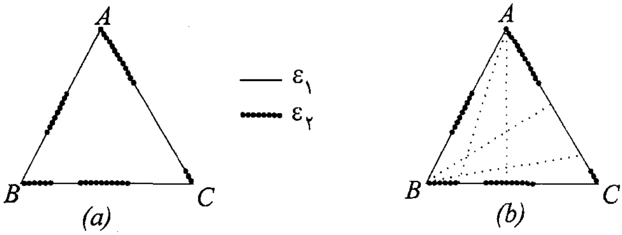
و داریم:

$$\blacksquare. \quad \sum(x|x \in Z) = \sum(y|y \in Y)$$

مثال ۵-۳-۳ (المپیاد ریاضی جهانی ۱۹۸۳/۴)

فرض کنید ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد و $\mathcal{E}$ مجموعه تمام نقاط روی اضلاع آن باشد. نشان دهید که برای هر افراز $\mathcal{E}$ به دو زیر مجموعه ناتهی $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$ حداقل سه نقطه وجود دارند که عضو یک زیر مجموعه باشند و رؤوس یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل دهند.

برای مثال اگر مثلث ABC را مانند زیر افراز کنیم می‌توان مثلث‌های رسم شده را پیدا کرد.



شکل ۱-۳-۳

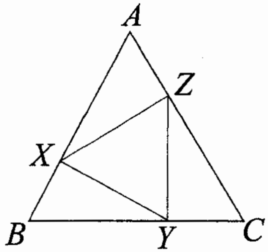
حل. مسأله را با برهان خلف حل می‌کنیم. فرض کنید عکس حکم درست باشد یعنی برای هر افراز $\mathcal{E}$ به $\mathcal{E}_۱$ و $\mathcal{E}_۲$:

(*)هیچ سه نقطه‌ای در $\mathcal{E}_۱$ (یا $\mathcal{E}_۲$) وجود نداشته باشد که رؤوس یک مثلث قائم‌الزاویه باشد.

فرض کنید X و Y و Z نقاطی روی AB، BC و AC باشند که

$$\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CX}{ZA}=۲$$

مثلث ΔAZX را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $A\hat{Z}X = ۹۰^\circ$.



زیرا طبق قانون کسینوس‌ها داریم:

$$(XZ)^۲=(AZ)^۲+(AX)^۲-۲(AX)(AZ)\cos X\hat{A}Z$$
$$=(\frac{۱}{۳}AC)^۲+(\frac{۲}{۳}AB)^۲-۲(\frac{۱}{۳}AC)(\frac{۲}{۳}AB)\cos ۶۰^\circ$$
$$=\frac{۱}{۳}(AB)^۲$$

و

بنـــابراین $(XZ)^۲+(AZ)^۲=\frac{۱}{۳}(AB)^۲+\frac{۱}{۹}(AB)^۲=(\frac{۲}{۳}AB)^۲=(AX)^۲$ و طبق قضیه فیثاغورث $A\hat{Z}X = ۹۰^\circ$.

و به روش مشابه $C\hat{Y}Z = B\hat{X}Y = ۹۰^\circ$

نقاط X و Y و Z را شی در نظر بگیرید. از این ۳ شی حداقل دوتا یافت می‌شود که در $\varepsilon_۱$ باشد یا دو تا یافت می‌شود که در $\varepsilon_۲$ باشد. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای بخورد فرض می‌کنیم X و $Y \in \varepsilon_۱$.

از آنجـا کـه $XY \perp AB$، و طبـق شـرط (*) هـیچ نقطـــه در AB-{X} نبـــاید در

ε_1 باشد. و تمام نقاط $AB\text{-}\{X\}$ باید در ε_2 باشند. و با کمی دقت معلـوم می‌شـود کـه $C \notin \varepsilon_2$ و همین طور $Z \notin \varepsilon_2$. و در نتیجه $Z \in \varepsilon_1$ و C. ولـی $\{Y,C,Z\} \subseteq \varepsilon_1$ و آنها یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. که این با شرط (*) متناقض است.■

برای دیدن مثال‌ها و کاربردهای بیشتر اصل لانه کبوتری در مسـایل رنـگ‌آمیزی، خواننده می‌تواند به [Re] در فهرست مآخذ مراجعه نماید.

٤-۳- مسایل و اعداد رمزی

در این بخش، با استفاده از اصل لانه کبوتری به مطالعه مسایلی می‌پردازیم کـه تـا حدی با مسایل بخش‌های قبلی متفاوتند. مطالعـه‌ی ایـن مسـایل مـا را بـه گروهـی از اعداد به نام اعداد رمزی راهنمایی می‌کند. برای شروع، مسأله‌ای را مطرح می‌کنیم کـه در ششمین دورهٔ المپیاد ریـاضی جهـانی کـه در روسـیه در سـال ۱۹۶۴ برگـزار شـده توسط تیم اعزامی از مجارستان پیشنهاد شده است.

مثـال ۱-۴-۳ المپیـاد ریـاضی جهـانی، ۴/ ۱۹۶۴ هفـده نفـر در جلسه‌ای حضور دارند. آنها دربارهٔ سه موضوع بحث می‌کنند. هر دو نفـر آنهـا دربـارهٔ یک و فقط یک موضوع بحث می‌کنند. ثابت کنید یک گروه حداقل سه نفـری وجـود دارد که افراد آن با هم راجع به یک موضوع بحث کرده باشند. این مسأله را بعداً حل خواهیم کرد. برای ساده کردن ابتدا دو مساله ساده‌تر را ذکر می‌کنیم.

مثال ۲-۴-۳ ثابت کنید در هر جمعی از شش نفر، سه نفر وجود دارنـد کـه

یا هر سه با هم آشنا هستند یا هیچکدام یکدیگر را نشناسند.

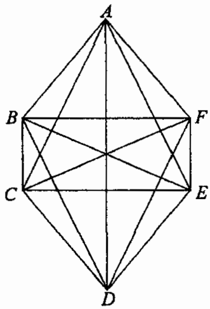
این مسأله توسط« بوست‌ویچ» دانشجوی دانشگاه ماری‌لند ایالات متحده، به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۴۴۶،۱۹۸۵،۶۵)پیشنهاد شده و در شمارهٔ بعدی مجله، راه‌حل‌های فراوانی برای آن پیشنهاد شد. با استفاده از این مساله، مسایل فراوان دیگری مطرح شدند که مسأله بعدی یکی از آنهاست. البته مثال۳-۴-۳ تنها صورت دیگری از مسأله است. علاقه‌مندان می‌توانند به مقاله‌ی [Ra] در فهرست مآخذ مراجعه کنند.

مثال۳-۴-۳ شش نقطه در حالت کلی در صفحه قرار گرفته‌اند(هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط نیستند و هیچ چهار نقطه‌ای در یک صفحه قرار ندارند) خطوطی را که آنها را دوبه‌دو به هم متصل می‌کنند، با دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌کنیم. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که اضلاعش یک رنگ باشند. مثال ۳-۴-۳ ابتدا در المپیادهای مجارستان در ۱۹۴۷ مطرح شد و سپس در مسابقات ریاضی « ویلیام لاول پاتنام» در سال ۱۹۵۳ طرح شده است. ابتدا با مثال ۳-۴-۳ را با استفاده از اصل لانه کبوتری حل می‌کنیم.

اثبات مثال ۳-۴-۳ هر دو نقطه با یک پاره خط به هم وصل شده‌اند(شکل ۱-۴-۳) . و هر کدام از یال‌ها با رنگ قرمز یا آبی رنگ‌آمیزی شده است. رأس A را در نظر بگیرید. ۵ یال از A خارج شده (AF,AE,AD,AC,AB) و هر کدام با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شده است. طبق اصل لانه کبوتری ، سه یال وجود دارد که همگی به یک رنگ باشد. بدون این که به کلیت مسأله لطمه بخورد فرض می‌کنیم یال‌های AC,AB و AD باشند و هر سه به رنگ آبی رنگ شده باشند. حال سه یال BD,BC و CD را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از این سه یال آبی باشند مثلاً" BC آنگاه یک مثلث آبی

داریم(ABC)، و اگر هیچکدام‌شان آبی نباشند آنگاه هر سه یال مثلث BCD با رنگ قرمز رنگ شده است و مثلث BCD یک مثلث قرمز است.■

حال می‌توانیم مثال ۲-۴-۳ را اثبات کنیم.



شکل ۱-٤-۳

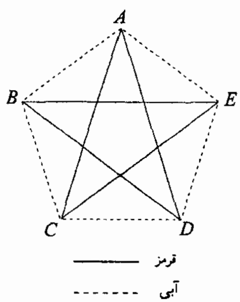
اثبات مثال ۲-۴-۳ ، ۶ نفر را مانند ۶ رأس در نظر بگیرید. (شکل ۱-۴-۳) دو نفر X و Y را با یک یال آبی به هم متصل می‌کنیم اگر X و Y آشنا باشند و در غیر این صورت آنها را با یال قرمز به هم متصل می‌کنیم. طبق مثال۳-۴-۳ یک مثلث رنگی وجود دارد. یعنی سه نفر یافت می‌شوند که یا دوبه‌دو با هم آشنا باشند یا دو به‌دو با هم نا آشنا.■

حال می‌توانیم مسأله المپیاد جهانی ریاضی را که در مثال ۱-۴-۳ ذکر شد، حل کنیم.

اثبات مثال ۱-۴-۳ می‌توانیم ۱۷ نفر را ۱۷ نقطه در نظر بگیریم که هر دو تایی به توسط یک یال به هم وصل شده‌اند. یالی را که X و Y را به هم متصل می‌کند، آبی می‌کنیم اگر آن دو دربارهٔ موضوع (۱) بحث کرده باشند و قرمز می‌کنیم اگر راجع به موضوع(۲) بحث کرده باشند و به رنگ زرد در می‌آوریم اگر آن دو درباره موضوع (۳) با هم به بحث پرداخته باشند. بنابراین هر کدام از ۱۶ یالی که از A گذشته‌اند با

یکی از سه رنگ آبی، قرمز یا زرد رنگ شده است. از آنجایی که ۱+۳×۵=۱۶ ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۱+۵ رأس یافت می‌شود، که با یک رنگ به A متصل شده باشند. بدون این که به کلیت مسأله لطمه بخورد فرض می‌کنیم یال‌های AG,AF,AE,AD,AC,AB با رنگ آبی، رنگ‌آمیزی شده باشند.حال ۶ رأس G,F,E,D,C,B را در نظر بگیرید که با ۱۵ یال به هم متصل شده‌اند. اگر هر کدام از این یال‌ها (مثلاً BC) به رنگ آبی باشد، آنگاه مثلث آبی ABC وجود خواهد داشت. و اگر هیچکدام از این یال‌ها به رنگ آبی نباشد، آنگاه این یال‌ها با رنگ‌های قرمز و زرد رنگ شده‌اند. طبق مثال ۳-۴-۳ ما در این حالت یک مثلث رنگی به رنگ قرمز یا زرد خواهیم داشت. و این به این معنی است که حداقل سه نفر وجوددارند که با هم راجع به یک موضوع بحث کرده باشند. ■

فرض کنید در مثال ۳-۴-۳ (به جای ۶ نفر)، ۵ نفر داده شده بود. آیا بازهم حکم معتبر بود؟ برای پاسخ به این سؤال می‌توانید ۵ نقطه E,D,C,B,A را (شکل ۲-۴-۳) در نظر بگیرید که یال‌های EA,DE,CD,BC,AB به یک رنگ و بقیه یال‌ها به رنگ دیگری هستند. در آن شکل هیچ مثلث رنگی وجود ندارد. پس ۶، حداقل تعداد نقاطی است که اگر یال‌های بین آنها با دو رنگ، رنگ شوند یک مثلث رنگی وجود داشته باشد.



شکل ۲-۴-۳

یک دسته نقطه را گروهی از رؤوس تعریف می‌کنیم که هر دوتای آنها توسط یک وفقط یک یال به هم متصل شده باشند. بنابراین یک دسته نقطه kتایی دارای دقیقاً k رأس و $\binom{k}{۲}$یال است. یک دسته نقطه تک فقط یک رأس و یک دسته نقطه دوتایی یک یال دارد. یک دسته نقطه ۳ تایی یک مثلث است. حال برای دو عدد طبیعی p و q $R(p,q)$، را کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم که اگر یال‌های یک دسته نقطه n تایی را با دورنگ رنگ کنیم(آبی و قرمز) آنگاه یک دسته نقطهp تایی آبی یا یک دسته نقطه q تایی قرمز وجود داشته باشد. همان‌گونه که نشان داده شد۶=(۳و۳)R و از این تعریف بر می‌آید که

$$\begin{cases} R(p, q) = R(q, p) \\ R(۱, q) = ۱ \\ R(۲, q) = q \end{cases} \qquad (۳-۴-۱)$$

این اعداد $R(p,q)$ اعداد رمزی نامیده می‌شوند، که به افتخار «فرانک رمزی» (۱۹۳۰ -۱۹۰۳) فیلسوف انگلیسی، اولین کسی که قضیه‌ی زیر را در حدود سال ۱۹۲۸ حل کرد، نامیده شده.

قضیه ۱-۴-۳ (قضیه رمزی). برای تمام اعداد طبیعی $p, q \geq ۲$ ، عدد $R(p,q)$ با شرط ذکر شده، وجود دارد.

فرانک رمزی در سال ۱۹۳۰، و در سن ۲۷ سالگی بعد از یک عمل جراحی در گذشت. در این بخش ما چند رابطه برای حدس زدن این اعداد ذکر می‌کنیم. رابطه‌ی بالایی توسط« اردوش و زکریس» [ES] دو دانشمند مجارستانی و رابطه‌ی پایینی توسط« گرین وود» و« گلیسن» [GG] کشف شده‌اند.

در سال ۱۹۸۳ مجله‌ی تئوری گراف (سری ۷، شماره‌ی ۱) هشتادمین سال تولد او را گرامی داشت.

۵-۳- گریزی بر اعداد رمزی

مشخص کردن مقدار دقیق $R(p,q)$ وقتی p و q بزرگ باشند، از عهده ما خارج است.

قضیه ۱-۵-۳. برای تمام اعداد طبیعی $q \geq ۲$ و p:

$$R(p,q) \leq R(p-۱,q) + R(p,q-۱)$$

قبل از اثبات قضیه بالا ابتدا حالت تعمیم یافته اصل لانه کبوتری را ذکر می‌کنیم.

تعمیم اصل لانه کبوتری. فرض کنید $n, k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ اعداد طبیعی مفروض باشند. اگر بخواهیم حداقل $k_۱ + k_۲ + k_۳ + \ldots k_n - (n-۱)$ شی را در n جعبه قرار دهیم، آنگاه در جعبه اول حداقل $k_۱$ شی قرار می‌گیرد یا در جعبه دوم حداقل $k_۲$ شی قرار می‌گیرد ... یا در جعبه nام حداقل k_n شی قرار می‌گیرد.

اثبات قضیه ۱-۵-۳. فرض کنیم $n = R(p-۱,q) + R(p,q-۱)$. طبق قضیه ۱-۴-۳ عدد $R(p,q)$ وجود دارد و برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که اگر دسته نقطه‌ی n تایی را با دورنگ قرمز و آبی رنگ کنیم، آنگاه یک دسته نقطه‌ی p تایی آبی یا یک دسته نقطه‌ی q تایی قرمز وجود دارد. دسته نقطه‌ی n تایی را

با K_n نشان می‌دهیم.

یک رأس ثابت v در K_n را در نظر بگیرید. از v، n-۱ یال در K_n عبور کرده است:

$$n - 1 = R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$$

طبق تعمیم یافته اصل لانه کبوتری $R(p-1,q)$ یال گذرنده از v وجود دارد که با آبی رنگ شده‌اند یا $R(p,q-1)$ گذرنده V وجود دارند.که با قرمز رنگ شده‌اند. فرض می‌کنیم حالت اول درست باشد. فرض کنید X مجموعه نقاطی باشد که این $R(p,q-1)$ به v وصل شده‌اند. از آنجا که $|X| = R(p,q-1)$، طبق تعریف، مجموعه‌ی X شامل یک دسته نقطه‌ی (p-۱) تایی آبی یا یک دسته نقطه qتایی قرمز است. اگر شامل دسته نقطه‌ی q تایی باشد، حکم ثابت است و اگر شامل دسته نقطه‌ی (p-۱) تایی آبی باشد آنگاه مجموعه $X \bigcup \{V\}$ یک دسته نقطه‌ی p تایی آبی است. ■

نامعادله‌ی قضیه ۱-۵-۳ را می‌توان کمی تعمیم داد.

قضیه ۲-۵-۳. اعداد طبیعی $p,q \geq 2$ در نظر بگیرید اگر $R(p-1,q)$ و $R(p,q-1)$ اعداد زوجی باشند آنگاه

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$$

اثبات. فرض کنید $m = R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$ و K_m یک دسته نقطه‌یm` تایی با $\binom{m}{2}$ یال باشد که یال‌هایش با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ آمیزی شده‌اند. یک نقطه‌ی دلخواه ω را در K_m در نظر می‌گیریم. ω با m-۱ یال به رأس‌های دیگر در K_m وصل شده است. اگر $R(p-1,q)$ یال یا بیشتر به رنگ آبی باشند طبق اثبات قضیه‌ی قبلی حکم ثابت است و به حالت مشابه اگر $R(p-1,q)$ یال یا بیشتر قرمز باشند نیز حکم ثابت است. پس تنها حالتی باقی

می‌ماند که $R(p-1,q)-1$ یـال آبی و $R(p,q-1)-1$ یـال قرمـز باشـند. ثـابت می‌کنیم این حالت امکان ندارد. در حقیقت اگر حالت درست باشد آنگـاه تعـداد کـل یال‌های آبی K_m برابر است با:

$$\frac{m}{2}\{R(p-1,q)-1\}$$

از آنجا که هر دو عدد m و $R(p-1,q)-1$ اعداد فـرد هسـتند، تعـداد یال‌هـای آبی نمی‌تواند عدد صحیحی باشد. اثبات کامل است.■

با استفاده از قضیه ۱-۵-۳ و با استقرا روی $p+q$ نتیجه زیر به دست می‌آید.

$$p,q \geq 2: R(p,q) \leq \binom{p+q-1}{p-1} \qquad (۳-۵-۱)$$

به ازای $p=3$ نامساوی (۱-۵-۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$R(3,q) \leq \frac{1}{2}(q^2+q)$$

و با استفاده از قضیه‌های ۱-۵-۳ و ۲-۵-۳ نتیجه دقیق‌تـر زیـر بـه دسـت می‌آیـد (مسأله‌ی ۳۳-۳ را ببینید).

$$R(3,q) \leq \frac{1}{2}(q^2+3) \qquad (۳-۵-۲)$$

و در حالتی که $p=q\geq 3$ ، داریم:

$$\frac{p.2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{2}e} < R(p,p) \leq 4R(p-2,p)+2$$

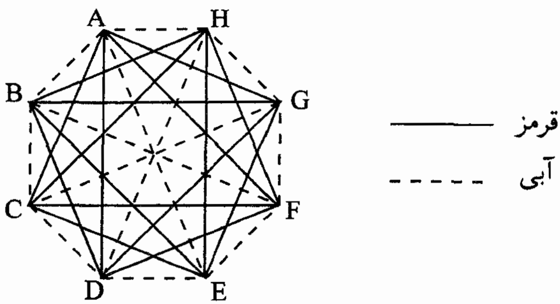
رابطه‌ی کوچکتربالا برای $R(p,p)$ توسط « واگر[W] » طرح شد و «اردوش [E]» آن را با استفاده از روش احتمال حل کرد.

برای مثال، می‌توانیم $R(3و4)$ را دقیقا" مشخص کنیم تا کاربردهای قضیه‌ی۲-۵-۳ روشن شود.

می‌دانیم که ۴=(۲و۴)R و ۶=(۳و۳)R، ازآنجایی که هر دو عدد زوجند طبق قضیه‌ی (۲-۵-۳) داریم.

$$R(۳,۴) \leq R(۳,۳) + R(۲,۴) - ۱ = ۹$$

حال نشان می‌دهیم که $R(۳,۴) \geq ۹$. برای این کار مانند شکل ۱-۵-۳ در دسته نقطه‌ی ۸ تایی یال‌های $AB,BC,CD,DE,EF,FG,GH,HA,AE,BF,CG,DH$ را به رنگ آبی و بقیه را به رنگ قرمز در می‌آوریم. می‌توان فهمید که در این شکل هیچ مثلث آبی و هیچ دسته نقطه۴ی تایی قرمز وجود ندارد پس (۳و۴)R باید حداقل ۹ باشد. بنابراین ۹=(۳و۴)R.



شکل ۱-۳-۵

نکته: برای نشان دادن اینکه $R(p,q) \leq n$ ، یا باید نامساوی‌های دیگری را به کار ببریم و یا نشان دهیم که هر دسته نقطه‌ی n تایی که یال‌هایش با دو رنگ قرمز و آبی رنگ شده‌اند، شامل حداقل یک دسته نقطه‌ی p تایی آبی یا یک دسته نقطه‌ی q تایی قرمز است. از سوی دیگر برای نشان دادن $R(p,q) > n$ ، کافی است

که $\binom{n}{۲}$یال یک دسته نقطه‌ی nتایی را طوری قرمز و آبی کنیم که شامل هیچ دسته نقطه‌ی p تایی آبی و دسته نقطه‌ی qتایی قرمز نباشد. بقیه مقادیر دقیق $R(p,q)$ برای p وqکوچک، در جدول ۱-۵-۳ آمده است([GRS],[CG] و [MZ] را ببینید). «گرینستد» و« رابرس [GR] » نشان دادند که $۲۹ \leq R(۳,۸) \leq ۲۸$. در مقاله جدیدی « مک‌کی» و « هانگ » [MZ] ثابت کردند که $R(۳و۸)=۲۸$. همچنین در [CL] آمده است که $R(۴,۸) \geq ۵۲$.

p \ q	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۳	۶	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۸	۳۶	۴۰-۴۳
۴		۱۸	۲۵-۲۸	۳۴-۴۴				
۵			۴۲-۵۵	۵۷-۹۴				
۶				۱۰۲-۱۶۹				
۷					۱۲۶-۵۸۶			

جدول (۱-۵-۳)

تعمیم. می‌توان تعریف $R(p,q)$ برای دو پارامتر را برای به صورت $R(p_۱,p_۲,p_۳,\ldots,p_k)$ تعمیم داد. فرض کنید $k, p_۱, p_۲, \ldots p_k$ اعداد طبیعی باشند که $k \geq ۳$. عدد رمزی $R(p_۱,p_۲,p_۳,\ldots,p_k)$ را کمترین مقدار طبیعی n تعریف می‌کنیم که اگر یال‌های هر دسته نقطه nتایی را هرگونه با k رنگ، رنگ کنیم، یک دسته نقطه‌ی $p_۱$ تایی یافت شود که با رنگ (۱) رنگ آمیزی شده باشد یا یک دسته نقطه‌ی $p_۲$ تایی یافت شود که به رنگ (۲) باشد... یا یک دسته نقطه‌ی p_k تایی باشد که با رنگ (k) رنگ آمیزی شده باشد. طبق مثال ۱-۴-۳ می‌دانیم که $R(۳,۳,۳) \leq ۱۷$.در سال ۱۹۵۵، «گرین وود» و «گلیسن» [GG] ثابت کردند که $R(۳,۳,۳) \geq ۱۷$ بنابراین $R(۳,۳,۳) = ۱۷$.

جالب است بدانیم که این تنها مقدار مشخص $R(p_1,\dots,p_k)$ است که $p_i \geq 3$ و $k \geq 3$.

☜تبصره نهایی:

چیزی که در این جا از اعداد رمزی ذکر شد قسمتی از تئوری اعداد رمزی بود. علاقه‌مندان می‌توانند که به کتاب [GRS] نوشته‌ی «گراهام»، «روتچایلد» و « اسپنسر» مراجعه نمایند. تئوری اعداد رمزی نیز مانند تئوری‌های ترکیبیات دارای کاربردهای فراوانی است. مثلاً این تئوری در نظریه اعداد، هندسه، رایانه، مخابرات، و تصمیم گیری‌های سیاسی کاربرد فراوانی دارد علاقه‌مندان می‌توانند به مقاله‌های [G] و [GS] مراجعه نمایند. همچنین برای دیدن کاربردهای گوناگون اعدادرمزی می‌توانید به فصل ۸ از کتاب نوشته‌ی « رابرتش» کتاب [۱۲] در فهرست منابع آخر کتاب مراجعه کنید.

❖ تمرینات فصل سوم

۱- اگر پنج نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع یکه در نظر بگیریم، نشان دهید که فاصله‌ی دو تا از آنها حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲- مجموعه‌ی n+۱ تایی C را از نقاط مجزا روی محیط دایره‌ای یکه در نظر بگیرید. نشان دهید دو نقطه‌ی مجزای a و b وجود دارندکه فاصله آن دو از $۲\sin\frac{\pi}{n}$ تجاوز نکند.

۳- مجموعه‌ی ۹ عضوی S را از نقاط داخل مربع‌یکه (با ضلع یک) در نظر بگیرید. نشان دهید همیشه سه نقطه وجود دارد که مساحت مثلث ساخته شده با این سه نقطه از $\frac{۱}{۸}$ تجاوز نکند(مسابقه ریاضی بیجینگ، ۱۹۶۳).

٤- نشان دهید که در هر مجموعه‌ی ۵ عضوی از اعداد صحیح سه عضو وجود دارند که جمع‌شان بر ۳ بخش‌پذیر است.

۵- مجموعه‌ی n+۱ عضوی A را در نظر بگیرید. نشان دهید دو عدد متمایز a و b در A وجود دارند که $n|(a-b)$

۶- فرض کنید مجموعه‌ی $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_{۲k+۱}\}$ مجموعه‌ای از ۲k+۱ عدد طبیعی باشد. نشان دهید برای هر تبدیل $a_{i_۱}.a_{i_۲}.a_{i_۳}\dots a_{i_{۲k+۱}}$ حاصل‌ضرب عددی زوج است. $\prod_{i=۱}^{۲k+۱}(a_{i_j}-a_j)$

۷- زیر مجموعه‌ی n+۱ عضوی اعداد {۱،۲،...،۲ n} را در نظر بگیرید. ثابت کنید دو عدد متمایز a و b در A وجود دارند که نسبت به هم اول باشند.

۹- ثابت کنید در هر جمعی از افراد، دو نفر وجود دارند که تعداد آشناهایشان در جمع با هم برابر باشد.

۱۰- فرض کنید $C = \{r_۱, r_۲, \ldots, r_{n+۱}\}$ مجموعه‌ای از $n+۱$ عدد حقیقی باشد که $۰ \le r_i < ۱$، $(i = ۱,۲,\ldots,n+۱)$. نشان دهید دو عدد (r_p) و (r_q) در C وجود دارند که

$$|r_p - r_q| < \frac{۱}{n}$$

۱۱- فرض کنید A مجموعه‌ای از ۱۳ عدد حقیقی باشد. نشان دهید دو عدد x و y در A وجود دارند که $۰ < \dfrac{x-y}{۱+xy} \le ۲-\sqrt{۳}$.

۱۲- مجموعه‌ای $۲n$ عضوی را از نقاط فضا در نظر بگیرید. فرض کنید با $n^۲+۱$ یال به هم وصل شده‌اند. نشان دهید که حداقل یک مثلث وجود دارد که رؤوسش نقاط مجموعه و اضلاعش از $n^۲+۱$ پاره خط باشند. برای هر عدد n نشان دهید می‌توان طوری $n^۲$ پاره خط بین نقاط یک مجموعه‌ی $۲n$ عضوی رسم کرد که هیچ مثلثی به وجود نیاید(پاتنام، ۱۹۵۶).

۱۳- ۹ نقطه با مختصات صحیح در فضای سه بعدی اقلیدسی در نظر گرفته شده‌اند. نشان دهید نقطه‌ای با مختصات صحیح وجود دارد که روی پاره خطی قرار داشته باشد که دو نقطه از این ۹ نقطه را به هم وصل می‌کند(پاتنام، ۱۹۷۱).

۱٤- (الف) نقطه $(a_۱, a_۲)$ در صفحه‌ی x-y یک نقطه شبکه‌ای نامیده می‌شود اگر هر دو عدد $a_۱, a_۲$ صحیح باشند. مجموعه $L_۲$ از پنج نقطه شبکه‌ای تشکیل شده است، ثابت کنید دو نقطه‌ی مجزا در $L_۲$ وجود دارند که نقطه‌ی میانی آن دو نیز یک نقطه‌ی شبکه‌ای (نه لزوما" در $L_۲$) باشد.

(ب) نقطه‌ی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ در R^n، یک نقطه‌ی شبکه‌ای نامیده می‌شود اگر تمام a_iها اعدادی صحیح باشند. ثابت کنید اگر L_n مجموعه‌ای از $n^۲+۱$ نقطه‌ی شبکه در R^n، باشد، دو نقطه در L_n وجود دارند که نقطه میانی آنها نیز یک نقطه‌ی

شبکه‌ای (نه لزوماً در L_n) باشد.

۱۵- فرض کنید A مجموعه ۲۰ عضوی از اعداد تصاعد حسابی ۱,۴,۷,...,۱۰۰ باشند. ثابت کنید دوعدد مجزا در A وجود دارند که مجموعشان ۱۰۴ باشد(پاتنام، ۱۹۷۸).

۱۶- فرض کنید A مجموعه‌ای از ۶ نقطه در صفحه باشد که هیچ سه تایی از آنها بر یک خط واقع نیستند. نشان دهید در بین مثلث‌های ساخته شده با زیر مجموعه‌های سه نقطه‌ای A، حداقل یک مثلث وجود دارد که شامل زاویه داخلی کوچکتر یا مساوی 30° باشد(المپیادهای مسکو، ۲۶ امین دوره).

۱۷- فرض کنید $n \geq 3$ عددی فرد باشد. نشان دهید عددی در مجموعه‌ی

$$\{2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots, 2^{n-1}-1\}$$

وجود دارد که بر n بخشپذیر باشد. (المپیاد شوروی، ۱۹۸۰)

۱۸- در یک میهمانی، n نفر حضور دارند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند به طوری که بتوان از میان $n-2$ نفرباقیمانده حداقل $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ نفر جدا کرد که هر کدام یا هر دو این افراد را بشناسند و یا هیچکدام را نشناسند. در نظر داشته باشید که آشنایی یک رابطه دو طرفه است و $\lfloor x \rfloor$ برابر بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x است (المپیاد ریاضی آمریکا،۴/ ۱۹۸۵).

۱۹- برای مجموعه متناهی A از اعداد صحیح، $s(A)$ را مجموع اعضای A تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر S یک زیر مجموعه از $\{1,2,\ldots,14,15\}$ باشد که برای هر دو زیر مجموعه‌ی جدا از هم B و C از S $s(A) \neq s(B)$، آنگاه $|S| \leq 5$ (المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۸۶).

۲۰- در دنباله‌ی ماتریسی صفحه‌ی بعد:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{matrix}$$

که از $m\times n$ عدد حقیقی تشکیل شده است. اختلاف بزرگترین و کوچکترین عدد در هر سطر حداکثر d است. حال اعداد هر ستون را به ترتیب نزولی مرتب می‌کنیم پس عضوهای بزرگتر در سطر اول و اعضای کوچکتر در سطر آخر قرار می‌گیرند. نشان دهید در این ماتریس مرتب شده نیز اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین عدد در هر سطر حداکثر d است(مسابقات ریاضی سوئد، ۱۹۸۶).

۲۱- در یک ۱۰ ضلعی منتظم تمام اقطار رسم شده‌اند. به هر نقطه یا رأس، عدد "۱+" می‌دهیم، اگر اقطار در آنجا تقاطع داشته باشند (فقط نقاط داخلی را در نظر می‌گیریم.) می‌توان در یک زمان تمام اعداد روی یک قطر یا یک ضلع را تغییر علامت داد. آیا می‌توان بعد از چند بار انجام این عمل به حالتی رسید که تمام علامت‌ها مثبت یا منفی باشند؟ (مسابقه بین‌المللی ریاضی دانشجویان سال آخر، ۱۹۸۴)

۲۲- در یک مسابقه‌ی دوره‌ای فوتبال هردو تیم با هم یک‌بار بازی می‌کنند،(تیم برنده ۲ امتیاز و تیم بازنده ۰ امتیاز می‌گیرد و در صورت تساوی هر تیم ۱ امتیاز می‌گیرد) ۲۸ تیم شرکت کرده‌اند. می‌دانیم که بیش از ٪۷۵ بازی‌ها به تساوی کشیده شده‌اند. ثابت کنید دو تیم وجود دارند که امتیاز نهایی آنها مساوی است(مسابقه بین‌المللی ریاضی دانشجویان سال‌های اول،۱۹۸۶).

۲۳- در یک مسابقه ریاضی، ۱۵ مساله که از ۱ تا ۱۵ شماره گذاری شده‌اند، مطرح شده است. هیچ دانش‌آموزی به دو سؤال پشت سر هم درست جواب نمی‌دهد. هر دانش‌آموز از هر سؤال یا نمره کامل می‌گیرد و یا هیچ نمره‌ای نمی‌گیرد. اگر ۱۶۰۰

داوطلب در مسابقه شرکت کرده باشند؛ ثابت کنید حداقل دو نفر وجود دارند که شکل امتیاز گرفتن آنها یکی باشد(۲۴ امین المپیاد ریاضی اسپانیا، ۱۹۸۹).

۲٤- اعداد طبیعی $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$ را در نظر بگیرید که $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n$ و $a_n \ne n+1$. نشان دهید اگر n عددی زوج باشد آنگاه برای زیر مجموعه‌ی K از $\{1,2,\ldots,n\}$ داریم: $\sum_{i \in k} a_i = n$. نشان دهید حکم، همچنین برای n های فرد وقتی که $a_n \ne 2$ باشد صحیح است(این مساله توسط «جی‌لانگ‌یر» به ماهنامه ریاضی آمریکا (۸۰،۱۹۷۳؛۹۴۷-۹۴۶) پیشنهاد شده بود).

۲۵- فرض کنید X مجموعه‌ای نا تهی از n شی و C مجموعه‌ای از $p \ge 1$ رنگ باشد. بزرگترین مقدار p را بیابید که در شرط زیر صدق کند: اگر هر زیر مجموعه‌ی از X توسط فقط و فقط یک رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. آنگاه دو زیر مجموعه مجزای A و B در X موجود باشند که A, B, $A \cup B$ و $A \cap B$ یک رنگ داشته باشند(این مسأله توسط تا مسکو به ماهنامه ریاضی آمریکا(۸۷۶;۱۹۸۸،۹۵) پیشنهاد شده است).

۲۶- یک دستگاه p معادله و q مجهولی، $(q=2p)$ با متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_q$ در نظر بگیرید:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q = 0$$

....

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q = 0$$

که تمام ضرایب a_{ij} از مجموعه‌ی $\{-1,0,1\}$ هستند. نشان دهید این دستگاه شامل یک دسته جواب $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ است که

الف) تمام x_j ها اعداد صحیح باشند.

ب) حداقل یکی از x_j ها مخالف صفر باشد.

ج) $x_j \le q$ ؛$(j = ۱,۲,\dots,q)$

(المپیاد جهانی ریاضی، ۱۹۷۶/۵)

۲۷- در یک کنفرانس علمی ۱۹۷۸ دانشمند از شش کشور شرکت دارند. که آنها را از شمارهٔ ۱ تا ۱۹۷۸ شماره گذاری می‌کنیم. ثابت کنید حداقل یک نفر وجود دارد که عدد آن مجموع اعداد دو نفر از هموطنشان یا دو برابر عدد یکی از هموطنشان باشد (المپیاد جهانی ریاضی،۶/ ۱۹۷۸).

۲۸- دو عدد طبیعی p و q داده شده‌اند نشان دهید در هر دنباله‌ی $R(p,q)$ عضوی از اعداد صحیح متمایز با یک زیر دنباله‌ی p عضوی صعودی و یا یک دنباله‌ی q عضوی نزولی وجود دارد.

۲۹- ثابت کنید که در هر دنباله‌ی $pq+۱$ عددی از اعداد مجزای حقیقی، یا یک زیر دنباله‌ی $p+۱$ عددی صعودی و یا یک زیر دنباله‌ی $q+۱$ عددی نزولی وجود دارد («اردوش» و «زکریس» (۱۹۳۵)).

۳۰- نشان دهید:

الف) $R(q,p)=R(p,q)$

ب) $R(۲,q)=q$

۳۱- نشان دهید اگر p و p' و q و q' اعداد طبیعی باشند که $p' \le p$ و $q' \le q$

الف) $R(p',q') \le R(p,q)$

ب) $R(p-۱,q) \le R(p,q)-۱$ ؛$(p \ge ۲)$

ج) $R(p',q') = R(p,q) \Leftrightarrow (p = p' , q = q')$

۳۲- برای اعداد طبیعی p و q نشان دهید:

$$R(p,q) \le \binom{p+q-۲}{p-۱}$$

۳۳- نشان دهید:

$$R(q,۳) \le \tfrac{۱}{۲}(q^۲+۳)$$

۳٤- نشان دهید: $R(۳،۵)=۱۴$.

۳۵- نشان دهید:

الف) $R(۴،۴) \leq ۱۸$

ب) $R(۳,۶) \leq ۱۹$

۳۶- نشان دهید:

الف) $R(p_۱, p_۲, \ldots, p_t) = ۱$ اگر حداقل یکی از p_iها برابر یک باشد.

ب) $R(p,۲,۲,\ldots,۲) = p$؛ $(p \geq ۲)$

۳۷- فرض کنید $k, p_۱, p_۲, \ldots p_k$ اعداد طبیعی باشند. نشان دهید:

$$R(p_۱, p_۲, \ldots, p_k) = R(p_۱, p_۲, \ldots p_k, ۲)$$

۳۸- نشان دهید اگر $(k \geq ۲)$ عدد $(p_i \geq ۲)$ داده شده باشند. آنگاه :

$$R(p_۱, p_۲, \ldots, p_k) \leq \sum_{i=۱}^{k} R(p_۱, \ldots, p_{i-۱}, p_i - ۱, p_{i+۱}, \ldots, p_k) - (k-۲)$$

۳۹- اعداد $k \in N$ و $p_۱, p_۲, \ldots p_k \in N^*$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\sum_{i=۱}^{k} p_i = p$ با استقرار روی p نشان دهید.

$$R(p_۱ + ۱, p_۲ + ۱, \ldots, p_k + ۱) \leq \frac{p!}{p_۱! p_۲! \ldots p_k!}$$

٤۰- فرض کنید $k \geq ۲$ عددی طبیعی و R_k نمایش دهندهٔ $R\underbrace{(۳،۳،۳،\ldots،۳،۳)}_{k}$ باشد.

ثابت کنید:

(الف) (I) $R_k \leq k(R_{k-۱} - ۱) + ۲$؛ $(k \geq ۳)$

(II) $R_k \leq \lfloor k!e \rfloor + ۱$

(III) $R_۴ \leq ۶۶$

(توسط «گرین دود» و «گلیشن» به ماهنامه ریاضی کاناد(۱۷:۱۹۵۵،۷) پیشنهاد شده است).

ب) $R_k \geq ۲^k + ۱$

۴۱- فرض کنید k عددی طبیعی و $\{S_۱, S_۲, \ldots, S_k\}$ یک افراز از مجموعه‌ی $N_n = \{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ باشد که $n=R(\underbrace{۳،۳،\ldots،۳}_{k})$. نشان دهید عدد $i \in \{۱,۲,\ldots,k\}$ و اعداد صحیح نه لزوماً متمایز a و b و c در S_i وجود دارند که $a+b=c$

۴۲- نشان دهید:

الف) $R(۳،۳،۲)=۶$

ب) $R(۳,۳,۳) \leq ۱۷$ (مثال ۱-۴-۳ را ببینید.)

۴۳- یک دسته نقطه‌ p تایی تک‌رنگ نامیده می‌شود اگر تمام رؤوسش یک‌رنگ باشند.

الف) نشان دهید برای هر رنگ‌آمیزی یک دسته نقطه‌ی ۶ تایی با دو رنگ دو مثلث تک رنگ یافت می‌شود.

ب) یک راه رنگ‌آمیزی دسته نقطه‌ی ۶ تایی با دو رنگ ارایه دهید که در آن فقط دو مثلث تک رنگ وجود داشته باشد.

۴۴- رؤوس یک دسته نقطه‌ی ۷ تایی را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. نشان دهید حداقل ۴ مثلث تک رنگ وجود دارد.

۴۵- فرض کنید رؤوس یک دسته نقطه‌ی n تایی را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم و $T(n)$ تعداد مثلث‌های تک رنگ باشد. نشان دهید:

$$T(n) \geq \begin{cases} \frac{۱}{۳}k(k-۱)(k-۲) \;\text{؛}\; n=۲k \\ \frac{۲}{۳}k(k-۱)(۴k+۱) \;\text{؛}\; n=۴k+۱ \\ \frac{۲}{۳}k(k+۱)(۴k-۱) \;\text{،}\; n=۴k+۳ \end{cases}$$

۴۶- هر کدام از پاره‌خط‌هایی را که ۹ نقطه‌ی مجزا روی محیط دایره را به هم وصل کرده‌اند را با قرمز یا آبی رنگ می‌کنیم. هر مثلثی که از ۳ نقطه از این ۹ نقطه تشکیل شده است حداقل شامل یک ضلع قرمز است. ثابت کنید چهار نقطه وجود دارند که تمام ۶ پاره خط که آنها را به هم وصل کرده‌اند، قرمز باشند (المپیاد ریاضی، کانادا ۱۹۷۰).

فهرست:

[CG] F.R.K.Chung and C.M.Grinsted,A survey of bounds for classical Ramsey numbers,I.Graph theory , ۷ (۱۹۸۳),۲۵-۳۷

[CL] V.Chokbowornpaishand and V. Longani, Lower bounds for some Ramsey numbers, Southeast Asian Bulletin of Marhs ,۱۵ (۱۹۹۱),۱۰۵-۱۰۷

[E]P.Erdos.Some rmarkson the theory of graphs ,Bull.Amer.Math.Soc.۵۳(۱۹۴۷), ۲۹۲-۲۹۴

[ES]P. Erdos and Szekeres , A eombintorial problem in gerometry, coposito Math. ۲ (۱۹۳۵),۴۶۴-۴۷۰)

[G] M . Gardner, Mathematical ,Scientific American,۲۳۷(۵)(November, ۱۹۷۷), ۱۸-۲۸

[GR]C.M.Grinstead and S.m.Roberts. ON Ramseys R(۳،۸)and R(۳،۹) I. Combinatorial theary ser.B, ۳۳ (۱۹۸۲),۲۷-۵۱

[GRS] R.L.Graham ,B.L.Rothschild and I.H.Spencer , Ramsey thery , second Edition , Iohn Wiley&Sons , LnC., ۱۹۹۰

[GS]R.L Graham. B.H Spencer, Ramsey theory , Scientific American Iuly (۱۹۹۰),(۱۱۲-۱۱۷

[GG]R.E.Greenwood and A.M.Gfeason , combintationl relation and chromatic graphs. eanad.I .Math .۷(۱۹۵۵),۱-۷

[MZ] B.D.Mckay and k.M.Zhang, the value of the Ramsey number R(۳،۸), I .Graph theory, ۱۶ (۱۹۹۲), ۹۹-۱۰۵

[Ra] F.P.Ramsey , On a problem of formal logic, prsc .London Math .Soc. ۳۰(۱۹۳۰),۲۶۴-۲۸۶

[Re] k.R. Rebman, the pigeonhol principle, Mathematical gems , two-gear Colleye Mathematical Iurnal , ۱۰(۱۹۷۹),۳-۱۲

-[W] K.Waiker, Dichromatic graphe ramsey numbers , I combintorial theory . ۵(۱۹۶۸),۲۳۸ ۲۴۳

فصل۴

اصل شمول و عدم شمول

۱-٤- مقدمه

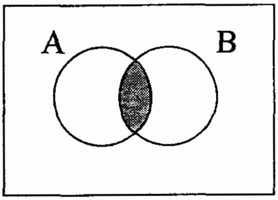
اصل جمع را که در فصل اول بیان شد می‌توان به صورت حالت خاصی از اصلی دیگر در نظر گرفت.

