



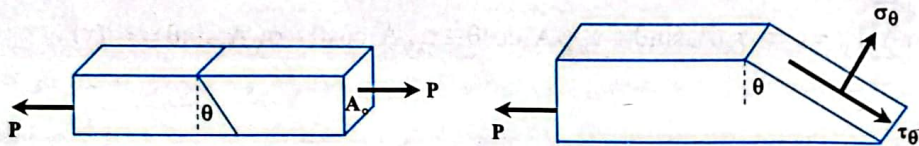
مدرسای سربف

فصل پنجم

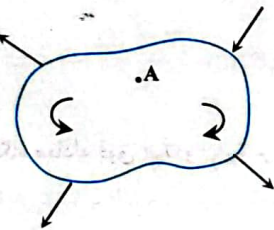
«تبدیلات تنش و کرنش»

در فصول پیشین تنش در میله‌های تحت کشش یا فشار، محورهای تحت پیچش و تیرهای تحت خمش و برش مورد بررسی قرار گرفتند. این تنش‌ها همگی بر روی مقاطع عرضی عضو اثر می‌کنند، در حالی که ممکن است تنش‌های ایجاد شده در مقاطع مایل بزرگتر باشند. در فصل اول تنش بوجود آمده در صفحات مایل تحت بارگذاری محوری (کششی یا فشاری) تعیین شد، به عنوان مثال اگر جسمی مطابق شکل تحت بار محوری P قرار گیرد تنش قائم و برشی آن در صفحات مایل، به صورت زیر قابل محاسبه است. (اثبات این روابط در فصل اول آورده شده است، این در حالی است که تنش در صفحات قائم

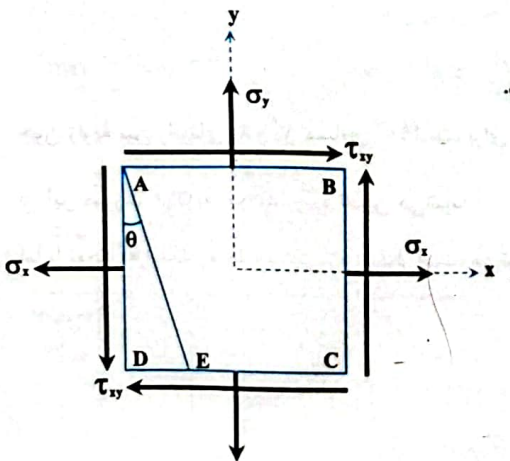
(مقاطع عرضی) برابر $\frac{P}{A_0}$ می‌باشد.



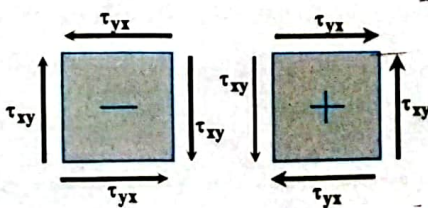
$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \\ \tau_\theta = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$



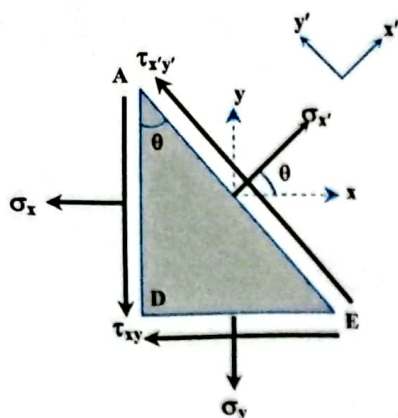
روابط فوق بیانگر آن است که با تغییر امتداد صفحات، مؤلفه‌های تنش قائم و برشی تغییر خواهند نمود. این مسئله در حالت کلی نیز صادق است. یعنی اگر جسمی مطابق شکل روبرو تحت بارگذاری خارجی قرار گیرد، مؤلفه‌های تنش در نقطه A علاوه بر آنکه وابسته به مختصات نقطه A بوده به امتداد صفحه گذرنده از نقطه A نیز وابسته می‌باشند.



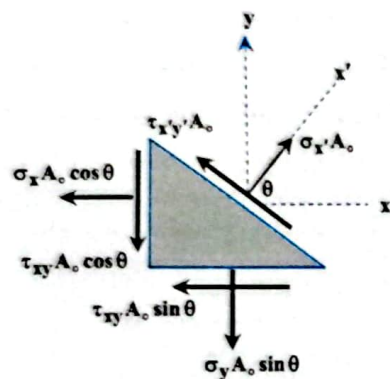
در این فصل نیز هدف بررسی مقادیر تنش و کرنش در هر نقطه از جسم در صفحات مختلف می‌باشد. ابتدا عمومی‌ترین حالت تنش دوبعدی (صفحه‌ای) در یک نقطه دلخواه از جسم در حالت تعادل مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. برای نمایش تنش در این حالت می‌توان از یک المان بی‌نهایت کوچک به شکل روبرو استفاده کرد. تنش‌های قائم عامل بر وجوه آن σ_x و σ_y بوده و همچنین تنش برشی اعمالی بر وجوه المان τ_{xy} می‌باشد. به علت کوچکی ابعاد المان و حفظ تعادل المان در جهات x و y تنش قائم بر دو وجه مقابل مساوی بوده و تنش‌های برشی اعمال شده بر چهار وجه المان نیز به دلیل تعادل دورانی یکسان می‌باشند.



در شکل روبرو تنش‌های قائم و برشی مثبت نمایش داده شده‌اند. طبق قرارداد تنش‌های قائم کششی، مثبت و تنش‌های قائم فشاری، منفی در نظر گرفته شده و علامت تنش‌های برشی نیز مطابق شکل روبرو از قرارداد پیروی می‌کند. (اگر اعمال شده بر وجه سمت راست گشتاوری ایجاد نموده که حول مرکز المان در جهت پادساعتگرد باشد علامت آن را مثبت و اگر در جهت ساعتگرد باشد علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود.)



تنها در دو حالت نشان داده شده، همان تحت تنش برشی می تواند تعادل داشته باشد لذا هر حالت توزیع تنش برشی دیگری از منظر حفظ تعادل همان نادرست می باشد. اکنون اگر تنش های σ_x و σ_y و τ_{xy} عامل بر وجوه همان نشان داده شده در شکل قبلی معین باشند، می توان مؤلفه های تنش قائم و برشی را در هر راستای دیگر تعیین نمود. به عنوان مثال اگر هدف محاسبه تنش در راستای مایل AE در همان ABCD باشد، می توان ابتدا گویه ADE را مطابق شکل روبرو جدا نموده و مؤلفه های تنش را بر روی وجوه مختلف آن رسم کرد، سپس با نوشتن معادلات تعادل مقادیر تنش های اعمالی بر وجه مایل را محاسبه می گردند.



اگر مساحت وجه مایل (صفحه AE) مساوی A_0 در نظر گرفته شود، از حاصل ضرب مؤلفه های تنش در مساحت وجهی که تنش بر آن اعمال شده است، نیروی وارد بر وجوه همان گویه ای مطابق شکل زیر بدست می آید. اکنون با نوشتن معادلات تعادل $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ روابط زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} A_0 \cos \theta - \tau_{x'y'} A_0 \sin \theta - \tau_{xy} A_0 \sin \theta - \sigma_x A_0 \cos \theta = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} A_0 \sin \theta + \tau_{x'y'} A_0 \cos \theta - \tau_{xy} A_0 \cos \theta - \sigma_y A_0 \sin \theta = 0 & (2) \end{cases}$$

رابطه (۱) را تقسیم بر $A_0 \cos \theta$ و رابطه (۲) را تقسیم بر $A_0 \sin \theta$ می کنیم تا به نتیجه زیر برسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} - \tau_{x'y'} \tan \theta = \tau_{xy} \tan \theta + \sigma_x \\ \sigma_{x'} + \tau_{x'y'} \cot \theta = \tau_{xy} \cot \theta + \sigma_y \end{cases}$$

از حل دستگاه معادله فوق $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ بر حسب مؤلفه های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases}$$

چون زاویه بین راستای x' و y' مساوی 90° است، برای تعیین مؤلفه تنش قائم $\sigma_{y'}$ می توان در رابطه تنش $\sigma_{x'}$ زاویه θ را به زاویه $(\theta + 90^\circ)$ تبدیل نمود.

