# مسأله های مرحله ی اول نهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

## آذر ماه ۱۳۷۰

۱. ثابت کنید بی نهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن ها کمترین مقدار ممکن [مثبت] باشد.

۲. همه ی اعداد طبیعی a، b و c بزرگتر از یک را بیابید که حاصلضرب هر دو عدد از آن ها به علاوه ی یک، مضرب سومی گردد.

۳. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت f داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-2f(xy)$$

آن گاه $f(1370)$ را به دست آورید.

۴. خط $(L)$ دو خط $(m)$ و $(n)$ را به ترتیب در نقاط A و B قطع می کند. از نقطه ی P واقع بر $(L)$ خطی رسم کنید که $(m)$ و $(n)$ را به ترتیب در نقاط $A'$ و $B'$ قطع کند، به طوری که $\frac{AA'}{BB'}=K$.

۵. اگر $x \geq y \geq z > 0$ ($x,y,z \in \mathbb{R}$)، ثابت کنید که

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geq x^2+y^2+z^2$$

۶. ۵۵ عدد دلخواه از مجموعه ی $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$ انتخاب می کنیم. نشان دهید که همواره می توان دو عدد بین اعداد انتخاب شده یافت به طوری که تفاضل آن ها ۱۰ باشد.