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند که $A \cap B = \varnothing$. آنگاه داریم :

$$\left|A \cup B\right| = \left|A + B\right|$$

ولی مقدار $|A \cup B|$ را وقتی که $A \cap B \neq \varnothing$، چگونه به دست آوریم؟
اگر $A \cap B \neq \varnothing$، آنگاه در شمارش اعضای $|A|$ و $|B|$ عضوهایی که در $(A \cap B)$ هستند، دقیقا" دو بار شمرده می‌شوند. پس اگر تعداد آنها را کم کنیم. مقدار نهایی به دست می‌آید:

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right| \qquad (۴-۱-۱)$$



شکل ۱-۱-٤

همان طور که در فصل گذشته دیدیم، درحل مسایل شمارش، مجموعه‌ی اشـیایی را که باید شمرده شوند، می‌توان به زیر مجموعـه‌های جـدا از هـم تقسـیم کـرد و بـا استفاده از اصل جمع، جواب مسأله را دقیقا" به دست آورد. امـا تقسیم مجموعـه بـه زیرمجموعه‌های جدا از هم قابل شمارش همیشه کار ساده‌ای نیسـت. در ایـن مواقـع، فرمول (۱-۱-۴) مـا را بـا راه حلـی قوی‌تـر کمـک می‌کنـد. مجموعـه‌ی داده شـده را همانند $A \cup B$ در نظر می‌گیریم که A و B لزوما" از هم جدا نیسـتند. حـال $|A|$، $|B|$ و $|A \cap B|$ را بدست می‌آوریم. فرمول (۱-۱-۴) ساده‌ترین شکل اصلی بـه نـام *اصل شمول و عدم شمول* است، که ما در این فصل به بررسی آن خواهیم پرداخت.

۲-٤- اصل

اجازه دهید کـه بـا اسـتفاده از فرمـول (۱-۱-۴) مقـداری بـرای $|A \cup B \cup C|$ کـه C,B,A سه مجموعه‌ی دلخواه متناهی هستند. به دست آوریم:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| \qquad \text{[خاصیت شرکت پذیری]}$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \qquad \text{[فرمول ۱-۱-۴]}$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \qquad \text{[خاصیت توزیع پذیری]}$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C|$$ [فرمول ۱-۱-۴]

$$-(|A \cap C| + |B \cap C|) - (|(A \cap C) \cap (B \cap C)|)$$

$$= (|A| + |B|) - (|A| \cap |B| + |A \cap C| + |B \cap C| A \cap B \cap C|$$

$$(|A| + |B| + |C|) - (|A \cap C| + |A \cap C|$$ [فرمول ۱-۱-۴]

$$+ |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

بنابراین داریم:

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \quad (۴-۲-۱)$$

با استقرا روی q، تعداد مجموعه‌ها، می‌توان فرمول کلی برای اجتماع q مجموعه به دست آورد(مسأله‌ی ۷-۴ را ببینید.)

قضیه‌ی ۱-۲-۴ به ازای هر q مجموعه‌ی متناهی $A_۱, A_۲, \dots A_q$ ؛ $q \geq ۲$

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_q| = \sum_{i=۱}^{q} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_K|$$

$$- \dots + (-۱)^{q+۱} |A_۱ \cap A_۲ \cap \dots \cap A_q|$$

ما در بخش ۳، نتیجه‌ی کلی‌تری را اثبات می‌کنیم که شامل قضیه‌ی (۱-۲-۴) در حالت خاصی است.

مثال ۱-۲-۴ مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, \dots, ۵۰۰\}$ را در نظر بگیرید. تعداد عضوهایی از S را که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند، بیابید.

قبل از حل کردن مساله، دو نکته را یادآور می‌شویم که در حل مساله ما را یاری

می‌کنند.

(۱) به ازای هر عدد طبیعی n، تعداد اعداد بخش‌پذیر بر n که در S موجودند، برابر $\left\lfloor \frac{۵۰۰}{n} \right\rfloor$ است.

(۲) عدد طبیعی c برهر دو عدد a و b بخش پذیر است اگر و فقط اگر بر ک.م.م آنها بخش‌پذیر باشد.

حل: به ازای هر عدد طبیعی k، مجموعه‌ی $B_k = \{x|x \in s$ و $k|x\}$ را تعریف می‌کنیم. پس در مثال می‌خواهیم $|B_۲ \cup B_۳ \cup B_۵|$ را محاسبه کنیم. با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و نکته‌ی (۱) داریم:

$$|B_۲| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۲} \right\rfloor = ۲۵۰$$

$$|B_۳| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۳} \right\rfloor = ۱۶۶$$

$$|B_۵| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۵} \right\rfloor = ۱۰۰$$

و با استفاده از نکته‌های (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$|B_۲ \cap B_۳| = |B_۶| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۶} \right\rfloor = ۸۳$$

$$|B_۲ \cap B_۵| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۱۰} \right\rfloor = ۵۰$$

$$|B_۳ \cap B_۵| = |B_{۱۵}| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۱۵} \right\rfloor = ۳۳$$

$$|B_۲ \cap B_۳ \cap B_۵| = |B_{۳۰}| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۳۰} \right\rfloor = ۱۶$$

حال با استفاده از اصل شمول و عدم شمول

$$|B_۲ \cup B_۳ \cup B_۵| = (|B_۲|+|B_۳|+|B_۵|) - (|B_۲ \cap B_۳|+|B_۲ \cap B_۵|+|B_۳ \cap B_۵|) + |B_۲ \cap B_۳ \cap B_۵|$$
$$= (۲۵۰+۱۶۶+۱۰۰) - (۸۳+۵۰+۳۳) + ۱۶ = ۳۶۶ \quad \blacksquare$$

۳-٤- تعمیم

در مثال ۱-۲-۴، تعداد اعدادی از $S = \{۱,۲,\ldots,۵۰۰\}$ را یافتیم که حداقل بریکی از اعداد ۵،۳،۲ بخش پذیر بودند. می‌توان سؤال‌های دیگری از این قبیل طرح کرد. برای مثال، تعداد اعداد صحیح عضو S را بیابید که

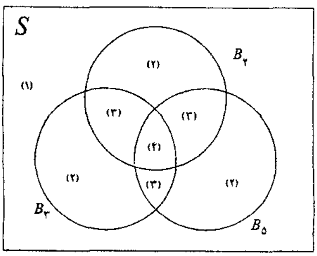
(الف) بر هیچکدام از اعداد ۳،۲ و ۵ بخش‌پذیر نباشد.

(ب) دقیقاً بر یکی ازاعداد ۳،۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

(ج) دقیقاً بر دو تا از اعداد ۳،۲ و ۵ بخش پذیر باشد.

(د) بر تمام اعداد ۳،۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

برای سادگی کار، مجموعه‌های خواسته شده را در شکل(۱-۳-۴) نشان داده‌ایم.



شکل ۱-۳-٤

سؤال بالا را نمی‌توان مستقیماً" با قضیه‌ی ۱-۲-۴حل کرد. در این بخش نتیجه کلی‌تری را بیان می‌کنیم که با استفاده از آن بتوان به این‌گونه سؤالات پاسخ داد. فرض کنید S یک مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه هر زیر مجموعه‌ی A از S شامل ویژگی P است اگر به ازای هر $x \in S$

$x \in A \Leftrightarrow x$ دارای ویژگی P است.

برای مثال، اگر $S = \{۱,۲,..,۱۰\}$ و $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، آنگاه $A=\{x|$ دارای P است $x\}$ که می‌توان خاصیت P را "۵>" تعریف کرد. به عبارت دیگر، هر خاصیت P برای اعضاءS یک زیر مجموعه A از S را تعریف می‌کند. برای مثال، اگر $S = \{۱,۲,...,۱۰\}$ و P ویژگی بخش پذیری بر ۳ باشد آنگاه P زیر مجموعه‌ی $\{۳،۶،۹\}$ از S را تعریف می‌کند. با نظر به این، منطقی به نظر می‌رسد که در این تعمیم به جای زیر مجموعه‌ها از ویژگی‌ها استفاده کنیم. با استفاده از این تعریف، فرمول‌های گفته شده، ساده می‌شوند.

فرض کنید S یک مجموعه‌ی مرجع n عضوی باشد و $P_۱, P_۲, \ldots, P_q$، ویژگی‌هایی باشند که برای اعضای S تعریف شده‌اند، ($q>۱$). واضح است که یک خاصیت می‌تواند متعلق به هیچ، یا بعضی یا همه‌ی اعضای S باشد و هر عضو دلخواه شامل هیچ، بعضی و یا همه‌ی q خاصیت باشد. به ازای عدد صحیح $m(۱ \le m \le q)$ ، $E(m)$ را برابر تعداد عضوهای S تعریف می‌کنیم که دقیقاً" m ویژگی از q ویژگی را دارا باشند و $\omega(P_{i_۱}\ P_{i_۲}\ \ldots\ P_{i_m})$ نشان دهندهٔ تعداد عضوهای S است که دارای ویژگی‌های $p_{i_۱}, p_{i_۲}, \ldots, p_{i_m}$ هستند و

$$\omega(m) = \sum (\omega(P_{i_۱}\ \ P_{i_۲}\ \ \ldots P_{i_m}))$$

که $\{i_۱, i_۲, \ldots, i_m\}$ ترکیبی mتایی از $\{۱،۲،...،q\}$ است.

می‌توان $\omega(۰)$را برابر $|S|$ تعریف کرد. نتیجه‌ای که می‌خواهیم به آن دست پیدا کنیم در حقیقت تعمیم یافته‌ی اصل شمول وعدم شمول است:

قضیه ۱-۳-۴ (تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول)

فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی و $\{P_۱, P_۲, \ldots, P_q\}$ مجموعه‌ای شامل q ویژگی باشد. آنگاه به ازای عدد طبیعی $m = ۰,۱,\ldots,q$

$$E(m) = \omega(m) - \binom{m+۱}{m}\omega(m+۱) + \binom{m+۲}{m}\omega(m+۲) - \ldots + (-۱)^{q-m}\binom{q}{m}\omega(q)$$

$$= \sum_{k=m}^{q}(-۱)^{k-m}\binom{k}{m}\omega(k) \qquad (۴-۳-۱)$$

این نتیجه را با مثالی شرح می‌دهیم.

مثال ۱-۳-۴ فرض کنید $S=\{۱،۲،...،۱۴\}$ و $P_۱, P_۲, P_۳, P_۴$ چهار خاصیت داده شده، باشند. عنصر $j \in S$ دارای خاصیت P_i است اگر وفقط اگر خانه‌ی (i,j) در جدول (۱-۳-۴) علامت خورده باشد.

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
$P_۱$	✓			✓				✓	✓			✓		
$P_۲$	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓		✓	
$P_۳$	✓		✓					✓	✓		✓			✓
$P_۴$	✓		✓					✓		✓	✓			✓

جدول ۱-۳-۴

واضح است که ۵ عضو از S وجود دارند که دارای ویژگی $P_۱$ باشند. پس طبق تعریف $\omega(P_۱) = ۵$ و ۴ عضو از S وجود دارند که دارای ویژگی‌های $P_۲$ و $P_۳$ هستند و $\omega\,(P_۲P_۳) = ۴$. ازجدول می‌توان مقادیر زیر را فهرست کرد.

$$\omega(P_۱)=۵ \qquad \omega(P_۲)=۹ \qquad \omega(P_۳)=۶ \qquad \omega(P_۴)=۶$$

$$\omega(P_۱P_۲)=۳ \qquad \omega(P_۱P_۳)=۳ \qquad \omega(P_۱P_۴)=۲$$

$$\omega(P_۲P_۳)=۴ \qquad \omega(P_۲P_۴)=۵ \qquad \omega(P_۳P_۴)=۵$$

$$\omega(P_۱P_۲P_۳)=۲ \qquad \omega(P_۱P_۲P_۴)=۲ \qquad \omega(P_۱P_۳P_۴)=۲ \qquad \omega(P_۲P_۳P_۴)=۴$$

$$\omega(P_۱P_۲P_۳P_۴)=۲$$

طبق تعریف داریم:

$$\omega(۰)=|S|=۱۴$$

$$\omega(۱)=\sum_{i=۱}^{۴}\omega(P_i)=۵+۹+۶+۶=۲۶$$

$$\omega(۲)=\sum_{i<j}\omega(P_iP_j)=۳+۳+۲۴+۵+۵=۲۲$$

$$\omega(۳)=\sum_{i<j<k}\omega(P_iP_jP_k)=۲+۲+۲+۴=۱۰$$

$$\omega(۴)=\omega(P_۱P_۲P_۳P_۴)=۲$$

همچنین از روی جدول، در می‌یابیم:

$$E(۰)=۲ \quad E(۱)=۴ \qquad E(۲)=۴ \quad E(۳)=۲ \qquad E(۴)=۲$$

فرض کنید $m=۰$ با استفاده از تساوی (۱-۳-۴) داریم:

$$E(۰)=۲=\omega(۰)-\omega(۱)+\omega(۲)-\omega(۳)+\omega(۴)$$
$$=۱۴-۲۶+۲۲-۱۰+۲=۲ \qquad ■$$

می‌توان درستی این تساوی را برای $m=۱،۲،۳$ نیز تحقیق کرد. حال به اثبات قضیه (۱-۳-۴) می‌پردازیم.

اثبات. برای اثبات نشان می‌دهیم که هر عضودر دو طرف تساوی صفر یا یک بار شمرده می‌شود.

عضو $x\in S$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که x دارای دقیقاً t ویژگی باشد.

حالت ۱- $t<m$ ، واضح است که x در هر دو طرف تساوی صفر بار شمرده می‌شود.
حالت ۲- $t=m$ ، در این حالت x یکبار در $E(m)$ شمرده می‌شود. و در طرف دیگر یکبار در $\omega(m)$ و صفر بار در $\omega(r)$، $r>m$،شمرده می‌شود. پس x در هر دو طرف یکبار شمرده شده است.
حالت ۳- $t>m$ ، حالا x صفر بار در $E(m)$ شمرده شده است و در طرف دیگر تساوی

C_m^t بار در $\omega(m)$

C_{m+1}^t بار در $\omega(m+1)$

......

C_t^t بار در $\omega(t)$

و x در $\omega(r)$، $r>t$ شمرده نمی‌شود. حال تعداد x های شمرده شده در سمت راست تساوی برابر است با

$$\lambda = C_m^t - C_m^{m+1}C_{m+1}^t + C_m^{m+2}C_{m+2}^t - \ldots + (-1)^{t-m}C_m^t C_t^t$$

کافی است ثابت کنیم که $\lambda = 0$. برای این کار طبق تساوی (۵-۱-۲) داریم:

$$C_k^n C_r^k = C_r^n C_{k-r}^{n-r}$$

پس:

$$\lambda = C_m^t - C_m^t C_1^{t-m} + C_m^t C_2^{t-m} - \ldots + (-1)^{t-m} C_m^t C_{t-m}^{t-m}$$
$$= C_m^t \left\{1 - C_1^{t-m} + C_2^{t-m} - \ldots + (-1)^{t-m} C_{t-m}^{t-m}\right\}$$

که با استفاده از تساوی (۲-۳-۲) این مقدار برابر صفر است. اثبات کامل است.■

همانطور که بعداً خواهیم دید، بیشتر کاربرد قضیه (۱-۳-۴) در حالت $m=0$ است.

نتیجه ۱:

$$E(\circ) = \omega(\circ) - \omega(۱) + \omega(۲) - \ldots + (-۱)^q \omega(q) = \sum_{k=\circ}^{q} (-۱)^k \omega(k) \quad (۴\text{-}۳\text{-}۲)$$

نتیجه ۲:

فرض کنید $A_۱, A_۲, \ldots, A_q$، زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی متناهی S باشند آنگاه :

$$|A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳ \cap \ldots \cap A'_q| = |S| - \sum_{i=۱}^{q} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-۱)^q |A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots A_q|$$

که A'_i متمم‌مجموعه‌ی A_i در S تعریف می‌شود ($A'_i = S - A_i$).

اثبات. برای هر عدد صحیح $i=۱،۲،\ldots،q$ ، ویژگی P_i را این گونه تعریف می‌کنیم که عضو x دارای ویژگی p_i است ، و اگر فقط اگر $x \in A_i$. طبق این تعریف داریم:

$$\omega(\circ) = |S| \qquad \omega(۱) = \sum_{i=۱}^{q} |A_i|$$

$$\omega(۲) = \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|, \ldots, \omega(q) = |\bigcap_{i=۱}^{q} A_i|$$

$$E(\circ) = |\bigcap_{i=۱}^{q} A'_i|$$

با استفاده از این مقادیر و نتیجه‌ی۱ ، نتیجه‌ی۲ به دست می‌آید.■

در حل مسایل پیچیده شمارش که ویژگی‌های گوناگونی مطرح شده‌اند ممکن است دانش‌آموزان اشتباه کنند. در اینجا کاربرد اصل شمول و عدم شمول و تعمیم یافته آن آشکار می‌شود: مسأله را به چند زیر مسأله ساده‌تر تقسیم می‌کنیم و در هر کدام از آنها خود اصل شمول از اشتباهات شمارشی جلوگیری می‌کند. این مطلب با طرح چند مثال در بخش‌های آینده روشن‌تر می‌شود.

از نظر تاریخی، قضیه (۱-۲-۴) در سال ۱۷۱۸ توسط « ا.دی مویــور» کشـف شـد و نتایج آن توسط« ه. پوین» کار در سال ۱۸۹۶ به دست آمد. فرمول‌هایی که در نتایج ۱ و ۲ بیان شده‌اند به طور جداگانه در سال‌های ۱۸۵۴ و ۱۸۸۳ توسـط « د. دی‌سیلویا» و« جی.سیلوستر» به دست آمدند. شکل احتمالی قضیه‌ی (۱-۳-۴) نیز در سال ۱۹۲۷ توسط« سی. جردن» طرح شد. بـرای اطلاعـات بیشـتر می‌توانیـد بـه مقالـه‌ی [T] در فهرست آخر فصل مراجعه کنید.

٤-٤- مثال‌هایی در مورد تعداد جواب معادلات و کوتاه‌ترین مسیرها

در این بخش دو مثال مطرح می‌کنیم که در یکی تعداد جواب‌های صحیح یک معادله خطی و در دیگری تعداد کوتاه‌ترین مسیرها در یک شبکه‌ی شطرنجی خواسته شده است که این دو مثال کاربرد تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول را به خوبی نشـان می دهند.

مثال ۱-۴-۴ تعداد جواب‌های صحیح و نا منفی معادله‌ی

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵$$

را بیابید که $x_۱ \leq ۵$ و $x_۲ \leq ۶$ و $x_۳ \leq ۷$.

فصل اول آموختیم که تعداد جواب‌هـای صحیـح و نـامنفی ایـن معادلـه بـدون هـیچ شرطی برابر $C_۲^{۱۷}$ است.

شرایط اضافی مساله را کمی پیچیده می‌کند. در واقع ما بـرای وقتـی کـه جواب‌هـای

مساله از بالا محدود نباشد راه حل ساده‌ای داریم.

حل. S را مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله فرض کنید.

سه ویژگی را برای اعضا S تعریف می‌کنیم. عضو (a_1,a_2,a_3) را در نظر بگیرید.

$$P_1 \Leftrightarrow a_1 \geq 6$$

$$P_2 \Leftrightarrow a_2 \geq 7$$

$$P_3 \Leftrightarrow a_3 \geq 8$$

تعداد جواب‌های معادله در واقع تعداد عضوهای S است که هیچ‌کدام از ویژگی‌های P_1, P_2, P_3 را دارا نیستند و برابر $E(0)$ است. حال با استفاده از نتیجه‌ی اول قضیه‌ی ۱-۳-۴ مقدار $E(0)$ را می‌یابیم. برای این کار باید مقادیر $\omega(i)$ را به ازای $i=0$ ،۱،۲، ۳، بیابیم.

$$\omega(0)=|S|=\binom{15+3-1}{15}=\binom{17}{2}$$

$$\omega(1)=\omega(P_1)+\omega(P_2)+\omega(P_3)$$

$$=\binom{(15-6)+3-1}{2}+\binom{(15-7)+3-1}{2}+\binom{15-8+3-1}{2}=\binom{11}{2}+\binom{10}{2}+\binom{9}{2}$$

$$\omega(2)=\omega(P_1P_2)+\omega(P_1P_3)+\omega(P_2P_3)$$

$$=\binom{(15-6-7)+3-1}{2}+\binom{(15-6-8)+31}{2}+\binom{(15-7-8)+3-1}{2}=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$$

$$\omega(3)=\omega(P_1P_2P_3)=0$$

بنابراین داریم:

$$E(0)=\omega(0)-\omega(1)+\omega(2)-\omega(3)=\binom{17}{2}-\binom{11}{2}-\binom{10}{2}-\binom{9}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$$

تبصره:

(۱) برای به کار بردن قضیه ۱-۳-۴ ابتدا باید مجموعه مرجع S را بشناسیم و بعد ویژگی‌هایی را برای اعضا آن تعریف کنیم. در مثال بالا ویژگی‌ها متمم شرایط مساله، $x_1 \leq ۵$, $x_2 \leq ۶$, $x_3 \leq ۷$ ، بودند که مقدار نهایی جواب‌ها هیچ‌کدام از ویژگی‌ها را دارا نبودند و $E(۰)$ جواب مساله است.

(۲) با استفاده از تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول معمولاً می‌توان جواب مستقیمی برای مساله پیدا کرد. ولی این راه حل همیشه ساده نیست. مثلاً در مثال ۱-۴-۴ می‌توانیم راه حل بسیار ساده‌تری را ادایه دهیم.

فرض کنیم:

$$t_1 = ۵ - x_1$$
$$t_2 = ۶ - x_2$$
$$.t_3 = ۷ - x_3$$

با استفاده از معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = ۱۵$, به معادله‌ی $t_1 + t_2 + t_3 = ۳$ می‌رسیم از شرایط $x_1 \leq ۵$ ، $x_2 \leq ۶$، $x_3 \leq ۷$, به شرایط $۰ \leq t_1 \leq ۵$، $۰ \leq t_2 \leq ۶$، $۰ \leq t_3 \leq ۷$ که در حل معادله غیر لازم‌اند. پس مقدار نهایی جواب مساله، برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $t_1 + t_2 + t_3 = ۳$ است که همان‌گونه که قبلاً دیدیم برابر $\binom{۵}{۲}$است. این مقدار $E(۰)$ است.

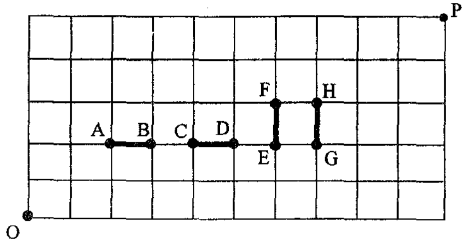
مثال ۲-۴-۴ در شکل ۱-۴-۴ یک شبکه مربعی ۶×۱۱ نمایش داده شده است. در این شبکه ۴ پاره خط EF,CD,AB و GH مشخص شده‌اند. تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی را ، که از O به P می‌روند، در هر یک از حالت‌های زیر به

دست آورید.

الف) از هیچکدام از این پاره خطها عبور نکند.

ب) هر مسیر از دقیقاً دو پاره خط از آنها عبور کند.

در حل مسأله از تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. اولین کاری که باید انجام دهیم این است که یک مجموعه مرجع S تعریف کنیم. از آنجا که راجع به کوتاه‌ترین مسیرها بحث می‌کنیم، طبیعی است که مجموعه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها از O به P (بدون هیچ شرطی) مجموعه‌ی مرجع در نظر گرفته شود. همان طور که در فصل اول مطالعه کردیم، $|S| = C_{۵}^{۱۰+۵} = C_{۵}^{۱۵}$. مرحله بعدی، تعریف ویژگی‌های مطلوب برای اعضای S است.



حل. S را مجموعه‌ی تمام کوتاه‌ترین مسیرها از O به P در نظر بگیرید. ما ۴ ویژگی را این گونه تعریف می‌کنیم:

یک مسیر در S،

دارای ویژگی $P_{۱}$ است اگروفقط اگر از AB بگذرد؛

دارای ویژگی $P_{۲}$ است اگروفقط اگر از CD بگذرد؛

دارای ویژگی $P_{۳}$ است اگروفقط اگر از EF بگذرد؛

دارای ویژگی P_4 است اگروفقط اگر از GH بگذرد؛

(الف) *اگر از هیچ کدام از پاره‌خط‌ها عبور نکند.*

پس هر مسیر که در این قسمت بررسی می‌شود باید هیچ کدام از ویژگی‌های P_1، P_2، P_3، P_4 را دارا نباشد، بنابراین تعداد این گونه مسیرها برابر $E(0)$ است.

$$\omega(0)=|S|=C^{15}_{5}$$
$$\omega(1)=\omega(P_1)+\omega(P_2)+\omega(P_3)+\omega(P_4)$$
$$=C^{4}_{2}C^{10}_{3}+C^{6}_{2}C^{8}_{3}+C^{8}_{2}C^{6}_{2}+C^{9}_{2}C^{5}_{2};$$
$$\omega(2)=\omega(P_1P_2)+\omega(P_1P_3)+\omega(P_1P_4)+\omega(P_2P_3)+$$
$$\omega(P_2P_4)+\omega(P_3P_4)$$
$$=C^{4}_{2}C^{8}_{3}+C^{4}_{2}C^{6}_{2}+C^{4}_{2}C^{5}_{2}+C^{6}_{2}C^{6}+C^{6}_{2}C^{5}_{2}+0;$$
$$\omega(3)=\omega(P_1P_2P_3)+\omega(P_1P_2P_4)+\omega(P_1P_3P_4)+\omega(P_2P_3P_4)=C^{4}_{2}C^{6}_{2}+C^{4}_{2}C^{5}_{2}+0+0;$$
$$\omega(4)=\omega(P_1P_2P_3P_4)=0;$$

و داریم:

$$E(0)=\omega(0)-\omega(1)+\omega(2)-\omega(3)+\omega(4)$$
$$-C^{15}_{5}-C^{4}_{2}C^{10}_{3}-C^{6}_{2}C^{8}_{3}-C^{8}_{2}C^{6}_{2}-C^{9}_{2}C^{5}_{2}$$
$$+C^{4}_{2}C^{8}_{3}+C^{4}_{2}C^{6}_{2}+C^{4}_{2}C^{5}_{2}+C^{6}_{2}C^{6}_{2}+C^{6}_{2}C^{5}_{2}$$
$$-C^{4}_{2}C^{6}_{2}-C^{4}_{2}C^{5}_{2};$$

(ب) *هر کدام از مسیرها دقیقاً" از دو پاره خط عبور کند.*

پس ما باید مقدار $E(2)$ را بیابیم که برابر است با:

$$E(2)=\omega(2)-C^{3}_{2}\omega(3)+C^{4}_{2}+\omega(4)$$
$$=C^{4}_{2}C^{8}_{3}+C^{4}_{2}C^{6}_{2}+C^{4}_{2}C^{5}_{2}+C^{6}_{2}C^{6}_{2}+C^{6}_{2}C^{5}_{2}$$
$$-\binom{3}{2}\left[C^{4}_{2}C^{6}_{2}+C^{4}_{2}C^{5}_{2}\right]$$

■.

۴-۵- نگاشت‌های پوشا و اعداد استرلینگ نوع دوم

همان گونه که در بخش ۶-۲ نشان دادیم ، تعداد نگاشت پوشا از N_n به N_m برابر $m!S(n,m)$ است که $S(n,m)$ ، عدد استرلینگ نوع دوم، برابر تعداد توزیع n شی متمایز در m جعبه‌ی همانند است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد؛ تعریف می‌شود. در بخش ۷-۱ بعضی مقادیر $S(n,m)$ را ارایه کردیم. حال با استفاده از نتیجه اول قضیه ۱-۳-۴، فرمول کلی برای تعداد نگاشت‌های پوشا از N_n به N_m بیان خواهیم کرد که فرمولی برای $S(n,m)$ به ما می‌دهد.

قضیه ۱-۵-۴ فرض کنید $F(n,m)$ تعداد نگاشتهای پوشا از N_n به N_m باشد آن‌گاه:

$$F(n,m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n \qquad (۴-۵-۱)$$

تبصره:

$F(n,m)$ را می‌توان برابر تعداد راه‌های توزیع n شیء متفاوت در m جعبه‌ی متفاوت به شرطی که هیچ جعبه‌ای خالی نماند تعریف کرد.

اثبات. فرض کنید S مجموعه توابع از N_n به N_m باشد. m ویژگی P_i $(i=1,2,\ldots,m)$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم: تابع $f:N_n\to N_m$ دارای ویژگی P_i است اگروفقط اگر $i\notin f(N_n)$. (به عبارت دیگر عضو i در N_m در برد f که از N_n به دست آمده، موجود نباشد.) آنگاه تابع $f:N_n\to N_m$ پوشا است اگروفقط اگر f دارای هیچ کدام از ویژگی‌های P_i $(i=1,2,\ldots,m)$ نباشد و

$$F(n,m) = E(\circ)$$

از طرفی داریم:

$$\omega(\circ) = |S| = m^n;$$

$$\omega(\text{۱}) = \sum_{i=\text{۱}}^{m} \omega(p_i) = \binom{m}{\text{۱}}(m-\text{۱})^n;$$

و در حالت کلی برای هر عددk ($\circ \le k \le m$) داریم:

$$\omega(k) = \sum_{\text{۱}\le i_\text{۱} < i_\text{۲} < \ldots < i_k \le m} \omega(P_{i_\text{۱}} P_{i_\text{۲}} P_{i_\text{۳}} \ldots P_{i_k}) = \binom{m}{k}(m-k)^n$$

و طبق نتیجه‌ی اول قضیه ۱-۳-۴،

$$\begin{aligned} F(n,m) &= E(\circ) \\ &= \sum_{k=\circ}^{m} (-\text{۱})^k \omega(k) \\ &= \sum_{k=\circ}^{M} (-\text{۱})^k C_k^m (m-k)^n \end{aligned}$$

و از آنجا که $m!S(n,m) = F(n,m)$ داریم:

نتیجه‌ی ۱: به ازای دو عدد طبیعی n و m

$$S(n,m) = \frac{\text{۱}}{m!} \sum_{k=\circ}^{m} (-\text{۱})^k C_k^m (m-k)^n$$

اعداد استرلینگ نوع دوم ، در تساوی‌های زیر صدق می‌کنند.

۱) $S(n,m) = \circ (n < m);$

۲) $S(n,m) = \text{۱};$

$$۳)\ S(n,n-۱)=\binom{n}{۲};$$

$$۴)\ S(n,n-۲)=\binom{n}{۳}+۳\binom{n}{۴}$$

با ترکیب این تساوی‌ها با نتیجه‌ی اول قضیه‌ی ۱-۵-۴ به تساوی‌ها زیرمی‌رسیم:

نتیجه‌ی ۲: به ازای اعداد طبیعی n و m ،

$$۱)\ \sum_{k۱}^{m}(-۱)^k\binom{m}{k}(m-k)^n=۰;\quad (n<m) \qquad (۴-۵-۲)$$

$$۲)\ \sum_{k=۱}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}(n-k)^n=n!; \qquad (۴-۵-۳)$$

$$۳)\ \sum_{k=۰}^{n-۱}(-۱)^k\binom{n-۱}{k}(n-۱-k)^n=(n-۱)!\binom{n}{۲}; \qquad (۴-۵-۴)$$

$$۴)\ \sum_{k=۰}^{n-۲}(-۱)^k\binom{n-۲}{k}(n-۲-k)^n=(n-۲)!\left\{\binom{n}{۳}+۳\binom{n}{۴}\right\} \qquad (۴-۵-۵)$$

☜ **تبصره:**

تساوی‌های ۲-۵-۴ و۳-۵-۴ به فرمول‌های اولر معروفند. خوانندگان می‌توانند برای اطلاع بیشتر به مقاله‌ی [G] در فهرست آخر فصل مراجعه نمایند.

۶-٤- به هم ریختگی و یک تعمیم

در سال ۱۷۰۸ ،« پیر ریموند دمونتمورت»(۱۷۱۹ -۱۶۷۸)، دانشمند فرانسوی مسأله زیر را مطرح کرد. دو دسته ۵۲ تایی کارت بازی A و B داریم. کارت‌های دسته

A را در یک ردیـف می‌چینیـم. سـپس کارت‌هـای دسـته B را بـه طـور اتفـاقی روی کارت‌های دسته A قرار می‌دهیم. به این ترتیب ۵۲ جفت کارت داریم. احتمال این را بیابید که هیچ دوکارتی در یک جفت همانند نباشند. این مسأله در زبـان فرانسـوی بـه "مسأله‌ی مسابقه" معروف است.

قسمت اصلی مسأله، یافتن تعداد راه‌های چیدن کارت‌هـای B روی کارت‌هـای A است به طوری که هیچ جفت همانندی پیش نیاید. طبیعی است که می‌تـوان مسـأله را این گونه مطرح کرد: تعداد جایگشت‌های $a_1 a_2 \ldots a_n$ از مجموعه‌ی N_n را بیـابید بـه طوری که به ازای $(i = 1,2,\ldots,n)$ ، $a_i \neq i$. این گونه جایگشت‌ها را به هم ریخته (هیچ عددی در جای خود نیست) می‌نامیم و D_n را تعداد جایگشت‌های به هم ریخته می‌نامیم . پس مسأله‌ی مسابقه‌ی بـه مسـأله‌ی یـافتن مقـدار D_n بـه ازای n=۵۲ تبدیـل می‌شود. مسأله کلی بـرای n دلخـواه توسـط « ان.برنولـی» و « پ. مونتمـورت» در سال ۱۷۱۳ حل شد. در سال ۱۹۸۳ ، « هانسون» ، « سـیفارت» و « وسـتون» حـالت کلی مساله‌ی به هم ریختگی را مطرح کردند. برای عـدد طبیعـی r ، $1 \leq r \leq n$ ، یـک تبدیل rتایی از N_n یک جایگشت $a_1 a_2 \ldots a_r$ از r عضـو N_n در یـک ردیـف نـامیده می‌شود. و یک تبدیل r تایی $a_1 a_2 \ldots a_r$ دارای نقطه ثابت است اگـر حداقـل بـه ازای یـک مقـدار i $(i=1,2\ldots r)$، $a_i = i$. بـرای عـدد طبیعـی k، $(0 \leq k \leq r)$، $D(n,r,k)$ برابر تعداد تبدیل‌های r تـایی از N_n اسـت کـه دقیقـا" k نقطـه ثـابت دارنـد. بنـابراین $D_n = D(n,n,0)$. مـا می‌خواهیـم فرمولـی بـرای $D(n,r,k)$ توسط تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول بیابیم.

مثال ۱-۶-۴ ۲۴ تبدیل ۳ تایی از مجموعه‌ی N_4 بر حسب تعداد نقـاط ثـابت در جدول ۱-۶-۴ مرتب شده‌اند.

تعداد نقاط ثابت	تبدیل‌های ۳ تایی N_4	$D(4,3,k)$
$k=0$	۳۱۴،۴۱۲،۲۴۱،۲۱۴،۳۱۲،۲۳۱ ۴۳۲،۳۴۲،۲۳۴،۴۳۱،۳۴۱	۱۱
۱	۴۲۱،۱۴۲،۳۲۱،۲۱۳،۱۳۲ ۳۲۴،۲۴۳،۴۱۳،۱۳۴	۹
۲	۴۲۳،۱۴۳،۱۲۴	۳
۳	۱۲۳	۱

جدول ۱-۶-۴

قضیه ۱-۶-۴ [HSW] برای اعداد صحیح n و r و k ($n \ge r \ge k \ge 0$ و $r \ge$) داریم:

$$D(n,r,k)=\frac{\binom{r}{k}}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^i\binom{r-k}{i}(n-k-i)! \tag{۴-۶-۱}$$

اثبات. S را مجموعه‌ی تبدیل‌های r تایی از N_n در نظر بگیرید. r ویژگی را این گونه برای اعضای S تعریف می‌کنیم:

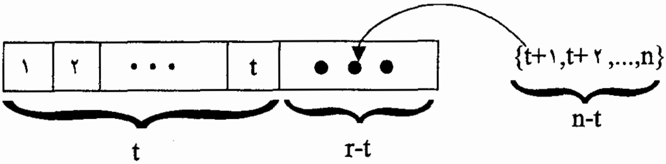
عضو $a_1a_2\dots a_r$ دارای ویژگی P_i است اگر و فقط اگر $a_i=i$ $(i=1,2,\dots,r)$

از تعریف بر می‌آید

$$.D(n,r,k)=E(k)$$

و در ضمن برای اعداد $0 \le t \le r$ داریم.

$$\omega(P_1P_2\dots P_t)=\binom{n-t}{r-t}\times(r-t)!=\frac{(n-t)!}{(n-r)!}$$



بنابراین داریم:

$$\omega(t)=\sum_{۱\le i_۱\le i_۲\le\ldots\le i_t\le r}\omega\left(P_i,P_{i_۲},\ldots,P_t\right)=\binom{r}{t}\frac{(n-t)!}{(n-r)!}$$

وطبق تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول داریم،

$$\begin{aligned}D(n,r,k)=E(k)&=\sum_{i=۰}^{r-k}(-۱)^i\binom{k-i}{k}\omega(k+i)\\&=\sum_{i=۰}^{r-k}(-۱)^i\binom{k+i}{k}\binom{r}{k+i}\frac{(n-k-i)!}{(n-r)!}\\&=\frac{۱}{(n-r)!}\sum_{i=۰}^{r-k}(-۱)^i\binom{r}{k}\binom{r-k}{k+i-k}(n-k-i)!\\&=\frac{\binom{r}{k}}{(n-r)!}\sum_{i=۰}^{r-k}(-۱)^i\binom{r-k}{i}(n-k-i)!\end{aligned}$$. ■

چند رابطه دربارهٔ $D(n,r,k)$ در مقاله‌ی [HSW] بیان شده است که در زیر می‌آوریم:

۱) $D(n,r,k)=\binom{r}{k}D(n-k,r-k,۰)$ (۴−۶−۲)

۲) $D(n,r,k)=D(n-۱,r-۱,k-۱)+(n-۱)D(n-۱,r-۱,k)$
$+(r-۱)\left\{D(n-۲,r-۲,k)-D(n-۲,r-۲,k-۱)\right\}$

(۴−۶−۳) که در آن $D(n,r,-۱)$ برابر ۰ تعریف شده است.

۳) $D(n,n,k)=n\ D(n-۱,n-۱,k)+(-۱)^{n-k}\binom{n}{k};$ (۴−۶−۴)

$$4)\ \binom{k}{t}D(n,r,k)=\binom{r}{t}D(n-t,r-t,k-t),t\geq 0; \qquad (۴-۶-۵)$$

$$5)\ D(n,r,k)=r\,D(n-1,r-1,k)+D(n-1,r,k),r<n; \qquad (۴-۶-۶)$$

$$6)\ D(n,n-r,0)=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}D(n-i,n-i,0) \qquad (۴-۶-۷)$$

از آنجا که $D_n = D(n,n,0)$، طبق قضیه‌ی ۱-۶-۴ داریم:

$$D_n=\binom{n}{0}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)}(n-i)!=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

نتیجه. برای عدد طبیعی n داریم:

$$(\text{الف})\ \ D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right); \qquad (۴-۶-۸)$$

$$(\text{ب})\ \ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{D_n}{n!}=e^{-1}\cong 0/367 \qquad (۴-۶-۹)$$

در اینجا دو تساوی مهم ارایه می‌دهیم که حالت خاصی از تساوی‌های ۳-۶-۴ و ۴-۶-۴ هستند.

$$(7)\ \ D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}); \qquad (۴-۶-۱۰)$$

$$(8)\ \ D_n=nD_{n-1}+(-1)^n; \qquad (۴-۶-۱۱)$$

خوانندگان می‌توانند برای اطلاعات بیشتر راجع به حالت‌های کلی مساله به هم ریختگی به مقاله‌ی [Kr] در آخر فصل مراجعه نمایند. در اینجا ۱۰ مقدار اولیه‌ی D_n را فهرست کردیم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
D_n	۰	۱	۲	۹	۴۴	۲۶۵	۱۸۵۴	۱۴۸۳۳	۱۳۳۴۹۶	۱۳۳۴۹۶۱

جدول (۲-۶-۴)

۴-۷- غربال اراتستن و تابع φ اولر

در این بخش، دو مسألهی کلاسیک در نظریه اعداد را با تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول حل خواهیم کرد.

عدد طبیعی $n \geq ۲$ مرکب است اگر اول نباشد. عدد "۱" را نیز به عنوان عددی مجزا، نه اول و نه مرکب، در نظر میگیریم. همانگونه که آجرها با یکدیگر یک دیوار را میسازند، اعداد اول نیز میتوانند در ترکیب با هم هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را بسازند. این مطلب یکی از مهمترین قضایای نظریه اعداد است که به نام *قضیه اساسی حساب* خوانده میشود.

به ازای هر عدد طبیعی n، $n > ۱$، یک و فقط یک دسته عدد اول

$$p_۱ < p_۲ < p_۳ < \ldots < p_k$$

و یک و فقط یک دسته عدد صحیح مثبت $m_۱, m_۲, \ldots, m_k$ وجود دارد که

$$n = p_۱^{m_۱} p_۲^{m_۲} \ldots p_k^{m_k} = \prod_{i=۱}^{k} p_i^{m_i}$$

اولین مثالی که مورد بحث قرار خواهیم داد؛ در مورد شمردن اعداد اول است.به ازای عدد طبیعی بزرگتر از واحد n چند عدد اول در بین اعداد ۲ تا n وجود دارد؟ این مسأله را با استفاده از نتیجه اول قضیهی ۱-۳-۴ حل خواهیم کرد. ولی قبل از آن،

روشی برای تشخیص اعداد اول و مرکب بیان می‌کنیم. این روش توسط « اراتستن» ریاضیدان یونانی (ق.م ۱۹۴- ۲۷۶) کشف شد. او در حدود ۲۰۰۰ سال پیش در اسکندریه می‌زیسته و این روش به نام « غربال اراتستن » معروف است.

غربال اراتستن

اعداد n ،...،۲،۳ را پشت سرهم می‌نویسیم. اولین عدد اول "۲"را نگه‌می‌داریم و بقیه ضرایب آن را خط می‌زنیم. اولین عدد خط نخورده (در اینجا"۳") را نگه‌می‌داریم و بقیه ضرایب آن را خط می‌زنیم. اولین عدد خط نخورده(در اینجا "۵") را نگه‌می‌داریم و بقیه ضرایب آن را خط می‌زنیم، این کار تا جایی که به عددی بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ برسیم ادامه می‌دهیم. اعداد خط نخورده، اعداد اول بین ۲ و n هستند.

$\boxed{۲}$	$\boxed{۳}$	~~۴~~	$\boxed{۵}$	~~۶~~	$\boxed{۷}$	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~	۱۱	~~۱۲~~	۱۳
~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~	~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~
~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~	۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷
~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~	۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	

مثال ۱-۷-۴ برای یافتن اعداد اول بین ۲ و ۴۸ با غربال ارتستن، اعداد۴۸،...،۲،۳، را پشت سرهم می‌نویسیم. ابتدا عدد ۲ را نگه‌می‌داریم و بقیه مضارب آن را (۴۸،...،۴،۶،۸) خط می‌زنیم. اولین عدد باقیمانده ۳ است. آن را نگه‌می‌داریم و بقیه ضرایب خط نخورده آن را خط می‌زنیم.(۹،۱۵،۲۱،۲۷،۳۳،۳۹،۴۵). اولین عدد

خط نخورده بعد از۳ ، عدد ۵ است. آن را نگه‌می‌داریم و بقیه ضرایب آن را خط می‌زنیم. (۳۵، ۲۵) . اولین عدد باقیمانده ۷ است که از $\sqrt{۴۸}$ بزرگتر است . اعداد خط نخورده عبارتند از :

۲،۳ ،۵ ،۷ ،۱۱ ،۱۳ ، ۱۷، ۱۹ ،۲۳ ، ۲۹،۳۱،۳۷ ، ۴۱،۴۳، ۴۷

که اینها اعدادی اولند.