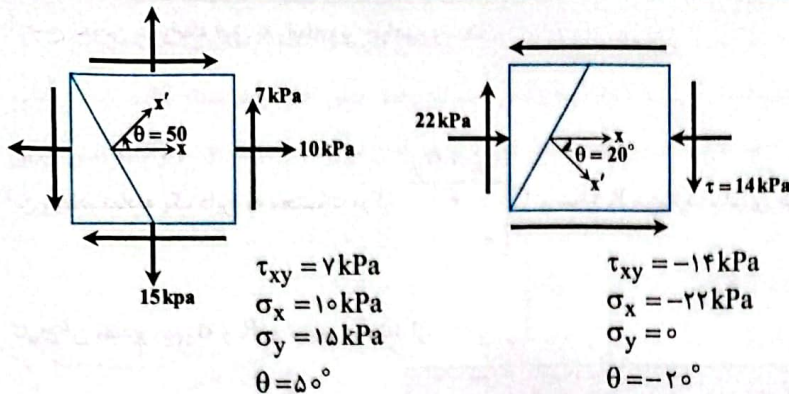
$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

در این صورت $\sigma_{y'}$ به صورت روبرو تعیین می شود:

اما با توجه به اینکه روابط مثلثاتی زیر برقرار است، می توان روابط فوق را به صورت ساده شده زیر بیان نمود:

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} ; \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} ; \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$



در روابط فوق برای تعیین علامت θ از محور x به سمت محور x' حرکت کرده اگر این حرکت پادساعتگرد باشد علامت θ مثبت است در غیر این صورت منفی است. به عنوان مثال در المان‌های شکل روبرو مقادیر مؤلفه‌های تنش با در نظر گرفتن قراردادهای ذکر شده به صورت روبرو است:

روابط فوق به معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای معروف می‌باشند. با جمع دو رابطه اول می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right] + \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

راستای x و y و همچنین راستای x' و y' راستاهای اختیاری بوده، بنابراین می‌توان نتیجه فوق را برای راستایی مانند x'' و y'' نیز بدست آورد. بنابراین

$$\sigma_{x''} + \sigma_{y''} = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \dots$$

می‌توان نوشت:

تذکره ۱: طبق رابطه فوق در هر نقطه از جسم تحت تنش، مجموع تنش‌های متعامد اعمال شده بر وجوه المان تنش صفحه‌ای، ثابت بوده و مستقل از زاویه θ می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ تابعی از متغیر θ می‌باشند، به ازای زاویه مشخصی تنش‌های قائم اکسترمم می‌شوند (به زاویه صفحه‌ای که تنش‌های قائم بر روی آن دارای حداکثر و حداقل مقدار می‌شوند، زوایای اصلی و به مقادیر تنش‌های نظیر آن زوایا، تنشهای اصلی و به صفحاتی که تنش‌ها در آن صفحات اکسترمم می‌شوند، صفحات اصلی گفته می‌شود. زوایای اصلی را می‌توان با مشتق‌گیری از مؤلفه تنش $\sigma_{x'}$ و مساوی صفر قرار دادن آن بدست آورد.

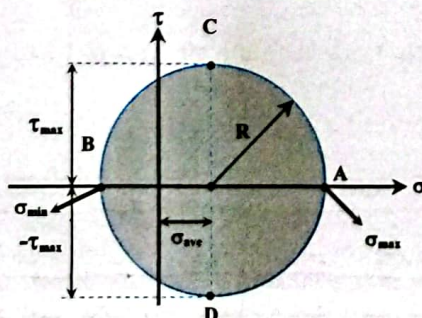
$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2 \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p + 2\tau_{xy} \cos 2\theta_p = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

به θ_p زاویه صفحات اصلی گفته می‌شود.

از رابطه فوق دو مقدار $2\theta_p$ که 180° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_p که 90° با هم اختلاف دارند بدست می‌آید. مقادیر تنش‌های اصلی را می‌توان با قرار دادن زوایای اصلی در رابطه تنش $\sigma_{x'}$ بدست آورد که نتیجه ساده شده آن توسط روابط زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ave}} + R, \quad \sigma_{\min} = \sigma_{\text{ave}} - R$$

σ_{ave} و R به ترتیب مختصات مرکز دایره مور و شعاع دایره مور را نشان می‌دهد که مقدار آن بر حسب مؤلفه‌های تنش از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$\begin{cases} \sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

دایره مور

از این دایره برای تعیین نمودن تنش در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم استفاده می‌شود. به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} معین باشند می‌توان به جای استفاده از روابط مربوط به تبدیلات تنش، دایره مور تنش را رسم نموده و از آن برای تعیین مؤلفه‌های تنش در راستاهای دیگر استفاده نمود. اما برای بدست آوردن معادله دایره مور، می‌توان روابط مربوط به $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right)^2; \quad \tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right)^2$$

با جمع نمودن دو رابطه فوق به رابطه زیر خواهیم رسید:

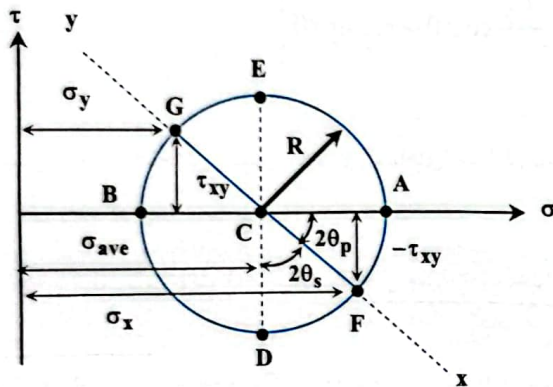
$$(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_{x'y'}^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$$

این رابطه، معادله یک دایره به مختصات مرکز C و شعاع R می‌باشد. بنابراین می‌توان معادله دایره مور به قرار زیر است:

$$(\sigma_x' - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

که در آن مقادیر σ_{ave} و R به ترتیب عبارتند از:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} ; R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$



با مشخص بودن مختصات مرکز دایره مور و همچنین شعاع آن می‌توان دایره را به شکل زیر رسم نمود:

همان‌طور که از شکل مشخص است محور افقی بیانگر محور تنش قائم بوده و محور عمودی نشان‌دهنده تنش برشی می‌باشد. نقاط روی محیط دایره مقادیر تنش را در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم بیان می‌کنند. نقاط A و B به ترتیب معرف ماکزیمم و مینیمم تنش قائم می‌باشند (تنش‌های اصلی) و نقاط D و E نیز معرف ماکزیمم تنش برشی هستند.

تذکره ۲: در صفحات اصلی تنش، تنش‌های قائم دارای مقادیر ماکزیمم و مینیمم بوده و در آن صفحات هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد. این مطلب را می‌توان از شکل دایره مور نیز دریافت نمود. مؤلفه تنش برشی در نقاط A و B مساوی صفر است. $\tau_{xy} = 0$ یا σ_{max} یا σ_{min} $\Rightarrow \theta = \theta_p$

تذکره ۳: مقدار ماکزیمم تنش برشی مساوی شعاع دایره مور است. $(\tau_{max} = R)$ و تنش قائم نظیر تنش برشی ماکزیمم مساوی σ_{ave} می‌باشد. مقدار ماکزیمم تنش برشی را می‌توان با قرار دادن $\theta = \theta_s$ در فرمول بدست آورد. (θ_s) زاویه‌ای است که تنش برشی ماکزیمم در آن صفحه روی می‌دهد. زاویه صفحات تنش برشی ماکزیمم به روش زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\tau_{xy} \cos 2\theta_s - \tau_{xy} \sin 2\theta_s = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

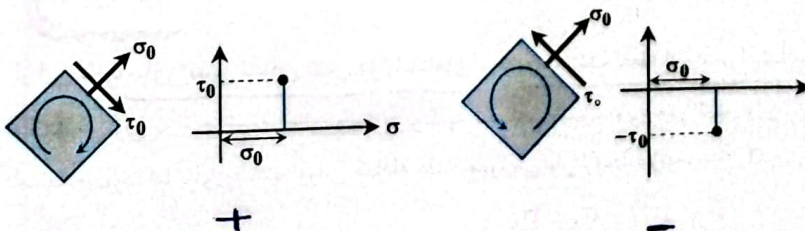
$$\theta = \theta_s \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{max} ; \sigma_x = \sigma_y = \sigma_{ave}$$

رابطه فوق دو مقدار $2\theta_s$ را که 180° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_s را که با هم 90° اختلاف دارند تعیین می‌کند.

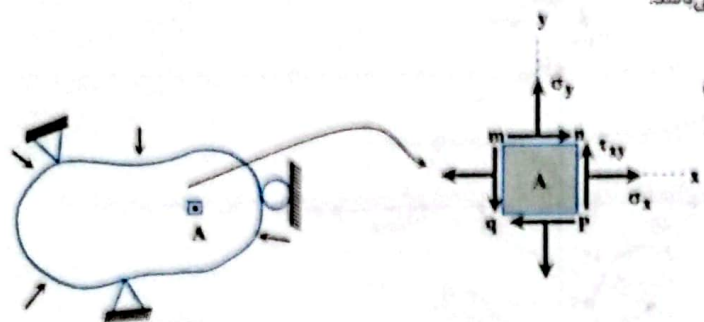
تذکره ۴: با مقایسه روابط مربوط به امتداد تنش‌های قائم اصلی و امتداد تنش برشی اصلی می‌توان نتیجه گرفت که صفحات تنش برشی اصلی تحت زاویه 45° نسبت به صفحات تنش قائم اصلی قرار دارند، همچنین با توجه به دایره مور می‌توان گفت مقدار تنش برشی حداکثر مساوی نصف اختلاف بین تنش‌های اصلی است چون تفاضل تنش‌های اصلی برابر قطر دایره مور می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

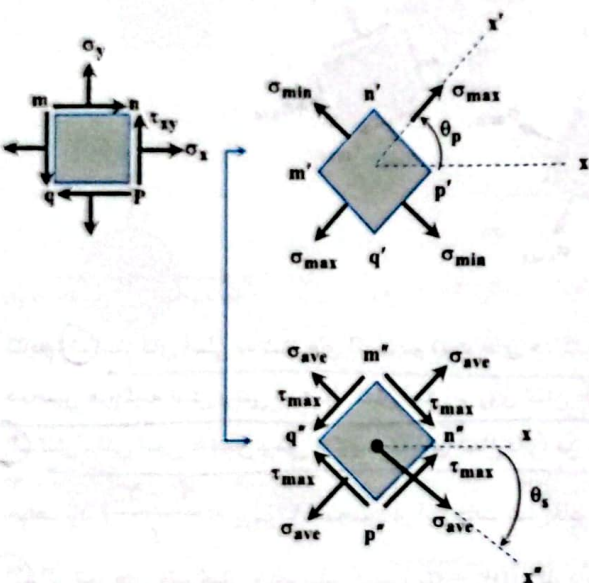
در تعیین علامت مؤلفه مربوط به تنش برشی برای ترسیم دایره مور به این صورت عمل می‌شود که اگر تنش برشی عامل بر یک سطح المان تمایل به دوران المان در جهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت دارد نقطه نظیر آن در روی دایره مور دارای تنش برشی با مقدار مثبت بوده و در بالای محور افقی (محور σ) قرار می‌گیرد و برعکس.



