خلاصه تئوری مشتق و جمع بندی آن :

① $\text{arc نسبت}(x) = y \iff \text{نسبت}(y) = x$

② دامنه و برد : نیم‌دایره سمت راست

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$ نیم‌دایره بالایی

$\text{arc tg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\text{arc ctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$

$\text{arc csc} : (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

$\text{arc sec} : (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \longrightarrow [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

③ مشتقات :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x|<1$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x|<1$$

$$(\text{arc tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\text{arc ctg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\text{arc sec}\, x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad |x|>1$$

$$(\text{arc csc}\, x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad |x|>1$$

مثال : حاصل را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیابید.

$$* \ \cos(\underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{\alpha}) \overset{\text{حل}}{=} \cos\alpha = ?$$

حل:

روش اول ،

از فرض یا صورت مسأله داریم

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha = x$$

$$\Downarrow$$

روش اول:

رابطه tg و $\cos$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Downarrow$$

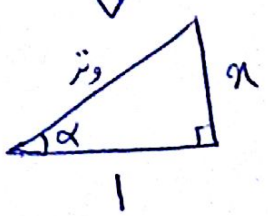
α متعلق به برد $\operatorname{arc\,tg}$ و در ناحیه راست که کسینوس مثبت است

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

روش دوم:

$$\operatorname{tg}\alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\Downarrow$$



$$\Rightarrow \text{وتر} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \square$$

مثال : حاصل عبارت را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیابید:

* $\sin(\underbrace{2\arccos x}_{\text{نیم‌دایره بالا : } \alpha}) = ?$

$$\text{صورت مسئله} = ? = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

از طرفی داریم:

$$\arccos x = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = x$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \underset{\text{نیم‌دایره بالا}}{\pm}\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-x^2}$$

پس:

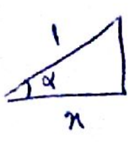
$$\boxed{\sin(\underbrace{2\arccos x}_{\alpha}) = 2x\sqrt{1-x^2}} \quad \square$$

روش ساده

نکته: می‌توانستیم مستقیماً بنویسیم:

$$\sin(2\arccos x)$$

$$= 2\underbrace{\sin(\arccos x)}_{\alpha}\underbrace{\cos(\arccos x)}_{\substack{\text{دو تابع معکوس پشت سرهم} \\ = x}} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow$  $\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin\alpha = \underset{\text{نیم‌دایره بالا}}{+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

حل چند مسأله دیگر:

* مقدار عبارت کدام است؟

$$\cos\left(\underbrace{\arccos\frac{۲}{۳}}_{\substack{\parallel \\ 0\le\alpha\le\pi}}+\underbrace{\arcsin\frac{۳}{۴}}_{\substack{\parallel \\ 0\le\beta\le\frac{\pi}{۲}}}\right)=?$$

حل:

$$\cos\alpha=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^{۲}\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{۴}{۹}}=\cancel{\pm}\sqrt{\frac{۵}{۹}}$$ سینوس α در نیمدایره بالا مثبت است

$$\sin\beta=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^{۲}\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{۹}{۱۶}}=\cancel{\pm}\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}$$ کسینوس β در ربع اول مثبت است

لذا:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۷}}{۴}-\frac{\sqrt{۵}}{\cancel{۹}_{۳}}\times\frac{\cancel{۳}^{1}}{۴}=?$$

$$*\ \operatorname{arc\,cotg}\left(\operatorname{tg}\frac{۴\pi}{۳}\right)=?$$

$$=\operatorname{arc\,cotg}\left(\underbrace{\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right)}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{۳}}}\right)=\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

$$*\ \cos(\underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{\alpha})=?\quad=\cos\alpha=?$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha=x \Longrightarrow 1+\operatorname{tg}^{۲}\alpha=1+x^{۲} \Longrightarrow \sec^{۲}\alpha=1+x^{۲}$$

$$\Rightarrow \sec\alpha=\pm\sqrt{1+x^{۲}} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{1}{\cancel{\pm}\sqrt{1+x^{۲}}}}$$

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$

$-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ و در نیمدایره سمت راست کسینوس مثبت است.