تبصره:

دلیل اینکه ما روش بالارا تا $\sqrt{n}$ ادامه دادیم این است که اگر عدد k، $۲ \leq k \leq n$، عددی اول نباشد یک و مقسوم علیه مانند p ، $p>\sqrt{n}$، داشته باشد. آنگاه k باید یک مقسوم‌علیه مانند p' داشته باشد که $p' \leq \sqrt{n}$. پس k به عنوان مضرب p' خط خورده است.
حال با استفاده از تعمیم یافته اصل شمول و عدم شمول، تعداد اعداد اول بین ۱ تا n را می‌یابیم.

مثال ۲-۷-۴ تعداد اعداد اول بین ۱ تا ۴۸ را بیابید.

حل. مجموعه‌ی $S=\{۱،۲،...،۴۸\}$ را در نظر بگیرید. سه عدد اول کوچکتر از $\sqrt{۴۸}$، (۲،۳،۵) وجود دارد. سه ویژگی $P_۱, P_۲, P_۳$ را این گونه تعریف می‌کنیم که عدد $x \in S$؛

دارای ویژگی $P_۱$ باشد $\Leftrightarrow ۲|x$

دارای ویژگی $P_۲$ باشد $\Leftrightarrow ۳|x$

دارای ویژگی $P_۳$ باشد $\Leftrightarrow ۵|x$

از غربال می‌توان فهمید که تعداد اعداد اول برابر $E(۰) + ۳ - ۱$ است. زیرا سه

عدد اول (۲،۳،۵) باید اضافه شوند و عدد "۱" نیز باید کم شود. توجه کنید:

$$\omega(۰) = |S| = ۴۸;$$

$$\omega(۱) = \omega(p_۱) + \omega(p_۲) + \omega(p_۳) = \left\lfloor \frac{۴۸}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴۸}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴۸}{۵} \right\rfloor$$

$$= ۲۴ + ۱۶ + ۹ = ۴۹;$$

$$\omega(۲) = \omega(p_۱p_۲) + \omega(p_۱p_۳) + \omega(p_۲p_۳)$$

$$= \left\lfloor \frac{۴۸}{۶} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴۸}{۱۰} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴۸}{۱۵} \right\rfloor$$

$$= ۸ + ۴ + ۳ = ۱۵;$$

$$\omega(۳) = \omega(p_۱p_۲p_۳) = \left\lfloor \frac{۴۸}{۳۰} \right\rfloor = ۱$$

و از آنجا که داریم $E(۰) = \omega(۰) - \omega(۱) + \omega(۲) - \omega(۳) = ۱۳$ مقدار نهایی برابر $E(۰) + ۳ - ۱ = ۱۵$ به دست می‌آید.■

حال به بررسی مثال دوم می‌پردازیم. برای اعداد طبیعی a و b،(a,b) را برابر ب.م.م a و b تعریف می‌کنیم. بنابراین ۱=(۸،۱۵) و ۳=(۹،۱۵)

a را نسبت به b متباین می‌نامیم اگر ۱=(a,b). در حدود ۱۷۶۰ «لئونارد اولر» دانشمند سوئیسی(۱۷۸۳–۱۷۰۷) به دنبال تلاش‌هایش برای تعمیم نتایج فرما در نظریه اعداد، مبحث جدیدی را بنیان نهاد. فرض کنید برای هر عدد طبیعی n، $\varphi(n)$ نمایش‌دهنده تعداد اعداد صحیح بین ۱ و n باشد که نسبت به n اولند. جدول ۱–۷–۴ مقادیر اولیه‌ی φ را نشان می‌دهد. تابع $\varphi(n)$، که به نام تابع φ اولر خوانده می‌شود، نقش مهمی در مسایل شمارش و جبر مدرن دارد. همان گونه که در جدول ۱–۷–۴ می‌بینیم، مقادیر $\varphi(n)$ برای nهای مرکب به طور نامنظم تغییر می‌کند.

$\varphi_{(n)}$	اعداد صحیح x، $1 \leq x \leq n$ که x و n نسبت به هم اولند	n
۱	۱	۱
۱	۱	۲
۲	۲ و ۱	۳
۲	۳ و ۱	۴
۴	۴ و ۳ و ۲ و ۱	۵
۲	۵ و ۱	۶
۶	۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱	۷
۴	۷ و ۵ و ۳ و ۱	۸
۶	۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱	۹
۴	۹ و ۷ و ۳ و ۱	۱۰
۱۰	۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱	۱۱
۴	۱۱ و ۷ و ۵ و ۱	۱۲
۱۲	۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱	۱۳
۶	۱۳ و ۱۱ و ۹ و ۵ و ۳ و ۱	۱۴
۸	۱۴ و ۱۳ و ۱۱ و ۸ و ۷ و ۴ و ۲ و ۱	۱۵

جدول ۱-۷-۴

مثال ۳-۷-۴ فرض کنید عدد طبیعی n، در تجزیه عامل‌های اول به صورت $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$ باشد نشان دهید.

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_k}) = n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}) \qquad (۴-۷-۱)$$

قبل از اثبات دو نکته‌ی مفید را ذکر می‌کنیم.

الف) عدد طبیعی x، $(x \leq n)$، را در نظر بگیرید. آنگاه $(x,n)=1$ اگر و فقط اگر به ازای تمام مقادیر i $(i = 1,2,\ldots,k)$، $p_i \nmid x$

(ب) به ازای اعداد حقیقی $r_1, r_2, \ldots, r_k$ داریم.

$$(1-r_1)(1-r_2)\dots(1-r_k) = 1-\sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i<j} r_i r_j - \sum_{i<j<\ell} r_i r_j r_\ell + \dots + (-1)^k r_1 r_2 \dots r_k$$

اثبات (۱–۷–۴). مجموعه‌ی $S = \{1,2,\dots,n\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر کدام از k عامل عدد n، ویژگی‌های $P_1, P_2, \dots, P_k$ را این گونه تعریف می‌کنیم که عضو x دارای ویژگی P_i است اگر و فقط اگر $p_i|x$ از نکته اول بلافاصله می‌فهمیم که هر عضو در φ دارای هیچ‌کدام از ویژگی‌های $P_1, P_2, \dots, P_k$ نیست و به عبارت دیگر

$$\varphi(n) = E(0)$$

از طرفی داریم : $\omega(0) = |S| = n$ و به ازای $1 \le t \le k-1$،

$$\omega(t) = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_t} \omega(p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}) = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_t} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}} \right\rfloor$$

$$= \sum_{i_1<i_2<\dots<i_t} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}}$$

$$\omega(k) = \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \right\rfloor = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

و در نتیجه داریم:

$$\varphi(n) = E(0) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<l} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})(۱-\frac{۱}{p_۳})\ldots(۱-\frac{۱}{p_k})$$
$$= n\prod_{i=۱}^{k}(۱-\frac{۱}{p_i}) \quad \blacksquare$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱-۷-۴) در می‌یابیم که مقدار $\frac{\varphi(n)}{n}$، به توان‌های m_i اعداد اول در تجزیه n بستگی ندارد. برای مطالعه بیشتر ویژگی‌ها و تعمیم های تابع $\varphi(n)$ خواننده می‌تواند به مقاله‌ی [D] در پایان بخش مراجعه کند. برای اتمام این مطلب رابطه‌ی زیبایی را بر حسب φ که اسمیت (۱۸۷۵) آن را کشف کرده بیان می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} (۱,۱) & (۱,۲) & \ldots(۱,n) \\ (۲,۱) & (۲,۲) & \ldots(۲,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (n,۱) & (n,۲) & \ldots(n,n) \end{vmatrix} = \varphi(۱)\varphi(۲)\ldots.\varphi(n)$$

که (a,b) در سمت چپ تساوی برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

۸-۴- مسأله‌ی ازدواج

در پایان ۳-۱، مساله‌ای را بیان کردیم که به مسأله‌ی ازدواج معروف است:

«به چند روش می‌توان $n \geq ۳$ زوج زن و مرد را دور یک میز نشاند به طوری که

یکی درمیان زن و مرد باشند و هیچکسی کنار همسر خود ننشسته باشد؟»

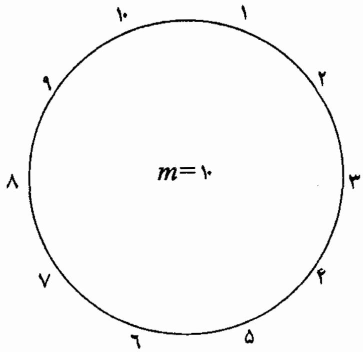
این مساله توسط «ای. لوکاس» در سال ۱۸۹۱ در کتابش [I] (به فهرست آخر فصل مراجعه نمایید) آورده شده و به عنوان یک مساله‌ی مطرح شـــده اســت. در واقــع ایــن مسأله در سال ۱۸۷۶ توســط « بـی.تـایت» و در سـال ۱۸۷۷ توسـط « آ.کـای لـی» و « تی. موبر » به طور جداگانه به شکل یک مسأله‌ی ترکیبیاتی طرح شد.

در این بخش، با استفاده از قضیه‌ی۱-۳-۴ مسأله‌ی فوق را در حالت کلی‌تری حــل خواهیم کرد. قبل از آن به مساله‌ای متعلق به « آی. کاپلانسکی» [Kp] می‌پردازیم.

مثال ۱-۸-۴ فرض کنید اعــداد طبیعـی $۱،۲،...،m$ $(m \geq ۳)$را مـانند شــکل پــائین دور یــک دایــره نشــانده‌ایم. بــه ازای عــدد k $\left(\circ \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{۲} \right\rfloor\right)$، فـــرض کنید $\alpha(k)$ نمایش دهندهٔ تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از N_m باشند که اگر آنهــا را دور یک دایره بنشانیم هیچ دو عدد مجاوری متوالی نباشند. نشان دهید:

$$\alpha(k) = \frac{m}{k}\binom{m-k-۱}{k-۱} \qquad (۴\text{-}۸\text{-}۱)$$

برای مثال، اگر m=۱۰ و k=۴ آنگاه زیــر مجموعــه‌های {۱،۳،۶،۹} و {۳،۵،۸،۱۰} زیر مجموعه‌هایی مطلوبند ولی زیر مجموعه‌های {۱،۶،۸،۱۰} و {۲،۶،۷،۹} غیر قابل قبولند. توجه کنید که اگر $\left\lfloor \frac{m}{۲} \right\rfloor \leq k \leq m$ ، هیچ زیر مجموعه‌ی k عضوی با شــرط بالا یافت نمی‌شود. در حالت k=۳ مثال ۱-۸-۴ شــبیه مســاله‌ی۳۴-۱ می‌شــود و اگــر « دایره» به« ردیف» تبدیل شود این مثال و مثال۳-۵-۱ یکسان خواهند بود.



اثبات. فرض کنید $(i = 1,2,...m)\alpha_i$ ، برابر تعداد زیر مجموعه‌های مطلوب k عضوی باشد که شامل"i" است. به دلیل تقارن داریم، $\alpha_1 = \alpha_2 =...= \alpha_m$. حال α_1 را می‌شماریم.

اگر B زیر مجموعه‌ای k عضوی و مطلوب باشد که دارای عضو "۱" است، طبق فرض مساله داریم، $m \notin B$ و ۲ . در نتیجه $k-1$ عضو باقیمانده باید از بین اعداد ۳،۴،...،$m-1$ انتخاب شوند به طوری که هیچ دوعددی متوالی نباشند. با استفاده از نتیجه‌ی مثال۳-۵-۱ داریم.

$$\alpha_1 = \binom{(m-2)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{m-k-1}{k-1}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = m\binom{m-k-1}{k-1}$$

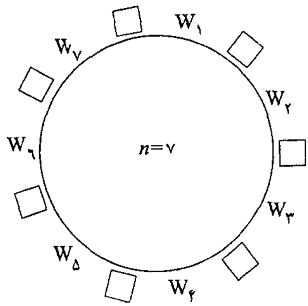
و از آنجا که $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = k.\alpha(k)$ (چرا؟)، به دست می‌آید که

$$\alpha(k)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}$$

حال می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را بیان کنیم .

مثال ۲-۸-۴ می‌خواهیم n زوج زن و مرد را بر روی $2n$ صندلی دور یک میز بنشانیم. فرض کنید n زن روی صندلی‌ها یکی در میان نشسته باشند. $M(n,r)$، $(0\le r\le n)$، را برابر تعداد راه‌های نشستن n مرد در صندلی‌ها تعریف می‌کنیم به طوری که دقیقاً r مرد کنار همسرشان نشسته باشند. نشان دهید:

$$M(n,r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)! \qquad (۴-۸-۲)$$



اثبات. مجموعه‌ی S مجموعه‌ی تمام حالات نشستن مردها در جاهای خالی را در نظر بگیرید. مردها را از H_1 تا H_n شماره گذاری می‌کنیم. $2n$ ویژگی $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ را این گونه تعریف می‌کنیم. یک حالت نشستن در S

دارای ویژگی P_1 است $\Leftrightarrow$ H_1 در سمت راست W_1 نشسته باشد.

دارای ویژگی P_2 است $\Leftrightarrow$ H_1 در سمت چپ W_1 نشسته باشد.

دارای ویژگی $P_۳$ است $\Leftrightarrow H_۲$ در سمت راست $W_۲$ نشسته باشد.

دارای ویژگی $P_۴$ است $\Leftrightarrow H_۲$ در سمت چپ $W_۲$ نشسته باشد.

$\vdots$

دارای ویژگی $P_{۲n-۱}$ است $\Leftrightarrow H_n$ در سمت راست W_n نشسته باشد.

دارای ویژگی $P_{۲n}$ است $\Leftrightarrow H_n$ در سمت چپ W_n نشسته باشد.

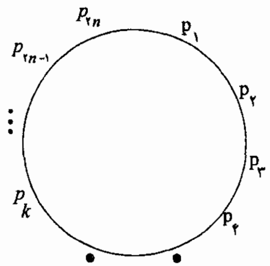
می‌توان به سادگی فهمید که P_i و $P_{i+۱}$ نمی‌توانند همزمان اتفاق بیافتند، و اگر $P_{۲n+۱}$ را برابر $P_۱$ تعریف کنیم. آنگاه به ازای هر مقدار i $(i = ۱,۲,\ldots ۲n)$،

$$\omega(p_i p_{i+۱}) = ۰ \qquad (۱)$$

و اگر $\omega(p_{i_۱} p_{i_۲} \ldots p_{i_k}) = ۰$ باشد. آنگاه زیر مجموعه‌ی k عضوی $\{p_{i_۱}, p_{i_۲}, \ldots, p_{i_k}\}$ شامل دو عضو متوالی دور دایره است. به علاوه می‌توان دریافت که

(الف) به ازای هر عدد طبیعی k، $(n < k \leq ۲n)$،

$$\omega(p_{i_۱} p_{i_۲} \ldots p_{i_k}) = ۰ \text{ (و در نتیجه } \omega(k) = ۰) \qquad (۲)$$



(ب) برای هر عدد طبیعی k $(۱ \leq k \leq n)$، داریم:

$$\omega(k) = \sum_{۱ \leq i_۱ < i_۲ < \ldots < i_k \leq ۲n} \omega(p_{i_۱} p_{i_۲} \ldots p_{i_k})$$

$$= \frac{2n}{k} C_{k-1}^{2n-k-1} \qquad \times \qquad (n-k)!$$

طبق (۴-۸-۱) تعداد راه‌های نشستن بقیه مردها

در نتیجه داریم:

$$M(n,r) = E(r) = \sum_{k=r}^{2n-r} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \omega(k)$$

(طبق (۲) و (۳))

$$= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-1} \binom{k}{r} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \qquad .\blacksquare$$

در حالت $r=0$، جواب زیر برای مساله ازدواج به دست می‌آید،

$$M(n,0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \qquad (۴-۸-۳)$$

این فرمول در سال ۱۹۳۴ توسط «جی. توچارد» کشف شد. البته ایدهٔ به کار گرفته در حل این مساله متعلق به «کاپلانسکی» [Kp] است. خواننده می‌تواند برای دیدن اثبات دیگر فرمول (۳-۸-۴) (بااستفاده از اصل شمول و عدم شمول) به مقاله [BD] نوشته « بوگارت» و « دویل» مراجعه نماید. برای سادگی کار $M(n,0)$ را برابر M_n قرار می‌دهیم. آنگاه می‌توان این دو تساوی را بر حسب M_n به دست آورد.

$$(n-2) M_n = n(n-2) M_{n-1} + n \; M_{n-2} + 4(-1)^{n+1} \qquad (۴-۸-۴)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} M_{n-k} = n! \; , \;\; M_0 = 1 \; , \;\; M_1 = -1 \qquad (۴-۸-۵)$$

در مقاله [Kp] نشان داده شده که حد زیر از فرمول (۳–۸–۴) به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n!} = e^{-2} \qquad (۴\text{–}۸\text{–}۶)$$

برای اتمام این فصل ، در جدول ۱–۸–۴مقادیر اولیه M_n را فهرست کرده‌ایم:

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
M_n	۰	۱	۲	۱۳	۸۰	۵۷۹	۴۷۳۸	۴۳۳۸۷	۴۳۹۷۹۲

جدول ۱–۸–۴

❖ تمرینات فصل چهارم

۱- در یک مدرسه ۱۰۰ دانش‌آموز در سه امتحان فیزیک، شیمی و ریاضی شرکت کرده‌اند. هر نفر در هر سه امتحان شرکت کرده‌است. در بین آنها، ۹۲ نفر در امتحان فیزیک، ۷۵ نفر در امتحان شیمی، ۶۳ نفر در امتحان ریاضی قبول شده‌اند. حداکثر ۶۵ نفر در هر دو امتحان فیزیک و شیمی، ۵۴ نفر در ریاضی و فیزیک و ۴۸ نفر در امتحان‌های شیمی و ریاضی قبول شده‌اند. دانش‌آموزانی که در هر سه درس قبول شده‌اند حداکثر چند نفر می‌توانند باشند.

۲- سه مجموعه‌ی متناهی A و B و C را در نظر بگیرید. ثابت کنید.

(الف) $|A'\cap B|=|B|-|A\cap B|;$

(ب) $|A'\cap B'\cap C|=|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|;$

۳- تعداد اعضای مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,\ldots,۱۲۰\}$ را بیابید که دقیقاً بر m تا ($m=۰$، ۱،۲،۳،۴) از اعداد ۵،۳،۲ و ۷ بخش پذیر هستند. همچنین تعداد اعداد اول عضو مجموعه‌ی S را بیابید.

٤- چند عدد مثبت n وجود دارد که حداقل مقسوم‌علیه یکی از اعداد $۱۰^{۴۰}$ و $۲۰^{۳۰}$ باشد؟ (پاتنام، ۱۹۸۳)

۵- تعداد اعداد مثبتی را بیابید که مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۰^{۶۰}$ و $۲۰^{۵۰}$ و $۳۰^{۴۰}$ باشند.

۶- در مجموعه‌های زیر تعداد اعدادی را بیابیدکه مربع یا مکعب کامل نباشند.

(الف) $\{۱,۲,\ldots,۱۰^{۴}\}$

(ب) $\{۱۰^{۳},۱۰^{۳}+۱,\ldots,۱۰^{۴}\}$

۷- قضیه‌ی ۱-۲-۴ را بااستفاده از روش‌های زیر ثابت کنید.

(الف) استقرا روی q

ب) نتیجه دوم از قضیه‌ی ۱-۳-۴

۸- یک سال، سال کبیسه است اگر (الف) مضرب ۴ باشد ولی مضرب ۱۰۰ نباشد. یا (ب) مضرب ۴۰۰ باشد. برای مثال سال‌های ۱۶۰۰ و ۱۹۲۴ کبیسه‌اند ولی سال ۲۲۰۰ سالی کبیسه نیست. در بین سال‌های ۱۰۰۰ تا ۳۰۰۰ چند سال کبیسه وجود دارد؟

۹- در یک جلسه که در یک مدرسه برگزار شده، هر دانش‌آموزی با پدر و مادر خود شرکت کرده است. به چند روش می‌توان این $3n$ نفر را به n گروه ۳ نفری تقسیم کرد که در هر گروه یک دانش‌آموز، یکی از پدران و یکی از مادران حضور داشته باشند و هیچ دانش‌آموزی با هر دوی والدینش در یک گروه نباشند؟

۱۰- مردی ۶ دوست دارد. او هر بار که بیرون از خانه شام می‌خورد، حداقل یکی از دوستانش را می‌بیند. او هر کدام از دوستانش را ۱۲ بار، هر دو نفر از آنها را ۶ بار با هم، هر سه نفر از آنان را ۴ بار با هم، هر چهار نفر را ۳ بار با هم، هر ۵ نفر از دوستانش را دو بار با هم و همه را یک‌بار با هم دیده است. او چند بار بیرون از خانه غذا خورده است؟

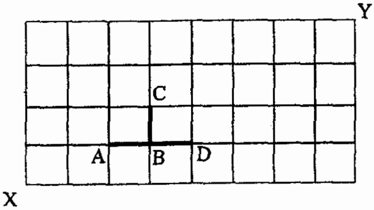
۱۱- می‌خواهیم سه توپ سیاه، چهار توپ قرمز و پنج توپ سفید را در یک ردیف بچینیم. به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم اگر بخواهیم توپ‌های از یک رنگ، همگی کنار هم نباشند؟

۱۲- چند جایگشت از حروف c,c,c,b,b,b,a,a,a وجود دارد که

(الف) هیچ سه حرف متوالی، یکسان نباشند؟

(ب) هیچ دو حرف متوالی، یکسان نباشند؟

۱۳- تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی را بیابید که در شبکه شطرنجی زیر از نقطه‌ی X به نقطه‌ی Y بروند و از پاره‌خط‌های BD,BC,AB عبور نکنند.



۱۴- تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 28$$

را بیابید که $3 \le x_1 \le 9$، $0 \le x_2 \le 8$، $7 \le x_3 \le 17$.

۱۵- تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40$$

را بیابید که $6 \le x_1 \le 15$، $5 \le x_2 \le 20$، $10 \le x_3 \le 25$

۱۶- تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

را بیابید که $1 \le x_1 \le 5$، $0 \le x_2 \le 7$، $4 \le x_3 \le 8$، $2 \le x_4 \le 6$

۱۷- اعداد طبیعی n,k و r را درنظر بگیرید. نشان دهید تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

که در آن $0 \le x_i \le k$ $(i = 1,2,\dots,n)$، برابر است با

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{r-(k+1)i+n-1}{n-1}$$

۱۸- اعداد طبیعی n,k و r مفروضند. نشان دهید تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

که در آن $1 \le x_i \le k$، $(i = 1,2,\dots,n)$، برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{r-ki-1}{n-1}$$

۱۹- تعداد راه‌های چیدن n زوج $\{H_i, W_i\}$ را در یک ردیف بیابید به شرطی که هیچ H_i ای مجاور W_i نباشد.

۲۰- اعداد طبیعی p و q را که p عددی فرد است در نظر بگیرید. فرض کنید که pq مهره در q رنگ در اختیار داریم و از هر رنگی p مهره. تمام مهره‌های یک رنگ را همانند در نظر می‌گیریم. به چند روش می‌توان این مهره‌ها را در یک ریسمان قرار داد به شرطی که

(الف) مهره‌های یک رنگ کنار هم باشند.

(ب) مهره‌های یک رنگ در دو تکه‌ی جداگانه باشند.

(ج) مهره‌های هم رنگ حداکثر در دو تکه باشند.

(د) مهره‌های هم رنگ حداکثر در هر تکه باشند و دو تکه حداقل ۲مهره قرار داشته باشد.

۲۱- (الف) تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه‌ی متفاوت را بیابید به طوریکه هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. $(r \geq n)$

(ب) نشان دهید:
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{r+n-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$$

۲۲- (الف) مجموعه‌ی n عضوی A و زیر مجموعه‌ی m عضوی B از آن را در نظر بگیرید. تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی A را بیابید که B زیر مجموعه‌ی آنها باشند.

(ب) برای اعداد طبیعی r,n و m $(m \leq r \leq n)$، نشان دهید.

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r} = \binom{n-m}{n-r}$$

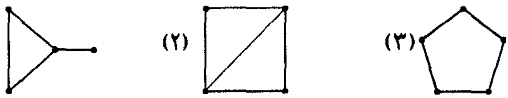
۲۳- (الف) برای هر عدد طبیعی n ، تعداد دنباله‌های n تایی در مبنای ۲ را بیابید که در آنها عبارت "۱ ۰" وجود نداشته باشد.

(ب) نشان دهید:

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{n-2i} = n+1$$

۲۴- در هر کدام از شکل‌های زیر، می‌خواهیم هر رأس را با یکـی از λ رنـگ، رنـگ آمیزی کنیم. به چند روش می‌توانیم این کار را انجـام دهیـم. اگـر قـرار باشـد هـر دو رأس که با یک یال به هم وصل شده‌اند، دارای رنگ‌های متفاوت باشند؟

(۱) (۲) (۳)



۲۵- می‌خواهیم n نفر را در ۹ اتاق جداگانه قـرار دهیـم. ایـن کـار را بـه چنـد روش می‌توانیم انجام دهیم اگر قرار باشد فقط درm اتاق در هر کدام دقیقاً k نفر قرار گرفته باشند. $(mk \leq n$ و $1 \leq m \leq q)$

۲۶- شـبه مجموعـه‌ی $A = \{k.x_1, k.x_2, \ldots, k.x_n\}$ را در نظـر بگـیرید. فـرض کنید $\alpha(m)$ $(m \in N^*)$، نشان دهنده تعداد راه‌های چیدن اعضای A در یک ردیـف باشد به شرطی که تعداد بلوک‌هایی که k عضو از یک نوع ساخته‌اند دقیقـاً m باشـد، نشان دهید.

$$\alpha(m) = \frac{(-1)^m}{(k!)^n} \binom{n}{m} \sum_{i=m}^{n} (-1)^i \binom{n-m}{i-m} (k!)^i \times \{kn - i(k-1)\}!$$

۲۷- تساوی‌های (۲-۶-۴) تا (۷-۶-۴) را ثابت کنید. (برای تساوی (۷-۶-۴) می‌توانیـد به مقاله‌ی «وانگ»، E۲۹۴۷، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا(۳۳۴:۱۹۸۲،۸۹)مراجعه کنید.)

۲۸- فرض کنید C_n برابر تعداد جایگشت‌های مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ تعریف شـود که در آنها عدد $k+1$ بلافاصله بعد از k نیامده باشد. $(k = 1,2,\ldots,n-1)$

(الف) C_n را بیابید.

(ب) نشان دهید $C_n = D_n + D_{n-1}$

۲۹- برای اعداد طبیعی m و n، $(m<n)$، تعداد به هم ریختگی‌های $a_1a_2\ldots a_n$ از N_n را بر حسب D_k بیابید که

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = \{1, 2, \ldots, m\}$$

۳۰- اعداد طبیعی m و n، $n \geq 2m$، را در نظر بگیرید. تعداد به هم ریختگی‌های $a_1a_2\ldots a_n$ از N_n را در هر کدام از حالات زیر بیابید که

$$\{a_1, a_2, \ldots a_m\} = \{m+1, m+2, \ldots, 2m\}$$

(الف) $n=2m$

(ب) $n=2m+1$

(ج) $n = 2m + r$ $(r \geq 2)$.

۳۱- با استفاده از تساوی(۸-۶-۴)، تساوی‌های (۱۰-۶-۴) و (۱۱-۶-۴) را اثبات کنید.

۳۲- ثابت کنید مقدار $|D_n - n|$ به ازای هر عدد طبیعی n، عددی فرد است.

۳۳- فرض کنید $D_n(k) = D(n,n,k)$ نشان دهید:

(الف) $D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$

(ب) $\binom{n}{1}D_1 + \binom{n}{2}D_2 + \ldots + \binom{n}{n}D_n = n!$

(ج) $(k+1)D_{n+1}(k+1) = (n+1)D_n(k)$

۳۴- فرض کنید $D_n(k)$ برابر تعداد جایگشت‌های مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ باشد که دقیقا" k نقطه ثابت دارند. ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^{n} k.D_n(k) = n!$$

(المپیادجهانی ریاضی، ۱/ ۱۹۸۷)

۳۵- برای هر عدد طبیعی n، نشان دهید:

$$D_n(\circ) - D_n(۱) = (-۱)^n$$

۳۶- ثابت کنید:

$$\sum_{k=\circ}^{n} (k-۱)^۲ D_n(k) = n!$$

(المپیاد ریاضی آلمان غربی، ۱۹۸۷)

۳۷- ثابت کنید به ازای اعداد $n \in N^*$ و $r(r \leq n)$، تساوی زیر برقرار است.

$$\sum k(k-۱)\ldots(k-r+۱)D_n(k) = n!$$

مقاله‌ی «د. هانسون»، ریاضیات دشوار، (۱۹۸۹)۱۵۵؛ ۱۳۹ را ببینید.

۳۸- (الف) بدون استفاده از تساوی (۱-۷-٤) نشان دهید:

(۱) تابع φ اولر یک تابع ضربی است یعنی اگر ۱=(n و m) آنگاه

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

(۲) به ازای هر عدد اول p و عدد طبیعی i

$$\varphi(p^i) = p^i - p^{i-۱}$$

(ب) تساوی (۱-۷-٤) را با استفاده از (۱) و (۲) به دست آورید.

۳۹- (الف) مقادیر $\varphi(۱\circ\circ)$ و $\varphi(۳\circ\circ)$ را حساب کنید.

(ب) ثابت کنید اگر $m|n$ آنگاه $\varphi(m)|\varphi(n)$

٤٠- به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید.

$$\sum (\varphi(d) | d \in N, d|n) = n$$

٤۱- اگر m و n دوعدد طبیعی باشند و $(m,n)=h$؛ با استفاده از تساوی(۱-۷-۴) نشان دهید،

$$\varphi(mn).\varphi(h) = \varphi(m)\varphi(n).h$$

٤۲- نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، $\varphi(n)$عددی زوج خواهد بود.

۴۳- عدد طبیعی $n \geq ۲$ را در نظربگیرید. نشان دهید اگر n دقیقاً k عامل اول داشته باشد، آنگاه:

$$\varphi(n) \geq n.۲^{-k}$$

۴۴- عدد طبیعی $n \geq ۲$ را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر n دقیقاً k عامل اول فرد داشته باشد آنگاه:

$$۲^k | \varphi(n)$$

۴۵- آیا عدد طبیعی n وجود دارد که به ازای آن $\varphi(n) = ۱۴$؟ جواب خود را ثابت کنید.

۴۶- برای عدد طبیعی n نشان دهید:

$$\varphi(۲n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{فرد باشد } n \\ ۲\varphi(n) & \text{زوج باشد } n \end{cases}$$

۴۷- برای اعداد طبیعی r,q و m ($m \leq r \leq q$)، فرض کنید.

$$A(m,r) = \sum_{k=m}^{r} (-۱)^{k-m} \binom{k}{m} \omega(k)$$

طبق قضیه ۱-۳-۴می‌دانیم که $E(m) = A(m,q)$ ثابت کنید.

(الف) اگر m و r از نظر زوجیت یکسان باشند، آنگاه

$$E(m) \leq A(m,r)$$

(ب) اگر m و r از نظر زوجیت یکسان نباشند، آنگاه

$$E(m) \geq A(m,r)$$

(ج) نامساوی‌های اکید در (الف) و (ب) به دست می‌آید اگروفقط اگر به ازای حداقل یک مقدار t، $r < t \leq q$ ؛ $\omega(t) > ۰$

۴۸- نامساوی بنفرونی را ثابت کنید.

$$\sum_{k=j}^{q}(-1)^{k-j}\omega(k)\geq 0 \qquad (j=0,1,\ldots,q)$$

۴۹- (الف) n مجموعه‌ی متناهی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را در نظر بگیرید نشان دهید.

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| \geq \sum_{k=1}^{n}|A_k| - \sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i \cap A_j|$$

(ب) مساله زیر را با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید (مثال۴-۵-۱ را ببینید).

یک جایگشت از n زوج $\{H_1, W_1, H_2, W_2, \ldots, H_n, W_n\}$ در یک ردیف دارای خاصیت p است اگر حداقل یک زوج W_i, H_i در ردیف مجاور باشند. نشان دهید تعداد جایگشت‌های دارای خاصیت P از بقیه جایگشت‌ها بیشتر است.

۵۰- دنباله‌ی (B_i) را این گونه تعریف می‌کنیم: $B_0 = 1$ و $B_r = \sum_{k=1}^{r} S(r,k)$.

عدد B_r، r امین عدد بل (بخش ۷-۱ را ببیند) نامیده می‌شود. نشان دهید.

(الف) نتیجه‌ی اول از قضیه‌ی ۱-۵-۴ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود.

$$S(r,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^r$$

(ب)

$$B_r = e^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^r}{j!}$$

۵۱- اعداد $n \in N^*$ و $r \in N$ مفروضند و

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{r}{i+r}\binom{n}{i}$$

نشان دهید:

$$a_n = \frac{n}{n+r} a_{n-1}$$

و ثابت کنید :
$$a_n = \frac{1}{\binom{n+r}{r}}$$

۵۲- به ازای عدد طبیعی m، ($1 \le m \le q$)، فرض کنید $L(m)$ نمایش دهندهٔ تعداد اعضای S باشد که حداقل دارای m ویژگی از q ویژگی هستند. نشان دهید:

$$L(m) = \sum_{k=m}^{q} (-1)^{k-m} \binom{k-1}{m-1} \omega(k)$$

نکته. در این مساله اصطلاحات قضیه‌ی ۱-۳-۴ به کار رفته شده‌اند. یک اثبات ممکن است، دنبال کردن روش مشابه قضیه‌ی ۱-۳-۴ و استفاده کردن از تساوی قبل باشد.

۵۳- به ازای $k=1,2,\ldots,1992$ ، فرض کنید A_k یک مجموعه‌ی ۴۴ عضوی باشد و اشتراک هر دو تا از A_i ها دارای فقط یک عضو است. اجتماع همه آنها چند عضو دارد.

۵۴- یک دنباله‌ی ۲۸ عضوی از مجموعه‌ی ۲۰ عضوی

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, J, K, L, U, X, Y, Z\}$$

را در نظر بگیرید. احتمال این که دنباله‌ی "CUBAJULY۱۹۸۷" در جایی از دنباله اتفاق بیافتد چقدر است؟ (بلژیک، ۱۹۷۸)

۵۵- دنباله‌های ۳۵ عضوی از مجموعه‌ی $\{A,B,C,\ldots,Y,Z\}$ را در نظر بگیرید. احتمال اینکه رشته "*MERRYCHRISTMAS*" در این دنباله ظاهر شود چقدر است؟

۵۶- در یک گروه ۱۹۹۰ نفری، هر نفر حداقل ۱۳۲۷ دوست دارد. ثابت کنید، در این گروه چهار نفر وجود دارند که دو به دو با هم آشنا باشند.(دوستی یک رابطه دو طرفه است) (این مسأله توسط کشور فرانسه به ۳۱ امین المپیاد جهانی پیشنهاد شده بود).

۵۷- مجموعه‌ی اعداد مختلط C را در نظر بگیرید. فرض کنید $S = \{z \in C \mid |z| = 1\}$ باشد. برای هر تابع $f: S \to S$ ، $f^k: S \to S$ اینگونه تعریف می‌شود.

$$\overset{k}{f}(z)=\underbrace{f(f(\dots(f(z))\dots))}_{k}$$

یک عضو $\omega \in S$ ، یک نقطه تناوب n نامیده می‌شود اگر

$$f^{i}(\omega) \neq \omega \quad (i = ۱,۲,\dots n-۱), f^{n}(\omega) = \omega$$

تابع $f:S \to S$ را با رابطه‌ی $f(z) = z^{m}$ را در بگیرید. تعداد نقاط تناوب ۱۹۸۹ تابع f را بیابید.(مسابقه‌های ریاضی چین، ۱۹۸۹)

۵۸- به ازای اعداد طبیعی m,n فرض کنید M مجموعه‌های ماتریس‌های $m{\times}n$ باشد که درایه‌های آن‌ها صفر و یک هستند.

$$M_r = \{N \in M| \text{حداقل یک سطر صفر دارد} M\}$$

$$M_e = \{N \in M| \text{حداقل یک ستون صفر دارد} M\}$$

نشان دهید تعداد ماتریس‌ها در $(M - M_r)\bigcap M_c$ برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i-۱}\binom{n}{i}(۲^{n-i} - ۱)^{m}$$

۵۹- اعداد طبیعی n,m، $m \leq n$، مفروضند. فرض کنید $P_n(m)$ تعداد جایگشت‌های مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,n\}$ باشد که در آنها m اولین نقطه‌ی ثابت است. بنابراین $p_n(۲) = (n-۱)!-(n-۲)!, P_n(۱) = (n-۱)!$ نشان دهید.

(الف) $p_n(m) = \sum_{i=\circ}^{m-۱} (-۱)^{i}\binom{m-۱}{i}(n-۱-i)!$

(ب) $(m = ۲,۳,\dots,n), p_n(m) = p_n(m-۱) + p_{n-۱}(m-۱)$

۶۰- فرض کنید P و Q دو مجموعه‌ی متناهی با p و q عضو باشند. $N_k(p,q)$ را برابر تعداد دوتایی با k عضو از دامنه‌ی P به برد Q تعریف می‌کنیم.($N_k(p,q)$ در واقع تعداد ماتریس‌های $p{\times}q$ است که درایه‌های آن صفر و یک هستند و دقیقاً k درایه آن یک است و هیچ سطری و ستونی صفر نیست.) مقدار

$\sum_{k=1}^{pq}(-1)^{k-1}N_k(p,q)$ را حساب کنید. (این مسأله توسط «س.لیدر» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا ۸۰،۱۹۷۳؛۸۴ پیشنهاد شده است)

۶۱- فرض کنید D_n و M_n به ترتیب برابر تعداد به هم ریختگی‌ها و تعداد نشستن n زوج (مساله ازدواج، بخش (۸-۴) باشد. ثابت یا رد کنید که دنباله‌ی $\left\{\frac{M_n}{D_N}\right\}$ $(n = 4,5,6,\ldots,)$، به طور یکنوا صعودی است و $\lim_{n\to\infty}(\frac{M_n}{D_n}) = \frac{1}{e}$.

(این مساله توسط «ای.تی.وانگ» به مجله‌ی ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا،۷۸، ۱۹۸۰؛۸۲۹) پیشنهاد شده است.)

۶۲- به ازای اعداد r,n $(r \in N^*, n \in N)$، را نشان دهید.

$$\sum_{k=0}^{n} k^r\binom{n}{k}D_{n-k} = n!\sum_{m=0}^{\min\{r,n\}} S(r,m)$$

و همچنین نشان دهید به ازای $n \geq r$

$$\sum_{k=0}^{n} k^r\binom{n}{k}D_{n-k} = n!B_r$$

(ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا۹۴،۱۹۸۷؛۱۸۷) را ببینید)

۶۳- مجموعه‌ی $S = \{1,2,\ldots,280\}$ را در نظر بگیرید. حداقل مقدار طبیعی n را بیابید که هر زیر مجموعه‌ی n عضوی از S حداقل پنج عضو دو به دو نسبت به هم اول باشد (المپیاد ریاضی جهانی، ۳/ ۱۹۹۱).

فهرست:

[B] K.Bogart and P.G.Doyle ,, Non- sexist solution of menage problem, Amer. Math, Monthly,۹۳(۱۹۶۸)۵۱۴-۵۱۸.

[D] L.E.Dickson,History of the theory of Numbers, Vol.۱,Carnegie Institiftion of washington, ۱۹۱۹.Reprintcd by chelsea ,NewYork ,۱۹۵۲.

[G] H.W.Gould ,Euler's formula for nth differences of powers. Amer.Math Monthly , ۸۵(۱۹۷۸),۴۵۰-۴۶۷.

[HSW] D.Hanson , k .Seyffarth and sih Weston ,Matchings, Derangements, Recontres,Math.Magazine,۵۹(۴)(۱۹۸۳),۲۲۴-۲۲۹.

[Kp] ۱. Kaplansky ,Solution of the problem des menages" ,Bull.Amer.Math Sow ۴۹(۱۹۴۳),۷۸۴-۷۸۵.

[Kr] D. Karl,Rencontres reencountered , the college Maths,I.,۱۹(۲) (۱۹۸۸),۱۳۹-۱۴۸.

[L] E.Lucas , theorie de nombres, paris ۱۸۹۱. Reprinted by Blanchard, ۱۹۶۱.

[T] L.Takacs , on the method of inclusion and exclusion, I .Amer. statist.Ass.۶۲(۱۹۶۷),۱۰۲-۱۱۳.

فصل ۵

توابع مولد

۱-۵- توابع مولد عادی

همان‌گونه که در فصل‌های قبلی دیدیم یکی از مهمترین وظایف ترکیبیات ساختن ابزاری برای شمارش است. شاید یکی از قویترین و کاربردی‌ترین این وسایل مبحثی به نام توابع مولد باشد. این مبحث ریشه در کارهای« مویور» در حدود سال‌های ۱۷۲۰ دارد و توسط « اولر» در سال ۱۷۴۸ هنگامی که او روی مسایل افراز اعداد صحیح کار می‌کرد، توسعه یافت. بعدها در اواخر قرن ۱۸، توسط « لاپلاس» گسترش پیدا کرد و به شکل یک بحث علمی در آمد. در واقع مبحث توابع مولد نام خود را از یکی از کتاب‌های « لاپلاس» به نام « نظریه تحلیلی احتمالات » (پاریس ۱۸۱۲) گرفته است.

دنباله‌ی $(a_r) = (a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$را در نظر بگیرید. برای دنباله‌ی (a_r) تابع

مولدی را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$A(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

دو تابع مولد $A(x)$ و $B(x)$ برای دو دنباله (a_r) و (b_r) مساوی هستند($A(x)=B(x)$) اگروفقط اگر $a_i = b_i$ $(i \in N^*)$.

ممکن است بتوانیم x را طوری انتخاب کنیم که دنباله‌ی همگرا باشد. اما در این فصل به همگرایی سری‌ها کاری نداریم و فقط به ضرایب می‌پردازیم. «ایوان نیون» [N] بحثی عالی دربارهٔ نظریه‌ی سری‌های توانی انجام داده است به ما اجازه می‌دهدکه سؤال همگرایی را نادیده بگیریم. می‌توانیم عمل ضرب و جمع را برای سری‌های توانی، مانند چند جمله‌ای‌ها، به شکل زیر تعریف کنیم:

فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ تابع مولد برای دو دنباله‌ی (a_r) و (b_r) باشند. یعنی:

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$
$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$$

آنگاه دو دنباله‌ی $A(x)+B(x)$ و $A(x)B(x)$ برای دو دنباله‌ی $A(x)$ و $B(x)$ برابر است با:

$$A(x)+B(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$$
$$A(x)B(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots$$

که در آنها

$$c_r = a_r + b_r \qquad (r=0,1,2,\ldots)$$
$$d_r = a_0b_r + a_1b_{r-1}+\ldots+a_{r-1}b_1 + a_rb_0 \qquad (r=0,1,2,\ldots)$$

با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$A(x)+B(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\dots;$$

و

$$A(x)B(x)=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\dots;$$

و نیز برای عدد حقیقی ثابت α داریم

$$\alpha A(x)=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\dots$$

تبصره:

دنباله‌ی (c_r)، ترکیب دو تابع تعریف می‌شود و دنباله (d_r) به *نام حاصل ضرب کاچی یا حاصل‌ضرب تلفیقی دو تابع* تعریف می‌شود. وقتی دو دنباله متناهی باشند هر دوی این عملگرها دقیقاً مانند چند جمله‌ای‌ها عمل می‌کنند. در این فصل نشان خواهیم داد چگونه با استفاده از توابع مولد، ترکیبیات به جبر متصل می‌شود. در حقیقت این مهمترین فایدهٔ نظریه‌ی توابع مولد است.