همانطور که قبلاً نیز اشاره شد رسم دایره مور نیازمند آن است که مختصات مرکز دایره $C(\sigma_{ave}, 0)$ و شعاع دایره R معلوم باشند یا آنکه مختصات دو نقطه دایره معلوم بوده از وصل کردن این دو نقطه به یکدیگر خطی بدست می‌آید که قطر دایره می‌باشد. این قطر محور افقی را در نقطه C که مرکز دایره است قطع خواهد نمود. هر نقطه توسط مؤلفه‌های آن تعیین می‌گردد. مؤلفه x مربوط به تنش قائم بر وجه المان می‌باشد و مؤلفه y مربوط به تنش برشی در وجه مذکور است. تنش قائم کششی، مثبت و تنش قائم فشاری، منفی می‌باشد.



به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش در راستای x و y در یک نقطه از جسم مانند A مشخص باشند، می‌توان دایره مور مربوط به آن را رسم نمود.



ذکر این نکته لازم است که تنش‌های عامل بر یک وجه نشان‌دهنده یک نقطه از محیط دایره است. تنش‌های قائم و برشی اعمال شده بر وجه np معرف نقطه F و تنش‌های قائم و برشی اعمال شده بر وجه mn معرف نقطه G از محیط دایره مور در شکل قبلی است. با وصل کردن این دو نقطه قطر دایره بدست آمده که محور σ را در نقطه C مرکز دایره قطع می‌کند. همان طور که از این شکل مشاهده می‌شود قطر FG بیانگر تنش‌های اعمالی در دو راستای x و y است که در روی دایره مور با یکدیگر 90° اختلاف دارند، این مسئله بیان‌کننده آن است که اگر اختلاف زاویه بین دو راستا در المان مساوی θ باشد در روی دایره مور این اختلاف زاویه مساوی 2θ خواهد بود. در شکل مذکور زاویه بین قطر FG و قطر AB که معرف تنش‌های قائم اصلی است، مساوی $2\theta_p$ می‌باشد. اگر قطر FG به اندازه $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد دوران کند به قطر AB رسیده که تنش‌ها در دو انتهای آن، تنش‌های اصلی است.

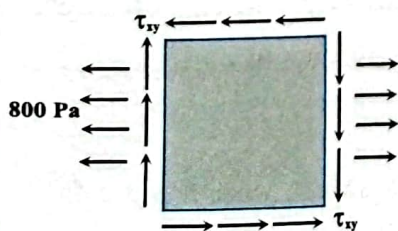
بنابراین برای رسیدن به تنش‌های اصلی (در المان) کافی است آن را به اندازه θ_p پادساعتگرد دوران داد. همچنین با گردش ساعتگرد قطر FG به اندازه $2\theta_s$ به قطر DE رسیده که بیانگر تنش‌های برشی اصلی است. در نتیجه برای رسیدن به تنش برشی ماکزیمم در المان کافی است آن را به اندازه θ_s در جهت گردش حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانید. شکل فوق نشان‌دهنده نحوه چرخش المان برای رسیدن به تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی است. همانطور که از مطالب فوق نیز مشخص است جهت چرخش المان با جهت حرکت روی دایره مور یکسان است.

همانطور که در شکل فوق مشخص است (در حالتی که تنش‌های اصلی روی المان اعمال می‌شود، روی یک وجه تنش قائم ماکزیمم و روی وجه دیگر تنش قائم مینیمم است. همانطور که در دایره مور شکل قبلی ملاحظه می‌شود اگر خط FG به اندازه $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد بچرخد بر خط AB منطبق می‌گردد و نقطه F بر نقطه A که متناظر با تنش قائم ماکزیمم است منطبق می‌شود لذا با چرخش پادساعتگرد، تنش‌ها روی وجه F (همان راستای x) به ماکزیمم مقدار و روی وجه دیگر به مینیمم مقدار می‌رسد.

با جمع کردن دو زاویه θ_p و θ_s اختلاف زاویه بین محورهای x' و x'' یا زاویه بین تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی بدست می‌آید.

$$2\theta_p + 2\theta_s = 90^\circ \Rightarrow \theta_p + \theta_s = 45^\circ$$

تذکره ۵: اگر نقطه‌ای مانند M در دایره مور شکل زیر معرف تنش‌های اعمالی بر وجه np از المان شکل زیر باشد، آن گاه راستای وترهای AM و BM معرف راستای تنش‌های قائم اصلی در المان بوده و به همین ترتیب راستای وترهای MD و ME بیانگر راستای تنش‌های برشی اصلی می‌باشد.



پاسخ: گزینه «۳» روش اول: تنش اصلی را می توان طبق رابطه زیر نوشت:

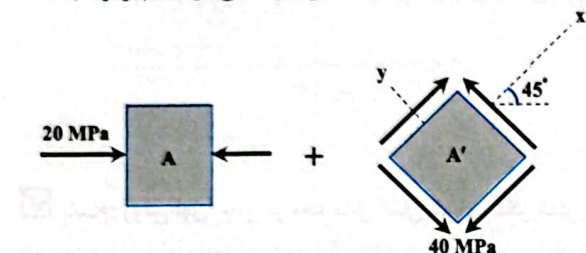
$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow 1200 = \frac{800 + 0}{2} + R \Rightarrow R = 400 \text{ Pa} = \tau_{max}$$

از طرفی تنش برشی ماکزیمم، مساوی شعاع دایره مور است.

روش دوم:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow 1200 + \sigma_2 = 800 + 0 \Rightarrow \sigma_2 = -400 \text{ Pa} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1200 - (-400)}{2} = 800 \text{ Pa}$$

مثال ۲: جسمی تحت بار مرکب قرار گرفته است و در نقطه‌ای از جسم به طور همزمان تنش‌های زیر وارد می‌شود. تنش‌های اصلی در جسم برابرند یا:



$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 40 \\ -60 \text{ MPa} \end{array} \right. & \quad (2) \\ \left\{ \begin{array}{l} 40 \\ -40 \text{ MPa} \end{array} \right. & \quad (3) \\ \left\{ \begin{array}{l} 60 \\ -60 \text{ MPa} \end{array} \right. & \quad (4) \end{aligned}$$

$$\tau_{max} = R = 40 \text{ MPa}$$

پاسخ: گزینه «۲»

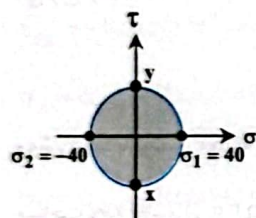
در حالت A' جسم تحت برش خالص قرار گرفته است در نتیجه دایره مور آن به صورت روبرو است:

$$\sigma_1 = 40, \quad \sigma_2 = -40$$

با توجه به دایره مور رسم شده می‌توان نوشت:

برای رسیدن المان A' ، به حالت تنش قائم اصلی، کافی است المان به اندازه 45° پادساعتگرد دوران کند در این حالت در دایره مور نقطه X بر σ_1 و نقطه Y بر σ_2 منطبق می‌شود.

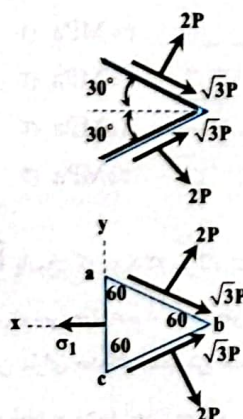
در نتیجه تنش‌های اصلی در جسم مساوی مجموع تنش‌های اصلی حالت A و A' است.



$$\begin{aligned} 20 \rightarrow [A] \leftarrow + \rightarrow [A'] \leftarrow \sigma_2 = 40 &= \rightarrow [] \leftarrow 60 & \sigma_1 = 40 + 0 = 40 & \sigma_2 = -40 - 20 = -60 \end{aligned}$$

مثال ۳: مقدار و امتداد نیروهای موثر بر دو صفحه متقاطع در شکل نشان داده شده

است، امتداد و مقدار تنش‌های اصلی در نقطه تقاطع دو صفحه چه اندازه است؟



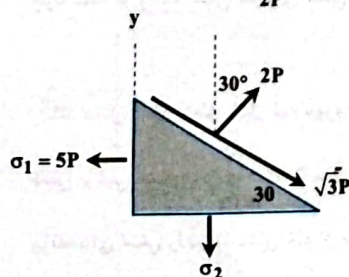
پاسخ: ابتدا، المان مثلثی abc مطابق شکل روبرو رسم می‌شود. اگر تنش‌های قائم اصلی

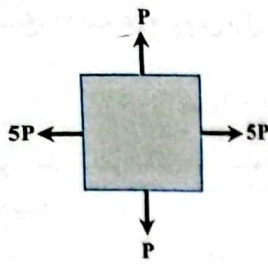
با σ_1 و σ_2 نمایش داده شوند، آن‌گاه راستای افقی X یک امتداد اصلی است چرا که تنش‌های اعمالی بر وجوه مایل به گونه‌ای می‌باشند که برای حفظ تعادل المان گوه‌ای شکل مقابل، (در راستای Y) نیاز به حضور تنش برشی بر روی وجه ac نیست. زیرا مؤلفه Y تمامی نیروها، یکدیگر را خنثی کرده و بنابراین نیرویی در راستای وجه ac اعمال نخواهد گردید.