مثال: فرض کنید $(x>1)$ $f(x)=\frac{1}{2}\,tg^{-1}\sqrt{x^2-1}$.

الف) نشان دهید f معکوس پذیر است؟

ب) معکوس آن را بیابید.

حل:

الف ←
$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}^{\,2}+1}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\times\cancel{2}x=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\underbrace{x^2-1+1}_{\text{مثبت}}}\times\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$x>1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x^2-1>0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}>0 \Rightarrow \text{صعودی (اکیدا)} \Rightarrow 1-1 \Rightarrow f \text{ معکوس پذیر است}$$

$x>1 \Rightarrow x$: مثبت

ب ←
$$y=\frac{1}{2}\,tg^{-1}\sqrt{x^2-1} \Rightarrow 2y=\text{arc}\,tg\sqrt{x^2-1}$$

$$\xRightarrow{\text{از طرفین } tg \text{ می‌گیریم}} tg(2y)=\sqrt{x^2-1}$$

$$\xRightarrow{\text{به توان } 2} x^2-1=tg^2(2y)$$

$$\Rightarrow x^2=1+tg^2(2y)$$

$$\Rightarrow x=\cancel{\pm}\sqrt{1+tg^2(2y)}$$ & $x>1$:از فرض

$$\Rightarrow x=\sqrt{\sec^2(2y)}=|\sec(2y)|$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=|\sec(2y)|$$

مشتق بگیرید:

* $y=(\arc\cos x)^{۲}$

$$\Rightarrow y' = ۲\arc\cos x \times \frac{-1}{\sqrt{1-x^{۲}}} \quad . \square$$

* $y=\operatorname{arc\,sec}\sqrt{u^{۲}-1}$

$$(\operatorname{arc\,sec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^{۲}-1}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{du} = \frac{1}{|\sqrt{u^{۲}-1}|\sqrt{(\sqrt{u^{۲}-1})^{۲}-1}} \times \frac{1}{\cancel{۲}\sqrt{u^{۲}-1}} \times \cancel{۲}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^{۲}-1}\,\sqrt{u^{۲}-۲}} \times \frac{u}{\sqrt{u^{۲}-1}} = \frac{u}{(u^{۲}-1)\sqrt{u^{۲}-۲}} \quad . \square$$

* $y=\arc tg\left(\frac{۳\sin t}{۴+۵\cos t}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+\left(\frac{۳\sin t}{۴+۵\cos t}\right)^{۲}} \times \frac{۳\cos t(۴+۵\cos t)-(-۵\sin t)(۳\sin t)}{(۴+۵\cos t)^{۲}}$$

$$= \frac{1}{\frac{(۴+۵\cos t)^{۲}+(۳\sin t)^{۲}}{\cancel{(۴+۵\cos t)^{۲}}}} \times \frac{۱۲\cos t+\cancel{۱۵\cos^{۲} t+۱۵\sin^{۲} t}^{\,15}}{\cancel{(۴+۵\cos t)^{۲}}} = ? \quad . \square$$

ادامه خلاصه و جمع‌بندی:

④ انتگرال‌های مهم :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; |x|<a \; ; a>0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; a\neq 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{arc sec}\,\frac{|x|}{a} \quad ; |x|>a>0$$

مثال:

$$* \int \frac{dx}{x^2+121} \xrightarrow[a=11]{a^2=121,\ a>0 \ \Downarrow} \frac{1}{11}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{11}$$

$$* \int \frac{dt}{\sqrt{16-4t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4(4-t^2)}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2}$$

$$* \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{a=1}{=\!=} \frac{1}{1}\,\text{arc sec}\,\frac{|x|}{1} = \text{arc sec}\,|x|\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \text{arc sec}\,2 - \text{arc sec}\,\sqrt{2}$$

روابط صفحه ۷۰ $\leftarrow$ $= \arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}/2$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$* \int \frac{dx}{x\sqrt{121x^2-144}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{121}\sqrt{x^2-\frac{144}{121}}} = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\left(\frac{12}{11}\right)^2}} = \frac{1}{11}\times\frac{11}{12}\,\text{arcsec}\,\frac{11|x|}{12}$$

$\rightarrow a \rightarrow \frac{1}{a}$