حال به ازای هر عدد حقیقی α و عدد طبیعی r «ضریب دو جمله‌ای تعمیم یافته» $\binom{\alpha}{r}$ را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{p_r^\alpha}{r!}$$

که $p_r^\alpha=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-r+1)$ و $\binom{\alpha}{0}=1$ تعریف می‌شود.

حال بسط دو جمله‌ای« نیوتن» را این‌گونه تعمیم می‌دهیم:

$$(1\pm x)^\alpha=\sum_{r=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{r}(\pm x)^r$$

$$=1\pm\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\pm\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$+(-1)^r \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)}{r!}x^r+\ldots \qquad (۵-۱-۱)$$

اثبات این بسط را می‌توان در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت. توجه کنید که سری‌های (۱-۱-۵) در حالتی‌که α عدد صحیح مثبتی نباشد، سری‌های نامتناهی هستند. بحث تعمیم یافته $\binom{\alpha}{r}$ ویژگی‌های مشابهی مانند ضرایب بسط دو جمله‌ای دارد. برای مثال به ازای هر α حقیقی و r طبیعی داریم:

$$\binom{\alpha+1}{r}=\binom{\alpha}{r}+\binom{\alpha}{r-1}$$

طبق (۱-۱-۵) داریم:

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots;$$

و

$$\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots;$$

و در حالت کلی داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$=1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\ldots+\binom{r+n+1}{r}x^r+\ldots,$$ (به ازای هر عدد طبیعی n)

مثال ۱-۱-۵ (الف) به ازای هر عدد n ($n \in N^*$)، دنباله‌ی (a_r) را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$a_r=\begin{cases}1 & r=n\\ 0 & r\neq n\end{cases}$$

یعنی:

$$(a_r) = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$$
$$\uparrow\uparrow \qquad \uparrow$$
$$0\ 1 \qquad n$$

پس تابع مولد دنباله‌ی (a_r) برابر x^n است.

(ب) تابع مولد برای دنباله‌ی $\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n},0,0,\ldots\right)$ برابر است با:

$$\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r = (1+x)^n \qquad (5-1-2)$$

(ج) تابع مولد برای دنباله‌ی (۱،۱،۱،...) برابر است با:

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x} \qquad (5-1-3)$$

در حالت کلی تابع مولد برای دنباله‌ی $(1,k,k^2,\ldots)$ که k مقدار ثابتی است برابر است با:

$$1+kx+k^2x^2+k^3x^3+\ldots=\frac{1}{1-kx} \qquad (5-1-4)$$

(د) در حالت دیگر تابع مولد برای دنباله‌ی (۱،۲،۳،...) برابر است با:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (5-1-5)$$

(هـ) تابع مولد برای دنباله‌ی $\left(\binom{n-1}{0},\binom{1+n-1}{1},\ldots,\binom{r+n-1}{r},\ldots\right)$ برابر است با:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} = \frac{1}{(1-x)^n} \quad .\blacksquare \qquad (5-1-6)$$

فرمول‌های (۲-۱-۵) تا (۶-۱-۵) در یافتن ضرایب توابع مولد بسیار کار ساز هستند. به مثال بعد توجه کنید.

مثال ۲-۱-۵ : ضریب جمله x^k، $(k \geq 18)$، را در بسط زیر بیابید.

$$(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^6$$

حل. مشاهده می‌کنید که

$$\begin{aligned}
&(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^6 \\
&= \{x^3(1 + x + x^2 + \ldots)\}^6 \\
&= x^{18}(1 + x + x^2 + \ldots)^6 \\
&= x^{18}\left(\frac{1}{1-x}\right)^6 \\
&= x^{18}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+6-1}{r}\ x^r \\
&= x^{18}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+5}{5}\ x^r
\end{aligned}$$

بنابراین ضریب جمله x^k $(k \geq 18)$، در بسط $(x^3 + x^4 + x^4 + \ldots)^6$ برابر ضریب جمله x^{k-18} در $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+5}{5}\ x^r$ است که برابر $\binom{k-13}{5}$ است. ■

مثلاً" در این بسط ضریب جمله x^{30} برابر $\binom{17}{5}$ است.

قضیه ۱-۱-۵ (عملگرهای توابع مولد)

فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ دو تابع مولد برای دنباله‌های (a_r) و (b_r) باشد. بنابراین:

(الف) به ازای دو عدد α و β تابع مولد $\alpha A(x) + \beta B(x)$ تابع مولدی برای دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = \alpha a_r + \beta b_r$$

(ب) $A(x)B(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_r = a_\circ b_r + a_\circ b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_{r-1} b_1 + a_r b_\circ$$

ج) $A^2(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r)است که

$$c_r = a_\circ a_r + a_1 a_{r-1} + a_2 a_{r-2} + \ldots + a_{r-1} a_1 + a_r a_\circ$$

د) $x^m A(x)$ به ازای عدد طبیعی m ، تابع مولد دنباله‌ی (c_r)تعریف می‌شود که

$$c_r = \begin{cases} \circ & \circ \le r \le m-1 \\ a_{r-m} & r \ge m \end{cases}$$

ه) $A(kx)$ ، به ازای مقدار ثابت k ، یک تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r)است که

$$c_r = k^r a_r$$

و) $(1-x)A(x)$ ، تابع مولد تعریف شده برای دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_\circ = a_\circ \quad \text{و} \quad c_r = a_r - a_{r-1} \qquad (r \ge 1)$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_\circ, a_1 - a_\circ, a_2 - a_1, \ldots);$$

ز) $\dfrac{A(x)}{1-x}$ ، تابع مولد تعریف شده برای دنباله‌ی (c_r)است که

$$c_r = (a_\circ + a_1 + \ldots + a_r)$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_\circ, a_\circ + a_1, a_\circ + a_1 + a_2, \ldots)$$

ح) $A'(x)$ ، تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r)تعریف می‌شود که

$$c_r = (r+1) a_{r+1}$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$$

(ط) $xA'(x)$، تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = ra_r$$

یعنی:

$$(c_r) = (۰, a_۱, ۲a_۲, ۳a_۳, \ldots)$$

(ی) $\int_۰^\infty A(t)dt$ تابعی برای دنباله‌ی (c_r) تعریف شده است که

$$c_۰ = ۰ \quad \text{و} \quad c_r = \frac{a_{r-۱}}{r} \quad (r \geq ۱)$$

یعنی:

$$(c_r) = (۰, a_۰, \frac{a_۱}{۲}, \frac{a_۲}{۳}, \ldots)$$

اثبات. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ه) مستقیما" به دست می‌آیند و قسمت‌های (ج)، (د) و (و) حالت‌های خاص از قسمت (ب) هستند. قسمت‌های (ح)، (ط) و (ی) نیز به سادگی اثبات می‌شوند. در اینجا فقط قسمت (ز) را ثابت خواهم کرد.

(ز) طبق (۳-۱-۵)، $\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots$. بنابراین:

$$\frac{A(x)}{۱-x} = A(x)(۱+x+x^۲+\ldots) = (a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \ldots)(۱+x+x^۲+\ldots)$$

$$= a_۰ + (a_۰ + a_۱)x + (a_۰ + a_۱ + a_۲)x^۲ + \ldots$$

بنابراین $\frac{A(x)}{۱-x}$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r) است که $c_r = a_۰ + a_۱ + \ldots + a_r$. ■

از قضیه ۱-۱-۵ دریافتیم که عمل‌گرهایی که روی رشته‌ها تعریف می‌شوند را می‌توان به سادگی برای توابع مولدشان تعریف کرد. بنابراین توابع مولد، ابزاری کاربردی برای عملیاتی جبری روی سری‌ها هستند.

مثال ۳-۱-۵ توابع مولد هر کدام از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $c_r = ۳r + ۵$ ، $(r \in N^*)$

ب) $c_r = r^۲$ ، $(r \in N^*)$

حل.(الف) دنباله‌های $a_r = r$ و $b_r = ۱$ را در نظر بگیرید. تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r)، $\frac{x}{(۱-x)^۲}$ است. و برای (b_r)، $\frac{۱}{۱-x}$.

بنابراین طبق قضیه ۱-۱-۵ (الف) تابع مولد برای دنباله‌ی $c_r = ۳r + ۵ = ۳a_r + ۵b_r$ برابر $\frac{۵}{(۱-x)} + \frac{۳x}{(۱-x)^۲}$ است.

(ب) دنباله‌ی $a_r = r$ را در نظر بگیرید. همان گونه که در (الف) دیدیم تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r)، تابع $\frac{x}{(۱-x)^۲}$ است.

از طرفی $c_r = r^۲ = ra_r$ و طبق قضیه ۱-۱-۵ تابع مولد برابر دنباله‌ی (a_r) برابر است با:

$$xA'(x) = x.\frac{(۱-x)^۲ + x.۲(۱-x)}{(۱-x)^۴} = \frac{x(۱+x)}{(۱-x)^۳}$$ ■

۲-۵- چند مساله نمونه

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه مبحث توابع مولد که در بخش گذشته بوجود آمده می‌تواند در حل مسایل ترکیبیات کاربرد داشته باشد در بین این مثال‌ها، خوانندگان می‌توانند تکنیک‌های کاربردی در حل مسایل را ببینند.

برای شروع ، مجموعه‌ی $S=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. تعداد راه‌های انتخاب شی از S هشت راه است.

برای انتخاب یک شی از S داریم:

$\{c\}$ یا $\{b\}$ یا $\{a\}$ (با $a+b+c$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب دوشی از S داریم:

$\{b,c\}$ یا $\{a,c\}$ یا $\{a,b\}$ (با $ab+ac+bc$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب سه شی از S داریم:

$\{a,b,c\}$ (با abc نمایش داده می‌شود)

تمام نشانه‌ها در عبارت زیر ظاهر می‌شوند. زیرا جمله‌ی $3\binom{n+2}{3}$ ثابت نیست و بستگی به مقدار n دارد.

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=$$
$$1x^0+(a+b+c)x^1+(ab+ac+bc)x^2+(abc)x^3 \qquad (*)$$

می‌توانیم $(1+ax)$ را به صورت x^0+ax^1 بنویسیم که به معنی این است که a انتخاب نشود یا یکبار a انتخاب شود.

$$1+ax = x^0 + ax^1$$

“a” انتخاب نشود

یا

“a” یکبار انتخاب شود

به طور مشابه، می‌توان $(1+bx)$ و $(1+cx)$ را نیز به همان صورت نشان داد.

با بسط دادن عبارت سمت چپ تساوی (*)، به عبارت سمت راست خواهیم رسید. در این بسط می‌بینیم که تعداد راه‌های انتخاب k شی، در ضریب جمله‌ی x^k ظاهر شده است. از آنجا که فقط به دنبال تعداد راه‌های انتخاب و نه خود

راه‌ها هستیم می‌توانیم حالت سادهٔ $a=b=c=1$ را در نظر بگیریم و

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1+3x+3x^2+x^3$$

که این عبارت یک تابع مولد برای دنبالـه‌ی (...، ۰، ۱، ۳، ۳، ۱) یـا (۱، ۳، ۳، ۱) اسـت.

بنابراین تابع مولد برای تعداد راه‌های انتخاب r شی از ۳ شی، تابع $(1+x)^3$ است.

مثـال ۱-۲-۵ مجموعـه‌ی $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ را در نظـر بگـیرید و فـرض کنید a_r نمایش دهندهٔ تعداد راه‌های انتخاب r شی از اعضـای S باشـد. بنـابراین تـابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(s_1)}{(1+x)}\underset{(s_2)}{(1+x)}\ldots\underset{(s_n)}{(1+x)} = (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

بنابراین $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (a_r)x^r$ که ایجاب می‌کند

$$a_r = \begin{cases} C_r^n & (0 \le r \le n) \\ 0 & (r \ge n+1) \end{cases}$$

■.

حال شبه مجموعه‌ی $S = \{2.a, 1.b\}$ را در نظر بگیرید. به شـش حـالت می‌تـوان چند عضو از بین اعضای S را انتخاب کرد.

برای انتخاب یک شی از S داریم:

$\{a\}$ یا $\{b\}$ (با $a+b$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب دو شی از S ، داریم:

$\{a,a\}$ یا $\{a,b\}$ (با a^2+ab نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب سه شی از S داریم:

$\{a,a,b\}$ (با a^2b نمایش داده می‌شود)

که تمام نشانه‌ها در عبارت زیر ظاهر می‌شوند.

$$(1+ax+a^2x^2)(1+bx)=1x^0+(a+b)x^1+(a^2+ab)x^2+(a^2b)x^3$$

مانند قبل، می‌توان به سادگی دید که هر کدام از ضرایب جملات، نشان دهندهٔ تعداد راه‌های انتخاب اشیاء، به تعداد توان همان جمله‌ی، از شبه مجموعه‌ی S هستند. دوباره برای اینکه تعداد راه‌های انتخاب را به دست آوریم، می‌توانیم $a=b=1$ در نظر بگیریم و داریم:

$$(1+x+x^2)(1+x)=1+2x+2x^2+1x^3$$

که این عبارت یک تابع مولد برای دنباله‌ی (... ،۰ ،۰ ،۱،۲،۲،۱) است و از این رو تابع مولد برای تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $S=\{2.a,1.b\}$ برابر $(1+x+x^2)(1+x)$ است.

مثال ۲-۲-۵ تعداد راه‌های انتخاب ۴ شی از شبه مجموعه‌ی $M=\{2.b,1.c,2.d,1.e\}$ را بیابید.

حل. فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های انتخاب r عضو از M تعریف شود. آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$(1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2)(1+x)$$
$$=(1+2x+2x^2+x^3)(1+2x+2x^2+x^3)$$

مقدار a_4 برابر ضریب جمله‌ی x^4 در حاصل‌ضرب بالاست. پس $a^4=2+4+2=8$.

در حالت کلی داریم:

فرض کنید b_r برابر تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $M = \{n_۱.a_۱, n_۲.a_۲, \ldots, n_k.a_k\}$ باشد.
آنگاه تابع مولد دنباله‌ی (b_r) تابع زیر است:

$$\underset{(a_۱)}{(۱+x+x^۲+\ldots+x^{n_۱})}\underset{(a_۲)}{(۱+x+x^۲+\ldots+x^{n_۲})}\ldots\underset{(a_k)}{(۱+x+x^۲+\ldots+x^{n_k})}$$

که b_r، ضریب جمله‌ی x^r در بسط حاصل ضرب فوق است.

مثال ۳-۲-۵ فرض کنید a_r تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $M = \{\infty.b_۱, \infty.b_۲, \ldots, \infty.b_k\}$ باشد. آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(b_۱)}{(۱+x+x^۲+\ldots)}\underset{(b_۲)}{(۱+x+x^۲+\ldots)}\ldots\underset{(b_k)}{(۱+x+x^۲+\ldots)}$$

$$=\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^k = \sum_{r=۰}^{\infty} \binom{r+k-۱}{r} x^r$$

بنابراین داریم : $a_r = \binom{r+k-۱}{r}$ ■

تبصره:

جواب a_r در مثال ۳-۲-۵ می‌تواند با شمارش ضریب x^r در تابع مولد زیر نیز به دست آید:

$$(۱+x+x^۲+\ldots+x^r)^k$$

از آنجا که ضرایب متناهی هستند نمی‌توان عبارت‌ها را به شکل بالا ساده کرد و

داریم:
$$(۱+x+x^۲+...+x^r)^k = (\frac{۱-x^{r+۱}}{۱-x})^k$$

که به عبارتی مشکل‌تر از مثال بالا می‌انجامد.

مثال ۴-۲-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز باشد آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$\underbrace{(۱+x+x^۲+...)}_{\text{(جعبه ۱)}}\underbrace{(۱+x+x^۲+...)}_{\text{(جعبه ۲)}}...\underbrace{(۱+x+x^۲+...)}_{\text{(جعبه } n\text{)}}$$

$$=\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+n-۱}{r}\ x^r$$

بنابراین داریم: $a_r = C_r^{r+k-۱}$. ■

مثال ۵-۲-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. پس هر جعبه باید حداقل دارای یک شی باشد و تابع مولد برای هر تابع $(x+x^۲+x^۳+...)$است. بنابراین تابع مولد برای (a_r) برابر است با

$$(x+x^۲+...)^n = x^n(۱+x+...)^n$$
$$= x^n(\frac{۱}{۱-x})^n$$
$$= x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n-۱}{i}x^i$$

بنابراین داریم:

$$a_r = \begin{cases} 0 & (r < n) \\ \binom{r-1}{n-1} & (r \geq n) \end{cases}$$

مثال ۶-۲-۵ یک تاس را سه بار به هوا پرتاب می‌کنیم. در چند حالت مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۱۴ خواهد بود؟

حل. a_r را برابر تعداد راه‌هایی در نظر بگیرید که مجموع اعداد r شود. از آنجا که اعداد ظاهر شده ۱،۲،۳،۴،۵،۶ هستند پس تابع برای (a_r) تابع زیر است.

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$$

$$= x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 = x^3(\frac{1-x^6}{1-x})^3$$

$$= x^3(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{2}x^i$$

از آنجا مقدار a_{14} برابر ضریب جمله x^{14} در بسط فوق است داریم:

$$a_{14} = \binom{11+2}{2} - 3\binom{5+2}{2} = \binom{13}{2} - 3\binom{7}{2} \quad .\blacksquare$$

۳-۵- افراز اعداد صحیح

یک افراز عدد صحیح n، یک شبه مجموعه از اعداد صحیح است که مجموع اعضایش n باشد. (نوشتن n به صورت جمع اعداد طبیعی به طوری که ترتیب اعداد مهم نباشد). از آنجا که ترتیب اعداد مهم نیست، می‌توان هر افراز عدد n را دنباله‌ای

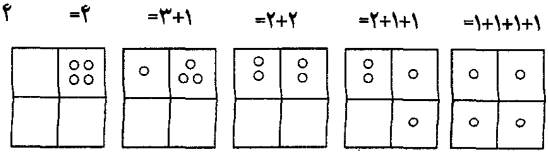
غیر صعودی از اعداد $n_۱ \geq n_۲ \geq ... \geq n_k$ در نظر گرفت به طوری که $\sum_{i=۱}^{k} n_i = n$
تعداد افزارهای مختلف عدد n را با $p_{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۳-۵ جدول زیر افرازهای اعداد ۴،۳،۲،۱ را نشان می‌دهد.

n	افزارهای عدد n	$p(n)$
۱	۱	۱
۲	۲=۱+۱	۲
۳	۳=۲+۱=۱+۱+۱	۳
۴	۴=۳+۱=۲+۲=۲+۱+۱=۱+۱+۱+۱	۵
۵	۵=۴+۱=۳+۲=۳+۱+۱=۲+۲+۱=۲+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱	۷

نکته.(۱) اگر $n = n_۱ + n_۲ + ... + n_k$ یک حالت افراز عدد n باشد. می‌گوییم n به k جزء با اندازه‌های $n_۱, n_۲, ..., n_k$ تقسیم شده است. بنابراین در افراز ۱+۲+۳+۳=۹ ، ۴ جزء با اندازه‌های ۳،۳،۲،۱ بوجود آمده‌اند.

(۲) یک افراز عدد n تعداد راه‌های توزیع n شی همانند در n جعبه همانند است. (جعبه‌های می‌توانند خالی باشند)، همان گونه که در شکل زیر نشان داده‌ایم، ۴ شی همانند را در ۴ جعبه همانند به ۵ حالت می‌توان نشان داد.



مثال ۲-۳-۵ فرض کنید(a_r) تعداد راه‌های افراز عدد صحیح r به اجزایی با اندازه ۳،۲،۱ باشند. تابع مولد برای (a_r) عبارتست از

$$\underset{(\text{اندازه ۱})}{(1+x+x^2+\ldots)}\underset{(\text{اندازه ۲})}{(1+x^2+x^4+\ldots)}\underset{(\text{اندازه ۳})}{(1+x^3+x^6+\ldots)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

توجه کنید که سه عامل تابع مولد فوق به شکل

$$(x^k)^0+(x^k)^1+(x^k)^2+\ldots$$

هستند که $k=1,2,3$ و $(x^k)^j$ به این معنی است که در افراز j جز با اندازه‌ی k وجود دارد. حال جمله‌ی x^3 و ضریبش را در نظر بگیرید. می‌بینیم که ضریب جمله x^3 برابر ۳ است و این به آن معنی است که ۳ راه برای افراز عدد ۳ وجود دارد.

$x^3=(x^1)^0(x^2)^0(x^3)^1=(x^1)^1(x^2)^1(x^3)^0=(x^1)^3(x^2)^0(x^3)^0$. که این حاصل‌ضرب‌ها را می‌توان در جدول زیر نشان داد.

$$\begin{array}{lllll} & \text{اندازه ۱} & \text{اندازه ۲} & \text{اندازه ۳} & \\ 3x^3\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x^0 \\ x^2 \\ x^0 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 \\ x^0 \\ x^0 \end{array} & \begin{array}{l} 3=3 \\ 3=1+2 \\ 3=1+1+1 \end{array} \end{array}$$

و می‌بینیم که ضریب جمله x^4 در بسط فوق برابر ۴ است پس باید ۴ راه برای افراز ۴ به اعداد ۳،۲،۱ وجود داشته باشد.

$$\begin{array}{lllll} & \text{اندازه ۱} & \text{اندازه ۲} & \text{اندازه ۳} & \\ \multirow{4}{*}{۴x^{۴}} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & x^{0} & x^{۴} & x^{0} & ۴=۲+۲ \\ & x^{۱} & x^{0} & x^{۳} & ۴=۱+۳ \\ & x^{۲} & x^{۲} & x^{0} & ۴=۱+۱+۲ \\ & x^{۴} & x^{0} & x^{0} & ۴=۱+۱+۱+۱ \end{array}$$

مثال ۳-۳-۵ فرض کنید a_r تعداد افرازهای عدد r به اعداد نامساوی با اندازه‌های ۱،۲،۳،۴ باشد. تابع مولد برای (a_r) تابع زیر است:

$$(۱+x)(۱+x^{۲})(۱+x^{۳})(۱+x^{۴})$$

می‌دانیم که تکرار مجاز نیست و هر عدد k حداکثر یکبار آمده است. دو راه برای نوشتن $x^{۶}$ وجود دارد. زیرا:

$$x^{۶}=۱.x^{۲}.۱.x^{۴} \leftrightarrow ۶=۲+۴$$

$$x^{۶}=x.x^{۲}.x^{۳}.۱ \leftrightarrow ۶=۱+۲+۳$$

بنابراین $a_{۶}=۲$. ■

مثال ۴-۳-۵ فرض کنید (a_r) نمایش دهنده تعداد افرازهای عدد r به اعداد نامساوی با اندازه‌های دلخواه باشد. برای مثال:

$$۶=۵+۱=۴+۲=۳+۲+۱$$

$$۷=۶+۱=۵+۲=۴+۳=۴+۲+۱$$

$$۸=۷+۱=۶+۲=۵+۳=۵+۲+۱=۴+۳+۱$$

به سادگی می‌توان دید که تابع مولد (a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(۱)}{(۱+x)}\underset{(۲)}{(۱+x^{۲})}\underset{(۳)}{(۱+x^{۳})}\ldots=\prod_{i=۱}^{\infty}(۱+x^{i})$$

توجه کنید که تعداد جملات سمت چپ بی‌نهایت است، چون اندازهٔ اجزا دلخواه هستند.

برای مثال در حاصل‌ضرب بالا، ۴ روش برای ساختن x^6 وجود دارد.

$$x^6 = x^6 \leftrightarrow 6 = 6$$

$$x^6 = x^1x^5 \leftrightarrow 5 = 1 + 5$$

$$x^6 = x^2x^4 \leftrightarrow 6 = 2 + 4$$

$$x^6 = x^1x^2x^3 \leftrightarrow 6 = 1 + 2 + 3$$

مثال ۵-۳-۵ یک جزء در افراز فرد نامیده می‌شود، اگر اندازهٔآن فـرد باشـد. فرض کنید (b_r) نشان دهندهٔ تعداد افرازهای r به اجزا فرد باشد. برای مثال،

۶=۵+۱=۳+۳=۳+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

۷=۷=۵+۱+۱=۳+۳+۱=۳+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

۸=۷+۱=۵+۳=۵+۱+۱+۱=۳+۳+۱+۱=۳+۱+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

بنابراین $b_6 = 4$، $b_7 = 5$، $b_8 = 6$.

تابع مولد (b_r) تابع زیر است:

$$\underset{(1)}{(1+x+x^2+\dots)}\underset{(3)}{(1+x^3+x^6+\dots)}\underset{(5)}{(1+x^5+x^{10}+\dots)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$$

برای مثال در حاصل‌ضرب فوق که چهار حالت x^6ساخته می‌شود.

$$\underset{3+3}{(x^3)^2},\quad \underset{1+5}{x^1x^5},\quad \underset{1+1+1+3}{(x^1)^3x^3} \text{ و } \underset{1+1+1+1+1+1}{(x^1)^6}$$

درنتیجه $b_6 = 4$. ■

از دو مثال بالا، می‌توان فهمیـد کـه $a_۶ = ۴ = b_۶$ ، $a_۷ = ۵ = b_۷$ ، $a_۸ = ۶ = b_۸$. در واقع این تساوی‌ها، حالات خاصی از نتیجه زیر که مربوط به اولراست؛ هستند. او حدود سال ۱۷۴۸، با اثبات چند قضیه زیبا درباره افـراز اعـداد، ایـن مبحـث را بنیـان نهاد.

قضیه ۱-۳-۵ (اولر)

تعداد افرازهای n به اجزای فرد با تعداد افرازهای n به اجزای نامساوی برابر است.

اثبات. فرض کنید a_r (b_r)، نمایش دهنـده تعـداد افرازهـای عـدد n بـه اجـزای نامساوی (فرد) باشد. آنگاه تابع مولد (a_r) تابع زیراست:

$$
\begin{aligned}
&(۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۳)(۱+x^۴)\ldots \\
&=\frac{۱-x^۲}{۱-x}\cdot\frac{۱-x^۴}{۱-x^۲}\cdot\frac{۱-x^۶}{۱-x^۳}\cdot\frac{۱-x^۸}{۱-x^۴}\ldots \\
&=\frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۳)(۱-x^۵)\ldots}
\end{aligned}
$$

کـه ایـن تـابع، تـابع مولـد (b_r) اسـت. بنـابراین $b_r = a_r$ (r=۱،۲،۳،...). روش استفاده شده در اثبات این قضیه را می‌توان برای مساله‌های دیگری که به مسایل اولـر معروفند، به کار برد .

قضیه ۲-۳-۵ تعداد افرازهای n به اجزا، به طوری کـه هـر عـدد حداکـثر دوبـار ظاهر شود با تعداد افرازهایی که اجزای تشکیل دهنده مضرب ۳ نباشند، برابر است.

قبل از اثبات، اجازه دهید درستی آن را به ازای n=۶ تحقیق کنیم. ۷ افراز از عدد ۶ وجود دارد که در آنها هر عدد حداکثر دوبار ظاهر شده باشد:

$$۶=۵+۱=۴+۲=۴+۱+۱=۳+۳$$
$$=۳+۲+۱=۲+۲+۱+۱\ ;$$

همچنین ۷ افراز برای عدد ۶ وجود دارد که اجزای تشکیل دهنده مضرب ۳ نباشند:

$$۵+۱=۴+۲=۴+۱+۱=۲+۲+۲=۲+۲+۱+۱$$
$$=۲+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱\ ;$$

اثبات قضیه ۲-۳-۵ تعداد افرازهای n به اجزاء، به طوری که هر عدد حداکثر دو بار ظاهر شود دنباله‌ای است که تابع آن تابع زیر است:

$$(۱+x+x^{۲})(۱+x^{۲}+x^{۴})(۱+x^{۳}+x^{۶})(۱+x^{۴}+x^{۸})\ldots$$
$$=\frac{(۱-x)(۱+x+x^{۲})}{(۱-x)}\frac{(۱-x^{۲})(۱+x^{۲}+x^{۴})}{(۱-x^{۲})}\frac{(۱-x^{۳})(۱+x^{۳}+x^{۶})}{(۱-x^{۳})}$$
$$\frac{(۱-x^{۴})(۱+x^{۴}+x^{۶})}{(۱-x^{۴})}\ldots$$
$$=\frac{۱-x^{۳}}{۱-x}\frac{۱-x^{۶}}{۱-x^{۲}}\frac{۱-x^{۹}}{۱-x^{۳}}\frac{۱-x^{۱۲}}{۱-x^{۴}}\ldots$$
$$\frac{۱}{۱-x}\frac{۱}{۱-x^{۲}}\frac{۱}{۱-x^{۴}}\frac{۱}{۱-x^{۵}}\frac{۱}{۱-x^{۷}}\ldots$$
$$=\prod\left(\frac{۱}{۱-x^{k}}\,|\,k\in N,۳\nmid k\right),$$

که این دقیقاً" تابع مولد تعداد افرازهای n به اجزاء غیر بخش‌پذیر به ۳ است.

قضیه ۲-۳-۵ به قضیه کلی زیر می‌انجامد که در سال ۱۸۳۳ توسط« جی.ال.

گلایشر» کشف شده است.

قضیه ۳-۳-۵ [G]

به ازای دو عدد طبیعی n و k، تعداد افرازهای n به اجزاء، به طوری که هر جزء حداکثر k بار ظاهر شده باشد برابر تعداد افرازهای n به اجزای غیر بخش‌پذیر بر $k+1$ است.

اثبات این قضیه را بر عهده خواننده می‌گذاریم (مسأله ۵-۵۹ را ببینید).

قضیه ۴-۳-۵ تعداد افرازهای عدد n به اجزاء به طوری که هر عدد حداقل دوبار آمده باشد، برابر تعداد افرازهای n به اعدادی است که باقیمانده آنها بر ۶، مساوی ۱ یا ۵ نباشد.

قضیه ۴-۳-۵ اولین بار در تمرینات کتاب [An۱] آمده است. خوانندگان برای اطلاعات بیشتر می‌توانند به مقاله [AL] مراجعه کنند. در این مقاله نتایج زیادی دربارهٔ مسایل « اولر» وجود دارد.

نمودار فررس

یک وسیله مناسب برای مطالعه افرازهای اعداد صحیح نمودارهایی هستند که توسط نرمن. ام. فررس(۱۹۰۳-۱۸۲۹) طرح شده‌اند. *نمودار فررس* برای یک افراز $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ که $n_1 \geq n_2 \geq \ldots n_k$ اعدادی صحیح و مثبت هستند نموداری است که در سطر iاُم آن n_i ستاره قرار داده شده است. به ازای هر افراز p، $F(p)$ نشان دهنده نمودار فررس افراز p است.

مثال ۶-۳-۵ افراز زیر را از عدد ۱۵ در نظر بگیرید. p:۱۵=۶+۳+۳+۲+۱

نمودار فررس افراز p به شکل زیر است:

$$F(p)\left\{\begin{array}{l} \ast\ast\ast\ast\ast\ast \\ \ast\ast\ast \\ \ast\ast\ast \\ \ast\ast \\ \ast \end{array}\right.$$

ترانهادهٔ نمودار F، که با F^t نمایش داده می‌شود یک نمودار است که سطرهای آن ستون‌های نمودار F است. بنابراین $F^t(p)$ نمودار زیر است:

$$F'(p)\left\{\begin{array}{l} \ast\ast\ast\ast\ast \\ \ast\ast\ast\ast \\ \ast\ast\ast \\ \ast \\ \ast \\ \ast \end{array}\right.$$

این نمودار افراز دیگری از عدد ۱۵ را به ما می‌دهد.

Q:۱۵=۵+۴+۳+۱+۱+۱

دو افراز عدد n که نمودارهای فررس آنها ترانهادهٔ همدیگر هستند، *افرازهای مزدوج* نامیده می‌شوند. بنابراین P و Q دو افراز مزدوج هستند. بسادگی از تعریف بر می‌آید که تعداد اجزاء در افراز P برابر بزرگترین عدد در افراز Q است. با توجه به این نکته می‌توان دیگری از مسایل «اولر» را ثابت کرد.

قضیه ۵-۳-۵ (اولر) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند که $k \leq n$. تعداد افرازهای n به k جزء برابر تعداد افرازهای n به اعدادی است که بزرگترین آنها k

باشد.

اثبات. فرض کنید A مجموعه‌ی تمام افرازهای n به k جزء باشد و B مجموعه‌ی افرازهای n به اعدادی باشد که بزرگترین آنها k است.

تابع $f: A \to B$ را این گونه تعریف می‌کنیم: به ازای هر افراز $P \in A$، $F(p)$ را افرازی در بین B در نظر می‌گیریم که نمودار فررس آن برابر $F^t(p)$ باشد. به سادگی می‌توان دریافت که f تابعی یک به یک و پوشاست و تناظری یک به یک بین اعضاء A و B برقرار می‌کند. بنابراین طبق اصل تناظر یک به یک داریم $|A|=|B|$.

برای توضیح بیشتر مقادیر n=۸ و k=۳ را در نظر می‌گیریم.

افرازهای عدد ۸ به اجزایی که بزرگترینشان ۳ است.	افرازهای عدد ۸ به ۳ جزء
$F(p)$	p
۳+۱+۱+۱+۱+۱	۶+۱+۱
۳+۲+۱+۱+۱	۵+۲+۱
۳+۲+۲+۱	۴+۳+۱
۳+۳+۱+۱	۴+۲+۲
۳+۳+۲	۳+۳+۲

کاربرد قضیه ۵-۳-۵ را در مثال زیر می‌توانید ببینید.

مثال ۵-۳-۷ فرض کنید (a_r) تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در ۳ جعبه باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. تابع دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

حل. ابتدا، توجه کنید که (a_r) تعداد افرازهای r به ۳ جز است. طبق قضیه ۵-۳-۵ مقدار این افرازهای برابر تعداد افرازهایی است که بزرگترین‌شان ۳ باشد. به سادگی می‌توان دید که تابع مولد دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underbrace{(1+x+x^2+\ldots)}_{\text{(اندازه ۱)}}\underbrace{(1+x^2+x^4+\ldots)}_{\text{(اندازه ۲)}}\underbrace{(x^3+x^6+\ldots)}_{\text{(اندازه ۳)}}$$

$$=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

تبصره:

از آنجا که حتماً باید یک جزء با اندازه ۳ وجود داشته باشد پس عامل سوم در حاصل‌ضرب بالا به جای $(1+x^3+x^6+\ldots)$، عامل $(x^3+x^6+\ldots)$ است.

نتیجه. اعداد طبیعی n,m $(m \le n)$ را در نظر بگیرید. آنگاه تعداد افرازهای عدد n به حداکثر m قسمت برابر تعداد افرازهای n به اعداد نابیشتر از m است.■

برای دیدن مطالب جزیی‌تر و پیشرفته‌تر، خوانندگان می‌توانند به کتاب [An۲] مراجعه نمایند.

۵-۴- توابع مولدنمایی

همان گونه که در دو بخش قبل دیدیم، توابع مولد عادی در مسایل توزیع اشیاء یا جایگشت‌ها و افرازها به کار می‌روند که در آنها ترتیب اهمیتی نداشت. در این بخش

به مطالعه توابع مولد نمایی می‌پردازیم که در مسایل شمارش جایگشت‌ها زمانی که ترتیب در نظر گرفته می‌شود، کاربرد دارند.

تابع مولد نمایی را برای دنباله (a_r) اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \ldots + a_r\frac{x^r}{r!} + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\frac{x^r}{r!}$$

مثال ۱-۴-۵ (۱) تابع نمایی مولد برای دنباله‌ی (...،۱،۱،۱) تابع زیر است:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$$

(۲) تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی $(0!, 1!, \ldots, r!, \ldots)$ تابع زیر است:

$$\sum_{r=0}^{\infty} r!\frac{x^r}{r!} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

(۳) تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی $(1, k, k^2, \ldots, k^r, \ldots)$ که k مقدار ثابت غیر صفر است، عبارتست از :

$$1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(kx)^r}{r!} = e^{kx} \ . \blacksquare$$

مثال ۲-۴-۵ نشان دهید تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی

(...و۷ . ۵ . ۳ . ۱و۵ . ۳ . ۱ و۳ . ۱ و۱) تابع $(1-2x)^{\frac{-3}{2}}$ است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که ضریب جمله‌ی x^r در بسط $(1-2x)^{\frac{-3}{2}}$

برابر $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r+1)}{r!}$ است.

طبق تعریف داریم:

$$(1-2x)^{\frac{-3}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\frac{-3}{2}}{i}(-2x)^{i}$$

بنابراین ضریب جمله‌ی x^r در این بسط است با

$$(-2)^r\binom{\frac{-3}{2}}{r} = (-2)^r\frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{3}{2}-r+1\right)}{r!}$$

$$=(-2)^r(-\frac{1}{2})^r\frac{3.5.7\ldots(2r+1)}{r!}=\frac{1.3.5.7\ldots(2r+1)}{r!}$$ ■.

تابع مولد نمایی برای تبدیل‌ها

از فصل اول p_r^n را که نمایش دهنده تعداد تبدیل‌هایی r عضوی از مجموعه‌ی n عضوی بود به یاد بیاورید. طبق فرمول(۱-۴-۱) داریم:

$$p_r^n = \binom{n}{r}\ r!$$

در نتیجه:

$$\sum_{r=0}^{n} p_r^n\frac{x^r}{r!}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r=(1+x)^n$$

بنابراین طبق تعریف، تابع نمایی مولد برای دنباله‌ی (p_r^n) تابع $(1+x)^n$ است.

مثال ۳-۴-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد تبدیل‌های r تایی از p شی همانند باشد. تابع مولد نمایی برای دنباله (a_r) تابع زیر است:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!}$$

زیرا مقدار a_r $(r=0,1,\ldots,p)$ برابر یک است و برای r های بزرگتر از p مقدار آن صفر است.

مثال ۴-۴-۵ دنباله‌ی (a_r) را که a_r برابر تعداد تبدیل‌های r تایی از p توپ همانند آبی و q توپ همانند قرمز تعریف می‌شود. تابع مولد نمایی این دنباله تابع زیر است:

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^p}{p!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^q}{q!})$$ ■

اگر a_r تعداد تبدیل‌های r تایی از شبه مجموعه‌ی

$\{n_1.b_1,n_2.b_2,\ldots n_k.b_k\}$

باشد، آنگاه مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع

$$(1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!})(1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!})\ldots(1+x+\ldots\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

است و a_r ضریب جمله‌ی $\frac{x^r}{r!}$ در عبارت فوق است.

مثال ۵-۴-۵ چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف کلمه‌ی PAPAYA ساخته می‌شوند؟

حل. a_r را برابر تعداد تبدیل‌های rتایی شبه مجموعه‌ی $\{۳.A,۲.P,۱.Y\}$ که با استفاده از حروف کلمه PAPAYA ساخته شده‌اند باشد. آنگاه تابع مولد نمایی برای دنباله(a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(A)}{\left(۱+\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}\right)}\underset{(P)}{\left(۱+\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}\right)}\underset{(Y)}{\left(۱+\frac{x^۱}{۱!}\right)}$$

برای به‌دست آوردن مقدار $a_۴$، جملاتی را که از مرتبه‌ی $x^۴$باشند، سوا می‌کنیم. داریم:

$$x.\frac{x^۲}{۲!}.x+\frac{x^۲}{۲!}.x.x+\frac{x^۲}{۲!}.\frac{x^۲}{۲!}.۱+\frac{x^۳}{۳!}.x.۱+\frac{x^۳}{۳!}.۱.x=a_۴\frac{x}{۴!}$$

و در نتیجه داریم:

$$a_۴=\underset{(A,۲.P,Y)}{\frac{۴!}{۲!}}+\underset{(۲.A,P,Y)}{\frac{۴!}{۲!}}+\underset{(۲.A,۲.P)}{\frac{۴!}{۲!۲!}}+\underset{(۳.A,P)}{\frac{۴!}{۳!}}+\underset{(۳.A,Y)}{\frac{۴!}{۳!}}$$

مثال ۶-۴-۵ اگر a_rبرابر تعداد تبدیل‌های r تایی از شبه مجموعه‌ی $\{\infty.b_۱,\infty.b_۲,\ldots,\infty.b_k\}$ باشد، آنگاه تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\ldots\right)^k=(e^x)^k=e^{kx}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(kx)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}k^r\frac{x^r}{r!}$$

بنابراین مقدار a_r برابر k^r بدست می‌آید.

مثال ۷-۴-۵ برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد اعداد r رقمی در مبنای چهار (هر رقم ۰،۱،۲، یا ۳ باشد) که در آنها هر کدام از ارقام ۲ و ۳ حداقل یکبار آمده باشند در نظر بگیرید. مقدار a_r را بیابید.

حل. تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2}_{(0)(1)}\underbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2}_{(2)(3)} = (e^x)^2(e^x-1)^2$$

$$\begin{aligned} &= e^{2x}(e^{2x}-2e^x+1) \\ &= e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (4^r - 2.3^r + 2^r)\frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $r \in N^*$ مقدار a_r برابر $4^r - 2.3^r + 2^r$ به دست می‌آید.■

تبصره.

از آنجا که

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

و

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^x}{n!}+\dots$$

داریم:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{۲} = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \dots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{۲} = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \dots$$

توجـه کنیـد کـه $\frac{e^x + e^{-x}}{۲}$ تنهـا دارای توان‌هـای زوج x اسـت در حـالی که $\frac{e^x + e^{-x}}{۲}$ فقط توان‌های فرد را شامل می‌شود. این نکات در حل مساله بعـد مـا را یاری می‌کنند.

مثال ۸-۴-۵ به ازای عدد $r \in N^*$، فرض کنید a_r تعداد اعداد r رقمی در مبنای ۳ است که دارای فرد رقم "۰" و زوج رقم "۱" باشند. a_r را بیابید.

حل. تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)e^x =$$

$$(۰) \qquad (۱) \qquad (۲)$$

$$= \frac{۱}{۴} e^x (e^{۲x} - e^{-۲x})$$

$$= \frac{۱}{۴} (e^{۳x} - e^{-x})$$

$$= \frac{۱}{۴} \sum_{r=۰}^{\infty} (۳^r - (-۱)^r) \frac{x^r}{r!}$$

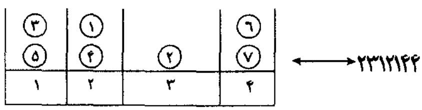
بنابراین داریم: $a_r = \frac{۱}{۴}(۳^r - (-۱)^r)$

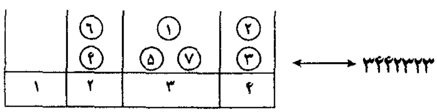
مسایل توزیع

در بخش‌های ۲ و ۳ دیدیم که مبحث توابع مولد عادی در توزیع اشیاء یکسان به کار برده می‌شوند. در این قسمت با استفاده از دو مثال نشان خواهیم داد. که توابع نمایی در مسایل توزیع اشیا متمایز در جعبه‌های متمایز کاربرد دارند.

مثال ۹-۴-۵ به ازای عدد $r \in N^*$، مقدار a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در ۴ جعبه متمایز را بیابید در صورتی که بخواهیم در جعبه‌های ۱ و ۲ تعداد زوج و در جعبه۳ تعداد فردی شی قرار بگیرد.

قبل از حل مسأله، می‌خواهیم نشان بدهیم که چگونه مسأله توزیع طرح شده می‌تواند به مسأله یافتن تعداد اعداد r رقمی است که در آن به تعداد زوجی "۰" و "۱" و تعداد فردی "۳" بر می‌خوریم. برای مثال $n=۷$ ، دو حالت تناظر توزیع و عدد در مبنای چهار را نشان می‌دهیم .