(به علت مساوی بودن زوایا، مساحت وجوه مختلف المان برابر است در نتیجه مساحت تمامی وجوه المان مثلثی برابر A در نظر گرفته می‌شود.)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +\sigma_1 A - 2(2PA)\sin 30^\circ - 2(\sqrt{3}PA)\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 5P$$

چون محور X یک امتداد اصلی است، بنابراین محور Y که بر محور X عمود می‌باشد نیز یک امتداد اصلی می‌باشد. لذا کافی است برای تعیین σ_2 از تعادل المان گوه‌ای شکل مقابل استفاده کرد.

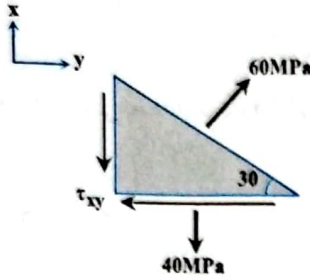




اگر مساحت وجه مایل مساوی A در نظر گرفته شود، آن گاه مساحت وجه افقی برابر $A \cos 30^\circ$ و مساحت وجه قائم برابر $A \sin 30^\circ$ خواهد بود. اکنون با نوشتن معادله تعادل در راستای y رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -(\sigma_y A \cos 30^\circ) + (2PA) \cos 30^\circ - (\sqrt{2}PA) \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow \sigma_y = P$$

بنابراین به طور خلاصه می توان امان تنش های اصلی را به شکل مقابل رسم نمود:



مثال ۴: تنش برشی اعمال شده بر امان گوه ای شکل مقابل چه اندازه است؟

پاسخ: روش اول: چون بر وجه مایل امان گوه ای شکل تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین تنش قائم 60 MPa یک تنش اصلی است. از طرفی

$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \Rightarrow 60 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

می توان نوشت:

$$\Rightarrow 60 = \frac{0 + 40}{2} + \sqrt{\left(\frac{0 - 40}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow 40^2 = 20^2 + \tau_{xy}^2 \Rightarrow \tau_{xy} = 20\sqrt{3} \text{ MPa}$$

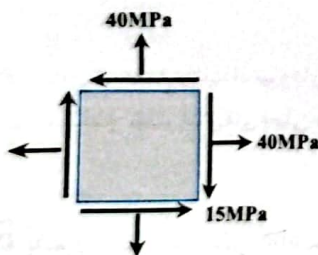
روش دوم: با نوشتن معادله تعادل در راستای x نیز می توان همین نتیجه را گرفت. اگر مساحت وجه مایل A باشد مساحت وجه افقی برابر $A \cos 30^\circ$ و

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (60 A) \sin 30^\circ - \tau_{xy} (A \cos 30^\circ) = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} \text{ MPa}$$

مساحت وجه قائم برابر $A \sin 30^\circ$ می باشد. پس:

توجه: راه تشخیص اینکه یک تنش، قائم اصلی بوده آن است که بر وجهی که تنش قائم اعمال شده، تنش برشی برابر صفر باشد.

مثال ۵: تنش برشی ماکزیمم در امان شکل زیر مساوی کدامیک از گزینه ها است؟



۴۰ MPa (۱)

۲۰ MPa (۲)

۱۵ MPa (۳)

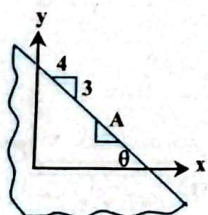
۲۵ MPa (۴)

پاسخ: گزینه «۳» هرگاه تنش های قائم اعمالی بر وجه متعامد امان، یعنی σ_x و σ_y با هم برابر باشند، آن گاه تنش برشی وارد بر اضلاع امان مساوی

تنش برشی ماکزیمم است. به طور کلی تنها در یک حالت، تنش های قائم با هم برابر می شوند و آن مربوط به حالتی است که تنش برشی اعمال شده بر

امان دارای حداکثر مقدارش باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که در شکل فوق به دلیل مساوی بودن تنش های قائم σ_x و σ_y ، تنش برشی τ_{xy}

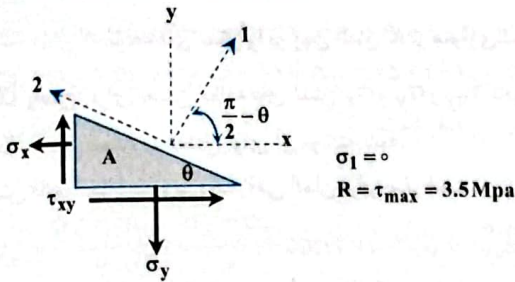
وارد شده بر وجه امان مساوی تنش برشی ماکزیمم است.



مثال ۶: در نقطه A از لبه مورب و بارگذاری نشده یک جسم ارتجاعی حداکثر

تنش برشی مساوی $\frac{3}{5} \frac{N}{mm^2}$ می باشد. مقادیر تنش های اصلی و همچنین

مؤلفه های تنش را در راستای x و y بدست آورید.



✓ پاسخ: چون بر روی لبه A هیچ گونه تنش وارد نشده است ($\sigma = \tau = 0$)، تنش برشی بر روی این لبه صفر می باشد. بنابراین راستای عمود بر وجه مایل المان A یک امتداد اصلی است. از طرفی تنش برشی ماکزیمم که مساوی شعاع دایره مور می باشد در صورت مسئله داده شده است. بنابراین دایره مور تنش به صورت زیر ترسیم می شود: (نقطه σ_1 منطبق بر مبدأ مختصات بوده و شعاع دایره نیز برابر $3/5$ می باشد.) با توجه به دایره مور می توان نوشت:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = 2R = 2 \times \tau_{\max} = 2 \times 3/5 = 6/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 3/5 \text{ MPa}$$

اما برای تعیین مؤلفه های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} ابتدا باید زاویه θ تعیین شود. با استفاده از شکل صورت مسئله می توان زاویه θ را تعیین نمود.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ$$

زاویه بین امتداد ۱ و محور x مساوی $\pi - \theta$ می باشد. اگر محور ۱ به اندازه این زاویه ساعتگرد دوران کند بر محور x منطبق می شود، اما در دایره مور باید

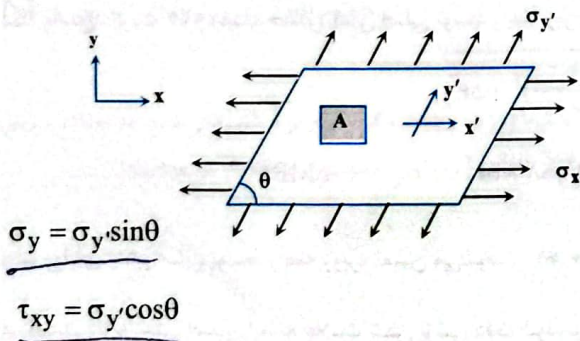
$$\tau_{xy} = -R \cos 16/3^\circ = -3/5 \cos 16/3^\circ = -3/4 \text{ MPa} \quad \text{دو برابر این زاویه یعنی } 2(\pi - \theta) = 106/3^\circ \text{ ساعتگرد دوران کند. در نتیجه:}$$

$$\sigma_x = \sigma_{\text{ave}} + R \sin(106/3^\circ - 90^\circ) = \sigma_{\text{ave}} + R \sin 16/3^\circ = 3/5 + 3/5 \sin 16/3^\circ = 4/4 \text{ MPa}$$

و اما برای تعیین مؤلفه تنش σ_y کافی است طبق دایره مور رسم شده رابطه زیر را نوشت:

$$\sigma_y = \sigma_{\text{ave}} - R \sin 16/3^\circ = 3/5 - 3/5 \sin 16/3^\circ = 2/5 \text{ MPa}$$

تذکره ۶: اگر مطابق شکل مؤلفه های تنش اعمالی بر یک متوازی السطوح معین باشد، برای تعیین مؤلفه های تنش اعمال شده بر یک المان با وجوه متعامد، مانند المان A باید از تصویر کردن مؤلفه های تنش داده شده و همچنین از معادلات تعادل المان استفاده نمود.

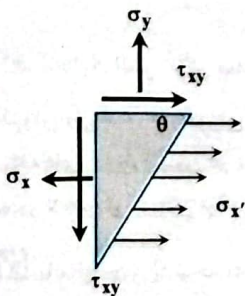


به عنوان مثال اگر متوازی السطوح تحت تنش های σ_x' و σ_y' باشد، برای محاسبه مؤلفه تنش های σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر عمل می شود:

۱- برای بدست آوردن تنش σ_y کافی است σ_y' در $\sin \theta$ ضرب شود.

۲- برای بدست آوردن تنش τ_{xy} ، مؤلفه تنش σ_y' در $\cos \theta$ ضرب می شود.

۳- در نهایت برای محاسبه تنش σ_x از نوشتن معادله تعادل برای المان گوه ای شکل زیر استفاده می شود. (اگر وجه مایل المان مساحتی برابر A داشته باشد وجه افقی المان دارای مساحت $A \cos \theta$ و وجه قائم المان دارای مساحت $A \sin \theta$ خواهد بود.)