توجه می‌کنید که توپ شمارهٔ i در جعبه‌ی j قرار گرفته اگر وفقط اگر رقم j، i امین حرف دنباله‌ی در مبنای چهار مربوطه باشد. مثلا" در دنباله‌ی ۳۴۴۲۲۳۲۳، رقم "۴" دوبار و در مکان‌های ۲و۳ آمده‌اند و در نتیجه توپ‌های شمارهٔ ۲ و ۳ در جعبه‌ی

۴ قرار گرفته‌اند. با توجه به مطالب ذکر شده، می‌توانیم توابع مولد نمایی را در حل مساله توزیعی داده شده به کار ببریم .

حل. تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)e^x$$

(۲)(۱) (۳) (۴)

$$= \frac{۱}{۸}(e^{۲x} - e^{-۲x})(e^{۲x} + ۱)$$

$$= \frac{۱}{۸}(e^{۴x} - ۱ + e^{۲x} - e^{-۲x})$$

$$= \frac{۱}{۸}(-۱ + \sum_{r=۰}^{\infty}[۴^r + ۲^r - (-۲)^r]\frac{x^r}{r!})$$

بنابراین مقدار a_r برابر $\frac{۱}{۸}[۴^r + ۲^r - (-۲)^r]$ به دست می‌آید.

مثال ۱۰-۴-۵ فرض کنید a_r، تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه متمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند a_rرا بیابید.

حل. تابع مولد نمایی (a_r) تابع زیر است.

$$(x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots)^n$$

$$= (e^x - ۱)^n$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}(e^x)^{n-i}(-۱)^i$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}\left(\sum_{r=۰}^{\infty}\frac{(n-i)^r x^r}{r!}\right)(-۱)^i$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^r\right)\frac{x^r}{r!}$$

بنابراین، $a_r = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^r$ ، که این مقدار همان طور که در قضیه ۱-۵-۴ نشان داده شده تعداد توابع پوشا از N_r به N_n است. ■

به طورکلی، مسایل توزیع اشیاء به ۴ نوع تقسیم می‌شوند بسته به اینکه اشیاء توزیع شده همانند یا متمایز باشند و جعبه‌هایی که اشیا در آنها جای می‌گیرند همانند یا متمایز باشند. فصل را با ارایه مقادیر به دست آمده برای چهار نوع مساله به پایان می‌رسانیم.

	r شی	n جعبه	مقدار به دست آمده
الف)	متمایز	متمایز	n^r
ب)	همانند	متمایز	$\binom{r+n-1}{r}$
ج)	متمایز	همانند	$\sum_{i=1}^{n} S_{(r,i)}$
د)	همانند	همانند	تعداد افرازهای عدد r به n عدد طبیعی

در این فصل، دیدیم که توابع مولد می‌توانند در حل مسایل توزیعی نوع‌های (الف)، (ب) و(د) به کار بروند. به طور کلی در این گونه مسایل اگر بخواهیم اشیاء همانندی را در جعبه‌های متمایز (مثال‌های ۴-۲-۵ و ۵-۲-۵) قرار دهیم یک تابع مولد عادی می‌سازیم در حالتی که اشیای متمایز و جعبه‌ها هم متمایز باشند (مثال‌های۹-۴-۵ و ۱۰-۴-۵) ، توابع مولد نمایی کارساز خواهند بود. حالت اشیا همانند و جعبه‌های همانند نیز در واقع مساله افراز عدد صحیح است که برای حل این مسایل می‌توانیم به ازای هر اندازه‌ی هر جزء از افراز یک تابع مولد عادی بسازیم.

❖ تمرینات فصل پنجم

۱- ضریب x^{20} را در بسط عبارت $(x^2 + x^4 + x^5 + \dots)^3$ بیابید.

۲- ضریب جملات x^9 و x^{14} را در بسط عبارت $(1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4$ بیابید.

۳- در قضیه ۱-۱-۵ قسمت‌های (د) ، (و)، (ح)، (ط) و (ی) را اثبات کنید.

٤- تابع مولد دنباله‌ی (c_r) که $c_0 = 0$ و $c_r = \sum_{i=1}^{r} i^2$ را بیابید و با استفاده از آن نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{r} i^2 = \binom{r+1}{3} + \binom{r+2}{3}$$

۵- تابع مولد دنباله‌ی (c_r)، $c_0 = 0$ و $c_r = \sum_{i=0}^{r} i2^i$ را بیابید و نشان دهید

$$\sum_{i=0}^{r} i2^i = 2 + (r-1)2^{r+1}$$

۶- (الف) برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر $\frac{1}{4^r}\binom{2r}{r}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید تابع مولد دنباله‌ی (a_r) تابع $(1-x)^{\frac{-1}{2}}$ است.

(ب) با استفاده از تساوی $(1-x)^{-1} = (1-x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}$ نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

۷- نشان دهید:

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}\binom{m}{r} = n\binom{n+m-1}{n}$$

۸- به چند روش می‌توانیم ۱۰ شکلات همانند را بین ۳ پسر تقسیم کنیم به طوری که هیچ پسری بیشتر از ۴ شکلات نداشته باشد؟

۹- تعداد راه‌های قرار دادن ۴۰ توپ همانند در ۷ جعبه متمایز را بیابید به طوری که در جعبه اول حداقل ۱ و حداکثر ۱۰ توپ وجود داشته باشد؟

۱۰- به چند روش می‌توان $2n$ توپ را از بین n توپ همانند قرمز، n توپ همانند آبی و n توپ همانند سفید انتخاب کرد؟

۱۱- به چند روش می‌توان ۱۰۰ صندلی همانند را در ۴ اتاق متمایز قرار داد به طوری که در هر اتاق ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، یا ۵۰ صندلی قرار گرفته باشد؟

۱۲- فرض کنید a_r تعداد حالات تقسیم r شی همانند در ۵ جعبه متمایز باشد به طوری که جعبه‌های ۱،۳ و ۵ خالی نباشند و b_r تعداد راه‌های قرار دادن r شی همانند در ۵ جعبه متمایز باشد به طوری که در هر یک از جعبه‌های ۲ و ۴ حداقل دو توپ قرار گرفته باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

(ب) تابع مولد دنباله‌ی (b_r) را بیابید.

(ج) نشان دهید $a_r = b_{r+1}$ $(r = 1,2,\ldots)$.

۱۳- برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد دسته جواب‌های معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = r$$

تعریف می‌کنیم که $3 \le x_1 \le 9$، $0 \le x_2 \le 8$ و $7 \le x_3 \le 17$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و مقدار a_{28} را معین کنید.

۱۴- به چندروش می‌توانیم ۳۰۰۰مداد مشابه را در بسته‌های۲۵ تایی بین۴دانش‌آموز تقسیم کنیم به‌طوری که هر دانش‌آموزحداقل ۱۵۰و حداکثر ۱۰۰۰ مداد دریافت کند؟

۱۵-به چند روش می‌توان ۱۰ حرف را بین از حروف "F,U,N,C,T,L,O" انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ بار U و حداقل یک بار O انتخاب شده باشد.

۱۶- تابع مولد دنباله (a_r) را بیابید، اگر a_r

(الـف) تعـداد حـالات انتخـاب r حـرف (نـه لزومـا" متمـایز) از مجموعـه‌ی $\{D,R,A,S,T,I,C\}$ باشد که حداکثر ۳ بار D و حداقل ۲ بار T آمده باشد.

(ب) تعداد افرازهای عدد r به اجزا با اندازه ۸،۵،۳،۲،۱ باشد.

(ج) تعداد افرازهای r به اجزا متمایز با اندازه‌های ۵، ۱۰، ۱۵ باشد.

(د) تعداد افرازهای r به اجزا متمایز فرد باشد.

(هـ)تعداد افزارهای r به اجزا متمایز زوج باشد.

(و) تعداد جواب‌های صحیح نامعادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7$$

باشد که $1 \leq x_i \leq 6$ $(i = 1,2,\ldots,5)$.

۱۷- تعـداد شـبه زیـر مجموعـه‌های $4n$ عضـوی را از شـبه مجموعـه‌ی $\{(3n).x,(3n).y,(3n).z\}$ بیابید.

۱۸- برای اعداد طبیعی m,n $(m,n \geq 3)$ تعـداد شـبه زیرمجموعـه‌های $3n$ عضـوی شبه مجموعه‌ی $M = \{n.z_1,n.z_2,\ldots,n.z_m\}$ را بیابید.

۱۹- احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده در انداختن ۵ تاس متمایز برابر ۱۷ شـود، چقدر است؟

۲۰- تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیـابید، کـه a_r برابـر تعـداد حـالات بـه دسـت آوردن مجموع r در انداختن هر تعداد تاس متمایز است.

۲۱- به ازای اعداد طبیعی k و m و عدد $r \in N^*$، (a_r)را برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در $2k+1$ جعبه متمایز تعریف می‌کنیم به طوری که $k+1$ جعبـه اول خـالی نباشند و (b_r) را تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در $2k+1$ جعبـه متمـایز تعریـف می‌کنیم به طوری که در هر کدام از k جعبه آخر m شی قرار گرفته باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

(ب) تابع مولد(b_r) را بیابید.

(ج) نشان دهید $a_r = b_{r+(m-1)k-1}$.

۲۲- تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را که a_r تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = r$$

که $(x_i \geq 0)$بیابید.

۲۳- به ازای عدد $r \in N^*$، a_rرا تعداد راه‌های انتخاب ۴ عدد صحیح متمایز از مجموعه‌ی N_r در نظر بگیرید که هیچ دوتایی متوالی نباشند. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و نشان دهید $a_r = \binom{r-3}{4}$.

۲٤- برای اعداد طبیعی m و t و عدد $r \in N^*$،(a_r)را برابر تعداد زیر مجموعه‌های مرتب $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ از مجموعه‌ی $\{1،2،...،r\}$ در نظر بگیرید، که $(n_1 < n_2 < \dots < n_m)$, $n_{i+1} - n_i \geq t$ $(i = 1, 2, \dots, m-1)$. تابع مولد دنباله‌ی(a_r) را بیابید و نشان دهید.

$$(a_r) = \binom{r-(m-1)(t-1)}{m}$$

(مسأله ۹۱-۱ را ببینید).

۲۵- برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد دسته جواب‌های صحیح نامعادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq r$$

در نظر بگیرید که $3 \leq x_1 \leq 9$ و $1 \leq x_2 \leq 10$ و $x_3 \geq 2$ و $x_4 \geq 0$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و مقدار a_{20} را مشخص کنید.

۲۶- نشان دهید اگر $n \in N^*$ و α عددی حقیقی باشد که $-1 < \alpha < 0$، آنگاه

$$\binom{2\alpha}{2n} \geq (2n+1)\binom{\alpha}{n}^2$$

و اگر $\alpha < -1$ باشد، نامعادله بر عکس می‌شود.(این مساله توسط« ای .روسن

کرانس» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا ۱۱۳۶؛۱۹۷۲،۹۷ پیشنهاد شده است.)

۲۷- برای عدد طبیعی n ، فرض کنید:

$$a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}\right\}.\left\{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\ldots+\binom{n}{n}\right\}$$

و فرض کنید $B(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (b_k) باشد که:

$$b_k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}$$

(الف) نشان دهید:

$$B(x)=\frac{(1+x)^n}{(1-x)}$$

(ب) تابع مولد (a_n) را بیابید و نشان دهید:

$$a_{n-1}=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r)$$

(ج) نشان دهید:

$$a_{n-1}=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$$

(«جی. چنگ» و« ز. شان» ، ۱۹۸۴)

۲۸-برای اعداد طبیعی n و m و عدد درست r ، مقدار تعمیم یافته $\binom{n}{r}_m$را برای ضرایب دو جمله‌ای این گونه تعریف می‌کنیم.

$$\binom{1}{r}_m=\begin{cases}1 & (0\le r\le m-1)\\ 0 & (r<0 \quad \text{یا} \quad r>m-1)\end{cases}$$

$$\binom{n}{r}_m=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n-1}{r-i}_m ;(n\ge 2)$$

می‌توان به سادگی فهمید که $\binom{n}{r} = \binom{n}{r}_{۲}$. نشان دهید.

(الف) $\binom{n}{r}_m$ تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = r$$

است که در شرط $۰ \le x_i \le m - ۱$، $i=۱،۲،\ldots،n$، صدق می‌کنند.

(ب) $\binom{n}{۰}_m = ۱$

(ج) $\binom{n}{۱}_m = n$، اگر $m \ge ۲$.

(د) $\binom{n}{r}_m = \binom{n}{s}_m$، اگر $r+s=n(m-۱)$

(ه) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} \binom{n}{r}_m = m^n$$

(و) تابع مولد دنباله‌ی $\left(\binom{n}{r}_m\right)$، $(r=۰، ۱،۲،\ldots)$، تابع $(۱+x+\ldots x^{m-۱})^n$ است.

(ز) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} (-۱)^r \binom{n}{r}_m = \begin{cases} ۰ & \text{عددی زوج } m \\ ۱ & \text{عددی فرد } m \end{cases}$$

(ح) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} r \binom{n}{r}_m = \frac{n(m-۱)m^n}{۲}$$

(ط) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} (-۱)^{r-۱} r \binom{n}{r}_m = \begin{cases} ۰ & \text{عددی زوج } m \\ \dfrac{n(۱-m)}{۲} & \text{عددی فرد } m \end{cases}$$

(ی) برای اعداد طبیعی p و q داریم:

$$\sum_{i=۰}^{r} \binom{p}{i}_m \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}_m$$

(ک) $$\binom{n}{r}_m = \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \binom{n}{i} \binom{n-۱+r-mi}{n-۱}$$

(برای دیدن پاسخ مسأله می‌توانید به مجله‌ی ریاضیات دشوار(۱۰،۱۹۸۴؛۱۳۸-۱۳۴) مراجعه کنید.)

۲۹- به ازای عدد طبیعی n، مقدار زیر را بیابید.

$$S_n = \sum_{r=0}^{n} 2^{r-2n}\binom{2n-r}{n}$$

(این مساله توسط تیم اعزامی از رژیم صهیونیستی به ۳۱ امین المپیاد جهانی ریاضی پیشنهاد شده است).

۳۰- برای عدد درست r، مقدار a_r را برابر

$$a_r = 1\times 4\times 7\times\ldots\times(3r+1)$$

در نظر بگیرید. نشان دهید تابع مولد نمایی (a_r) تابع $(1-3x)^{\frac{-4}{3}}$ است.

۳۱- تعداد راه‌های رنگ کردن n مربع صفحه شطرنجی $1\times n$ را با سه رنگ قرمز، آبی و سفید بیابید، اگر قرار باشد تعداد زوجی مربع 1×1 با رنگ قرمز رنگ شده باشند.

۳۲- تعداد اعداد n رقمی در مبنای ۴ را بیابید که در آنها حداقل یک بار عدد ۳ به کار رفته باشد و از هر کدام از ارقام "۰" و "۱" به ترتیب به تعداد فرد و زوجی استفاده شده باشد.

۳۳- تعداد کلمات n حرفی که با حروف e,d,c,b,a و f ساخته می‌شوند چقدر است اگر مجموع تعداد aها و bها (الف) عددی زوج باشد. (ب) عددی فرد باشد؟

۳۴- به چند حالت می‌توان r شی متمایز را در ۵ جعبه متمایز قرار داد به طوری که در هر کدام از جعبه‌های ۱و۳و۵ تعداد فردی شی و در هر کدام از جعبه‌های دیگر تعداد زوجی شی قرار گرفته باشد؟

۳۵- درستی تساوی‌های زیر را به ازای عدد حقیقی z ثابت کنید.

(الف) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{z}{2k}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k} = \binom{2z}{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{z+1}{2k+1}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k+1} = \binom{2z+2}{2n+1} \quad \text{(ب)}$$

این مسأله توسط« ام. مک اوور» و« وی. گود» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۷۵:۱۹۸۵،۷۶) پیشنهاد شده است).

۳۶- ثابت کنید.

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1} \frac{k}{r}\binom{r}{k}k^{n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

این مساله توسط «جی. ام.لی» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا(۷۷،۱۹۷۰:۳۰۹-۳۰۸) پیشنهاد شده است).

۳۷- اگر برای اعداد درست $k_1, k_2, \ldots, k_n$ داشته باشیم $n = \sum_{i=1}^{n} ik_i$ و مجموع این اعداد r باشد، ثابت کنید.

$$\sum \frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!} = \frac{1}{r!}\binom{n-1}{r-1}$$

(مجموع برای همه‌ی دسته اعداد $k_1, k_2, \ldots, k_n$ که شرایط ذکر شده را دارا باشند، حساب می‌شود.)

(این مسأله به عنوان مسأله پیشنهادی « دی.ژوگوویچ» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۷۷،۱۹۷۰:۶۵۹) مطرح شده است).

۳۸- در یک شرکت ۸ مرد و ۱۰ زن کار می‌کنند. به چند حالت می‌توان محل کار آنها را در یکی از چهار اتاق این شرکت قرار داد اگر

(الف) در هر اتاق حداقل یک نفر قرار داشته باشد؟

(ب) در هر اتاق، حداقل یک زن کار کند؟

(ج) در هر اتاق حداقل یک مرد و حداقل یک زن کارکنند؟

۳۹- تعداد تبدیل‌هایی r عضوی شبه مجموعه‌ی

$$\{\infty.\alpha,\infty.\beta,\infty.\gamma,\infty.\lambda\}$$

بیابید که تعداد α ها در آن عددی فرد و تعداد β ها زوج باشند.

٤۰- برای عدد طبیعی n و عدد درست r، رابطه‌ی $(\alpha_r) = F(r,n)$ را تعریف می‌کنیم که $F(r,n)$ برابر تعداد راه‌های توزیع r شی متفاوت در n جعبه متفاوت به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، تعریف می‌شود (قضیه ۱-۵-۴) . بنابراین $F(r,n) = n!S(r,n)$، که $S(r,n)$ عدد استرلینگ نوع دوم است. تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) را بیابید و برای عدد $r \geq ۲$ نشان دهید.

$$\sum_{m=۰}^{\infty}(-۱)^m m!S(r,m+۱) = ۰$$

٤۱- تابع $A_n(x)$ را تابع مولد نمایی دنباله‌ی $(S(۰,n),S(۱,n),\ldots,S(r,n),\ldots)$ تعریف می‌کنیم $A_n(x)$ را بیابید و نشان دهید:

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = n\ A_n(x) + A_{n-۱}(x)$$

٤۲- عدد B_r را برابر $B_r = \sum_{k=۱}^{r} S(r,k)$ تعریف می‌کنیم. این اعداد به اعداد بل معروفند(بخش ۷-۱). نشان دهید تابع مولد نمایی دنباله‌ی B_r تابع $(e^{e^x-۱})$ است.

٤۳- برای عدد طبیعی n و عدد درست r:

(الف) تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز n در جعبه متفاوت را به طوری که در هر جعبه ترتیب اشیا مهم باشد، بیابید.

(ب) فرض را a_r برابر تعداد راه‌های انتخاب حداکثر r شی از r شی متفاوت و

توزیع آنها در n جعبه متفاوت باشد، به طوری که در هر جعبه ترتیب اشیا مهم باشد. نشان دهید.

۱- $a_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} n^{(i)}$ ، که $n^{(i)} = n(n-1)\ldots(n-i+1)$ و $n^{(0)}$ برابر یک تعریف می‌شود.

۲- تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$e^x(1-x)^{-n}$$

٤٤- تابع مولد نمایی (a_r) را در هر یک از حالات زیر بیابید. a_r تعداد راه‌های توزیع r شی متفاوت در

(الف) ۴ جعبه متفاوت است.

(ب) ۴ جعبه متفاوت است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

(ج) ۴ جعبه همانند است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

(د) ۴ جعبه همانند است.

٤۵- ثابت کنید تعداد افرازهای عدد n به اجزاء، به طوری که هیچ جزء زوجی بیشتر از یک بار نیامده باشد؛ برابر تعداد افرازهای n به اجزاء است به طوری که هر جز حداکثر سه بار ظاهر شده باشد.

٤۶- برای اعداد طبیعی r و n ، a_r را برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

در نظر می‌گیریم که $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 1$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

٤۷- به ازای عدد طبیعی n و عدد درست r ، b_r را برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

در نظر می‌گیریم که $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$. تابع دنباله‌ی (b_r) را بیابید.

۴۸- به ازای عدد طبیعی n و عدد درست r، فرض کنید a_r نمایش دهندهٔ تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه همانند باشد و b_r نمایش دهندهٔ تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$\sum_{k=۱}^{n} k\, x_k = r$$

که $x_k \geq ۰$، باشد. نشان دهید

$$a_r = b_r$$

۴۹- فرض کنید a_r، $r \in N^*$، برابر تعداد افرازهای r به توان‌های مختلف عدد ۲ باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

(ب) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی r، $a_r = ۱$

(ج) از قسمت (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۵۰- برای عدد طبیعی n، نشان دهید تعداد راه‌های افراز عدد $۲n$ به اجزای متفاوت زوج برابر تعداد افرازهای n به اعداد فرد است.

۵۱- اعداد طبیعی k و n را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد افرازهای n به اعداد فرد تعداد افرازهای kn به اجزای متمایزی است که طول هر جزء مضربی از k باشد.

۵۲- فرض کنید $p(n)$ تعداد افرازهای عدد طبیعی n باشد. نشان دهید.

$$p(n) \leq \frac{۱}{۲}\big(p(n+۱) + p(n-۱)\big)$$

۵۳- برای اعداد طبیعی k و n، $k \leq n$، فرض کنید $p(n,k)$ نمایش دهندهٔ تعداد افرازهای n به دقیقا" k جزء باشد.

(الف) مقادیر $p(۵,۱)$، $p(۵,۲)$، $p(۵,۳)$ و $p(۸,۳)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$.

$$\sum_{k=۱}^{m} p(n,k) = p(n+m,m)$$

۵٤- الف)اگر $p(n,k)$ همان مقدار تعریف شده در مسأله‌ی قبل باشد، مقادیر $p(۵,۳)$ و $p(۷,۲)$ و $p(۸,۳)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید: $p(n-۱,k-۱)+p(n-k,k)=p(n,k)$

۵۵- به ازای اعداد طبیعی n و k، $n \le k$، نشان دهید

$$p(n+k,k)=p(۲n,n)=p(n)$$

۵۶- برای اعداد طبیعیn و k، $n \le k$، نشان دهید:

$$p(n,k) \ge \frac{۱}{k!}\binom{n-۱}{k-۱}$$

۵۷- اگر n و k دو عدد طبیعی باشند، نشان دهید تعداد افزارهای n به k عدد متمایز برابر است با $p\left(n-\binom{k}{۲},k\right)$

۵۸- نتیجه‌ی قضیه۲-۳-۵ را ثابت کنید.

۵۹- الف) قضیه۳-۳-۵ را ثابت کنید.

(ب) قضیه ۴-۳-۵ را ثابت کنید.

۶۰- برای عدد صحیح مثبتn، $C(n)$ تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموع غیر صعودی توان‌های ۲ است به طوری که هیچ توانی بیش از ۳ بار نوشته نشود. مثلاً" $C(۸)=۵$ است زیرا عدد ۸ را به ۵ صورت می‌توان نمایش داد:

۱+۱+۲+۲+۲ و ۱+۱+۲+۴و ۲+۲+۴ و ۴+۴ و۸

صحت و سقم گزارهٔ زیر را بیابید.

چند جمله‌ای $Q(x)$ یافت می‌شود به طوری که به ازای تمام اعداد صحیح n، داشته باشیم $C(n)=\lfloor Q(n)\rfloor$. (پاتنام، ۱۹۸۳)

۶۱- فرض کنید $C(n)$همان مقدار تعریف شده در مسأله‌ی قبل باشد. نشان دهید

تابع مولد دنباله‌ی $(C(n))$ تابع زیر است.

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^{2}}$$

۶۲- (الف)۱- تمام افرازهای ۸ به ۳ جزء را بنویسید.

۲- تمام مثلث‌های ناهم ارز که طول اضلاعشان سه عدد صحیح b,a و c است و $a+b+c=16$، فهرست کنید.

۳- آیا تعداد افرازهای قسمت (۱) با تعداد مثلث‌های نا مساوی قسمت (۲) برابر است.

(ب) برای هر عدد طبیعی r a_r را برابر تعداد مثلث‌های نا هم ارز که طول اضلاع‌شان اعداد صحیح c,b,a است و $a+b+c=2r$، تعریف می‌کنیم و b_r را برابر تعداد افرازهای r، به ۳ جز قرار می‌دهیم.

۱- با استفاده از اصل تناظر یک به یک نشان دهید $a_r = b_r$

۲- تابع مولد نمایی (a_r) را بیابید.

۶۳- یک افراز P عدد صحیح مثبت n خود مزدوج نامیده می‌شود اگر P ومزدوج آن نمودار فررس همانند داشته باشند.

(الف) تمام افرازهای خود مزدوج ۱۵ را بیابید.

(ب) تمام افرازهای ۱۵ به اعداد فرد متمایز را بیابید.

(ج) نشان دهید تعداد افرازهای خود مزدوج n برابر تعداد افرازهای n به اعداد فرد متمایز است.

۶۴- نشان دهید تعداد افرازهای خود مزدوج n که اندازهٔ بزرگ‌ترین جزءشان m است، برابر تعداد افراز خود مزدوج عدد $n-2m+1$ است که بزرگ‌ترین عددشان از $m-1$ تجاوز نمی‌کند.

۶۵- الف) بزرگترین مربع از ستاره‌ها که در گوشه بالا و سمت چپ نمودار فررس

وجود دارد، *مربع دورفی* نمودار نامیده می‌شود. تابع مولدی برای تعداد افرازهای خود مزدوج عدد r بیابید که مربع دورفی آنها، مربعی $m \times m$ باشد.

(ب) رابطه‌ی زیر را به دست آورید.

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2k+1}\right)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{\prod_{k=1}^{m}\left(1-x^{2k}\right)}$$

۶۶- فرض کنید $A(x)$ تابع مولد دنباله $(p(r))$ باشد که $p(r)$ تعداد افرازهای عدد r است.

(الف) $A(x)$ را بیابید.

(ب) با استفاده از مربع دورفی ثابت کنید.

$$\left[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)\right]^{-1}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^2}$$

۶۷- با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین که با ستاره ساخته شده است و در گوشه بالایی و سمت چپ نمودار فررس قرار دارد، نشان دهید:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{\prod_{k=1}^{m}(1-x^{2k})}$$

۶۸- اعداد طبیعی p و q و r، $p<r$ و $q<r$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد افرازهای عدد $r\text{-}p$ به $q\text{-}1$ جزء کوچکتر از p برابر تعداد افرازهای $r\text{-}q$ به $p\text{-}1$ جزء کوچکتر از q است.

۶۹- برای عدد طبیعی n، $P_e(n)$ را برابر تعداد افرازهای n به تعداد زوجی عدد متمایز و $P_o(n)$ را برابر تعداد افرازهای n به تعداد فردی عدد متمایز تعریف

می‌کنیم. نشان دهید.

$$P_e(n)-P_o(n)=\begin{cases}(-1)^k & n=\dfrac{k(3k\pm 1)}{2}\\ 0 & n\neq\dfrac{k(3k\pm 1)}{2}\end{cases}$$

۷۰- قضیه اعداد مخمسی اولر را ثابت کنید:

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$$

۷۱- برای هر عدد طبیعی n نشان دهید:

$$P(n)-P(n-1)-P(n-2)+P(n-5)+P(n-7)$$
$$+\ldots+(-1)^m P(n-\frac{1}{2}m(3m-1))+\ldots$$
$$+(-1)^m P(n-\frac{1}{2}m(3m+1))+\ldots=0$$

۷۲- برای عدد طبیعی n و عدد درست j داریم $\beta(j)=\dfrac{3j^2+j}{2}$. با استفاده از اصل تناظر یک به یک تساوی اولر را ثابت کنید.

$$\sum_{j\ \text{زوج}} P(n-\beta(j))=\sum_{j\ \text{فرد}} P(n-\beta(j))$$

(مقاله‌ی« د.ام.بریسود» و « د.زیلبرگر»، تناظر افرازهای بازگشتی اولر، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، ۹۲،۱۹۸۵؛۵۵-۵۴) را ببینید).

۷۳- برای اعداد طبیعی r و n، فرض کنید $f(r,n)$ را تعداد افرازهای n که به شکل $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$ هستند و $n_i\geq rn_{i+1}$ است، ($i=1،2،\ldots$ و $s-1$) تعریف کرده‌ایم و $g(r,n)$ تعداد افرازهای عدد n است که هر جزء افراز به شکل $1+r+r^2+\ldots+r^k$ است. نشان دهید:

$$f(r,n) = g(r,n)$$

(مقاله‌ی« د.ر.هیکرسون» ، یک تساوی افراز از نوع اولر، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، (۸۱، ۱۹۷۴؛ ۶۲۹-۶۲۷) را ببینید).

فهرست:

[Al] H.L.Alder,the use of Generating Fanctions to Discover and prove partition Ldentities,Two-Year Mathematics Joarnal. ۱۰(۱۹۷۹),۳۱۸-۳۲۹.

[A_n۱] G.E.Andrew,Numbertheory,Saunders,Philadelphia, PA.,۱۹۷۱

[A_n۲] G.E.Andrew, the theory of partitions , Encyclopedia of Mathematics and Lts Applications , V.l۲,Addison- Wesley,Reading,۱۹۷۶

[G] J.W.L.Glaisher,Messenger of Mathematics , ۱۲(۱۸۸۳),۱۵۸-۱۷۰.

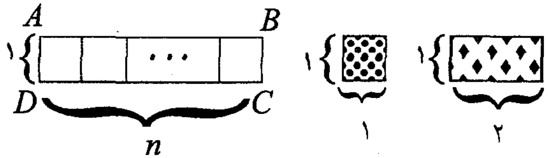
[N] ۱.Niven, *Formal Power Series* , *Amer,Mth . Monthly* , ۷۶(۱۹۶۹), ۸۷۱ - ۸۸۹.

فصل ۶

توابع بازگشتی

۱-۶- مقدمه

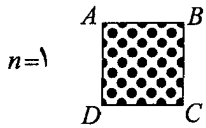
اجازه دهید بحث را با مساله‌ی شمارش زیر آغاز کنیم. شکل (۱-۱-۶) یک مستطیل $1\times n$، را نشان می‌دهد که می‌خواهیم آن را با کاشی‌های 1×1 و 1×2 بپوشانیم. تعداد راه‌هایی که می‌توان این کار را انجام داد، محاسبه کنید.



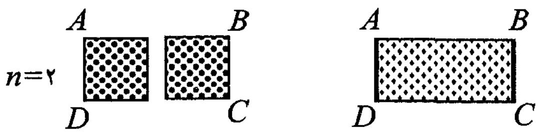
شکل ۱-۱-۶

خوب، احتمالاً نمی‌توان راه حل مناسب و راحتی برای حل مستقیم مسأله پیدا

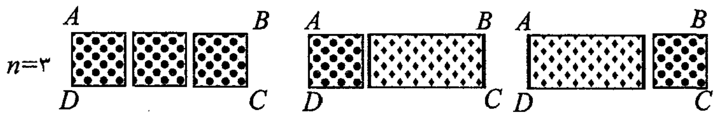
کرد. همچنین به نظر می‌رسد روش‌هایی که در فصول قبلی یاد گرفتیم کمک چندانی نمی‌کند. بنابراین راه متفاوتی به کار می‌بریم. وقتی $n=1$، واضح است که برای پوشاندن یک مستطیل ۱×۱، فقط و فقط یک راه وجود دارد.



همچنین وقتی $n=2$ به سادگی می‌توان فهمید برای پوشاندن مستطیل۲×۱ دقیقاً ۲ راه وجود دارد:



و اگر $n=3$ ، سه راه متمایز زیر وجود دارد:



برای راحتی کار، a_n را، تعداد راه‌های پوشاندن یک مستطیل $1\times n$، با کاشی‌های ۱×۱ و ۲×۱ تعریف می‌کنیم. طبق شواهد بالا داریم:

$$a_1 = 1 \quad \text{و} \quad a_2 = 2 \quad \text{و} \quad a_3 = 3$$

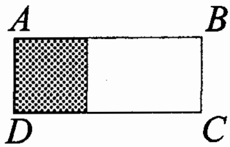
اگر کار را ادامه دهیم خواهیم یافت که:

$$a_4 = 5 \quad \text{و} \quad a_5 = 8 \quad \text{و}\ldots$$

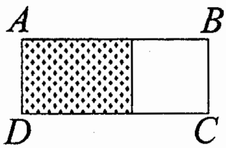
به هر حال، تا این مرحله، راه حل مستقیمی برای مسأله نیافته‌ایم. حالت $n=3$ را بررسی می‌کنیم. در پوشاندن مستطیل $ABCD$ از چپ به راست، ۲ امکان برای

مرحله‌ی اول وجود دارد:

(الف) کاشی نوع اول را به کار ببریم.



(ب) کاشی نوع دوم را به کار ببریم.

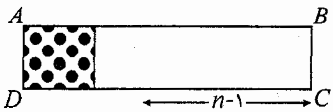


حال، یک مشاهده به دست آورده‌ایم. در حالت(الف) یک مستطیل ۲×۱ باقی‌مانده و در حالت (ب) یک مستطیل ۱×۱ باقی‌مانده است. برای ساده‌تر نوشتن، $a_۲ = ۲$ راه برای کامل پوشاندن حالت اول و $a_۱ = ۱$ راه برای کامل پوشاندن حالت دوم داریم. بنابراین با استفاده از اصل جمع خواهیم داشت:

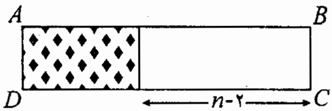
$$a_۳ = a_۲ + a_۱$$

آیا می‌توان این رابطه را برای هر a_n دلخواه تعمیم داد؟ برای فهمیدن این مطلب، استدلال خود را در حالت کلی ادامه می‌دهیم و به حالت زیر می‌رسیم:

(۱)



(۲)



در حالت (الف) طبق تعریف، a_{n-1} راه برای کامل پوشاندن مستطیل و در حالت (ب) a_{n-2}راه برای کامل پوشاندن مستطیل $ABCD$ موجود است. بنابراین طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad ;(n \geq 3) \qquad (6-1-1)$$

اگر چه تا به حال موفق به پیدا کردن فرمول $f(n)$ برای a_n نشده‌ایم، اما با داشتن رابطه‌ی (۱-۱-۶)خوشبین هستیم که به طور غیر مستقیم و با پیش بردن a_{n-1} و a_{n-2} بتوانیم a_n را محاسبه کنیم.

$$(a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8, a_4 + a_3 = 2 + 3 = 5)$$

و رابطه‌ی (۱-۱-۶) که مربوط به دنباله‌ی a_n است; تابع بازگشتی a_n نامیده می‌شود. در حالت کلی، که دنباله‌ی a_n یک رشته از اعداد است و تابع بازگشتی a_n، یک تساوی است که a_n را به تعدادی از اعداد ماقبل خود در دنباله مربوط می‌سازد.

بنابراین تمام تساوی‌های زیر نمونه‌ای از توابع بازگشتی هستند.

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$$

$$a_n + 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n$$

$$n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1)a_{n-1} + 1}$$

برای شروع محاسبه عبارات توابع بازگشتی، ما باید مقدار چند جمله از دنباله‌ی (a_n) را بدانیم که شرایط اولیه‌ی تابع بازگشتی نامیده می‌شوند. مثلا" برای محاسبه‌ی a_n در تابع بازگشتی (۱-۱-۶) ، قبل از پیش رفتن باید a_1 و a_2 را پیدا کنیم. $a_1 = 1$

و ۲ $a_2 =$ شرایط اولیه در این مثال می‌باشند.

جواب تابع بازگشتی عبارت است از $a_n = g(n)$ که در آن $g(n)$ یک تابع بر حسب n است و در تابع بازگشتی صدق می‌کند.

مثلاً" عبارت $a_n = n$ جواب تابع بازگشتی $a_n = a_{n-1} + 1$ با شرایط اولیه $a_1 = 1$ است، چون اگر $a_n = n$؛ داریم $a_n = n = (n-1) + 1 = a_{n-1} + 1$ و در تابع بازگشتی صدق می‌کند.

در ترکیبیات، خیلی از مسایل مانند مسأله‌ی پوشاندن مستطیل $1 \times n$ به سادگی با روش مستقیم قابل شمارش نیستند. اما اندیشه‌ی توابع بازگشتی وسیله‌ی خوبی برای حل آنهاست. در این مسایل به دست آوردن تابع بازگشتی، مهمترین مرحله برای حل مسأله است. در این فصل، از میان مثال‌های مختلف تجاربی در زمینه‌ی به دست آوردن توابع بازگشتی و همچنین تعدادی از روش‌های استاندارد، برای حل گروه خاصی از توابع بازگشتی به نام توابع بازگشتی "خوش‌رفتار" را خواهیم آموخت.

۶-۲- دو مثال

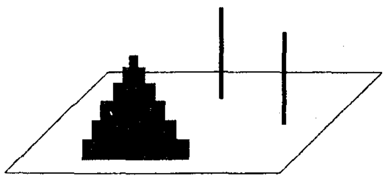
در این بخش دو مسأله‌ی شمارش را معرفی می‌کنیم که می‌توان با کمک توابع بازگشتی برای آنها راه حلی یافت. اول مسأله‌ی بسیار مشهوری که به "برج‌های هانوی" شهرت یافته را مطرح می‌کنیم که نخستین بار توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام « ادوارد لوکاس» (۱۸۹-۱۸۴۲) در سال ۱۸۸۳ مطالعه و فرمول بندی شد.

مثال ۱-۲-۶ برجی از n دیسک با اندازهای متفاوت، بر روی یکی از سه پایه به ترتیب نزولی از پایین به بالا در اختیار است، که در شکل (۱-۲-۶) نشان داده شده

است. می‌خواهیم تمام مهره‌های برج را به پایه‌ی دیگری با رعایت دو شرط زیر انتقال دهیم:

(الف) در هر بار دقیقاً" یک دیسک را حرکت می‌دهیم.

(ب) دیسک بزرگتری نمی‌تواند روی دیسک کوچکتر قرار گیرد.



شکل ۱-۲-۶

برای $n \geq ۱$، a_n را تعریف می‌کنیم: کمترین تعداد حرکات که باید انجام شود تا n دیسک به پایه‌ی دیگری منتقل شود.

نشان دهید که:

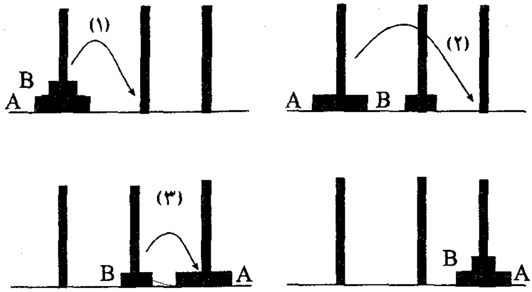
$$a_۱ = ۱ \quad و \quad a_۲ = ۳ \quad و \quad a_۳ = ۷$$

و

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۱ \qquad (۶-۲-۱)$$

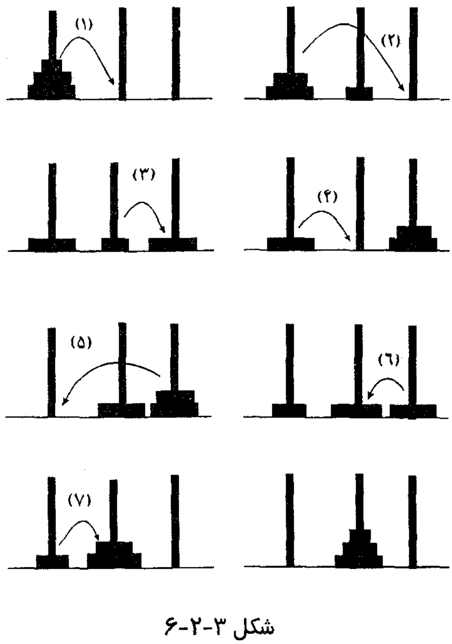
برای $n \geq ۲$، رابطه‌ی بازگشتی (۱-۲-۶) را اثبات کنید.

حل. واضح است که $a_۱ = ۱$. برای $n=۲$، ۳ حرکتی که در شکل (۲-۲-۶) نمایش داده شده کار را تمام می‌کند و نیز واضح است که با دو حرکت نمی‌توان این کار را انجام داد، پس، $a_۲ = ۳$.



شکل ۲-۲-۶

برای $n=۳$ ، ۷ حرکتی که در شکل ۳-۲-۶ نشان داده شده است کار را تمام می‌کند. هیچ ۶ حرکتی برای این کار کافی نیست.(چرا؟) پس $a_۳=$.



شکل ۳-۲-۶

حال به حالت کلی a_n در حالت $n>2$، توجه می‌کنیم. کار را برای n دیسک می‌توان با مراحل اصلی زیر انجام داد:

1° – $(n-1)$ دیسک بالایی را از پایه خودشان به پایه‌ی دیگری انتقال می‌دهیم (سه نمودار اول در شکل ۳-۲-۶ را ببینید).

2° – حال بزرگترین دیسک را به تنها پایه‌ی باقی‌ماندهٔ خالی انتقال می‌دهیم (چهارمین و پنجمین نمودار شکل ۳-۲-۶ را ببینید).

3° – $(n-1)$ دیسک را از پایه‌ای که در مرحله اول به آن منتقل کردیم به پایه‌ای که بزرگترین دیسک روی آن را قرار دارد انتقال می‌دهیم (۴ نمودار آخری در شکل ۳-۲-۶ را ببینید).

تعداد حرکت‌هایی که در مراحل 1° و 2° و 3° لازم است به ترتیب a_{n-1} و ۱ و a_{n-1} است. بنابراین ما راهی یافتیم با

$$a_{n-1}+1+a_{n-1}=2a_{n-1}+1$$

حرکت؛ برای انتقال برج با n دیسک از پایه‌ای به پایه‌ی دیگر. با استفاده از تعریف a_n داریم:

$$a_n \leq 2a_{n-1}+1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، توجه می‌کنیم که برای انتقال برج با n دیسک، بزرگترین دیسک که در آخر جای دارد به یک پایه‌ی خالی منتقل شود و این در حالی ممکن است که مرحله‌ی 1° انجام شده باشد. برای تکمیل کردن کار باید مرحله 3° نیز به هر حال انجام شود. بنابراین هر راه برای انتقال برج با n دیسک حداقل $2a_{n-1}+1$ حرکت را شامل می‌شود، یعنی:

$$a_n \geq 2a_{n-1}+1 \qquad (2)$$

از ترکیب (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$a_n = 2a_{n-1}+1$$

همان که خواسته بودیم.

سرانجام، رابطه‌ی بازگشتی (۱-۲-۶) را به روش زیر و با شرط اولیه‌ی $a_1 = 1$ حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2a_{n-1} + 1) + 1 \\ &= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\ &= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$a_n = 2^n - 1 \ \blacksquare.$$

تبصره:

(۱)روش بالا در به دست آوردن راه حل، غالباً ما را به روش بازگشتی (قهقرایی) ارجاع می‌دهد.

(۲) رابطه‌ی بازگشتی (۱-۲-۶) حالت خاص از رابطه‌ی بازگشتی زیر است.

$$a_n = pa_{n-1} + q \quad \text{و} \quad a_0 = r \qquad (۶-۲-۲)$$

با استفاده ازحل (۲-۲-۶) می‌توان اثبات کرد (مسأله ۱۲-۶ را ببینید.)

$$a_n = \begin{cases} r + qn & p = ۱ \\ rp^n + \dfrac{(p^n - ۱)q}{p - ۱} & p \neq ۱ \end{cases}$$

در مثال (۳-۵-۱) $g(n)$، تعداد متوازی‌الاضلاع‌های موجود در n امین تقسیم‌بندی متساوی‌الاضلاع محاسبه کردیم و یافتیم که $g(n) = ۳\binom{n+۲}{۴}$. در مثال‌های بعدی سعی می‌کنیم اثبات دیگری به طریق توابع بازگشتی پیدا کنیم.

مثال ۲-۲-۶ فرض می‌کنیم a_n، تعداد متوازی‌الاضلاع‌های موجود در n امین تقسیم‌بندی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

حل. فرض کنید ABC مثلث متساوی‌الاضلاع باشد (شکل ۴-۲-۶) . برای راحتی کار، محل تقاطع هر دو پاره خط در n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC را گره می‌نامیم. بنابراین به تعداد

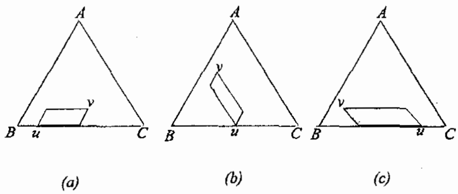
$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n+۲) = \frac{۱}{۲}(n+۲)(n+۳)$$

گره در n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC وجود دارد. واضح است، $a_۱ = ۳$. برای $n \geq ۲$، هر متوازی‌الاضلاع در n امین تقسیم‌بندی مثلث ABC یا هیچ گره‌ای روی BC به عنوان رأس ندارد یا حداقل یک گره روی BC به عنوان رأس دارد. حال X را مجموعه‌ی متوازی‌الاضلاع‌های نوع دوم تعریف می‌کنیم یعنی آنهایی که حداقل یک رأس روی BC دارند. پس خواهیم داشت:

$$a_n = a_{n-۱} + |X| \qquad (۱)$$

حال می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه‌ی X را بشماریم. فرض می‌کنیم Y مجموعه‌ی

جفت‌های $\{u,v\}$ از گره‌ها باشد به طوری که، u روی BC باشد و v روی آن نباشد و u و v هر دو روی یک پاره خط نباشند. یک تناظر از X به Y تعریف می‌کنیم. برای یک متوازی‌الاضلاع معلوم در X، u و v را دو رأس روبرو در نظر می‌گیریم که زاویه‌ی آنها حاده باشد(شکل ۴-۲-۶ را ببینید).



شکل ٤-۲-۶

بدیهی است این تناظر یک تناظر یک به یک از X به Y است. پس بنا به اصل تناظر یک به یک داریم:

$$|X|=|Y| \qquad (۲)$$

(الف) از طرفی $n+۲$ گره روی BC موجود است؛

(ب) به تعداد $(n+۲)(n+۱)\frac{۱}{۲}=(n+۱)+...+۳+۲+۱$ گروه v وجود دارد که روی BC نیستند؛

(ج) u و v روی یک پاره خط مشترک نیستند؛

پس طبق اصل تعمیم داریم:

$$|Y|=(n+۲)\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۲)-(n+۲)(n+۱)$$

$$=\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۲)(n+۲-۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}n(n+۱)(n+۲)$$

$$=۳\binom{n+۲}{۳} \qquad (۳)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) و(۳) برای $n \geq ۲$ به رابطه‌ی بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$a_n = a_{n-۱} + ۳\binom{n+۲}{۳} \qquad (۶-۲-۳)$$

برای حل رابطه‌ی بازگشتی (۳-۲-۶) ، روش جایگذاری بازگشتی را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-۱} + ۳\binom{n+۲}{۳} \\
&= a_{n-۲} + ۳\binom{n+۱}{۳} + ۳\binom{n+۲}{۳} \\
&= a_۱ + ۳\binom{۴}{۳} + \ldots + ۳\binom{n+۱}{۳} + ۳\binom{n+۲}{۳} \\
&= ۳\left\{\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} + \ldots + \binom{n+۱}{۳} + \binom{n+۲}{۳}\right\} \\
&= ۳\binom{n+۳}{۴}
\end{aligned}$$

(طبق رابطه‌ی (۱-۵-۲))

بنابراین به دست می‌آید:

$$a_n = ۳\binom{n+۳}{۴} \quad .\blacksquare$$

نکته.رابطه‌ی بازگشتی (۳-۲-۶) حالت خاص ازرابطه‌ی بازگشتی (۲-۲-۶) نیست، زیرا جمله‌ی $۳\binom{n+۲}{۳}$ ثابت نیست و بستگی به مقدار n دارد.

۳-۶- روابط بازگشتی خطی همگن

در مثال‌های ۱-۲-۶ و ۲-۲-۶ ، روابط بازگشتی (۱-۲-۶) و (۳-۲-۶) را به روش جایگذاری بازگشتی حل کردیم. البته تمام روابط بازگشتی با این روش حل

نمی‌شوند. در این بخش و در بخش بعدی، روشی کلی معرفی می‌کنیم که ما را قادر می‌سازد تا گروهی از روابط بازگشتی را که *روابط بازگشتی خطی* نامیده می‌شوند، حل کنیم. برای رسیدن به این منظور، اول به زیر گروهی از روابط بازگشتی خطی که *روابط بازگشتی خطی همگن* نامیده می‌شوند توجه می‌کنیم. فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد باشد. رابطه‌ی بازگشتی به فرم زیر:

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ldots + C_r a_{n-r} = 0 \qquad (۶-۳-۱)$$

که در آن C_i ها اعداد ثابتی هستند و $1 \le r \le n$؛ رابطه‌ی بازگشتی خطی همگن از مرتبه‌ی r برای دنباله‌ی (a_n) نامیده می‌شود. برای مثال، رابطه‌های بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n - 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0$$

به ترتیب، روابط خطی همگن از مرتبه‌ی ۲ و ۳ می‌باشند.

جمله‌ی x^i را در رابطه‌ی (۶-۳-۱) جانشین a_i می‌کنیم. به ازای $i = n, n-1, \ldots, n-r$ ، معادلات زیر بر حسب x بدست می‌آیند:

$$C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_r x^{n-r} = 0$$

$$C_0 x^r + C_1 x^{r-1} + C_2 x^{r-2} + \ldots + C_r = 0 \qquad (۶-۳-۲)$$

معادله‌ی (۶-۳-۲) را معادله‌ی مشخصه‌ی (۶-۳-۱) می‌نامیم. هر ریشه‌ی معادله‌ی (۶-۳-۲) را نیز ریشه‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی بازگشتی (۶-۳-۱) می‌نامیم.

اندیشه‌ی ریشه‌های مشخصه‌ی رابطه‌ی بازگشتی خطی همگن، نقش کلیدی در حل روابط بازگشتی ایفا می‌کند، که دو نتیجه‌ی آن در زیر آمده است:

(الف) اگر $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۴$ ریشه‌های مشخصه‌ی متمایز رابطه‌ی بازگشتی(۱-۳-۶) باشد، آنگاه

$$a_n = A_۱(\alpha_۱)^n + A_۲(\alpha_۲)^n + \ldots + A_r(\alpha_r)^n$$

که در آن A_i ها اعداد ثابتی هستند، جواب عمومی(۱-۳-۶) است.

(ب) اگر $\alpha_۱$ و $\alpha_۲, \ldots, \alpha_k$، $(۱ \leq k \leq r)$، ریشه‌های مشخصه‌ی متمایز (۱-۳-۶) باشند، به طوری که $(i = ۱,۲,\ldots k)m_i$ تعداد تکرار ریشه‌ی α_i باشد، جواب عمومی(۱-۳-۶) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_n = & \left(A_{۱۱} + A_{۱۲}n + \ldots + A_{۱m_۱}n^{m_۱-۱}\right)(\alpha_۱)^n \\ & +\left(A_{۲۱} + A_{۲۲}n + \ldots + A_{۲m_۲}n^{m_۲-۱}\right)(\alpha_۲)^n \\ & + \qquad \ldots\ldots \\ & +\left(A_{k۱} + A_{k۲}n + \ldots + A_{km_k}n^{m_k-۱}\right)(\alpha_k)^n \end{aligned}$$

که در آن A_{ij} اعداد ثابتی هستند که با توجه به شرایط اولیه‌ی رابطه‌ی بازگشتی به دست می‌آیند.

واضح است که نتیجه‌ی (الف) حالت خاصی از نتیجه‌ی (ب) است. اثبات (الف) و(ب) را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های استاندارد ترکیبیات پیدا کرد. (مثلاً" ۲۱۳-۲۱۰, Robert[۱۲]) . در اینجا فقط تعدادی مثال برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از نتایج بیان شده، می‌آوریم. قبل از هر چیز، رابطه‌ی بازگشتی را که در مسأله‌ی پوشاندن مستطیل $n \times ۱$ به دست آوردیم، حل می‌کنیم.

مثال ۱-۳-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط اولیه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۱$ حل کنید.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (۶-۱-۱)$$

نکته. (۱) از آنجایی که رابطه‌ی بازگشتی (۱-۱-۶) از مرتبه‌ی دوم است، ما حداقل دو شرط اولیه برای حل آن لازم داریم.

(۲) می‌دانیم شرایط اولیه‌ی اصلی پوشاندن مستطیل $1 \times n$ « $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ » است. ولی برای راحتی در محاسبه، که بعداً خواهید، دید به جای استفاده از $a_2 = 2$ از شرط $a_0 = 1$ استفاده می‌کنیم که در حل مسأله هیچ تأثیری نخواهد داشت. زیرا $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ در رابطه‌ی بازگشتی (۱-۱-۶) صدق می‌کنند.

حل. رابطه‌ی بازگشتی(۱-۱-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

معادله‌ی مشخصه‌ی آن به صورت زیر است:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

که ریشه‌های مشخصه‌ی آن برابرند با :

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین، با استفاده از نتیجه‌ی (الف) جواب عمومی رابطه‌ی بازگشتی(۱-۱-۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

که در آن A و B دو عدد ثابت هستند که آنها را تعیین خواهیم کرد. شرایط اولیه‌ی $a_0 = a_1 = 1$ ایجاب می‌کند که:

$$\begin{cases} A+B=۱ \\ A\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)+B\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)=۱ \end{cases} \qquad (۱)$$

یعنی

$$\begin{cases} A+B=۱ \\ (A+B)+\sqrt{۵}(A-B)=۲ \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله دومجهولی (۲) به دست می‌آید که:

$$\begin{cases} A=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}} \\ B=-\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}} \end{cases} \qquad (۳)$$

(تعیین A و B با شرایط اولیه‌ی $a_۱=۱$ و $a_۲=۲$ زحمت بیشتری در برداشت که با استفاده از شرایط $a_۰=a_۱=۱$ این زحمت را کمتر کردیم.)

با جایگذاری (۳) در (۱)، حل نهایی (۱-۱-۶) به دست می‌آید:

$$a_n=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

یعنی برای هر $n\geq ۰$

$$\blacksquare.\quad a_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right] \qquad (۶-۳-۳)$$

از رابطه‌ی بازگشتی (۱-۱-۶)و شرایط اولیه‌ی $a_۰=a_۱=۱$، چند جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ی (a_n)به صورت زیر به دست می‌آید:

۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵،۸۹،۱۴۴،...

این اعداد، توسط دانشمند فرانسوی« ادوارد لوکاس» (۱۸۹۱-۱۸۴۲)، « اعداد فیبوناچی» نامگذاری شده‌اند. این اعداد از مسأله‌ی مشهور خرگوش(مسأله‌ی ۵۱-۶ را ببینید.) ناشی شده‌اند. این مسأله در کتاب "Liber Abaci" (۱۲۰۲) که توسط دانشمند بزرگ بدعت گذار قرون وسطی،« لئوناردو فیبوناچی»(۱۲۳۰-۱۱۷۵) نوشته شده است، وجود دارد. فرمول زیبای(۳-۳-۶) برای n امین جمله‌ی «اعداد فیبوناچی» فرمول « بینت» نامیده می‌شود. البته این فرمول توسط « مایور» (۱۷۵۴-۱۶۶۷) و «د. برنولی» (۱۷۸۲-۱۷۰۰) به طور جداگانه به دست آمده است.

در سال ۱۹۶۳، ریاضیدان آمریکایی« وریزای.هاگات.» و دستیارانش، سازمانی به نام انجمن فیبوناچی در دانشگاه « سانتا کلارا» در ایالت کالیفرنیای آمریکا تأسیس کردند. از آن پس، این انجمن، کنفرانس‌هایی دربارهٔ سری فیبوناچی تشکیل می‌داد که شامل اولین کنفرانس دربارهٔ اعداد فیبوناچی و کاربردهای آنها (که در « پاتراس»یونان برگزار شده بود) می‌شد. این انجمن حتی یک مجله‌ی بین‌المللی ریاضی به نام« فصلنامه‌ی فیبوناچی» برای پیشرفت تحقیقاتی که مربوط به اعداد فیبوناچی می‌شود، منتشر کرده است.

اعداد فیبوناچی و نتایج مربوط به آن، امروزه در بسیاری از شاخه‌های علم مانند هندسه، تئوری اعداد، ترکیبیات، جبر خطی، آنالیز عددی، احتمالات و آمار و در دیگر رشته‌های غیر ریاضی مانند طراحی مهندسی، زیست‌شناسی، شیمی، فیزیک، صنعتی و غیره ظاهر می‌شوند. برای کسانی که علاقه‌مند به فراگیری خواص بیشتری دربارهٔ اعداد فیبوناچی هستند کتاب‌های زیر معرفی می‌شوند: ور بیوف[Vo] هاکارت[Hg]، واجدا[Va] و مقاله‌ی هانبرگ([Hn] صفحات ۱۳۸-۱۰۲ را ببینید.)

مثال ۲-۳-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را حل کنید:

$$a_n - ۷a_{n-۱} + ۱۵a_{n-۲} - ۹a_{n-۳} = ۰ \qquad (۶\text{-}۳\text{-}۴)$$

که شرایط اولیه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$ در آن صدق می‌کند.

حل. معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی بازگشتی(۴-۳-۶) به صورت زیر است:

$$x^۳ - ۷x^۲ + ۱۵x - ۹ = (x-۳)^۲(x-۱) = ۰$$

و بنابراین ریشه‌های مشخصه‌ی (۴-۳-۶) برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha_۱ = ۳ & \text{ریشه‌ی مضاعف} \\ \alpha_۲ = ۱ \end{cases}$$

با توجه به نتیجه‌ی (ب)، جواب عمومی (۴-۳-۶) به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$a_n = (A+Bn)(۳)^n + C(۱)^n$$

یعنی

$$a_n = (A+Bn)۳^n + C \qquad (۱)$$

که در آن A و B و C اعداد ثابتی هستند که می‌خواهیم آنها را بیابیم:

شرایط اولیه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$ ، ایجاب می‌کند که :

$$\begin{cases} A + C = ۱ \\ ۳A + ۳B + C = ۲ \\ ۹A + ۱۸B + C = ۳ \end{cases} \qquad (۲)$$

از حل دستگاه (۲) به دست می‌آوریم:

$$A=۱ \text{ و } B = \frac{-۱}{۳} \text{ و } C=۰ \qquad (۳)$$

با توجه به روابط (۱) و (۳) به دست می‌آوریم:

$$a_n = \left(۱ - \frac{n}{۳}\right)۳^n$$

یا برای هر $n \geq ۰$ داریم:

$$a_n = (۳-n)۳^{n-۱} \quad ■.$$

در حل معادله‌ی چند جمله‌ای، ممکن است با جواب‌های مختلط برخورد کنیم. در این حالت، راحت‌تریم که ریشه‌ها را به صورت مثلثاتی بیان کنیم. همچنین می‌دانیم اگر $\alpha = a+bi$ یک ریشه‌ی مختلط معادله‌ی چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی $P(x)=۰$ باشد، (یعنی تمام ضرایب $P(x)$ اعداد حقیقی باشند.) در آن صورت مزدوج α یعنی $\overline{\alpha} = a-bi$ نیز یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x)=۰$ خواهد بود، یعنی ریشه‌های مختلط معادله‌ی $P(x)=۰$ همواره دوتایی هستند. مثالی از این نوع را در زیر می‌آوریم.

مثال ۳-۳-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را حل کنید:

$$a_n = ۲(a_{n-۱} - a_{n-۲}) \qquad (۶\text{-}۳\text{-}۵)$$

که در آن $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۰$.

حل. معادله‌ی مشخصه‌ی (۵-۳-۶) به صورت زیر است:

$$x^۲ - ۲x + ۲ = ۰$$

که ریشه‌های آن عبارتند از:

$$\alpha = ۱+i \quad و \quad \overline{\alpha} = ۱-i$$

α و $\overline{\alpha}$ را به شکل مثلثاتی بیان می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\alpha = \sqrt{۲}\left(Cos\frac{\pi}{۴} + iSin\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\overline{\alpha} = \sqrt{۲}\left(Cos\frac{\pi}{۴} - iSin\frac{\pi}{۴}\right) \text{ و}$$

بنابراین جواب عمومی (۵-۳-۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_n &= A(\alpha)^n + B(\overline{\alpha})^n \\ &= \left(\sqrt{۲}\right)^n \left\{ A\left(Cos\frac{n\pi}{۴} + iSin\frac{n\pi}{۴} \right) + B\left(Cos\frac{n\pi}{۴} - iSin\frac{n\pi}{۴} \right) \right\} \\ &= \left(\sqrt{۲}\right)^n \left(C \quad Cos\frac{n\pi}{۴} + DSin\frac{n\pi}{۴} \right) \end{aligned}$$

که در آن $C=A+B$ و $D=i(A-B)$ اعداد ثابتی هستند که آنها را پیدا می‌کنیم.

شرایط اولیه‌ی $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۰$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\begin{cases} C = ۱ \\ \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}C + \frac{\sqrt{۲}}{۲}D \right) = ۰ \end{cases}$$

که از آنجا به دست می‌آید $C=۱$ و $D=-۱$.

بنابراین جواب (۵-۳-۶) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_n = \left(\sqrt{۲}\right)^n \left(Cos\frac{n\pi}{۴} - Sin\frac{n\pi}{۴} \right) \quad .■$$

۶-۴- حالت کلی روابط بازگشتی خطی

فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد باشد. رابطه‌ی بازگشتی زیر:

$$C_۰a_n + C_۱a_{n-۱} + \ldots + C_ra_{n-r} = f(n) \qquad (۶-۴-۱)$$

که در آن C_i ها اعداد ثابتی هستند و $C_۰, C_r \neq ۰$ و f یک تابع بر حسب n است،

رابطه‌ی بازگشتی خطی مرتبه‌ی r ام دنباله‌ی(a_n) نامیده می‌شود.
بنابراین، روابط بازگشتی خطی همگن، یک رابطه‌ی بازگشتی خطی به صورت (۱-۴-۶) است که در آن $f(n)=0$. در حالی که روابط بازگشتی

$$a_n - 2a_{n-1} = 1 \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

$$a_n - a_{n-1} = 3\binom{n+2}{3} \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

مثال‌هایی از روابط بازگشتی خطی مرتبه اول هستند، رابطه‌ی بازگشتی زیر:

$$a_n + 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n$$

یک رابطه‌ی بازگشتی خطی مرتبه دوم است. چگونه می‌توان یک رابطه‌ی بازگشتی خطی به صورت (۱-۴-۶) را حل کرد؟ یک راه برای حل آن را در زیر می‌آوریم:

مرحله ۱° – جواب عمومی رابطه‌ی بازگشتی خطی همگن $a_n^{(h)}$ که از (۱-۴-۶) به دست می‌آیند، را بیابید.

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ldots + C_r a_{n-r} = 0$$

مرحلهٔ ۲° – جواب خاص $a_n^{(p)}$ از (۱-۴-۶) را به دست آورید.

مرحله ۳° –جواب عمومی و کلی (۱-۴-۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \qquad (6\text{-}4\text{-}2)$$

تبصره:

(۱) کسانی که با تئوری معادلات دیفرانسیل آشنایی دارند، ممکن است در مقایسه‌ی راه حل فوق برای توابع بازگشتی خطی، با راه حل معادلات دیفرانسیل خطی شباهت‌هایی را متوجه شوند.
(۲) دربارهٔ روش پیدا کردن $a_n^{(h)}$ در مرحله ۱° در بخش پیش بحث شده است.
(۳) روش کلی و عمومی برای پیدا کردن $a_n^{(p)}$ در مرحله‌ی ۲° وجود ندارد. ولی اگر تابع f در (۱-۴-۶) نسبتاً ساده باشد $a_n^{(p)}$ را ، می‌توان با جستجو پیدا کرد. مثلاً اگر $f(n)$، یک چند جمله‌ای بر حسب n یا یک تابع نمایی بر حسب n باشد؛ $a_n^{(p)}$ را می‌توان یک تابع شبیه به $f(n)$ اختیار کرد. حال با مثال‌های زیر راه‌های بیشتری برای جستجوی $a_n^{(p)}$ خواهید دید.

مثال ۱-۴-۶ تابع بازگشتی زیر را با شرط اولیه‌ی $a_۰ = ۳$ حل کنید.

$$a_n - ۳a_{n-۱} = ۲ - ۲n^۲ \qquad (۶-۴-۳)$$

حل. قبل از هر چیز، $a_n^{(h)}$ را پیدا می‌کنیم. معادله‌ی مشخصه‌ی

$$a_n - ۳a_{n-۱} = ۰$$

$x - ۳ = ۰$ است، و ریشه‌ی آن $\alpha = ۳$ بنابراین:

h

$$a_n^{(p)} = A.۳^n \qquad (۱)$$

که در آن A یک عدد ثابت است.

سپس $a_n^{(p)}$ را پیدا می‌کنیم. از آنجایی که $f(n) = ۲ - ۲n^۲$ یک چند جمله‌ای بر حسب n از درجه‌ی ۲ است، فرض می‌کنیم

$$a_n^{(p)} = Bn^۲ + Cn + D \qquad (۲)$$

که در آن B و C و D اعداد ثابتی هستند.

چون $a_n^{(p)}$ در (۳-۴-۶) صدق می‌کند، خواهیم داشت:

$$\left(Bn^{۲}+Cn+D\right)-۳\left[B(n-۱)^{۲}+C(n-۱)+D\right]=۲-۲n^{۲}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $n^{۲}$ و n و جمله‌ی ثابت در دو طرف تساوی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} B-۳B=-۲ \\ C+۶B-۳C=۰ \\ D-۳B+۳C-۳D=۲ \end{cases} \qquad (۳)$$

از حل دستگاه (۳) خواهیم داشت:

$B=۱$ و $C=۳$ و $D=۲$ (۴)

با توجه به راوبط (۲) و (۴) می‌بینیم که:

$$a_n^{(p)}=n^{۲}+۳n+۲$$

از (۲-۴-۶) جواب عمومی و کلی(۳-۴-۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(h)}+a_n^{(p)} \\ &= A.۳^n+n^{۲}+۳n+۲ \end{aligned} \qquad (۵)$$

با توجه به شرط اولیه‌ی $a_۰=۳$ داریم:

$$۳=A+۲$$

از این رو جواب، خواسته شده (۳-۴-۶) برابر است با:

$$a_n=۳^n+n^{۲}+۳n+۲ \qquad n\geq ۰ \qquad \blacksquare$$

مثال ۲-۴-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط اولیه‌ی $a_۰=۳$ و $a_۱=۸$ حل کنید.

$$a_n - ۳a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} = ۲^n \qquad (۶-۴-۴)$$

حل. معادله‌ی مشخصه‌ی $a_n - ۳a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} = ۰$ معادله‌ی $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ است که ریشه‌های آن ۱ و ۲ هستند.

بنابراین:

$$A(۱)^n + B(۲)^n = A + B۲^n \qquad (۱)$$

از آنجایی که $f(n) = ۲^n$ ، می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$a_n^{(p)} = C۲^n$$

به هر حال، چون جمله‌ی ۲^n در (۱) ظاهر شده، مجبور هستیم آن را در "n" ضرب کنیم:

$$a_n^{(p)} = Cn۲^n \qquad (۲)$$

(برای دیدن روش‌های کلی بیشتر در مورد انتخاب جواب‌های خاص، خواننده می‌تواند به جدول (۱-۴-۶) مراجعه کند.)

از آنجایی که $a_n^{(p)}$ در (۴-۴-۶) صدق می‌کند، خواهیم داشت:

$$Cn۲^n - ۳C(n-۱)۲^{n-۱} + ۲C(n-۲)۲^{n-۱} = ۲^n$$

که از آنجا $C=۲$.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲) داریم:

$$a_n^{(p)} = n2^{n+1}$$

و سپس جواب کلی (۴-۴-۶) برابر است:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \qquad (۳)$$

$$= A + B2^n + n2^{n+1}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳) و داشتن مقادیر اولیه‌ی $a_0 = 3$ و $a_1 = 8$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A + 2B + 4 = 8 \end{cases} \qquad (۴)$$

از حل دستگاه (۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$A=2$ و $B=1$

بنابراین جواب خواسته شده (۴-۴-۶) برابر است با:

$$a_n = 2 + 2^n + n2^{n+1} \qquad (n \geq 0) \quad ■$$

در پایان این بخش، در جدول (۱-۴-۶) شکل‌های واضحی از $a_n^{(p)}$ برای بعضی از توابع خاص در حالت‌های مختلف آورده‌ایم به علاوه، می‌توان نشان داد که اگر $f(n)$ مجموع یک تابع نمایی $f_1(n)$ و یک چند جمله‌ای $f_2(n)$ باشد در آن صورت $a_n^{(p)}$ را می‌توان مجموع دو جواب خاص $f_1(n)$ و $f_2(n)$ انتخاب کرد.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
تابع نمایی	
الف) Ak^n	Bk^n
k ریشه‌ی مشخصه نباشد	
ب) Ak^n	$Bn^m k^n$
k ریشه‌ی مشخصه با تکرار m باشد.	
چند جمله	
الف) $\sum_{i=0}^{t} p_i n^i$	$\sum_{i=0}^{t} q_i n^i$
n ریشه‌ی مشخصه باشد	
ب) $\sum_{i=0}^{t} p_i n^i$	$n^m \sum_{i=0}^{t} q_i n^i$
n ریشه‌ی مشخصه با تکرار m باشد.	
یک تابع	
الف) $An^t k^n$	$\left(\sum_{i=0}^{t} q_i n^i\right) k^n$
k ریشه‌ی مشخصه باشد	
ب) $An^t k^n$	$n^m \left(\sum_{i=0}^{t} q_i n^i\right) k^n$
k ریشه‌ی مشخصه با تکرار m باشد.	

جدول (۱-۴-۶)

۵-۶- دو کاربرد

در این بخش، می‌توان چیزهایی که در دو بخش قبل دربارهٔ توابع بازگشتی فراگرفتیم برای حل دومساله‌ی شمارش به کار بریم: یکی راه‌های رنگ آمیزی یک

شکل معین و دیگری محاسبه‌ی دترمینان ماتریس.

مثال ۱-۵-۶ $n \geq ۱$ قطاع دایره در شکل ۱-۵-۶، را با $k \geq ۳$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. با این شرط که هر قطاع را با یک رنگ، رنگ می‌کنیم و هر دو قطاع مجاور را با دو رنگ متمایز. حال a_n را تعداد راه‌های رنگ آمیزی تعریف می‌کنیم.

(الف) $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ را محاسبه کنید.

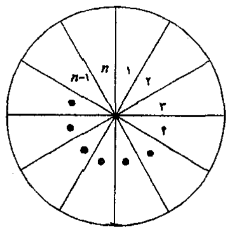
(ب) یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n $(n \geq ۴)$ پیدا کرده و آنها را حل کنید.

حل. (الف) بدیهی است که:

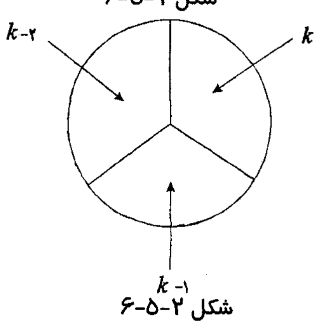
$$a_۱ = k$$
$$a_۲ = k(k-۱)$$

و با توجه به شکل ۲-۵-۶ داریم:

$$a_۳ = k(k-۱)(k-۲)$$



شکل ۱-۵-۶

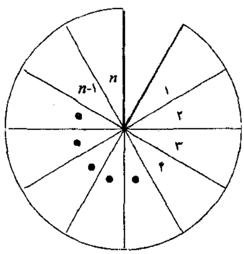


شکل ۲-۵-۶

(ب) اما $a_۴ = k(k-۱)(k-۲)(k-۳)$ دیگر درست نیست. برای $n \geq ۳$، می‌توان یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n از راه غیر مستقیم بدست آورد. تصورکنید که دایرهٔ شکل ۱-۵-۶ را در امتداد مرز بین دو قطاع ۱ و n ببُریم تا شکل ۳-۵-۶ حاصل شود.

در این حالت، شمارش تعداد راه‌های رنگ آمیزی n قطاع شکل ۳-۵-۶ به مراتب ساده‌تر خواهد بود. واضح است که تعدادی راه‌های رنگ‌آمیزی در این حالت برابر است با:

$$\underset{۱}{\underset{\uparrow}{k}}\,(\underset{۲}{\underset{\uparrow}{k}}-۱)(\underset{۳}{\underset{\uparrow}{k}}-۱)\ldots(\underset{n}{\underset{\uparrow}{k}}-۱) = k(k-۱)^{n-۱}$$



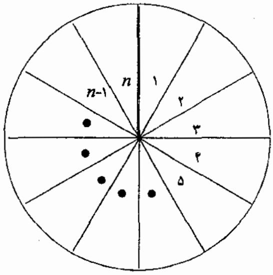
شکل ۳-۵-۶

این $k(k-۱)^{n-۱}$ راه برای رنگ آمیزی را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

(۱) رنگ‌آمیزی‌هایی که رنگ قطاع ۱ و n متمایز باشند.

(۲) رنگ‌آمیزی‌هایی که قطاع ۱ و n همرنگ باشند.

مشاهده می‌شود که رنگ‌آمیزی‌های گروه اول، دقیقاً" رنگ‌آمیزی‌های n قطاع شکل ۱-۵-۶ است و از طرف دیگر یک تناظر یک به یک بین رنگ‌آمیزی‌های گروه دوم و رنگ‌آمیزی (n-۱) قطاع شکل ۴-۵-۶ بر قرار است.



شکل ٤-۵-۶

بنابراین با توجه به اصل جمع و اصل تناظر یک به یک ، خواهیم داشت:

$$a_n + a_{n-۱} = k(k-۱)^{n-۱} \qquad (۶\text{-}۵\text{-}۱)$$

که در آن : $n=۳،۴,...$ سرانجام ، رابطه‌ی بازگشتی (۱-۵-۶) را حل می‌کنیم.

ریشه‌ی مشخصه‌ی $a_n + a_{n-۱} = ۰$ برابر است با $\alpha = -۱$ و بنابراین :

$$a_n^{(h)} = A(-۱)^n$$

که در آن A یک عدد ثابت است. از آنجایی که $f(n) = k(k-۱)^{n-۱}$، در نظر می‌گیریم:

$$a_n^{(p)} = B(k-۱)^{n-۱}$$

چون $a_n^{(p)}$ در رابطه‌ی (۱-۵-۶) صدق می‌کند، پس خواهیم داشت:

$$B(k-۱)^{n-۱} + B(k-۱)^{n-۲} = k(k-۱)^{n-۱}$$

پس:

$$Bk(k-۱)^{n-۲} = k(k-۱)^{n-۱}$$

بنابراین $B=k-۱$ و از آنجا $a_n^{(p)} = (k-۱)^n$. از این رو جواب کلی (۱-۵-۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \\ &= A(-۱)^n + (k-۱)^n \end{aligned}$$

از آنجایی که $a_3 = k(k-1)(k-2)$ داریم:

$$k(k-1)(k-2) = -A + (k-1)^3$$

و پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= (k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)(k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2k) \\ &= k-1 \end{aligned}$$

در نتیجه، جواب مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = (-1)^n (k-1) + (k-1)^n$$

به ازای هر $n \geq 3$ و $k \geq 3$.■

مثال ۲-۵-۶. a_n را برابر دترمینان ماتریس زیر تعریف می‌کنیم.

$$a_n = \begin{vmatrix} p & p\text{-}q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & p & p\text{-}q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & p & p\text{-}q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & p\text{-}q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{vmatrix}$$

که در آن p و q دو عدد غیر صفر و ثابت هستند. برای دنباله‌ی (a_n) یک رابطه‌ی بازگشتی پیدا کرده و آن را حل کنید.

نکته. در حل زیر، فرض بر این است که خواننده با خواص بسط دترمینان آشنایی دارد.

حل: با به کار بردن بسط دترمینان در سطر اول به دست می‌آوریم:

$$a_n = p\left.\begin{vmatrix} p & p-q & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ q & p & p-q & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & q & p & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & q & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & p & p-q \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & q & p \end{vmatrix}\right\} n-۱ \quad -(p-q)\left.\begin{vmatrix} q & p-q & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & p & p-q & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & q & p & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & q & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & p & p-q \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & q & p \end{vmatrix}\right\} n-۱$$

حال با به کار بردن بسط دترمینان دومی خواهیم داشت :

$$a_n = pa_{n-۱} - (p-q)qa_{n-۲} \qquad (۶-۵-۲)$$

این، همان رابطه‌ای است که می‌خواستیم.

معادله‌ی مشخصه‌ی (۲-۵-۶) به صورت زیر است:

$$x^۲ - px + (p-q)q = ۰$$

که ریشه‌های آن q و p-q است.

حالت(۱). $p-q \neq q$

در این حالت ریشه‌ها متمایز هستند و جواب کلی به صورت زیر است:

$$a_n = A(p-q)^n + Bq^n \qquad (۱)$$

برای یافتن A و B، باید اول $a_۱$ و $a_۲$ را پیدا کنیم. واضح است:

$$a_۱ = p$$

و

$$a_۲ = \begin{vmatrix} p & p-q \\ q & p \end{vmatrix} = p^۲ - q(p-q) = p^۲ + q^۲ - pq.$$

$a_۰$ را عددی تعریف می‌کنیم که $a_۰$ و $a_۱$و $a_۲$ در رابطه‌ی بازگشتی(۲-۵-۶) صدق کند. بنابراین :

$$a_۲ = pa_۱ - (p-q)qa_۰$$

پس:

$$p^{۲}+q^{۲}-pq=p^{۲}-(p-q)qa_{۰}$$

که ایجاب می‌کند:

$$a_{۰}=۱$$

حال $a_{۰}=۱$ و $a_{۱}=p$ را در (۱) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A+B=۱ \\ A(p-q)+Bq=p \end{cases} \qquad (۲)$$

از حل دستگاه (۲) به دست می‌آوریم :

$$A=\frac{p-q}{p-۲q} \quad و \quad B=\frac{-q}{p-۲q}$$

فرض کردیم $p-۲q\neq ۰$. از این رو جواب خواسته شده برابر است با :

$$a_n=\frac{(p-q)^{n+۱}-q^{n+۱}}{p-۲q}$$

حالت (۲) p-q=q

در این حالت، q ریشه مشخصه با تکرار ۲ است و جواب کلی به صورت زیر است :

$$a_n=(A+Bn)q^n \qquad (۳)$$

چون $a_{۰}=۱$ و $a_{۱}=p$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A=۱ \\ (A+B)q=p=۲q \end{cases}$$

پس: $A=B=۱$

و بنابراین:

$$a_n=(۱+n)q^n$$

جواب خواسته شده رابطه‌ی (۲-۵-۶) در این حالت است.

در پایان به دست می‌آید که:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(p-q)^{n+1} - q^{n+1}}{p-2q} & p \neq 2q \quad \text{اگر} \\ (1+n)q^n & p = 2q \quad \text{اگر} \end{cases}$$ ■.

۶-۶- دستگاه روابط بازگشتی خطی

در سه بخش قبل، یاد گرفتیم که چگونه روابط بازگشتی خطی *ساده* که در مورد a_n است را حل کنیم. در این بخش، بازهم پیش می‌رویم و به دستگاه‌های روابط بازگشتی خطی که مربوط به دو دنباله‌ی (a_n) و (b_n) هستند توجه می‌کنیم، که به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1} \\ b_n = rb_{n-1} + sa_{n-1} \end{cases} \qquad (6\text{-}6\text{-}1)$$

در آن r,q,p و s اعداد ثابت دلخواهی هستند.

روش استاندارد جایگذاری برای حل دستگاه‌های معادلات را به یاد داریم. این روش را به طور مشابه می‌توان برای حل دستگاه‌های روابط بازگشتی خطی به شکل (۱-۶-۶) به کار برد.

مثال ۱-۶-۶ دستگاه روابط بازگشتی زیر را با شرایط اولیه‌ی $a_1 = 4$ و $b_1 = 1$ حل کنید.

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0 & (1) \\ b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

حل. از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$b_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1}) \qquad (۳)$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) + 5a_{n-1} - 7\left\{\frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1})\right\} = 0$$

یا

$$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0 \qquad (۴)$$

معادله‌ی مشخصه‌ی (۴) به صورت زیر است:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

که ۲ و ۳ ریشه‌های آن هستند. بنابراین جواب کلی (۴) به شکل زیر است:

$$a_n = A2^n + B3^n \qquad (۵)$$

که در آن A و B اعداد ثابتی هستند. با جایگذاری در رابطه‌ی (۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) \\ &= \frac{1}{4}(A2^{n+1} + B3^{n+1} + 2A2^n + 2B3^n) \\ &= \frac{1}{4}(4A2^n + 5B3^n) \qquad (۶) \end{aligned}$$

با توجه به شرایط اولیه‌ی $a_1 = 4$ و $b_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ 2A + \frac{15}{4}B = 1 \end{cases} \qquad (۷)$$

با حل دستگاه (۷) پیدا می‌کنیم : $A=8$ و $B=-4$

از این رو برای $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{cases} a_n = ۲^{n+۳} - ۴.۳^n \\ b_n = ۲^{n+۳} - ۵.۳^n \end{cases}$$

جواب‌هایی که می‌خواستیم.■

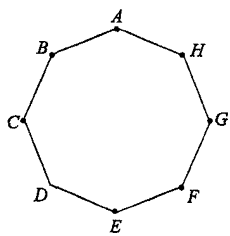
حال می‌خواهیم ببینیم که دستگاه‌های توابع بازگشتی خطی چگونه ما را در حل مسایل المپیادی‌های ریاضی کمک می‌کند.

مثال ۲-۶-۶ (المپیاد ریاضی جهانی،۱۹۷۹/۶). فرض کنید A و E دو رأس روبه‌روی هم از یک هشت ضلعی منتظم باشند. یک قورباغه از رأس A شروع به جهش می‌کند. قورباغه می‌تواند از هر رأسی که روی آن قرار دارد(به جز رأس E) به دو خانه‌ی مجاورش جهش کند. وقتی به رأس E می‌رسد در آنجا توقف می‌کند. (a_n) را تعداد راه‌های متمایز برای رسیدن از A به E با n جهش تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که

$$a_{۲n-۱} = ۰$$

و

$$a_{۲n} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left\{(۲+\sqrt{۲})^{n-۱} - (۲-\sqrt{۲})^{n-۱}\right\} \quad و \quad n = ۱,۲,۳,...$$



شکل ۱-۶-۶

حل. هشت ضلعی منتظم مورد نظر در شکل ۱-۶-۶ نمایش داده شده است. از آنجایی که تعداد اضلاع ما بین رؤوس A و E زوج است، پس با تعداد جهش‌های فرد نمی‌توان از A به E رسید و در نتیجه برای $n \geq ۱$ ، $a_{۲n-۱} = ۰$ است.

واضح است که $a_۲ = ۰$. همچنین $ABCDE$ و $AHGFE$ تنها راه‌های رسیدن از A به E با ۴ جهش است، پس ملاحظه می‌شود که $a_۴ = ۲$.

به منظور یافتن یک رابطه‌ی بازگشتی برای $a_{۲n}$، دنباله‌ی تکمیلی (b_n) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $n \geq ۱$ ، b_n برابر تعداد راه‌های رسیدن از C (یا G) به E با n جهش است.

از A شروع می‌کنیم، برای دو حرکت اول قورباغه دقیقاً ۴ راه زیر وجود دارد:

$$A \to H \to A \qquad A \to B \to A$$
$$A \to H \to G \qquad A \to B \to C$$

پس با توجه به تعریف (a_n) و (b_n) داریم:

$$a_{۲n} = ۲a_{۲n-۲} + ۲b_{۲n-۲} \tag{۱}$$

از طرف دیگر، اگر از C شروع به حرکت کند، در دو جهش بعدی خود اگر نخواهد در E توقف کند ۳ راه در پیش رو دارد:

$$C \to B \to C, C \to D \to C, C \to B \to A$$

بنابراین:

$$b_{۲n} = ۲b_{۲n-۲} + a_{۲n-۲} \tag{۲}$$

حال می‌توانیم دستگاه متشکل از دو رابطه‌ی بازگشتی (۱) و (۲) را حل کنیم. از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$b_{۲(n-۱)} = \frac{۱}{۲} a_{۲n} - a_{۲(n-۱)} \tag{۳}$$

با جایگذاری (۳) در رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}a_{2(n+1)} - a_{2n} = a_{2n} - 2a_{2(n-1)} + a_{2(n-1)}$$

$$a_{2(n+1)} - 4a_{2n} + 2a_{2(n-1)} = 0 \qquad (۴)$$

فرض کنید $d_n = a_{2n}$. پس رابطه‌ی (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d_{n+1} - 4d_n + 2d_{n-1} = 0 \qquad (۵)$$

که معادله‌ی مشخصه‌ی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

و ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{2}$ خواهند بود. بنابراین، جواب عمومی و کلی (۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{2n} = d_n = A(2+\sqrt{2})^n + B(2-\sqrt{2})^n \qquad (۶)$$

که در آن A و B اعداد ثابتی هستند.

برای یافتن A و B، شرایط اولیه‌ی $d_1 = a_2 = 0$ و $d_2 = a_4 = 2$ را به کار می‌بریم. d_0 را عددی تعریف می‌کنیم که همراه با d_1 و d_2 در رابطه‌ی (۵) صدق کند. بنابراین:

$$d_2 - 4d_1 + 2d_0 = 0$$

پس:

$$d_0 = \frac{1}{2}(4d_1 - d_2) = -1$$

از رابطه‌ی (۶) و با توجه به شرایط اولیه‌ی $d_0 = -1$ و $d_1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ A(2+\sqrt{2}) + B(2-\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \qquad (۷)$$

از حل دستگاه (۷) به دست می آوریم:

$$B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) \quad \text{و} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۶)، جواب نهایی خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{۲n}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left\{\left(۲+\sqrt{۲}\right)^{n-۱}-\left(۲-\sqrt{۲}\right)^{n-۱}\right\}$$

برای $n\geq ۱$. ■

۷-۶- روش توابع مولد

در بخش ۵، مفهوم توابع مولد را برای به دست آوردن دنباله‌ها معرفی کردیم و مشاهده کردیم که توابع مولد، ابزاری قوی در ریاضیات برای حل مسایل ترکیبیات هستند. در این بخش، کاربرد توابع مولد در حل بعضی از روابط بازگشتی خاص را مطرح می‌کنیم. دقت می‌کنیم که در روش توابع مولد، برای حل روابط بازگشتی خطی با استفاده از شرایط اولیه $a_n^{(h)}$ و $a_n^{(p)}$ همزمان به دست آیند.

مثال ۱-۷-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط اولیه‌ی $a_۰=۱$ حل کنید.

$$a_n-۲a_{n-۱}=۲^n \qquad (۶-۷-۱)$$

حل: فرض کنید $A(x)$ تابع دنباله‌ی (a_n) باشد. پس:

$$A(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+...+a_nx^n+...$$

$$-۲xA(x)=-۲a_۰x-۲a_۱x^۲-۲a_۲x^۳-...-۲a_{n-۱}x^n-...$$

از جمع کردن دو طرف تساوی به دست می‌آید:

$$(۱-۲x)A(x)=a_۰+(a_۱-۲a_۰)x+(a_۲-۲a_۱)x^۲+...+(a_n-۲a_{n-۱})x^n+...$$

چون $a_۰=۱$ و دنباله‌ی (a_n) در (۶-۷-۱) صدق می‌کند. خواهیم داشت:

$$(1-2x)A(x) = 1 + 2x + 2^2x^2 + \ldots 2^n x^n + \ldots$$
$$= \frac{1}{1-2x}$$

بنابراین:

$$A(x) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)(2x)^r$$

و از این رو به دست می‌آید:

$$a_n = (n+1)2^n$$

برای $n \geq 0$. ■

همان‌طور که دیدید در به کارگیری روش توابع مولد برای حل رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی (a_n) ، اول تابع مولد $A(x)$ را برای دنباله‌ی (a_n) تشکیل دادیم. با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی داده شده و شرایط اولیه، $A(x)$ با انجام دادن چندین عملیات جبری به دست می‌آید. سرانجام رابطه‌ی بازگشتی با در نظر گرفتن $a_n = g(n)$ به دست می‌آید که در آن $g(n)$ ضریب x^n در بسط $A(x)$ است.