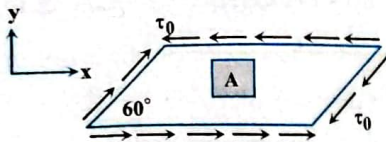


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_x' A + \tau_{xy} A \cos \theta - \sigma_x A \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x' + \sigma_y' \cos \theta \times \cos \theta - \sigma_x \sin \theta = 0 \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_x'}{\sin \theta} + \frac{\sigma_y' \cos^2 \theta}{\sin \theta}$$

المان در راستای y دارای تعادل می باشد. کافی است برای امتحان کردن، معادله زیر را نوشت:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_y \times A \cos \theta - \tau_{xy} \times A \sin \theta = 0 \Rightarrow \sigma_y A \sin \theta \cos \theta - \sigma_y' A \sin \theta \cos \theta = 0$$



مثال ۷: مؤلفه‌های تنش را بر روی المان A از متوازی‌السطوح بارگذاری شده زیر بیابید.

پاسخ: برای تعیین مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} کافی است ابتدا المان گوه‌ای شکل روبرو رسم شده، سپس معادلات تعادل برای آن نوشته شود. تنش قائم اعمال شده بر وجه افقی المان برابر صفر است.

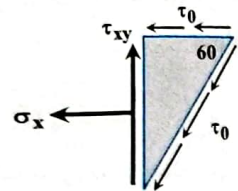
$\sigma_y = 0$ ؛ با توجه به شکل المان می‌توان نوشت:

اگر مساحت وجه مایل المان برابر A در نظر گرفته شود می‌توان معادلات تعادل را به صورت زیر نوشت:

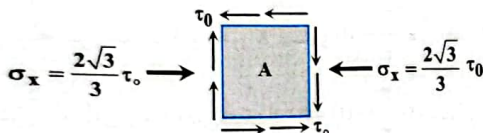
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -\tau_0(A \cos 60^\circ) - (\tau_0 A) \cos 60^\circ - \sigma_x (A \sin 60^\circ) = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow -(\tau_0 A) \sin 60^\circ + \tau_{xy} (A \sin 60^\circ) = 0 \end{cases}$$

پس از ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_x = -2\tau_0 \cot 60^\circ = -2\tau_0 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tau_{xy} = \tau_0 \end{cases}$$

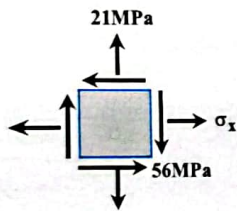


بنابراین تنش‌های اعمالی بر المان A به شکل روبرو می‌باشند:



علامت منفی در مقدار تنش σ_x بیانگر فشاری بودن تنش است.

مثال ۸: اگر حداقل تنش اصلی برای المان نشان داده شده مساوی -7 MPa باشد، مقدار تنش σ_x و زاویه‌ای که محور تنش اصلی با محور x می‌سازد مساوی کدامیک از گزینه‌های زیر است؟



(۱) 105 MPa ، $26/6^\circ$

(۲) 105 MPa ، $-26/6^\circ$

(۳) 105 MPa ، -53°

(۴) 126 MPa ، $26/6^\circ$

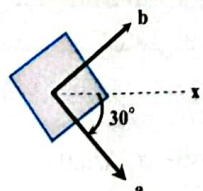
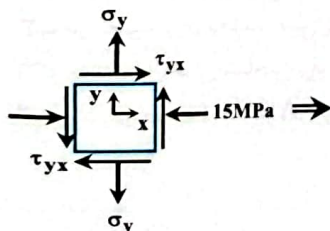
پاسخ: گزینه «۲» مقدار حداقل تنش اصلی توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow -7 = \frac{\sigma_x + 21}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - 21}{2}\right)^2 + 56^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{-\sigma_x - 21}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - 21}{2}\right)^2 + 56^2 \Rightarrow 2 \times \sigma_x \times 21 + 21^2 = -42\sigma_x + 21^2 + 4 \times 56^2 \Rightarrow \sigma_x = 105 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-56)}{105 - 21} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 2\theta_p = -53^\circ \Rightarrow \theta_p = -26/6^\circ$$

و اما زاویه‌ای تنش اصلی توسط رابطه روبرو تعیین می‌شود:

در تعیین زاویه تنش اصلی باید به علامت تنش برشی دقت شود. برای تعیین علامت صحیح کافی است به شکل ابتدای فصل مراجعه شود.



مثال ۹: المان تنش صفحه‌ای با حداکثر تنش اصلی 75 MPa مطابق شکل

مفروض می‌باشد. در صورتی که این المان به اندازه 30° ساعتگرد دوران کند، مؤلفه‌های جدید تنش در دستگاه a-b را تعیین کنید. (بر روی وجه عمود بر محور x هیچ‌گونه تنش برشی وارد نشده است $\tau_{xy} = 0$)

پاسخ: چون با توجه به فرض سؤال، تنش برشی τ_{xy} مساوی صفر است، بنابراین تنش فشاری 15 MPa و تنش کششی σ_y تنش‌های اصلی می‌باشند. ($\sigma_r = -15 \text{ MPa}$)، از طرفی در صورت مسئله تنش اصلی حداکثر نیز داده شده است ($\sigma_1 = 75 \text{ MPa}$).

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_1 + \sigma_r}{2} = \frac{75 + (-15)}{2} = 30 \text{ MPa}$$

بنابراین:

از طرفی مجموع تنش‌های قائم همواره مقداری ثابت است. بنابراین با توجه به مقادیر بدست آمده برای تنش‌های اصلی و همچنین مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y بدست آمده از شکل المان فوق می‌توان نوشت:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow -15 + \sigma_y = 75 + (-15) \Rightarrow \sigma_y = 75 \text{ MPa}$$

تنش σ_y مساوی تنش حداکثر شده است، پس بر روی وجوه عمود بر محور y نیز تنش برشی صفر است.

اکنون با استفاده از روابط تبدیل تنش، مؤلفه‌های تنش در دستگاه ab بدست می‌آید:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \times (-30^\circ)) + \tau_{xy} \sin(2 \times (-30^\circ)) = \frac{-15 + 75}{2} + \left(\frac{-15 - 75}{2} \right) \cos 60^\circ + 0$$

$$\Rightarrow \sigma_a = 30 - 22/5 = 7/5 \text{ MPa}$$

مؤلفه دیگر تنش یعنی σ_b توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_b = 30 + 22/5 = 52/5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{ab} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{-15 - 75}{2} \sin(2 \times (-30^\circ)) = -39 \text{ MPa}$$

لازم به ذکر است که به دلیل برابر بودن τ_{yx} و τ_{xy} اگر یکی از آن‌ها صفر شود، دیگری نیز برابر صفر است.

مثال ۱۰: یک میله استوانه‌ای توپر به قطر $d = 20 \text{ mm}$ به طور همزمان تحت بار محوری $P = 10 \pi \text{ kN}$ و کوپل پیچشی $T = 15 \pi \text{ N.m}$ قرار دارد. برای المانی روی سطح میله، تنشهای اصلی σ_1 و σ_2 به ترتیب با چند MPa برابرند؟

- (۱) ۱۰۰ و ۳۰ (۲) ۱۰۰ و -۱۰۰ (۳) ۱۰۰ و ۰ (۴) ۱۱۰ و -۱۰

☒ پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تنش قائم ناشی از بار محوری و تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی محاسبه می‌شود:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{10 \pi \times 1000}{\frac{\pi \times 20^2}{4}} = 100 \text{ MPa}$$

تنش قائم ناشی از بار محوری

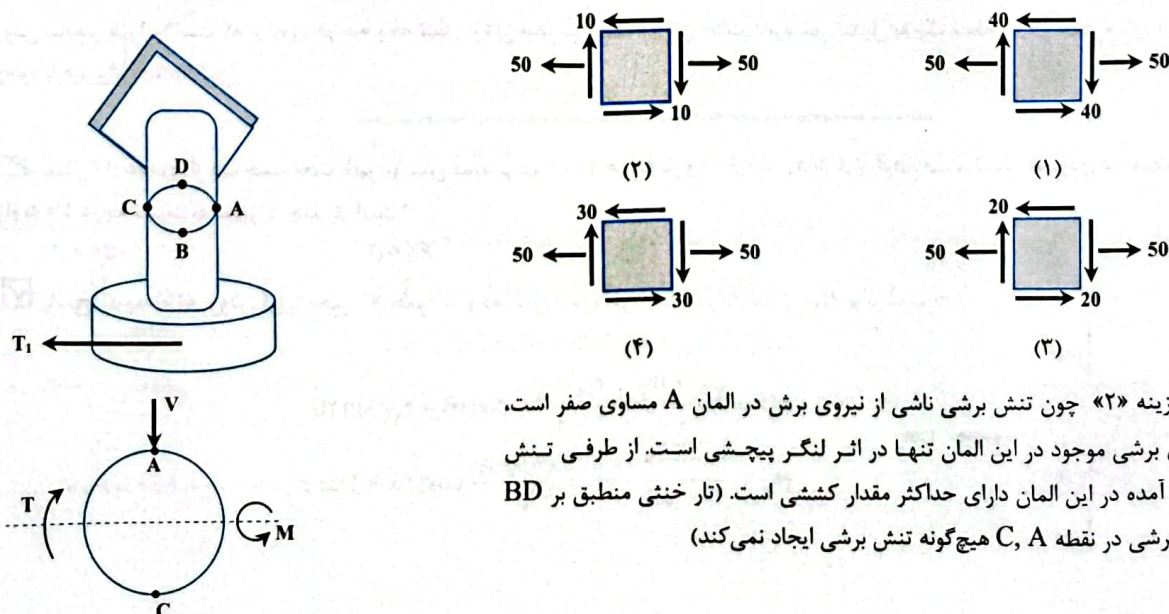
$$\tau_{xy} = \frac{TR}{J} = \frac{\tau T}{\pi R^2} = \frac{2 \times 15 \pi \times 10^3}{\pi \times 10^2} = 30 \text{ MPa}$$

تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100}{2} \right)^2 + 30^2} = 50 \pm \sqrt{50^2 + 30^2} = 50 \pm 58/3$$

$$\sigma_1 = 108/3 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -8/3 \text{ MPa}$$

مثال ۱۱: در مقطع ABCD از یک محور توپر به مقطع دایره (مطابق شکل) حداکثر تنشهای زیر بر حسب کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع معلومند: تنش خمشی 50 ، تنش برشی در اثر نیروی برشی 30 ، تنش برشی در اثر کوپل پیچشی 10 ، تنش المانی روی این مقطع و در نقطه A کدام است؟

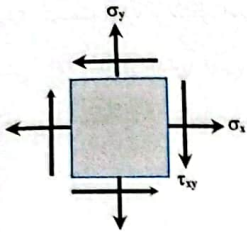


☒ پاسخ: گزینه «۲» چون تنش برشی ناشی از نیروی برش در المان A مساوی صفر است،

در نتیجه تنش برشی موجود در این المان تنها در اثر لنگر پیچشی است. از طرفی تنش خمشی بوجود آمده در این المان دارای حداکثر مقدار کششی است. (تار خنثی منطبق بر BD بوده و نیروی برشی در نقطه A, C هیچ‌گونه تنش برشی ایجاد نمی‌کند)



مثال ۱۲: در شکل زیر المان ابتدا به شکل مربع است. پس از اعمال تنش‌های نشان داده شده طول قطرهای المان تغییر نمی‌کند. کدام رابطه صحیح است؟



$$(1) \tau_{xy} \neq 0, \sigma_x = \sigma_y = 0$$

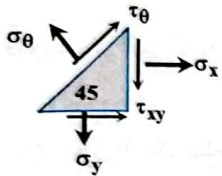
$$(2) \sigma_y \neq 0, \sigma_x \neq 0, \tau_{xy} = 0$$

$$(3) \tau_{xy} \neq 0, \sigma_x = -\sigma_y$$

$$(4) \tau_{xy} = 0, \sigma_x = -\sigma_y$$

پاسخ: گزینه «۴» چون در امتداد اقطار، طول قطرها تغییر نمی‌کند بنابراین عمود بر قطرها، تنش نرمال اثر نمی‌کند و تنها تنش برشی اثر کرده است (تنش برشی باعث تغییر طول نمی‌شود). لذا المان تحت برش محض قرار دارد. تنها حالتی که با 45° دوران المان به حالت برش محض تبدیل می‌شود گزینه چهارم است.

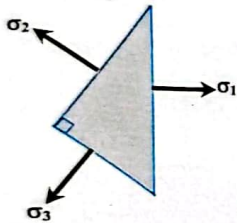
این مطلب را می‌توان با توجه به شکل زیر نیز درک نمود:



$$\sigma_\theta = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \times 45) + \tau_{xy} \sin(2 \times 45) = 0 \Rightarrow \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \tau_{xy} = 0$$

صفر شدن رابطه فوق تنها با جایگذاری گزینه (۴) امکان پذیر است.

مثال ۱۳: در المانی مطابق شکل تنش‌های برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است. کدام گزینه درست می‌باشد؟



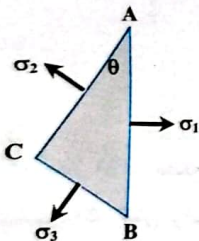
$$(1) \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

$$(2) \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3$$

$$(3) \sigma_1 = \sigma_2 \sqrt{2}, \sigma_2 = \sigma_3$$

$$(4) \text{ فقط موقعی که هر سه تنش صفر باشند این حالت بوجود می‌آید.}$$

پاسخ: گزینه «۱» با نوشتن معادلات تعادل برای المان می‌توان ارتباط بین تنش‌ها را تعیین نمود.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_2 AB \cos \theta \times \sin \theta - \sigma_3 AB \sin \theta \times \cos \theta = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_1 AB - \sigma_2 AB \cos \theta \times \cos \theta - \sigma_3 AB \sin \theta \times \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

روش ساده‌تر هم این است که بر روی هر سه وجه تنش برشی صفر می‌باشد، در این حالت دایره مور تبدیل به یک نقطه شده و تنش‌های قائم در تمامی وجوه با هم برابر است.

مثال ۱۴: عنصری از یک جسم تحت تأثیر دو تنش عمود بر هم $\sigma_x = 1000$ بار و $\sigma_y = -600$ بار قرار گرفته است، تنش عمودی در صفحه موربی با زاویه 30° درجه نسبت به محور x چند بار است؟

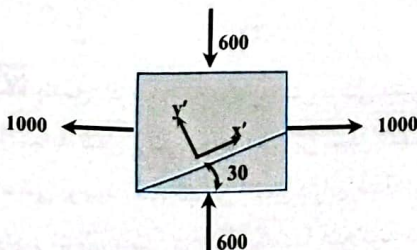
$$900 (4)$$

$$750 (3)$$

$$600 (2)$$

$$500 (1)$$

پاسخ: گزینه «۲» روش اول: محور y' عمود بر وجه مایل، عمود می‌باشد بنابراین تنش $\sigma_{y'}$ برابر است با:



$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

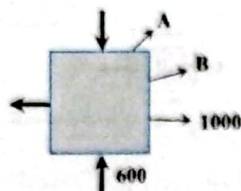
$$\sigma_{y'} = \frac{1000 - 600}{2} - \frac{1000 + 600}{2} \cos(2 \times 60) \Rightarrow \sigma_{y'} = 200 + 400 = 600$$

این مسئله را با استفاده از دایره مور نیز می توان حل نمود.

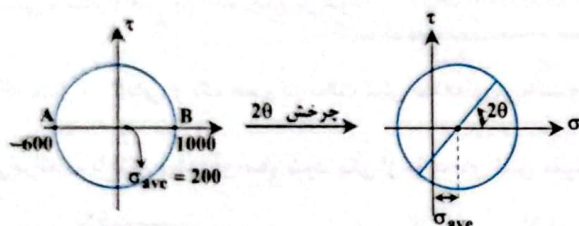
روش دوم: برای رسم دایره مور، دو وجه متعامد از المان را در نظر گرفته و آن ها را مطابق شکل A و B می نامیم. مؤلفه های x و y نقاط متناظر این صفحات روی دایره مور به ترتیب تنش قائم و تنش برشی روی صفحات هستند. پس نقطه ی A و B را می توان با این مختصات روی دایره مور رسم نمود:

$$B \begin{cases} \sigma = +1000 \\ \tau = 0 \end{cases}, A \begin{cases} \sigma = -600 \\ \tau = 0 \end{cases}$$

خط AB قطر دایره مور می باشد. با پیدا کردن مرکز دایره ($\sigma_{ave} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}$) می توان دایره را رسم نمود.

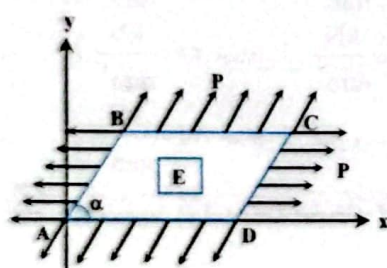


حال با چرخش 2θ روی دایره مور تنش در راستای که ابتدا نقطه متناظر آن B بود، به B' منتقل می گردد. مقدار تنش عمودی آن برابر می گردد با:



$$\begin{aligned} \sigma_{B'} &= \sigma_{ave} + R \cos 2\theta \\ &= 200 + (1000 - 200) \cos 60 = 200 + 400 = 600 \text{ MPa} \end{aligned}$$

مثال ۱۵: ضخامت ورق ABCD واحد بوده و نیرو بر واحد طول محیط مساوی P است. مؤلفه های تنش در المان E کدام است؟ (زاویه α معلوم است)

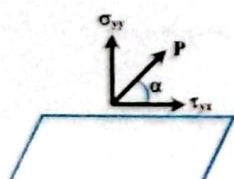


$$\sigma_{xx} = \frac{P}{\sin \alpha} (1 + \cos^2 \alpha) \quad \sigma_{yy} = P \sin \alpha \quad \tau_{xy} = P \cos \alpha \quad (۱)$$

$$\sigma_{xx} = P \sin \alpha \quad \sigma_{yy} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad \tau_{xy} = P \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sigma_{xx} = P \sin \alpha \quad \sigma_{yy} = P \sin \alpha \quad \tau_{xy} = P \cos \alpha \quad (۳)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad \sigma_{yy} = P \sin \alpha \quad \tau_{xy} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (۴)$$



پاسخ: گزینه «۱» برای تعیین مؤلفه های تنش τ_{yx}, σ_{yy} کافی است نیرو در واحد طول P به دو مؤلفه

افقی و قائم تجزیه شود.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = P \cos \alpha$$

$$\sigma_{yy} = P \sin \alpha$$

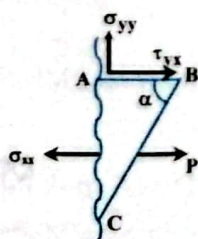
اما برای محاسبه تنش σ_{xx} باید از معادله تعادل $\sum F_x = 0$ برای المان گوه ای شکل مقابل استفاده نمود:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_{xx} \times AC + \tau_{yx} \times AB + P \times BC = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} \cdot BC \sin \alpha = P \cdot BC + \tau_{yx} BC \cos \alpha$$