مثال ۲-۷-۶ رابطه‌ی بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد و با در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5^n \qquad (6\text{-}7\text{-}2)$$

حل. فرض می‌کنیم $A(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (a_n) باشد، پس،

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$
$$-5xA(x) = -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - 5a_3x^4 - \ldots$$
$$6x^2A(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + \ldots$$

و بنابراین

$$A(x)\left(1-5x+6x^2\right)=x+\sum_{i=2}^{\infty}\left(a_i-5a_{i-1}+6a_{i-2}\right)x^i$$
$$=x+\sum_{i=2}^{\infty}5^i x^i$$
$$=x+\frac{(5x)^2}{1-5x}$$
$$=\frac{25x^2+x-5x^2}{1-5x}$$
$$=\frac{20x^2+x}{1-5x}$$

در نتیجه:

$$A(x)=\frac{20x^2+x}{(1-5x)(1-2x)(1-3x)}=\frac{B}{1-5x}+\frac{C}{1-2x}+\frac{D}{1-3x} \qquad (1)$$

از رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید:

$$20x^2+x=B(1-2x)(1-3x)+C(1-5x)(1-3x)+D(1-5x)(1-2x) \qquad (2)$$

با قرار دادن $x=0$ در رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید:

$$B+C+D=0 \qquad (3)$$

با قرار دادن $x=\frac{1}{2}$ در رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید:

$$5+\frac{1}{2}=C(1-\frac{5}{2})(1-\frac{3}{2})=(\frac{-3}{2})(-\frac{1}{2})C$$

یا

$$C=\frac{22}{3}$$

با قرار دادن $x=\frac{1}{3}$ در رابطه‌ی (۲) به دست می‌آید:

$$\frac{۲۰}{۹}+\frac{۱}{۳}=D(۱-\frac{۵}{۳})(۱-\frac{۲}{۳})=D(\frac{-۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{-۲}{۹}D$$

یا

$$D=-\frac{۲۳}{۲}$$

در نتیجه از رابطه‌ی (۳) داریم:

$$B=-C-D=\frac{۲۵}{۶}$$

از این رو ،

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{۲۵}{۶}\left(\frac{۱}{۱-۵x}\right)+\frac{۲۲}{۳}\left(\frac{۱}{۱-۲x}\right)-\frac{۲۳}{۲}\left(\frac{۱}{۱-۳x}\right)\\&=\frac{۲۵}{۶}\sum_{i=۰}^{\infty}(۵x)^i+\frac{۲۲}{۳}\sum_{i=۰}^{\infty}(۲x)^i-\frac{۲۳}{۲}\sum_{i=۰}^{\infty}(۳x)^i\end{aligned}$$

و در نتیجه، جواب خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_n=\frac{۲۵}{۶}\cdot۵^n+\frac{۲۲}{۳}\cdot۲^n-\frac{۲۳}{۲}\cdot۳^n.\blacksquare$$

و بالاخره، روش توابع مولد را برای حل دستگاه‌های روابط بازگشتی خطی نیز به کار می‌بریم.

مثال ۳-۷-۶ دستگاه روابط بازگشتی زیر را با شرایط اولیه‌ی $a_۰=۱$ و $b_۰=۰$ حل کنید.

$$\begin{cases}a_n+۲a_{n-۱}+۴b_{n-۱}=۰\\b_n-۴a_{n-۱}-۶b_{n-۱}=۰\end{cases}\qquad(۳-۷-۶)$$

حل. فرض کنید $A(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (a_n) و $B(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (b_n)

باشد. پس داریم:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\
B(x) &= \quad b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots \\
2xA(x) &= \quad 2x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \dots \\
4xB(x) &= \qquad + 4b_1x^2 + 4b_2x^3 + \dots
\end{aligned}
$$

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
(1+2x)A(x) + 4xB(x) &= 1 + (a_1 + 2)x + (a_2 + 2a_1 + 4b_1)x^2 \\
&\quad + (a_3 + 2a_2 + 4b_2)x^3 + \dots = 1
\end{aligned}
$$

(طبق رابطه‌ی اول دستگاه (۳−۷−۶)).

همچنین:

$$
\begin{aligned}
-4xA(x) &= -4x - 4a_1x^2 - 4a_2x^3 - 4a_3x^4 - \dots \\
-6xB(x) &= \qquad -6b_1x^2 - 6b_2x^3 - 6b_3x^4 - \dots
\end{aligned}
$$

پس با توجه به رابطه‌ی دوم دستگاه (۳−۷−۶)،

$$
\begin{aligned}
B(x) - 4xA(x) - 6xB(x) &= (b_1 - 4)x + (b_2 - 4a_1 - 6b_1)x^2 \\
&\quad + (b_3 - 4a_2 - 6b_2)x^3 + \dots
\end{aligned}
$$

یعنی:

$$(1-6x)B(x) - 4xA(x) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
(1+2x)A(x) + 4xB(x) = 1 \\
-4xA(x) + (1-6x)B(x) = 0
\end{cases}
\qquad (1)
$$

از حل دستگاه (۱) به دست می‌آوریم:

$$A(x) = \frac{1-6x}{(1-2x)^2} \quad \text{و} \quad B(x) = \frac{4x}{(1-2x)^2}$$

از بسط توابع به دست می‌آید:

$$A(x) = (۱ - ۶x)\sum_{r=۰}^{\infty}(r+۱)(۲x)^r$$

$$B(x) = ۴x\sum_{r=۰}^{\infty}(r+۱)(۲x)^r$$

از این رو، با پیدا کردن ضرایب x^n در $A(x)$ و $B(x)$، جواب‌های خواسته شده به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a_n = (n+۱)۲^n - ۶n۲^{n-۱} = ۲^n(۱-۲n) \\ b_n = ۴n.۲^{n-۱} = n۲^{n+۱} \end{cases}$$

برای هر عدد $n \geq ۱$. ■

۸-۶- روابط بازگشتی غیر خطی و اعداد کاتالان

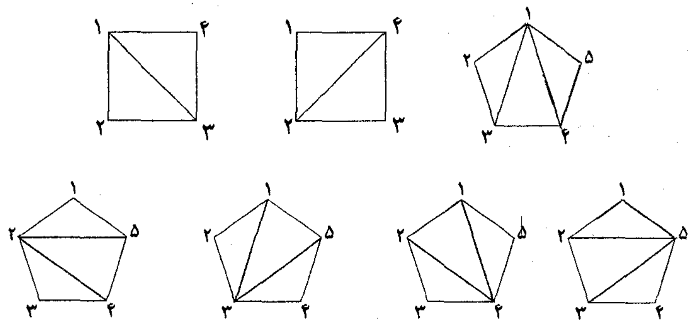
این بخش را با مسأله‌ی مشهوری در ترکیبیات که عبارت است از تقسیم یک چند ضلعی به مثلث‌های متمایز به وسیله‌ی اقطار نا متقاطع، آغاز می‌کنیم که توسط اولر و دیگر دانشمندان در حدود ۲۰۰ سال پیش بررسی شده است. یک راه حل این مساله منجر به گروهی از روابط بازگشتی غیر خطی می‌شود. این روابط بازگشتی غیرخطی را می‌توان از روش توابع مولد حل کرد.

مثال ۱-۸-۶ یک تقسیم‌بندی مثلثی از یک n ضلعی P_n $(n \geq ۳)$، عبارت است از تقسیم کردن P_n به مثلث‌هایی به وسیله‌ی اقطار نامتقاطع. فرض کنید $a_۰ = ۱$ و برای هر $n \geq ۱$، a_n را تعداد تقسیم‌بندی‌های مثلثی متمایز یک (n+۲) ضلعی تعریف می‌کنیم. نشان دهید برای هر $n \geq ۱$:

$$a_n = a_۰a_{n-۱} + a_۱a_{n-۲} + a_۲a_{n-۳} + \ldots + a_{n-۲}a_۱ + a_{n-۱}a_۰ \qquad (۶-۸-۱)$$

و سپس رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

حل. واضح است که $a_۱ = ۱$. برای $n=۲،۳$ ، تقسیم‌بندی‌های $P_۴$ و $P_۵$ در شکل ۱-۸-۶ نمایش داده شده است. همان طور که می‌بینید $a_۳ = ۵$ و $a_۲ = ۲$



شکل ۱-۸-۶

برای به دست آوردن رابطه‌ی بازگشتی(۱-۸-۶)، $(n+۲)$ ضلعی $P_{n+۲}$ درشکل۲-۸-۶ را تشکیل می‌دهیم و یک تقسیم‌بندی مثلثی $p_{n+۲}(n \geq ۲)$ را در نظر می‌گیریم. (توجه کنید رابطه‌ی بازگشتی(۱-۸-۶) برای $n = ۱$ به سادگی به دست می‌آید).

یک ضلع دلخواه را انتخاب می‌کنیم، مثلاً ضلع $[۱,n+۲]$ ، که دو رأس ۱ و $n+۲$ از $P_{n+۲}$ را به هم وصل می‌کند. واضح است $[۱,n+۲]$ فقط به یک مثلث در این تقسیم‌بندی تعلق دارد. رأس سوم مثلث را با $r(r=۲،۳,...,n+۱)$ و آن مثلث را با $\Delta(۱,n+۲,r)$ مشخص می‌کنیم.(شکل ۲-۸-۶ را ببینید) واضح است که $\Delta(۱,n+۲,r)$، $P_{n+۲}$ را به دو چند ضلعی کوچکتر تقسیم می‌کند:

r ضلعی(۱) و $(n+۳-r)$ ضلعی (۲)

در شکل (۲-۸-۶) طبق تعریف، r ضلعی (۱) می‌تواند به $a_{r-۲}$ طریق، تقسیم‌بندی مثلثی شود و در حالی‌که $(n+۳-r)$ ضلعی (۲) را به $a_{n+۱-r}$ طریق جداگانه می‌توان مثلث‌بندی کرد پس بنا به اصل ضرب، تعداد تقسیم‌بندی مثلثی که در آن $\Delta(۱,n+۲,r)$ ظاهر شود، برابر است با:

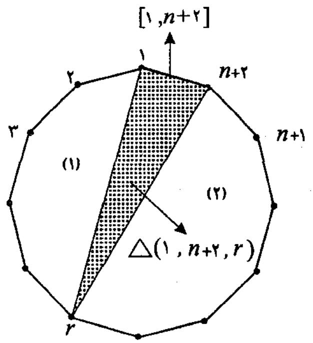
$$a_{r-۲}a_{n+۱-r}$$

از آنجایی که مقدار r از ۲ تا $n+۱$ تغییر می‌کند، طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$a_n = \sum_{r=۲}^{n+۱} a_{r-۲}a_{n+۱-r}$$

یعنی برای هر $n \geq ۱$،

$$a_n = \sum_{k=۰}^{n-۱} a_k a_{n-۱-k} \qquad (۶-۸-۱)$$



شکل ۲-۸-۶

حال می‌خواهیم رابطه‌ی (۱-۸-۶) رابا استفاده از روش توابع مولد حل کنیم. فرض کنید $A(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولد دنباله‌ی (a_n) باشد. پس:

$$A(x)-a_{\circ}=\sum_{n=۱}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\sum_{k=\circ}^{n-۱}a_ka_{n-۱-k}\right)x^n$$

$$=(a_{\circ}a_{\circ})x+(a_{\circ}a_۱+a_۱a_{\circ})x^۲+(a_{\circ}a_۲+a_۱a_۱+a_۲a_۱)x^۳+\ldots$$

$$=(a_{\circ}+a_۱x+a_۲x^۲+\ldots)(a_{\circ}x+a_۱x^۲+a_۲x^۳+\ldots$$

$$=x(A(x))^۲$$

در نتیجه از شرط $a_{\circ}=۱$ به دست می‌آید:

$$x\big(A(x)\big)^۲-A(x)+۱=\circ$$

از حل معادله نسبت به $A(x)$ به دست می‌آید:

$$A(x)=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴x}}{۲x}=\frac{۱}{۲x}\left\{۱\pm(۱-۴x)^{\frac{۱}{۲}}\right\} \qquad (۱)$$

ضریب x^n در بسط $(۱-۴x)^{\frac{۱}{۲}}$ برابر است با:

$$\binom{\frac{۱}{۲}}{n}(-۴)^n=\frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-۱\right)\left(\frac{۱}{۲}-۲\right)\ldots\left(\frac{۱}{۲}-n+۱\right)}{n!}(-۴)^n$$

$$=(-۴)^n\left(\frac{۱}{۲}\right)^n(-۱)^{n-۱}\frac{۱\times۱\times۳\times۵\ldots(۲n-۳)}{n!}$$

$$=-۲^n\frac{(۲n-۲)!}{n!۲^{n-۱}\times(n-۱)!}$$

$$=-\frac{۲}{n}\frac{(۲n-۲)!}{(n-۱)!(n-۱)!}=-\frac{۲}{n}\binom{۲(n-۱)}{n-۱}$$

چون $a_n \geq ۱$، با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$A(x) = \frac{۱}{۲x}\left\{۱-(۱-۴x)^{\frac{۱}{۲}}\right\}$$
$$= \frac{۱}{۲x}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{n}\binom{۲(n-۱)}{n-۱}x^n$$

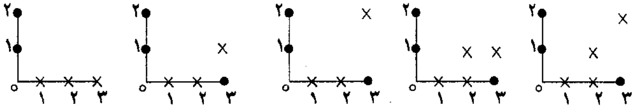
از این رو برای $n \geq ۱$، a_n ضریب x^n در بسط بالا به دست می‌آید:

$$a_n = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{n+۱}\binom{۲n}{n} = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}. \blacksquare$$

اعداد $\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ را، که موسوم به *اعداد کاتالان* هستند، در مثال ۴-۶-۲ معرفی کردیم که مربوط به تعداد نگاشت‌های صعودی $\alpha: N_n \to N_{n-۱}$ با شرط $\alpha(a) < a$ بود. مسأله‌ی تقسیم‌بندی مثلثی n ضلعی، اولین بار توسط «جان آندریاس وان سگور» (۱۷۰۴-۱۷۷۷) و سپس متعاقباً توسط « لئونارد اولر» (۱۷۰۷-۱۷۸۳) بررسی شد. چند مثال دیگر، که به این اعداد منتهی می‌شوند در جدول ۱-۸-۶ نشان داده شده‌اند. برای دیدن مثال‌های بیشتر و آشنایی و تعمیم این اعداد جالب، می‌توانید به منابع زیر رجوع کنید:

Cohen[۲], Breckenridge etal[B] , Gardner[Ga],Goald[Go],Guy[Gu],Hilton and pedersen[HP] ,chu[C]

تعداد نگاشت‌های صعودی $\alpha:\{۱,۲,۳\}\rightarrow\{۰,۱,۲\}$ به طوری که $\alpha(a)<a$



تعداد راه‌های قرار دادن پرانتز بین $x_۱x_۲x_۳x_۴$

$$(((x_۱x_۲)x_۳)x_۴)((x_۱(x_۲x_۳))x_۴((x_۱x_۲)(x_۳x_۴))(x_۱((x_۲x_۳)x_۴))(x_۱(x_۲(x_۳x_۴)))$$

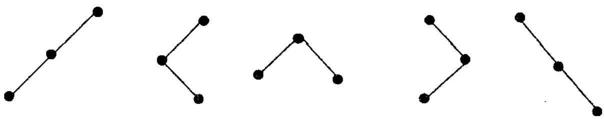
تعداد دنباله‌ها با ۳ تا ۱ و ۳ تا(۱-)

به طوری که مجموع هر چند عدد از سمت چپ نا منفی باشند.

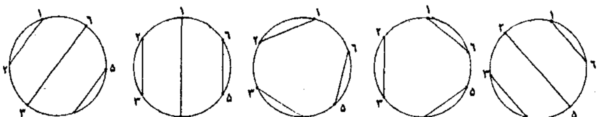
(-۱،-۱، ۱، -۱، ۱) (-۱، ۱، -۱، -۱، ۱، ۱) و (-۱،-۱،۱،-۱،۱،۱) و

(-۱،-۱،-۱،۱،۱،۱) (-۱،۱،۱-۱،۱،-۱،۱)

تعداد درختهای دودویی با سه گره



تعداد راه‌های جفت کردن ۶ نقطه روی دایره به وسیله‌ی وترهای نامتقاطع



جدول ۱-۸-۶

۹-۶ جایگشت‌های متناوب و توابع مولد نمایی

در این بخش پایانی، مسأله‌ی جالب دیگری را که توسط ریاضیدان فرانسوی

« د.آندره» (۱۹۱۷- ۱۸۴۰) در سال ۱۸۷۹ بررسی شده است، معرفی می‌کنیم (آندره $[A_1, A_2]$ و همچنین Hosberger[H] ۶۹-۷۵ را ببینید.) که دربارهٔ نوع ویژه‌ای از جایگشت‌ها هستند. نظریه‌ی توابع مولد در بخش ۷و۸ برای حل بعضی از روابط بازگشتی خاص به کار رفته است. در اینجا خواهیم دید، چگونه این مساله منجر به دستگاه روابط بازگشتی غیر خطی می‌شود چگونه و توابع مولد نمایی در حل این رابطه‌ی بازگشتی به کار می‌رود.

فرض کنید S مجموعه‌ی n عدد طبیعی باشد. یک جایگشت $e_1e_2\ldots e_n$ متناوب نامیده می‌شود اگر در شرط زیر صدق کند:

$$e_1 < e_2 > e_3 < e_4 > e_5 < \ldots$$

$$\begin{cases} e_{n-1} > e_n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ e_{n-1} < e_n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

طول جایگشت $e_1e_2\ldots e_n$ ، n است. جدول ۱-۹-۶، تمام جایگشت‌های متناوب با طول n از n عدد با از $N_n\left(=\{1,2,\ldots,n\}\right)$، برای n=۱،۲،۳،۴،۵ نشان می‌دهد.

طول	جایگشت‌های متناوب	تعداد جایگشت‌ها
۱	۱	۱
۲	۱۲	۱
۳	۱۳۲و۲۳۱	۲
۴	۱۳۲۴،۱۴۲۳،۲۳۱۴،۲۴۱۳،۳۴۱۲	۵
۵	۱۳۲۵۴،۱۴۲۵۳،۱۴۳۵۲،۱۵۲۴۳ ۱۵۳۴۲،۲۳۱۵۴،۲۴۱۵۳،۲۴۳۵۱ ۲۵۱۴۳،۲۵۳۴۱،۳۴۱۵۲،۳۴۲۵۱ ۳۵۱۴۲،۳۵۲۴۱،۴۵۱۳۲،۴۵۲۳۱	۱۶

جدول ۱-۹-۶

مساله‌ای که آندره به آن توجه کرد عبارت است از :

« یافتن تعداد جایگشت‌های متناوب از N_n برای هر $n \geq ۱$ ».

قبل از آوردن جواب آندره، ابتدا به مشاهده‌ی ساده اما مفید زیر دقت می‌کنیم.

مشاهده. فرض کنید $S=\{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$ مجموعه‌ای از n عدد طبیعی متمایز باشد. تعداد جایگشت‌های متناوب S برابر است با تعداد جایگشت‌های متناوب N_n.
این مشاهده، به سادگی نشان می‌دهد که تعداد جایگشت‌های متناوب S فقط به اندازه‌ی $|S|$ بستگی دارد و بزرگی اعضای S مهم نیستند. این مشاهده به راحتی با برقراری یک تناظر بین جایگشت‌های متناوب S و جایگشت‌های متناوب N_n تأیید می‌شود. برای مثال اگر $S=\{۳،۵،۶،۹\}$، طبق تناظر زیر:

۳ ↔ ۱ و ۵ ↔ ۲ و ۶ ↔ ۳ و ۹ ↔ ۴

می‌توان تناظر زیر را بر قرار کرد:

۳۶۵۹ ↔ ۱۳۲۴

۳۹۵۶ ↔ ۱۴۲۳

۵۶۳۹ ↔ ۲۳۱۴

۵۹۳۶ ↔ ۲۴۱۳

۶۹۳۵ ↔ ۳۴۱۲

برای راحتی ، فرض کنید $e_۱e_۲\ldots e_n$ یک جایگشت متناوب باشد، زیر e_i را خط می‌کشیم اگر e_i از عدد (یا اعداد) کناری خود کوچکتر باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\underline{۱}\ ۳\ \underline{۲}\ ۴$$

$$\underline{۳}\ ۵\ \underline{۱}\ ۴\ \underline{۲}$$

$$\underline{۲}\ ۴\ \underline{۱}\ ۶\ \underline{۳}\ ۵$$

$$\underline{۲}\ ۷\ \underline{۱}\ ۵\ \underline{۴}\ ۶\ \underline{۳}$$

بدیهی است با انجام این کار، در جایگشت متناوب $e_1e_2\ldots e_n$ زیر e_n خط کشی شده است اگرو فقط اگر n فرد باشد.

با توجه به چگونگی n، آندره دو دنباله‌ی (a_n) و (b_n) را به صورت زیر برای هر $n \geq 0$ معرفی کرد:

$$a_n = \begin{cases} N_n & \text{تعداد جایگشت‌های متناوب} \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 1 & \text{اگر } n=0 \\ N_n & \text{تعداد جایگشت‌های متناوب} \quad \text{اگر } n \geq 2 \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

واضح است برای هر $n \geq 1$، $a_n + b_n$ تعداد جایگشت‌های متناوب N_n را می‌شمارد.

ادعای ۱: برای هر n فرد

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k a_{n-1-k} \qquad (۶-۹-۱)$$

اثبات. فرض کنیم $\underline{e_1}e_2\underline{e_3}\ldots e_{n-1}\underline{e_n}$ (n فرد) یک جایگشت متناوب از N_n باشد و $e_{k+1} = n$. بدیهی است $e_{k+1}(=n)$ جایگشت را به طریق زیر به دو جایگشت متناوب با طول‌های فرد k و n-۱-k تجزیه می‌کند که k=۱،۳،۵،...،n-۲

$$\underbrace{(e_1 e_2 e_3 \cdots e_{k-1} e_k)}_{\text{فرد}} \; e_{k+1} \; \underbrace{(e_{k+2} \cdots e_{n-1} e_n)}_{\text{فرد}}$$

از آنجایی که در بالا،

(الف) $\binom{n-1}{k}$راه برای انتخاب k عدد از N_{n-1} وجود دارد(برای مرتب کردن در سمت چپ)،

(ب) a_k[1] راه برای تشکیل جایگشت متناوب با طول فرد عدد k در سمت چپ وجود

دارد(طبق مشاهده)

(ج) a_{n-1-k} راه برای تشکیل جایگشت متناوب با طول فرد n-۱-k در سمت راست موجود است،

و چون k مقادیر ۱،۳،۵،...،n-۲ را می‌پذیرد، پس خواهیم داشت:

$$a_n = \binom{n-1}{1}a_1a_{n-2} + \binom{n-1}{3}a_3a_{n-4} + \ldots + \binom{n-1}{n-2}a_{n-2}a_1.$$

از طرفی برای هر n زوج $a_n = 0$، پس به دست می‌آوریم:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_ka_{n-1-k}. \blacksquare$$

ادعای ۲ : برای هر n زوج،

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_kb_{n-1-k} \qquad (۶-۹-۲)$$

اثبات. فرض کنید $\underline{e_1}e_2\ldots\underline{e_k}e_{k+1}\underline{e_{k+2}}\ldots\underline{e_{n-1}}e_n$ (n زوج) یک جایگشت متناوب از N_n باشد و $e_{k+1} = n$. بازهم واضح است که $e_{k+1}(=n)$، جایگشت متناوب را به صورت زیر به دو جایگشت با طول فرد k در سمت چپ و طول زوج n-۱-k در سمت راست تجزیه می‌کند، که k=۱،۳،۵،...n-۱

از آنجایی که در بالا،

(الف) $\binom{n-1}{k}$ راه برای انتخاب k عدد از N_{n-1} وجود دارد،

(ب) a_k راه برای تشکیل جایگشت متناوب با طول فرد در سمت چپ وجود دارد،

(ج) b_{n-1-k} راه برای تشکیل جایگشت متناوب با طول زوج n-۱-k در سمت راست موجود است، پس به طور مشابه به دست می‌آید:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_kb_{n-1-k} \ \blacksquare$$

حال آماده هستیم تا نظریه‌ی توابع مولد نمایی را برای حل روابط بازگشتی (۱-۹-۶)

و (۲-۹-۶) به کار ببریم.

قبل از همه فرض کنید:

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_n) باشد.

ادعای ۳ : $1+A(x)^2=A'(x)$

اثبات. در حقیقت،

$$\begin{aligned}
&1+A(x)^2\\
&=1+\left(a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2\\
&=1+a_0a_0+\left(a_0a_1+a_1a_0\right)x+\left(\frac{a_0a_2}{2!}+\frac{a_1a_1}{1!1!}+\frac{a_2a_0}{2!}\right)x^2\\
&\qquad+\left(\frac{a_0a_3}{3!}+\frac{a_1a_2}{1!2!}+\frac{a_2a_1}{2!1!}+\frac{a_0a_3}{3!}\right)x^3+\ldots,
\end{aligned}$$

و ضریب $\frac{x^{n-1}}{(n-1)}$ در این بسط برابر است:

$$(n-1)!\left(\frac{a_0a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_1a_{n-2}}{1!(n-2)!}+\ldots+\frac{a_{n-1}a_0}{(n-1)!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} a_k a_{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k a_{n-1-k}$$

$$= a_n$$

(از رابطه‌ی (۱-۹-۶) و این که اگر n زوج باشد $a_n = 0$)

از طرف دیگر، $A'(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \dots$

و ضریب $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$، $(n \geq 2)$، در این بسط برابر a_n است. به علاوه، جمله‌ی ثابت در عبارت $1 + A(x)^2$، جمله‌ی $1 + a_0 a_0 = 1$ است و جمله‌ی ثابت در عبارت $A'(x)$، $a_1 = 1$ است، که با هم برابرند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$1 + A(x)^2 = A'(x) \qquad \blacksquare$$

حال فرض کنید $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$، تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (b_n) باشد.

ادعای ۴. $A(x)B(x) = B'(x)$

اثبات. در حقیقت،

$$A(x)B(x)$$

$$= \left(a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(b_0 + b_1 \frac{x}{1!} + b_2 \frac{x^2}{2!} + b_3 \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= a_0 b_0 + \left(\frac{a_0 b_1}{1!} + \frac{a_1 b_0}{1!}\right) x + \left(\frac{a_0 b_2}{2!} + \frac{a_1 b_1}{1!1!} + \frac{a_2 b_0}{2!}\right) x^2 + \dots$$

و ضریب $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$، $(n \geq 2)$، در این عبارت برابر است با:

$$(n-1)!\left(\frac{a_0 b_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_1 b_{n-2}}{1!(n-2)!}+\ldots+\frac{a_{n-1}b_0}{(n-1)!}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k b_{n-1-k}$$
$$=b_n$$

(طبق رابطه‌ی (۱-۹-۶) و اینکه اگر k فرد باشد، $a_{k-1}=b_k=0$.)

از طرف دیگر،

$$B'(x)=b_1+b_2\frac{x}{1!}+b_3\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

و ضریب $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ در این بسط برابر است با b_n.

به علاوه، جمله‌های ثابت در عبارت‌های $A(x)B(x)$ و $B'(x)$ به ترتیب $a_0b_0=0$ و $b_1=0$ هستند که با هم برابرند.

بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$A(x)B(x)=B'(x). \blacksquare$$

در پایان باید توابع مولد $B(x)$ و $A(x)$ را از روی ادعای ۳ و ادعای ۴ مشخص کنیم.

طبق ادعای ۳ داریم:

$$\int\frac{A'(x)}{1+A(x)^2}dx=\int dx$$

و بنابراین،

$$tg^{-1}A(x)=x+c$$

اگر $x=0$، $C=tg^{-1}A(0)=tg^{-1}(a_0)=tg^{-1}(0)=0$، بنابراین:

$$tg^{-1}A(x)=x$$

$$A(x) = tgx \qquad (۱)$$

از ادعای ۴ و رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\frac{B'(x)}{B(x)} = A(x) = \tan x$$

بنابراین،

$$\int \frac{B'(x)}{B(x)} dx = \int \tan x dx$$

یا

$$\ln B(x) = \ln(\sec x) + C$$

اگر $x = ۰$

$$C = \ln B(۰) - \ln(\sec ۰)$$

$$= \ln \frac{B(۰)}{\sec ۰} = \ln \frac{b_۰}{۱}$$

$$= \ln ۱ = ۰$$

در نتیجه :

$$\ln B(x) = \ln(\sec x)$$

و بنابراین،

$$B(x) = \sec x \qquad (۲)$$

در نتیجه، تعداد خواسته شدهٔ جایگشت‌های متناوب N_n یعنی $a_n + b_n$، برابر است با ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در بسط $tgx + \sec x$.

۱۱ جمله‌ی اول بسط tgx و $\sec x$ در زیر آمده است:

$$\tan x = \frac{x}{۱!} + ۲ \times \frac{x^۳}{۳!} + ۱۶ \times \frac{x^۵}{۵!} + ۲۷۲ \times \frac{x^۷}{۷!} + ۷۹۳۶ \times \frac{x^۹}{۹!} + \ldots$$

$$Secx = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + ۵ \times \frac{x^۴}{۴!} + ۶۱ \times \frac{x^۴}{۶!} + ۱۳۸۵ \times \frac{x^۸}{۸!} + ۵۰۵۲۱ \times \frac{x^{۱۰}}{۱۰!} + \ldots$$

و بنابراین ۱۱ جمله‌ی اول $a_n + b_n$ عبارتند از:

۱، ۱، ۱، ۲، ۵، ۱۶، ۶۱، ۲۷۲، ۱۳۸۵، ۷۹۳۶، ۵۰۵۲۱

❖ تمرینات فصل ششم

۱- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 2$ و $a_1 = 3$ حل کنید.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

۲- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 2$ و $a_1 = 3$ حل کنید.

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$$

۳- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

٤- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = \frac{-1}{4}$ و $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

۵- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ حل کنید.

$$2a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}$$

۶- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = \frac{1}{3}$ و $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ حل کنید.

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

۷- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و $a_2 = -1$ حل کنید.

$$a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3}$$

۸- جواب کلی رابطه‌ی بازگشتی زیر را پیدا کنید.

$$a_n + a_{n-1} - 3a_{n-2} - 5a_{n-3} - 2a_{n-4} = 0$$

۹- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = 2(3+\sqrt{3})$ حل کنید.

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 3$$

۱۰- رابطه‌ی بازگشتی زیررا با شرط $a_1 = 2$ حل کنید.

$$a_n - a_{n-1} = 3 \times 2^n - 4n$$

۱۱- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = 1$ حل کنید.

$$a_n - a_{n-1} = 4n - 1$$

۱۲- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = r$ ، که در آن p ، q ، r اعداد ثابتی هستند، حل کنید.

$$a_n = pa_{n-1} + q$$

۱۳- فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد به صورت زیر باشد:

(الف) $a_0 = 1$ ، $a_1 = \frac{3}{5}$

(ب) دنباله‌ی $(a_n - \frac{1}{10}a_{n-1})$ یک تصاعد هندسی با نسبت $\frac{1}{2}$ است،

رابطه‌ی کلی a_nرا برای $n \geq 0$ پیدا کنید.

۱٤- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = 1$ و $a_n \geq 0$ (به ازای هر n) حل کنید.

$$a_n^4 a_{n-1} = 10^{10}$$

۱۵- دنباله‌ی (a_n) از اعداد مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند،

$$a_n = 2\sqrt{a_{n-1}}$$

با شرط $a_0 = 25$ نشان دهید. $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$

۱۶- دنباله‌ی اعداد (a_n) در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

که $a_0 = \frac{1}{4}$ و $a_1 = 1$ شرایط اولیه آن هستند. رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

۱۷- رابطه‌ی بازگشتی صفحه‌ی بعد را با شرط $a_0 = 1$ حل کنید.

$$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n + 2^n$$

۱۸- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ حل کنید.

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

۱۹- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 3$ حل کنید.

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$$

۲۰- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = -4$ و $a_1 = -5$ حل کنید.

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 4n$$

۲۱- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = a_1 = 0$ حل کنید.

$$a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2^{n-2}$$

۲۲- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 5$ حل کنید.

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$$

۲۳- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرایط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$$

۲۴- فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد باشد که در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$pa_n + qa_{n-1} + ra_{n-2} = 0$$

و شرایط اولیه‌ی $a_0 = s$ و $a_1 = t$ را دارا می‌باشد، که p, q, r, s , t اعداد ثابتی هستند، به طوری که $p+q+r=0$ ، $p \neq 0$ و $s \neq t$. رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

۲۵- فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد باشد که در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$a_n = \frac{pa_{n-1} + q}{ra_{n-1} + s}$$

که در آن p, q, r و s اعداد ثابتی هستند با شرط $r \neq 0$.

(الف) نشان دهید که:

$$ra_n + s = p + s + \frac{qr - ps}{ra_{n-1} + s} \qquad (1)$$

(ب) با جایگذاری $ra_n + s = \frac{b_{n+1}}{b_n}$، نشان دهید رابطه‌ی (۱)به یک رابطه‌ی بازگشت خطی همگن برای (b_n) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$b_{n+1} - (p+s)b_n + (ps - qr)b_{n-1} = 0$$

۲۶- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = \frac{1}{4}$ حل کنید.

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$$

۲۷- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط $a_0 = 5$ حل کنید.

$$a_n = \frac{3a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 3}$$

۲۸- دنباله‌ی اعداد (a_n) در شرط زیر صدق می‌کند:

$$(2 - a_n)\, a_{n+1} = 1 \ , \qquad n \geq 1$$

مقدار $\lim_{n\to\infty} a_n$ رابیابید.

۲۹- اگر D_n تعداد به هم ریختگی‌های مجموعه‌ی N_n باشد؛ به ازای هر $n \in N$ با روش ترکیبیاتی ثابت کنید:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

۳۰- به ازای هر $n \in N$، a_n را تعداد دنباله‌های درمبنای سه که در آن هیچ دو صفری مجاور نباشند تعریف می‌کنیم. رابطه‌ی بازگشتی (a_n) را بیابید و آن را حل کنید.

۳۱- فرض کنید C_0, C_1, C_2 و ... دنباله‌ای از دایره‌ها در صفحه‌ی مختصات باشند که

به صورت زیر تعریف شده باشند.

(۱) C_0 دایرهٔ $x^2+y^2=1$ است.

(۲) برای $n=0,1,2,\dots$ ، دایرهٔ C_{n+1} در نیم صفحه‌ی بالایی واقع است و بر دایرهٔ C_n و دو شاخه‌ی هذلولی $x^2-y^2=1$ مماس است.

فرض کنید a_n شعاع C_n باشد.

(الف) به ازای $n\geq 2$ نشان دهید: $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$

(ب) از (الف) نتیجه بگیرید که a_n یک عدد طبیعی و به صورت زیر است.

$$a_n=\frac{1}{2}[(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n]$$

(توسط ب.ا. رزنیک طرح شده است. ماهنامه‌ی ریـاضی آمریکـا(۲٦۲؛۱۹۸۹،۹٦) را ببینید.)

۳۲- a_n برابر دترمینان ماتریس $n\times n$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$a_n=\begin{vmatrix} p+q & pq & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p & p+q & pq & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p+q & pq & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p+q & pq \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p+q \end{vmatrix}$$

که p و q اعداد ثابت غیر صفر هستند. رابطه‌ی بازگشتی (a_n) را پیدا کرده و سـپس آن را حل کنید.

۳۳- به دترمینان $n\times n$ زیر توجه کنید:

$$a_n=\begin{vmatrix} pq+1 & q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & pq+1 & q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p & pq+1 & q & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p & pq+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & pq+1 \end{vmatrix}$$

که p و q اعداد غیر صفر ثابتی هستند یک رابطه‌ی بازگشتی برای (a_n) پیدا کرده و آن را حل کنید.

۳٤- تعداد اعداد $n \in N$ رقمی صحیح و مثبتی را پیدا کنید که فقط از ارقام ۱و۲و۳و۴ تشکیل شده باشد به طوری که ۱و۲ مجاور نباشند .

۳۵- می‌خواهیم یک مستطیل $n\times$۲ $(n \in N)$ را با موازییک‌های ۲×۱و ۲×۲ به پوشانیم. a_n را تعداد راه‌های انجام دادن این کار تعریف می‌کنیم. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n یافته و آن را حل کنید.

۳۶- برای $n \in N$، a_n را تعداد راه‌های پوشاندن مستطیل n ×۳، ABCD با دومینوهای ۲×۱ تعریف می‌کنیم. واضح است اگر n فرد باشد $a_n = ۰$.نشان دهید که:

$$a_{۲r} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left\{\left(\sqrt{۳}+۱\right)\left(۲+\sqrt{۳}\right)^r + \left(\sqrt{۳}-۱\right)\left(۲-\sqrt{۳}\right)^r\right\}$$

(توسط ای. تامسکو مطرح شده است. ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۸۱، ۱۹۷۴؛۵۲۳-۵۲۲) را ببینید.

۳۷- دستگاه روابط بازگشتی زیر را با شرایط $a_۰ = -۱$ و $b_۰ = ۵$ حل کنید.

$$\begin{cases} a_{n+۱} = a_n - b_n \\ b_{n+۱} = a_n + ۳b_n \end{cases}$$

۳۸- دستگاه روابط بازگشتی زیر را با شرایط $a_۰ = ۱$ و $b_۰ = ۰$ حل کنید.

$$\begin{cases} a_n + ۲a_{n-۱} + ۴b_{n-۱} = ۰ \\ b_n - ۴a_{n-۱} - ۶b_{n-۱} = ۰ \end{cases}$$

۳۹- دستگاه روابط بازگشتی زیر را با شرایط $a_۰ = ۴$ و $b_۰ = ۳$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۱۰a_n = ۹a_{n-۱} - ۲b_{n-۱} \\ ۵b_n = -a_{n-۱} + ۳b_{n-۱} \end{cases}$$

٤۰- دستگاه روابط زیر را با شرایط $a_۰ = ۲$ و $b_۰ = -۱$ حل کنید.

$$\begin{cases} 3a_n - 2a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \\ 3b_n - a_{n-1} - 2b_{n-1} = 0 \end{cases}$$

۴۱- فرض کنید (a_n) و (b_n) دو دنباله از اعداد مثبت هستند که در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} a_n^2 = a_{n-1}b_n \\ b_n^2 = a_n b_{n-1} \end{cases}$$

و دارای شرایط اولیه‌ی $a_0 = \frac{1}{8}$ و $b_0 = 64$ می‌باشند. نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

و حد مشترک آنها را پیدا کنید.

۴۲- به ازای $n \in N^*$، a_n, b_n, c_n و d_n را اعداد به طول n در مبنای دو تعریف می‌کنیم که به ترتیب دارای شرایط زیر باشند.

	تعداد صفرها	تعداد یک‌ها
a_n	زوج	زوج
b_n	زوج	فرد
c_n	فرد	زوج
d_n	فرد	فرد

(الف) نشان دهید که:

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + d_{n-1} = c_n\,,$$

$$d_n = b_{n-1} + c_{n-1}\,,$$

(ب) فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ و $D(x)$ به ترتیب توابع مولد دنباله‌های (a_n) و (b_n) و (c_n) و (d_n) باشند. نشان دهید:

$$A(x)=\frac{۱-۲x^{۲}}{۱-۴x^{۲}}$$

$$B(x)=C(x)=\frac{x}{۱-۴x^{۲}}$$

$$D(x)=\frac{۲x^{۲}}{۱-۴x^{۲}}$$

(ج) از قسمت(ب) نتیجه بگیرید:

$$a_n=(-۲)^{n-۲}+۲^{n-۲}\quad (n\geq ۱),$$

$$b_n=c_n=-(-۲)^{n-۲}+۲^{n-۲}\quad (n\geq ۰),$$

$$d_n=(-۲)^{n-۲}+۲^{n-۲}\quad (n\geq ۱)\cdot$$

۴۳- دنباله‌های (a_n) و (b_n) و (c_n) در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(b_n+c_n-a_n\right)$$

$$b_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(c_n+a_n-b_n\right)$$

$$c_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(a_n+b_n-c_n\right)$$

با شرایط اولیه‌ی $a_۰=p$ ، $b_۰=q$ و $c_۰=r$ که p و q و r اعداد مثبت ثابتی هستند.

(الف) به ازای هر $n\geq ۰$ نشان دهید:

$$a_n=\frac{۱}{۳}(p+q+r)(\frac{۱}{۲})^n+(-۱)^n\frac{۱}{۳}(۲p-q-r)$$

(ب) اگر به ازای هر $n\geq ۰$ ، $a_n\geq ۰$، $b_n\geq ۰$ و $c_n\geq ۰$ نتیجه بگیرید: $p=q=r$.

۴۴- به ازای هر $n\in N$ ، F_n را n امین جمله‌ی فیبوناچی تعریف می‌کنیم.

بنابراین: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \ldots$

و با توجه به مثال ۱-۳-۶،

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

و

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

نشان دهید:

الف) $\sum_{r=1}^{n} F_r = F_{n+2} - 1$

ب) $\sum_{r=1}^{n} F_{2r} = F_{2n+1} - 1$

ج) $\sum_{r=1}^{n} F_{2r-1} = F_{2n}$

د) $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} F_r = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$

۴۵- به ازای $n \in N$ و m با شرط $n \geq 2$، نشان دهید:

الف) $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$

ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

ج) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

د) $F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$ ، $(n \geq 3)$

ه) $(F_n, F_{n+1}) = 1$

که (a,b) بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b تعریف می‌شود.

☜ تبصره.

در حالت کلی $\left(F_m, F_n\right) = F_{(m,n)}$ و همچنین $F_m \mid F_n$ اگروفقط اگر $m \mid n$.

۴۶- به ازای هر $n \geq ۲$ نشان دهید:

الف) $F_n^۲ + F_{n-۱}^۲ = F_{۲n-۱}$

ب) $F_{n+۱}^۲ - F_{n-۱}^۲ = F_{۲n}$

ج) $F_{n+۱}^۳ + F_n^۳ - F_{n-۱}^۳ = F_{۳n}$

۴۷- نشان دهید:

الف) $\sum_{r=۱}^{n} F_r^۲ = F_n F_{n+۱}$

ب) $\sum_{r=۱}^{۲n-۱} F_r F_{r+۱} = F_{۲n}^۲$

ج) $\sum_{r=۱}^{۲n} F_r F_{r+۱} = F_{۲n+۱}^۲ - ۱$

۴۸- به ازای هر $n \in N^*$ نشان دهید:

$$F_{n+۱} = \sum_{r=۰}^{\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor} \binom{n-r}{r}$$

۴۹- به ازای هر $n \in N$ و m نشان دهید:

$$\sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} F_{m+r} = F_{m+۲n}$$

۵۰- نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0/618$$

نکته. ثابت $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$، عدد طلایی نامیده می‌شود.

۵۱- یک جفت بچه خرگوش را در نظر بگیرید. فرض کنید وقتی به دو ماهگی می‌رسند شروع به تولید مثل می‌کنند و یک جفت بچه خرگوش دیگر به دنیا می‌آورند. بعد از آن هر ماه یک بار، یک جفت بچه خرگوش به دنیا می‌آورند و بقیه‌ی خرگوش‌ها هر جفت، از دو ماهگی هر ماه یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند. a_n را تعداد جفت خرگوش‌ها بعد از n ماه تعریف می‌کنیم. a_n را پیدا کنید. (Fibonacci,Liber Abaci ,۱۲۰۲ م)

۵۲- برای هر $n \in N^*$ نشان دهید:

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۵۳- مردی می‌خواهد از یک پلکان nتایی بالا برود به طوری که در هر مرحله از یک یا دو پله بالا رود. اگر a_n، تعداد راه‌های ممکن برای انجام این کار باشد، رابطه‌ی بازگشتی a_n را پیدا کنید.