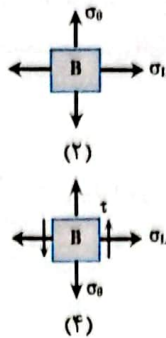
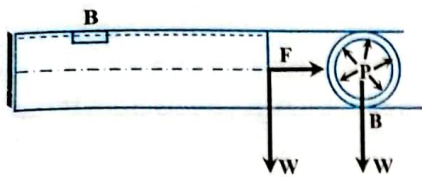
$$\Rightarrow \sigma_{xx} \sin \alpha = P + P \cos \alpha \times \cos \alpha = P(1 + \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = P \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right)$$





مثال ۱۶: یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک تحت فشار داخلی P ، نیروی محوری F و نیروی جانبی W قرار گرفته است. تنش بر روی المان B کدام گزینه است مخزن از دو طرف بسته است؟



پاسخ: گزینه «۲» بر روی وجوه المان B در سطح آزاد استوانه، ناشی از فشار داخلی P هیچ گونه تنش برشی اعمال نمی‌شود. از طرفی چون المان B در بالاترین نقطه سطح مقطع قرار دارد، بنابراین در اثر نیروی برشی W نیز در آن تنش برشی ایجاد نمی‌شود و تنش قائم ناشی از نیروی محوری و لنگر خمشی و فشار داخلی نیز با هم جمع می‌شود.

مثال ۱۷: المانی از یک جسم در حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد و مؤلفه‌های تنش عمودی وارد به آن $\frac{50}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ و $\frac{150}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ هستند. المان را می‌چرخانیم تا تنش برشی آن صفر شود. یکی از مؤلفه‌های تنش عمودی $\frac{200}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ خواهد شد. حداکثر تنش عمودی است.

(۱) $\frac{200}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ ، حداقل آن صفر و تنش برشی حداکثر $\frac{100}{\text{mm}^2} \text{ kN}$

(۲) $\frac{250}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ ، حداقل آن $\frac{25}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ و تنش برشی حداکثر $\frac{100}{\text{mm}^2} \text{ kN}$

(۳) $\frac{200}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ ، حداقل آن $\frac{25}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ و تنش برشی حداکثر $\frac{125}{\text{mm}^2} \text{ kN}$

(۴) $\frac{250}{\text{mm}^2} \text{ kN}$ ، حداقل آن صفر و تنش برشی حداکثر $\frac{125}{\text{mm}^2} \text{ kN}$

پاسخ: گزینه «۱» مجموع تنش‌های قائم اعمال شده بر وجوه متعامد همواره مقداری ثابت است، بنابراین:

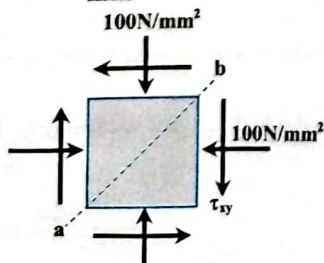
$$\sigma_x = 50, \sigma_y = 150, \tau_{xy} = ?, \sigma_1 = 200, \sigma_2 = ?$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = 50 + 150 - 200 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} \times 200 = 100$$

از طرفی تنش برشی ماکزیمم مساوی نصف تفاضل تنش قائم حداکثر و تنش قائم حداقل است.

مثال ۱۸: برای المان مربع شکل نشان داده شده، هر دو تنش محوری و برشی روی صفحه قطری ab برابر صفر می‌باشد. تنش برشی τ_{xy} چند $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ است؟



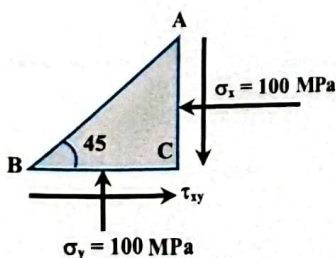
(۱) صفر

(۲) ۵۰

(۳) ۷۵

(۴) ۱۰۰

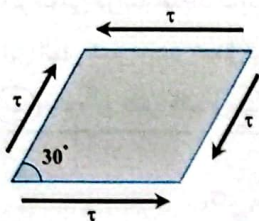
پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از معادله تعادل برای المان مثلثی نشان داده شده می‌توان تنش برشی را بدست آورد.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -100 \times AC + \tau_{xy} BC = 0 \xrightarrow{AC=BC} \tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$$



مثال ۱۹: در یک نقطه از سازه‌ای، المانی مطابق شکل نشان داده شده است. روی صفحات نشان داده شده، تنش برشی مساوی 10 MPa و تنش عمودی صفر است. مقادیر تنشهای اصلی σ_1 و σ_2 بر حسب MPa چقدر است؟ (در این نقطه تنش مسطح است).



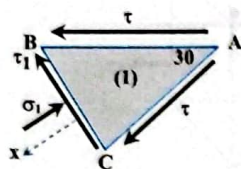
$$(1) \quad -10, 10$$

$$(2) \quad 0, 20$$

$$(3) \quad 10/\sqrt{3}, 16/93$$

$$(4) \quad -10\sqrt{3} + 20, 10\sqrt{3} + 20$$

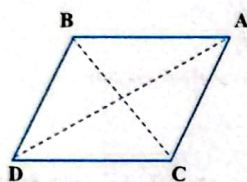
پاسخ: گزینه «۴» معادلات تعادل به ترتیب برای المانهای (۱) و (۲) نوشته می‌شود.



$$(1) \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_1 \cdot BC - \tau \cos 15^\circ \cdot AB = 0 \quad (1)$$

$$BC = AB \sin \frac{\theta}{2} = AB \sin 15^\circ \Rightarrow \sigma_1 = \tau \cot 15^\circ = 27/3 = 10\sqrt{3} + 20 \text{ MPa فشاری}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\tau(AB) \sin 15^\circ + \tau(AC) \sin 15^\circ + \tau_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$$



از آنجا که تنش برشی روی وجه BC صفر شد، پس σ_1 یک تنش اصلی است.

$$(2) \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_2 \cdot BC - \tau \cos 75^\circ \cdot AB = 0 \quad (2)$$

$$BC = AB \sin \frac{\theta}{2} = AB \sin 75^\circ \Rightarrow \sigma_2 = \tau \cot 75^\circ = 2/679 = -10\sqrt{3} + 20 \text{ MPa کششی}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau \sin 75^\circ (AB) - \tau \sin 75^\circ (AC) + \tau_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 0$$

بنابراین σ_2 نیز تنش اصلی می‌باشد.

مثال ۲۰: یک میله منشوری فولادی با مقطع عرضی 5 cm^2 تحت تأثیر تنش‌های عمود برهم $\sigma_x = |\sigma_y| = 800$ بار قرار گرفته است، تنش برشی

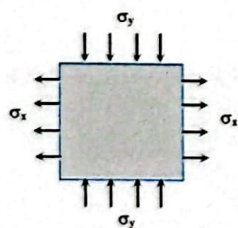
در یک صفحه مورب با زاویه $\phi = 30^\circ$ چند بار می‌شود؟

$$(1) \quad 656/04$$

$$(2) \quad 669/22$$

$$(3) \quad 675/34$$

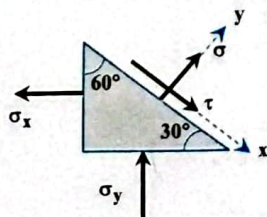
$$(4) \quad 692/82$$



پاسخ: گزینه «۴» روش اول: با استفاده از رابطه موجود در متن درس می‌توان مقدار تنش برشی را بدست آورد.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{800 - (-800)}{2} \sin 60^\circ + 0 = 692/82 \text{ bar}$$

روش دوم: روش حل، نوشتن معادله تعادل برای المان مثلثی است: (اگر مساحت وجه مایل، A باشد، مساحت وجوه قائم و افقی به ترتیب برابر $A \sin 30^\circ$ و $A \cos 30^\circ$ می‌باشد).

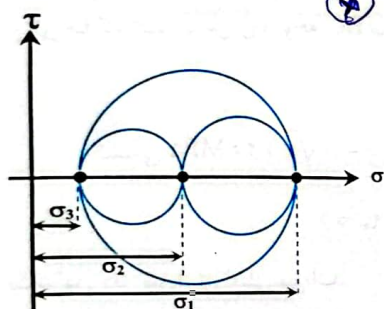
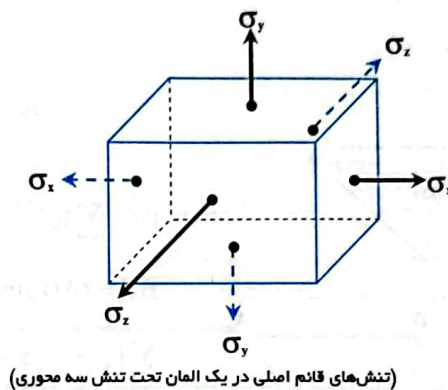
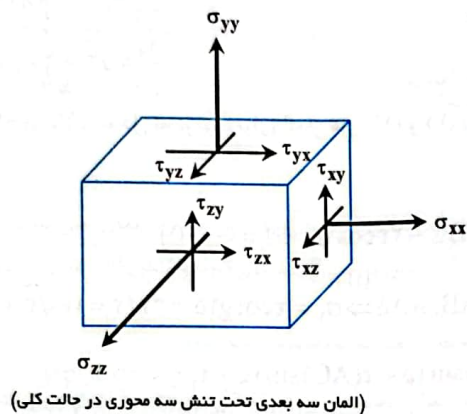


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau A = \sigma_x (A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ - \sigma_y (A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (800 + 800) = 692/82 \text{ bar}$$

تنش سه محوری

اگر المانی در سه امتداد عمود بر هم تحت اثر تنش‌های قائم σ_x و σ_y و σ_z قرار گیرد به آن تنش سه محوری گفته می‌شود. در صورتیکه بر روی وجوه این المان تنش برشی اعمال نشده باشد، تنش‌های σ_x و σ_y و σ_z تنش‌های اصلی نامیده می‌شوند. اما در حالت کلی بر المان می‌تواند مؤلفه تنش که سه مؤلفه آن تنش قائم (تنش) مؤلفه دیگر تنش برشی هستند، اعمال شود. معمولاً تنش‌های قائم اصلی با $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ نمایش داده می‌شوند.