۵۴- $n \in N$ را در نظر بگیرید. تعداد دنباله‌های به طول n در مبنای دو را بیابید به طوری که در آن هیچ دو صفری مجاور نباشند.

۵۵- به ازای هر $n \in N$ با شرط $n \geq 2$، a_nرا تعریف می‌کنیم تعداد راه‌های بیان n، به مجموع اعداد مثبت بزرگتر از ۱ با در نظرگرفتن ترتیب اعداد. رابطه‌ی بازگشتی (a_n) را بیابید و مقدار a_n را تعیین کنید.

۵۶- به ازای $n \in N$، تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱،۲،...،n\}$ را بیابید به طوری که شامل هیچ دو عدد متوالی نباشند. جواب خود را بر حسب جملات دنباله‌ی فیبوناچی بیان کنید.

۵۷- ثابت کنید:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{2j-n-1}}{5^{j}} = \frac{1}{2}(0/4)^{n} F_{n}$$

(توسط س. رابینومطرح شده است مجله‌ی ریاضیات دشوار (۲۶۹;۱۹۸۴،۱۰) را ببینید.)

۵۸- زوج مرتب (S,T) را از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱،۲،...،n\}$ خوب می‌نامیم؛ اگر هر کدام از اعضای S از $|T|$ و هر کدام از اعضای T از $|S|$ بزرگتر باشد. تعداد زوج مرتب‌های خوب را از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱،۲،...۱۰\}$ بیابید.(پاتنام، ۱۹۹۰)

۵۹- a_n تعداد اعداد طبیعی N است که در شرط زیر صدق می‌کنند: مجموع رقم‌های N برابر n است و رقم‌های N از مجموعه‌ی $\{۱،۳،۴\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید، به ازای تمامی مقادیر طبیعی n، a_{2n} مربع کامل است.(المپیادهای ریاضی چین، ۱۹۹۱)

۶۰- a_n را برابر تعداد راه‌های قرار دادن پرانتز در بین n عدد $x_1x_2...x_n$ تعریف می‌کنیم. یک رابطه‌ی بازگشتی بیابید که a_n در آن صدق کند.

۶۱- به ازای هر $n \in N$، b_n را تعداد دنباله‌ها با $2n$ جمله‌ی $z_1, z_2, ... z_{2n}$ تعریف می‌کنیم.که z_i می‌تواند ۱ و ۱- با شرایط زیر باشد.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{2n} z_i = 0$$

(۲) به ازای هر $k=1,2,\ldots,2n-1$، $\sum_{i=1}^{k} z_i \geq 0$

(الف) b_n را برای $n=1,2,3$ به دست آورید.

(ب) یک تناظر بین مجموعه‌ی همه دنباله‌های $2n$ جمله‌ای که در بالا تعریف شد و مجموعه‌ی همه‌ی عبارت‌های پرانتز گذاری شده که متشکل از $n+1$ عدد به صورت $x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}$ هستند، برقرار کنید.

۶۲- به ازای هر عدد طبیعی n، a_n را تعداد راه‌های جفت کردن $2n$ نقطه‌ی متمایز روی محیط دایره به وسیله n وتر نا متقاطع تعریف می‌کنیم. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n پیدا کنید.

۶۳- فرض کنید $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک چند جمله‌ای n متغیره با جمله‌ی ثابت 0 باشد و $\#(P)$ را تعداد جمله‌های متمایز p، پس از آن که جمله‌های متشابه با هم جمع شوند؛ تعریف می‌کنیم. در نتیجه به طور مثال $\#\left((x_1+x_2)^5\right)=6$. فرمولی برای $\#(\ q_n\ )$ به دست آورید که در آن:

$$q_n = x_1(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)\ldots(x_1+\ldots+x_n)$$

۶۴- تعداد راه‌های مرتب کردن $2n$ عدد صحیح $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ را بیابید به طوری که برای هر i، a_i از b_i، a_i از a_{i+1} و b_i از b_{i+1}، جلوتر باشند.

۶۵- آقای چن و آقای لیم دو نامزد انتخابات هستند. فرض کنید آقای چن m رأی و آقای لیم n رأی می‌آورد که $m, n \in N$ و $m>n$ است. اوراق رأی را روی هم، طوری قرار می‌دهیم که در موقع شمردن آنها، در هر لحظه، تعداد رأی‌های آقای چن بیشتر از تعداد رأی‌های آقای لیم باشد. تعداد راه‌هایی را که می‌توانیم این اوراق را به این صورت روی هم قرار دهیم پیدا کنید.

۶۶- برای $n \in N$، a_n را تعداد نگاشت‌های $f: N_n \to N_n$ تعریف می‌کنیم به طوری که اگر $j \in f(N_n)$، آن گاه به ازای هر i با شرط $1 \leq i \leq j$

$$i \in f(N_n)$$

(الف) مقادیر a_1، a_2 و a_3 را با نوشتن تمام نگاشت‌های f تعیین کنید.

(ب) نشان دهید که:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$$

(ج) فرض کنید $A(x)$ تابع مولد نمایی (a_n) باشد که در آن $a_0 = 1$. نشان دهید:

$$A(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

(د) نتیجه بگیرید:

$$a_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r^n}{2^{r+1}}$$

۶۷- S_0 را ۱ تعریف می‌کنیم. برای $n \geq 1$، فرض کنید S_n تعداد ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های صحیح نامنفی باشد؛ با این شرط که $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, .. n)$ و $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 (j = 1, 2, \ldots, n)$ ثابت کنید:

(الف) $S_{n+1} = S_n + nS_{n-1}$

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2}}$

(پاتنام، ۱۹۶۷)

۶۸- دنباله‌ی (a_n) از اعداد در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) $a_1 = \frac{1}{2}$

(۲) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$ ، $(n \geq 1)$

مقدار a_n را تعیین کنید.

۶۹- مجموع بزرگترین مقسوم علیه‌های فرد اعداد صحیح $۱,۲,۳,\ldots,۲^n (n\in N)$ را بیابید(المپیاد آلمان غربی).

(راهنمایی: فرض کنید a_n مجموع بزرگترین مقسوم‌علیه‌های فرد $۱,۲,۳,\ldots۲^n$ باشد نشان دهید . $a_n = a_{n-۱} + ۴^{n-۱}$)

۷۰- فرض کنید d_n، دترمینان یک ماتریس $n\times n$ باشد که در آن $a_{ij} = |i-j|$.
نشان دهید:

$$d_n = (-۱)^{n-۱}(n-۱)۲^{n-۲}$$

(پاتنام، ۱۹۶۱)

۷۱- دنباله‌ی (a_n) به این صورت تعریف می‌شود: $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۳$ و

$$a_n = (n+۱)a_{n-۱} - na_{n-۲} \quad ;(n\geq ۲)$$

تمام n هایی را پیدا کنید که ، $۱۱|a_n$.

۷۲- دنباله‌ی (a_n) از اعداد مثبت به صورت زیر با شرط $a_۰ = ۱$ تشکیل شده است:

$$a_n = \frac{۱}{۱۶}\left(۱+۴a_{n-۱}+\sqrt{۱+۲۴a_{n-۱}}\right)$$

فرمول کلی a_n را پیدا کنید.

۷۳- دنباله‌ی (a_n) به صورت زیر با شرط $a_۰ = ۰$ تعریف می‌شود.

$$۲a_n = ۳a_{n-۱} + \sqrt{۵a_{n-۱}^۲ + ۴} \qquad ،(n\geq ۱)$$

نشان دهید به ازای هر $m\geq ۱$، $۱۹۹۲ \nmid a_{۲m+۱}$

۷٤- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط اولیه‌ی $a_۰ = ۰$ حل کنید.

$$na_n = (n-۲)a_{n-۱} + (n+۱)$$

۷۵- رابطه‌ی بازگشتی زیر را با شرط اولیه‌ی $a_۰ = ۰$ و $a_۱ = ۱$ حل کنید.

$$n(n-1)a_n-(n-2)^2a_{n-2}=0$$

۷۶- دنباله‌ی (a_n) در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$\left(a_n-a_{n-1}\right)f\left(a_{n-1}\right)+g\left(a_{n-1}\right)=0$$

که در آن $a_0=2$ و $f(x)=3(x-1)^2$ و $g(x)=(x-1)^3$.

رابطه‌ی بازگشتی را حل کنید.

۷۷- دنباله‌ی (a_n) در رابطه‌ی بازگشتی زیر با شرایط اولیه‌ی $a_0=1$ و $a_1=2$ صدق می‌کند:

$$n(n-1)a_n=(n-1)(n-2)a_{n-1}-(n-3)a_{n-2}$$

مقدار زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{k=0}^{1992}\frac{a_k}{a_{k+1}}$$

۷۸- تعداد نمایش‌های عدد صحیح و مثبت n به صورت مجموع ۱ها و ۲ها، با در نظر گرفتن ترتیب، برابر $a(n)$ است. برای مثال، از آنجایی که:

۴=۱+۱+۲=۱+۲+۱=۲+۱+۱

=۲+۲=۱+۱+۱+۱

نتیجه می‌گیریم $a(4)=5$. حال فرض می‌کنیم $b(n)$ تعداد نمایش‌های n به صورت مجموع اعداد صحیح بزرگتر از ۱ با در نظر گرفتن ترتیب باشد. برای مثال از آنجایی که:

۶=۴+۲=۲+۴=۳+۳=۲+۲+۲

خواهیم داشت $b(6)=5$. نشان دهید به ازای هر n، $a(n)=b(n+2)$. (پاتنام، ۱۹۵۷)

۷۹- نشان دهید مجموع n جمله‌ی اول بسط دو جمله‌ای $(1-2)^{-n}$ با فرض $n\in N$ برابر $\frac{1}{2}$ است. (پاتنام ۱۹۶۷)

۸۰- ثابت کنید تابع یکتای f از R^+ به R^+ وجود دارد به طوری که:

$$f(f(x)) = ۶x - f(x)$$

و به ازای هر $x > ۰$ ، $f(x) > ۰$. (پاتنام، ۱۹۸۸)

۸۱- فرض کنید $T_۰ = ۲$ ، $T_۱ = ۳$ ، $T_۲ = ۶$ و به ازای هر $n \geq ۳$،

$$T_n = (n+۴)T_{n-۱} - ۴nT_{n-۲} + (۴n-۸)T_{n-۳}$$

چند جمله‌ی اول دنباله به صورت زیر است:

۲،۳،۶،۱۴،۴۰ ،۱۵۲،۷۸۴،۵۱۶۸،۴۰ ۵۷۶

با ارایه‌ی اثبات، نشان دهید فرمول T_n به صورت $T_n = A_n + B_n$ است که در آن دنباله‌های (A_n) و (B_n) دنباله‌های شناخته شده‌ای هستند.(پاتنام، ۱۹۹۰)

۸۲- فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد صحیح باشند. که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$a_۰ = ۱ \text{ و } a_۱ = ۱ \text{ و } a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} \qquad ،(n \geq ۲)$$

$$b_۰ = ۱ \text{ و } b_۱ = ۷ \text{ و } b_n = ۲b_{n-۱} + ۳b_{n-۲} \qquad ،(n \geq ۲)$$

در نتیجه چند جمله‌ی اول آنها به صورت زیر است:

a:۱،۱،۳،۵،۱۱،۲۱،...

b:۱،۷،۱۷،۵۵،۱۶۱،۴۸۷،...

ثابت کنید: به جز "۱" این دو دنباله جمله‌ی مشترک دیگری ندارند. (المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۷۳)

۸۳- دنباله‌ی $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_۱ = ۲ \text{ و } x_۲ = ۳$$

$$x_{۲m+۱} = x_{۲m} + x_{۲m-۱} \quad m \geq ۱$$

$$x_{۲m} = x_{۲m-۱} + ۲x_{۲m-۲} \quad m \geq ۲$$

x_n را به صورت تابعی از n تعیین کنید. (المپیاد ریاضی اتریش، ۱۹۸۳)

۸٤- تعداد تمام دنباله‌های $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را با شرط زیر تعیین کنید: $x_i \in \{a, b, c\}$ به ازای i=۱،۲،...،n و $x_1 = x_n = a$. و به ازای i=۱،۲،...،n-۱، $x_i \neq x_{i+1}$.(المپیاد ریاضی اتریش، ۱۸ امین دوره)

۸۵- دنباله‌ی ...،x_2 و x_1 با برابری‌های زیر تعریف می‌شود.

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4 \quad , \quad (n \geq 1)$$

ثابت کنید تمام اعدادی که از دنباله به دست می‌آیند مربع کامل هستند.(المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۷۸)

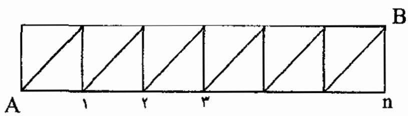
۸۶- چند کلمه‌ی n حرفی از الفبای {۰،۱،۲،۳،۴} می‌توان ساخت به طوری که هر دو حرف مجاور ، یک واحد با هم اختلاف داشته باشند.(آلمان‌غربی، ۱۹۸۷)

۸۷- دنباله‌ی (a_n)از اعداد صحیح با شرایط اولیه‌ی $a_1 = 2$ و $a_2 = 7$ با نامساوی زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{-1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$$

نشان دهید به ازای هر $n \geq 2$، a_n عددی فرد است.(المپیاد ریاضی انگلیس، ۱۹۸۸)

۸۸- در شبکه‌ای که در شکل زیر نشان داده شده است، n مربع مجاور وجود دارد. تعداد مسیرهای از A به B (نه لزوما" کوتاهترین) را پیدا کنید به طوری که از هر محل تقاطع دوبار عبور نکنیم.



۸۹- فرض کنید $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. نشان دهید a_nمربع کامل است اگر و فقط اگر عدد $k \in N$موجود باشدبه طوری که

$$n = ۲^k + k - ۲$$

۹۰- تمام زوج‌های (h,s) از اعداد صحیح مثبت با شرط زیر را بیابید:
اگر اول h خط افقی رسم کنیم و s خط دیگر با شرایط زیر رسم کنیم.
(الف) هیچکدام افقی نباشند.
(ب) هیچ دوتایی باهم موازی نباشند.
(iii) هیچ سه خطی از $h+s$ خط موجود همرس نباشند.
تعداد نواحی بوجود آمده از $h+s$ خط برابر با ۱۹۹۲ باشد. (المپیاد ریاضی آسیای شرقی، ۱۹۹۲)
۹۱- نشان دهید:

$$S(r,n) = \sum_{k=n-۱}^{r-۱} \binom{r-۱}{k} S(k, n-۱)$$

با شرط $r \geq n \geq ۲$.

۹۲- فرض کنید $B_۰ = ۱$ و به ازای هر $r \in N$، فرض کنید $B_r = \sum_{n=۱}^{r} S(r,n)$، r امین عدد بل باشد، (بخش ۷-۱ را ببینید)
نشان دهید، به ازای هر $r \geq ۱$:

$$B_r = \sum_{k=۰}^{r-۱} \binom{r-۱}{k} B_k$$

۹۳- دو دنباله‌ی $P(m,n)$ و $Q(m,n)$، (m و n اعداد صحیح هستند) به صورت زیر تعریف می‌شوند. به ازای $m \geq ۰$، $P(m,۰) = ۱$ و به ازای $n \geq ۱$، $P(۰,n) = ۰$، به ازای $m,n < ۰$، $P(m,n) = ۰$ و به‌ازای $m \geq ۱$، $P(m,n) = \sum_{j=۰}^{n} P(m-۱, j)$،
به ازای $m \geq ۱$،

$$Q(m,n)=P(m-1,n)+P(m-1,n-1)+P(m-1,n-2)$$

$Q(m,n)$ را بر حسب جملاتی از n و m بیان کنید.

۹٤- به ازای $k\in N$ و n فرض کنید: $S_k(n)=\sum_{j=1}^{n} j^k$ (مسـاله ۸۵-۲ را ببینید).

نشان دهید:

(الف) به ازای $n\geq 2$، $S_k(n)=n^{k+1}-\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}S_{r+1}(n-1)$

(ب) $(k+1)S_k(n)=(n+1)^{k+1}-(n+1)^k-\sum_{r=0}^{k-2}\binom{k}{r}S_{r+1}(n)$

فهرست منابع اصلی:

[1] I . Anderson , A first course in Combinatorial Mathematics, Oxford Unrversity Press, 1974.
[2] C.Berge, Principles of combinatorics, Academic Press,1971.
[3] R.A.Brualdi,Introductory combinatorics,North Holland,1977.
[4] D.I.A. Cohen, Basic Techniques of Combinatorial Theory, John Wiley& Sons,1978.
[5] L.Comtet, Advanced combinatorics,D.Reidel,1974.
[6] R.L.Graham ,D.E. Knuth and O.Patashnik, Concrete Mathematics, Addison- Wesley,1989.
[7] D.E.Knuth, The Art of Computer programming. Vd.1 : Fandamental Algorithms, Allison -Wesley, 1973.
[8]C.L.Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics , Mc Graw - Hill,1968.
[9] L.Lovasz,Combinatorial Problems and Exercises ,North- Holland,1979.
[10] J.Riodran, An Introduction to combinatorial Analysis,Wiley ,1958.
[11] J.Riordan ,Combinatorial Identities, Wiley,1968.
[12] F.s.Roberts,Applied Combinatorics,Prentice-Hall,1984.
[13] I.Tomescu, Introduction to Combinatorics, Collet's,1975.
[14] I.Tomescu,Problems In Combinatrics and Graph Theory, John-Wiley& Sons,1985.
[15] M.Townsend, Discrete Mathematics,Applied Combinatorics And Graph Theory ,Benjamin,1987.
[16] A.Tucker.Applied combinatorics,2nd ed.,Wiley ,1984.

❖ پاسخ برخی مسایل

تمرین ۱

۱- (الف) ۴۵

۱- (ب) ۲۳۵

۲- (الف) $۱۲!$

۲- (ب) $۸!\ ۵!$

۲- (ج) $۷!\binom{۸}{۵}۵!$

۲- (د) $۸!\ ۱۲۰$

۳- (الف) $(m+n)!$

۳- (ب) $n!P_m^{n+۱}$

۳- (ج) $(m+۱)!\ n!$

۳- (د) $(m+n-۱)!\times ۲$

۴- (الف) $P_۵^{۱۰}$

۴- (ب) $P_۳^۶P_۲^۴$

۵- $۲۰!$ $۲P_۵^{۲۴}$

۶- ۱۲۳۲

۷- $(n+۱)!-۱$

۸- $۱-\frac{۱}{(n+۱)!}$

۱۰- ۱۲۷۱

۱۱- (الف) ۸

۱۱- (ب) ۱۶

۱۱- (ج) ۱۰۸

۱۵- (الف) $\binom{۱۰}{۶}\binom{۵}{۳}$

۱۵- (ب) $۹!\binom{۱۰}{۶}\binom{۵}{۳}$

۱۶- $۷!\binom{۸}{۳}$

۱۷- $\binom{۶}{۳}۵!=۲۴۰۰$

۱۸- $\binom{۱۷}{۳}(۱۰!)^۲$

۱۹- $۷!\times ۱۰$

۲۰- (الف)

$$\binom{۳}{۱}\binom{۱۲}{۶}+\binom{۳}{۲}\binom{۱۲}{۵}+\binom{۳}{۳}\binom{۱۲}{۴}$$

یا $\binom{۱۵}{۷}-\binom{۱۲}{۷}$ با استفاده از اصل متمم.

۲۰- (ب) $۷!\left\{\binom{۱۵}{۷}-\binom{۱۲}{۷}\right\}$

۲۱- $\binom{m+۱}{n}$

۲۲- $\binom{P}{۲}\binom{q}{۲}$

۲۳- $\binom{۱۰}{۴}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۱۵}{۲}\binom{۱۰}{۱}$
$+\binom{۱۰}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۱۵}{۳}$

۲۴- $\frac{۲۵}{۱۳۲}$

۲۵- (الف) $\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۳}$

۲۵- (ب) $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۳}$

۲۵- (ج) $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۲}$

۲۵- (د) $\binom{۱۳}{۵}-\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۳}$

۲۶- (الف) $\binom{۵}{۲}\binom{۸}{۳}$

۲۶- (ب) $\binom{n}{۲k}۲^{۲k}$

۲۶- (ج) $\binom{۲n}{۲k}-\binom{n}{۲k}$

۲۶- (د) $\binom{n}{۲}\binom{n-۲}{۲k-۴}۲^{۲k-۴}$

۲۸- (الف) ۶۷۵

۲۸- (ب) ۱۱۵

۲۹- (الف) ۹۶

۲۹- (ب) ۴۴۵

۳۰- ۱۱۷۴۵

۳۱- ۸۸۴۴

۳۲- ۱۷۹۹۰۰

۳۳- (الف) ۱۳

۳۳- (ب) ۴۰

۳۳- (ج) ۲۵۶

۳۴- $\frac{n}{۳}\binom{n-۴}{۲}$

۳۵- (الف) $۱۰!$

۳۵- (ب) $۵!P_{۵}^{۶}$

۳۵- (ج) $۶!\,۵!$

۳۵- (د) $۸!\times ۲$

۳۸- $r=۵$

۴۳- $\frac{(kn)!}{n!(k!)^n}$

۴۴- ۵۷

۴۵- ۷۷۰

۴۶- ۵۶۰

۴۷- (الف) در مرتبه ۷۲

۴۷- (ب) ۵۱۳۴۲

۴۸- ۱۱۵۶ امی و ۱۳۷۵ امی

۴۹- ۱۴۱ و ۱۶۱

۵۰- $\binom{۶}{۲}$ و $\binom{۵}{۲}$

۵۱- (الف) $۴^{۱۰}$

۵۱- (ب) ۴×۳^{۹}

۵۲- $(r_۱+۱)(r_۲+۱)\cdots(r_n+۱)$

۵۵- $\binom{r+n-۳}{r-۱}+\binom{r+n-۲}{r}$

۵۶- $\binom{۱۲}{۴}۶!$

۵۷- $۳\binom{۱۱}{۵}۶!$

۵۸- (الف) $\binom{۱۴}{۵}$

۵۸- (ب) $\binom{۱۱}{۵}+۳\binom{۱۰}{۴}+۳\binom{۹}{۳}+\binom{۸}{۲}$

۵۹- (الف) $۶^{۱۰}$

۵۹- (ب) $\frac{۱۰!}{۳!۳!}$

۵۹- (ج) $\binom{۱۵}{۵}$

۵۹- (د) $\binom{۹}{۴}$

۶۰- $\binom{r-n(k-۱)-۱}{n-۱}$

۶۱- $۲\times\frac{۹!}{۳!}$

۶۲- $۴۲\times ۹!$

۶۳- $۱۱!\times ۸۲۵$

۶۴- $\frac{r!}{n!}\binom{r-۱}{n-۱}$

۶۵- (الف) $\binom{۵۰}{۵}$

۶۵- (ب) $\binom{۵۰}{۵}-\binom{۴۴}{۵}$

۶۶- (الف) $\binom{۳۳}{۳}$

۶۶- (ب) $\binom{۳۱}{۳}-\binom{۲۵}{۳}$

۶۶- (ج) $\binom{۳۶}{۳}$

۶۷- $\binom{۱۹۹۶}{۴}$

۶۸- $\binom{۱۶}{۲}+\binom{۱۱}{۲}+\binom{۶}{۲}$

۶۹- $\sum_{i=۰}^{k}\binom{r(k-i)+n-۲}{n-۲}$

۷۰- ۳۶

۷۱- $\binom{۹}{۲}\binom{۱۴}{۳}+\binom{۱۳}{۲}\binom{۱۰}{۳}$

۷۲- $۲n\binom{p+n-۱}{p}$

۷۳- $\binom{r+n-۱}{r}$

۷۴- $\binom{r-۱}{n-۱}$

۷۵- $\binom{۱۸}{۹}-۱$

۷۶- (الف) $۲^{۹}-۱$

۷۶- (ب) ۳۸۱

۷۸- $r=n+۲m$

۷۹- (الف) $\binom{p}{۲}$

۷۹- (ب) $\binom{p}{۴}$

۷۹- (ج) $\binom{n}{۲}+۲\binom{n}{۴}$

۷۹- (د) $\binom{n}{۶}$

۸۰- $\binom{n+۱}{۲}\cdot n!$

۸۱- (الف-۱) m^n

۸۱- (الف-۲) p_n^m

۸۱- (ب) $\binom{m}{n}$

۸۱- (ج) $m!\,S(n,m)$

۸۸- اگر $n=p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه n به عامل‌های اول باشد آنگاه عدد مطلوب برابر $(۲\alpha_۱+۱)(۲\alpha_۲+۱)\dots(۲\alpha_k+۱)$ است.

۸۹- (الف) $۳\binom{۶۶۴}{۳}+(۶۶۴)^۳$

۸۹- (ب)

$$\binom{۴۹۸}{۳}+(۴۹۸)^۳+۳\times۴۹۸\times\binom{۴۹۸}{۲}$$

۹۰- $\frac{۶}{۲۶^{۱۰}}$

۹۱- $\binom{n-(m-۱)(r-۱)}{r}$

۹۳- ٤٤۸

۹٤- ۱۰۶

۹۵- ۲۵

۹٦- ۱٤۱

۹۷- ۵۶۰

۹۸- (الف) ۳۰۰

۹۸- (ب) ۶۰۰

۹۹- ٦۳٤

۱۰۰- ۸۴۰

۱۰۱- ۲۳

۱۰۲- $\left[\frac{n^۲}{۴}\right]$

۱۰۳- $(n,m)=(۲,۳),(۳,۶),(۴,۱۰)$

۱۰۵- $\frac{۱}{۵}\binom{۱۹۹۰}{۳۱}$

۱۰۹- (پیمانه ٤) ۱ و $n=۰$

۱۱۲- ۳۱۵

۱۱٤- $(c-۱)\binom{m-۲+c}{c}$

۱۱۵- ٤

تمرین۲

۱- $۲^{n-۱}$

۲- $\binom{۲n}{n}$

۳- (الف)

۳- (ب) ۲^n

۳- (ج) $\sum_{i=r-m}^{r}\binom{n}{i}$

٤- ۹٦۸

۵- ۵۰۴

٦- $۱۵۵۴=۲\binom{۹}{۳}+۵\binom{۹}{۴}+\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۲}$

۷-

$$\binom{۱۰۰}{۶}+۹۷\times۹۸\times\binom{۱۰۰}{۲}+۹۷\times\binom{۱۰۰}{۳}$$

۸- $\binom{۱۰۰۰}{۳}\binom{۹۹۷}{۲}+\binom{۱۰۰۰}{۴}\binom{۹۹۶}{۱}$

۹- (الف) ۲۱

۹- (ب) ٤۵

۱۱- $\binom{m+n+۱}{n}$

۱۲- $H(n,r)=\dfrac{r(n+۱)}{r+۱}$

۱۳- $\Delta(n)=\binom{n+۳}{۳}$

١٤- $\binom{۲n+۱}{n},\binom{۲n+۱}{n+r}-\binom{n}{r-۱}$

۲۳- $m!\binom{m+n+۱}{n}$

۵۳- (الف) $\binom{m}{p}p!\;S(n,p)$

۵۳- (ب) $\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{k-p}\;S(n,k)k!$

۵۷- ۳۵

۵۸- ۹۸۱

۵۹- ۸۱٦

٦۰- ۷۰۴

٦۱- ۱٦٦

۷۲- $n+۱$

۷۵- $۲^{n-۱}$

۸۰- اگر n را به صورت $۲^k\cdot r$ بنویسیم که r عددی فرد است، جواب 2^{k+1} است.

۸۲- $\dfrac{n}{۲^{n-۱}}\binom{n-۱}{\left[\frac{n-۱}{۲}\right]}$

۸٦- $۲^{n+۲}-۲$

۸۹- $۲^{n+۱}-۲-۲n$

۹۱- (الف) $۹\left(\dfrac{۱۱^{۱۰}-۱}{۱۰}\right)=۲۳۳۴۳۶۸۱۴۰$

۹۱- (ب)

$$S_n=\begin{cases} bm & ;a+b=1 \text{ اگر} \\ b\dfrac{(a+b)^m-1}{a+b-1} & ;a+b\neq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

۹۵- $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

۹۷- $2^l\dbinom{m-n}{l}$

تمرین ۴

۱- ۳۷

۲- (ب) ۲۲۹

۳- $E(4)=0, E(3)=8,$ تعداد اولها $=30$

$E(2)=32, E(1)=53, E(0)=27$

۴- ۲۳۰۱

۵- ۷۳۰۰۱

۶- (الف) ۹۸۸۳

۶- (ب) ۸۹۲۱

۸- ۴۸۵

۹- $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\{(n-r)!\}^2$

۱۰- ۳۶

۱۱- $27720-2044+92-6=25762$

۱۲- (الف) ۱۳۱۴

۱۲- (ب) ۱۷۴

۱۳-

$$\binom{12}{4}-3\binom{8}{3}-4\binom{7}{2}-4\binom{7}{3}+3\binom{7}{3}+3\binom{7}{2}$$

۱۴- ۲۸

۱۵- $\dbinom{21}{2}-\dbinom{11}{2}-2\dbinom{5}{2}$

۱۶- $\dbinom{16}{3}-3\dbinom{11}{3}-\dbinom{8}{3}+3\dbinom{6}{3}+3$

۱۹- $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r 2^r\binom{n}{r}(2n-r)!$

۲۰- (الف) $\dfrac{q!}{2}$

۲۰- (ب)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p}{2}\right]^q\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\binom{q}{i}2^i(2q-i)!\right)$$

۲۰- (ج)

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{2^j}\left[\frac{p}{2}\right]^{q-j}$$

$$\left(\sum(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\binom{q}{i}2^i(2q-i)!\right)$$

۲۰- (د)

$$\frac{۱}{۲}\sum_{j=۰}^{q}\frac{۱}{۲^{j}}\left[\frac{p-۲}{۲}\right]^{q-j}$$

$$\left(\sum(-۱)^{i-j}\binom{i}{j}\binom{q}{i}۲^{i}(۲q-i)!\right)$$

۲۱- (الف) $\binom{r-۱}{n-۱}$

۲۲- (الف) $\binom{n-m}{r-m}=\binom{n-m}{n-r}$

۲۳- (الف) $n+۱$

۲٤- (۱) $\lambda^{۴}-۴\lambda^{۳}+۵\lambda^{۲}-۲\lambda$

۲٤- (۲) $\lambda^{۴}-۵\lambda^{۳}+۸\lambda^{۲}-۴\lambda$

$$\frac{(q-j)^{n-kj}}{(k!)(n-kj)!(j-m)!(q-j)!}$$

۲٤- (۳) $(\lambda-۱)^{۵}-(\lambda-۱)$

۲۵- $(-۱)^{m}\frac{q!n!}{m!}\sum_{j=m}^{q}(-۱)^{j}$

$$\frac{(q-j)^{n-kj}}{(k!)^{j}(n-kj)!(j-m)!(q-j)!}$$

۲۸- (الف)

$$C_{n}=\sum_{i=۰}^{n-۱}(-۱)^{i}\binom{n-۱}{i}(n-i)!$$

۲۹- $D_{m}\cdot D_{n-m}$

۳۰- (الف) $(m!)^{۲}$

۳۰- (ب) $m\cdot(m!)^{۲}$

۳۰- (ج)

$$m!\left\{\sum_{i=۰}^{r}(-۱)^{i}\binom{r}{i}(m+r-i)!\right\}$$

۳۹- (الف) $\varphi(۱۰۰)=۴۰,\varphi(۳۰۰)=۸۰$

٤٥- خیر

٥۳- ۸۵٦۵۷

٥٤- $\left(\frac{۱۷\cdot۲۰^{۱۸}-۱۵\cdot۲۰^{۴}}{۲۰^{۲۸}}\right)$

٥٥- $\frac{۲۲\cdot۲۶^{۲۱}-۳۶\cdot۲۶^{۷}}{۲۶^{۳۳}}$

٥۷- $m^{۱۹۸۹}-m^{۶۶۳}-m^{۱۵۳}$

$-m^{۱۱۷}+m^{۵۱}+۵^{۳۹}+m^{۹}-m^{۶}$

٦۰- $(-۱)^{p+q}$

٦۳- ۲۱۷

تمرین ۵

۱- $\binom{۱۳}{۲}$

۲-

۲- $\binom{۱۷}{۳}-۴\binom{۱۱}{۳}+۶\binom{۵}{۳}$ و $\binom{۱۲}{۳}-۴\binom{۶}{۳}$

٤- $\left(x+x^{۲}\right)\left(۱-x\right)^{-۴}$

٥- $\frac{۲x}{\left(۱-۲x\right)^{۲}\left(۱-x\right)}$

۸- $\binom{۱۲}{۲}-۳\binom{۷}{۲}+۳=۶$

۹- $\binom{43}{6}-\binom{35}{6}$

۱۰- $\binom{2n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$

۱۱- ۶۸

۱۲- الف) $x^3(1-x)^{-5}$

۱۲-(ب) $x^4(1-x)^{-5}$

۱۳-

$x^{10}\left(1-x^7\right)\left(1-x^9\right)\left(1-x^{11}\right)\left(1-x\right)^{-3}$ و

$$a_{28}=\binom{20}{3}-\binom{13}{2}-\binom{11}{2}-\binom{9}{2}+\binom{4}{2}+1$$

۱۴- $\binom{99}{3}-4\binom{64}{3}+6\binom{29}{3}$

۱۵- $\binom{15}{6}-\binom{11}{6}$

۱۶-

(الف) $x^2\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(1-x\right)^{-6}$

۱۶-

(ب)

$$\left\{\left(1-x\right)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^8\right)\right\}^{-1}$$

۱۶-(ج) $\left(1+x^5\right)\left(1+x^{10}\right)\left(1+x^{15}\right)$

۱۶-(د) $\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2k+1}\right)$

۱۶-(هـ) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{2k}\right)$

۱۶-(و) $x^5(1-x^6)^5(1-x)^{-6}$

۱۷- $\binom{4n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$

۱۸-

$$\binom{3n+m-1}{m-1}-m\binom{2n+m-2}{m-1}+\binom{m}{2}\binom{n+m-3}{m-1}$$

۱۹- $\frac{780}{6^3}\approx 0/1003$

۲۰- $\left\{1-(x+x^2+\dots+x^6)\right\}^{-1}$

۲۱-(الف) $x^{k+1}(1-x)^{-2k-1}$

۲۱-(ب) $x^{mk}(1-x)^{-2k-1}$

۲۲- $\prod_{i=1}^{4}(1-x^i)^{-1}$

۲۳- $x^7(1-x)^{-5}$

۲۴- $x^{t(m-1)+1}(1-x)^{-m-1}$

۲۵- $x^6(1-x^7)(1-x^{10})(1-x)^{-5}$ و $a_{20}=\binom{18}{4}-\binom{11}{4}-\binom{8}{4}$

۲۷- $B(x)^2$

۲۹- $S_n=1$

۳۱- $\frac{1}{2}\left(3^n+1\right)$

۳۲- $\frac{1}{4}\left\{4^n-3^n+(-1)^n\right\}$

۳۳-(الف) $\frac{1}{2}\left(6^n+2^n\right)$

(ب) $\frac{1}{2}\left(6^n-2^n\right)$

-۳٤

$$\frac{1}{32}\left\{5^r-2+(-3)^r-3^r+2(-1)^r-(-5)^r\right\}$$

۳۸-(۱) $4^{18}-4.3^{18}+6.2^{18}-4$

۳۸-(۲) $4^8\left(4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4\right)$

-۳۸

(۳)

$$\left(4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4\right)\left(4^8-4.3^8+6.2^8-4\right)$$

-۳۹ $\begin{cases}4^{r-1} & r\geq 1\\ 0 & r=0\end{cases}$

-٤۰ $(e^x-1)^n$

-٤۱ $A_n(x)=\dfrac{\left(e^x-1\right)^n}{n!}$

٤۳-(الف) $n(n+1)\ldots(n+r-1)$

٤٤-(۱) $\left(1-x\right)^{-4}$

٤٤-(۲) $x^4\left(1-x\right)^{-4}$

٤٤-(۳) $x^4\prod_{i=1}^{4}\left(1-x^i\right)^{-1}$

٤٤-(٤) $\prod_{i=1}^{4}\left(1-x^i\right)^{-1}$

-٤٦ $x^n\prod_{i=1}^{n}\left(1-x^i\right)^{-1}$

-٤۷ $\prod_{i=1}^{n}\left(1-x^i\right)^{-1}$

٤۹-(الف)

$$\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots=\frac{1}{1-x}$$

٤۹-(ج) هر عدد طبیعی را به طور منحصر به فردی می‌توان به صورت حاصل جمع توان‌های مختلف ۲ نوشت.

-٥۳

$P(8,3)=5\ ,\ P(5,3)=2\ ,\ P(5,2)=2\ ,\ P(5,1)=1$

-٥٤ (الف)

$P(8,3)=5\ ,\ P(7,2)=3\ ,\ P(5,3)=2$

-٦۲ (الف)

(۱) ۵+۲+۱=٤+۳+۱=٤+۲+۲=۳+۳+۲

=۱+۱+٦=۸

٦۲-(الف)(۲)(٦،٥،٥) و (٦،٦،٤) و (۷،٥،٤) و (۷،٦،۳) و (۷،۷،۲)

٦۲-(الف) (۳)بله همگی برابر ٥ هستند.

۶۲-(ب)(۲)

$$x^3\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\}^{-1}$$

-۶۳

۱=۶+۳+۳+۱+۱+۱=۵+۴+۳+۲+۱(۱)

۱۵ =۸+۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱+

=۴+۴+۴+۳

-۶۳ ۱۵=۱۵=۱۱+۳+۱=۹+۵+۱=

۷+۵+۳(۲)

-۶۵ $$\frac{x^{m^2}}{\prod_{k=1}^{m}\left(1-x^{2k}\right)}$$

-۶۶(الف) $$A(x)=\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{k}\right)\right\}^{-1}$$

تمرین ۶

-۱ $a_n=1+2^n$

-۲ $a_n=(2-n)3^n$

-۳ $a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

-۴ $a_n=(3n-1)2^{n-2}$

-۵ $a_n=\frac{5}{2}+\frac{1}{6}(-1)^n-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

-۶ $a_n=-\frac{1}{2}+2^n-\frac{1}{6}.3^n$

-۷

$$a_n=\frac{1}{7}(n+1)2^n-\frac{1}{49}\left(2^{n+1}+(-1)^n5^{n+1}\right)$$

-۸ $a_n=\left(A+B_n+C_{n^2}\right)(-1)^n+D.2^n$

-۹ $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\sqrt{3}+6\right)-6$

-۱۰ $a_n=3^{n+1}-6.2^n+2n+3$

-۱۱ $a_n=2^{2n}+n-1$

-۱۲

$$a_n=\begin{cases} rp^n+\dfrac{\left(1-p^n\right)q}{1-p} & \text{اگر } p\neq 1 \\ r+qn & \text{اگر } p=1 \end{cases}$$

-۱۳ $a_n=\frac{1}{4}\left(5\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$

-۱۴ $a_n=10^{2\left\{1+(-1)^{n+1}2^{-2n}\right\}}$

-۱۶ $a_n=2^{2\left(1-2^{1-n}\right)}$

-۱۷ $a_n=\frac{3}{5}(-3)^n+n^2+n+\frac{1}{5}.2^{n+1}$

-۱۸ $a_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(Cos\frac{n\pi}{4}+Sin\frac{n\pi}{4}\right)$

-۱۹ $a_n=\left(n+\frac{1}{2}n^2\right)2^n$

-۲۰ $a_n=2^n-2n-5$

-۲۱

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n-1}-1\right) & n \text{ فرد باشد} \\ \frac{1}{3}\left(2^n-1\right) & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

۲۲- $a_n = -1 + 2^n + n2^{n+1}$

۲۳- $a_n = \frac{-14}{9}(-2)^n + \frac{37}{32}(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$

۲٤-

$$a_n = \begin{cases} s + \dfrac{p(t-s)}{p-r}\left\{1 - \left(\dfrac{r}{p}\right)^n\right\} & \text{اگر } p \neq r \\ s + (t-s)n & \text{اگر } p = r \end{cases}$$

۲٦- $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{1+3^{n-1}}$

۲۷- $a_n = \dfrac{3.2^{n-1}+1}{3.2^{n-1}-1}$

۲۸- ۱

۳۰-

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad , \quad a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

۳۲- $a_n = (p+q)a_{n-1} - pqa_{n-2}, a_n$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-q}\left(p^{n+1} - q^{n+1}\right)\text{؛ } & \text{اگر } p \neq q \\ (1+n)p^n \text{؛ } & \text{اگر } p = q \end{cases}$$

۳۳- $a_n = (pq+1)a_{n-1} - pqa_{n-2}, a_n$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-(pq)^{n+1}}{1-pq} & \text{اگر } pq \neq 1 \\ 1+n & \text{اگر } pq = 1 \end{cases}$$

۳٤-

$$\frac{\sqrt{17}+5}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

۳۵- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 3,$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

۳۷- $a_n = -(1+2n)2^n, b_n = (5+2n)2^n$

۳۸- $a_n = 2^n(1-2n), b_n = n2^{n+1}$

۳۹-

$$a_n = 2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right), b_n = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

٤۰-

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}, b_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

٤۱- $2^{\frac{3}{2}}$

۵۱- $a_n = F_n$

۵۳- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

۵٤- F_n

۵۵- $a_n = F_n$

۵٦- F_{n+2}

۵۸- $F_{22} = 17711$

٦۰-

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

۶۱- $b_۱=۱, b_۲=۲, b_۳=۵$ (۱)

۶۲-

$$a_n = a_۰ a_{n-۱} + a_۱ a_{n-۲} + \cdots + a_{n-۱} a_۰$$

$a_۰=۱$،

۶۳- $\frac{۱}{۲n+۱}\binom{۲n+۱}{n}$

۶۴- $\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$

۶۵- $\frac{m-n}{m+n}\binom{m+n}{m}$

۶۶- (الف) $a_۱=۱, a_۲=۳, a_۳=۱۳$

۶۸- $a_n=\frac{۱}{n(n+۱)}$

۶۹- $\frac{۱}{۳}(۴^n+۲)$

۷۱- $n=۴,۸$ یا $n\geq ۱۰$

۷۲- $a_n=\frac{۱}{۲۴}\left\{(۳+۲^{۱-n})^۲-۱\right\}$

۷۴- $a_۰=۰, a_۱=۲, a_n=\frac{۱}{۶}(۲n+۵)$

۷۵-
$$\begin{cases} a_{۲n}=۰ \\ a_{۲n+۱}=\dfrac{۱}{۲^{۲n}(۲n+۱)}\dbinom{۲n}{n} \end{cases}$$

۷۶-
$$\begin{cases} a_n=۱ & n\geq ۱ \\ & \text{یا} \\ a_n=۱+\left(\dfrac{۲}{۳}\right)^n & n\geq ۰ \end{cases}$$

۷۷- $۱۹۹۱۰۹۹۸+\frac{۹}{۲}$

۸۰- $f(x)=۲x$

۸۱- $T_n=n!+۲^n$

۸۴- $\frac{۲}{۳}\left\{۲^{n-۲}+(-۱)^{n+۱}\right\}$

۸۶- عدد مطلوب برابر است با

$$\begin{cases} ۱۴\times ۳^{\frac{n-۳}{۲}} & \text{؛ وقتی } n \text{ فرد باشد} \\ ۸\times ۳^{\frac{n-۲}{۲}} & \text{وقتی } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

۸۸- $a_۲=۹, a_۱=۳, a_۰=۱$

$a_{n+۱}=۳a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}$ ،

۹۰- $(۹۹۵,۱),(۱۷۶,۱۰),(۸۰,۲۱)$

۹۳-

$$Q(m,n)=\binom{m+n-۱}{m-۱}-\binom{m+n-۴}{m-۱}$$