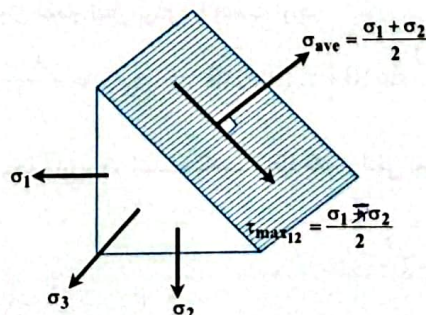
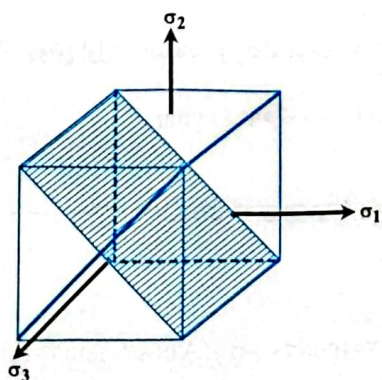
دایره مور مربوط به حالت تنش سه محوری شامل سه دایره است که دو دایره آن مماس خارج بوده و این دو دایره در داخل دایره سوم مماس می‌باشند، معمولاً تنش‌های قائم اصلی را به ترتیب بزرگ به کوچک $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ نشان داده که σ_1 تنش قائم اصلی بزرگتر و σ_3 تنش قائم اصلی حداقل است. همانطور که اشاره شد تنش برشی حداکثر بر روی صفحاتی که با صفحات اصلی 45° اختلاف زاویه دارد تشکیل می‌شود.

بنابراین در حالت سه محوری، تنش برشی حداکثر بر روی المان‌هایی که با محورهای اصلی زاویه 45° می‌سازند رخ می‌دهد. به عنوان مثال اگر المانی حول محور اصلی ۳، 45° دوران نماید تنش برشی حداکثر که بر روی این المان اثر می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(\tau_{\max})_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

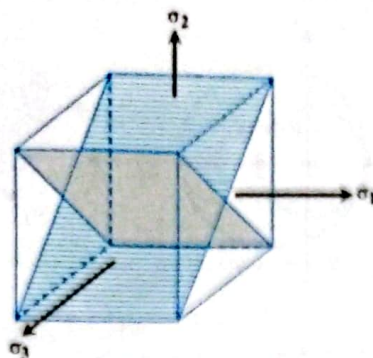
و به همین ترتیب تنش برشی در صفحات دیگر المان برابر است با:

$$(\tau_{\max})_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (\tau_{\max})_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

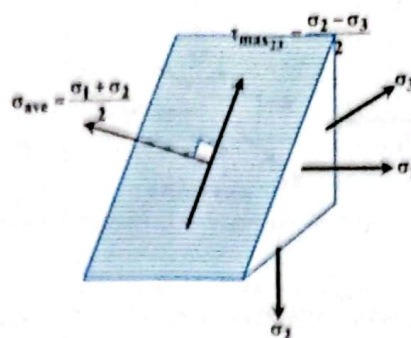


(المان تحت اثر تنش‌های سه محوری اصلی)

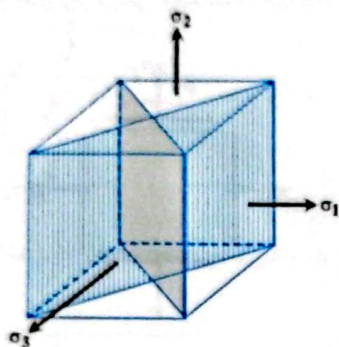
(تنش برشی بر روی وجه مایل المان گوه‌ای شکل ماکزیمم بوده و بر روی این وجه تنش قائم اعمال شده برابر تنش متوسط است.)



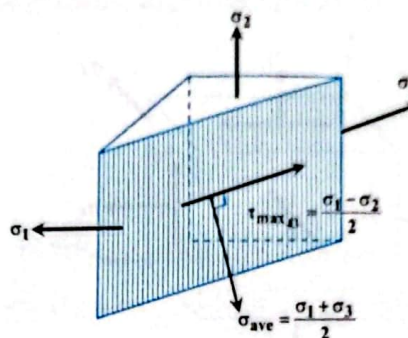
(المان تحت اثر تنش‌های سه محوری اصلی)



(تنش برشی بر روی وجه مایل المان گویای شکل ماکزیمم بوده و بر روی این وجه تنش قائم اعمال شده بر اثر تنش متوسط است)



(المان تحت اثر تنش‌های اصلی سه محوری)



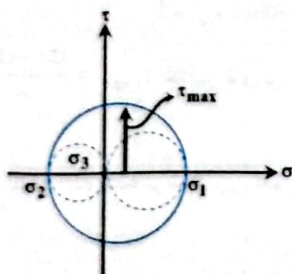
(بر روی سطح گویای شکل تنش برشی ماکزیمم و تنش قائم برابر تنش متوسط است.)

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2}$$

تنش برشی حداکثر مطلق به وجود آمده در المان مساوی نصف تفاضل حداکثر و حداقل تنش قائم اصلی است.

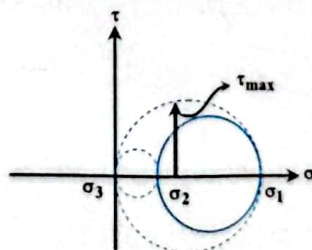
(ذکر این نکته ضروری است که اگر در حالت دو بعدی تنش‌های اصلی مختلف علامت باشند، تنش برشی حداکثر مطلق برابر $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ می‌باشد؛ ولی اگر

تنش‌های اصلی هم علامت باشند، آنگاه تنش برشی حداکثر مطلق در خارج از صفحه مورد بررسی رخ می‌دهد و مقدار آن $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$ می‌باشد. این مطلب را نیز می‌توان با توجه به دایره مور رسم شده در اشکال زیر نتیجه گرفت.)



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

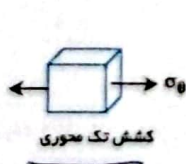
حالت اول: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



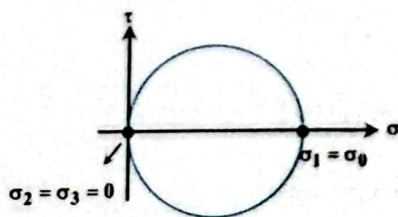
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

حالت دوم: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$

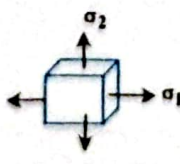
در اینجا برای چند المان سه‌بعدی تنش، دایره مور رسم شده است.



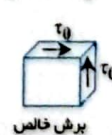
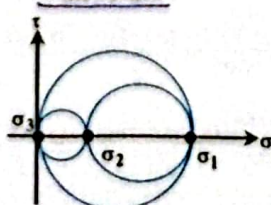
کشش تک محوری



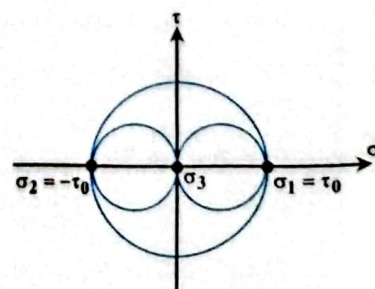
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



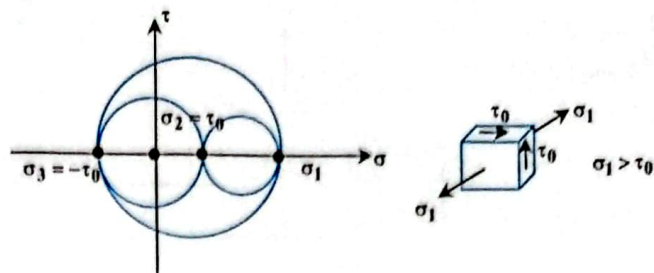
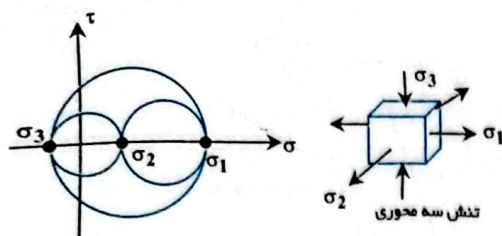
تنش دو محوری



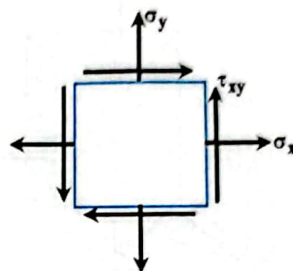
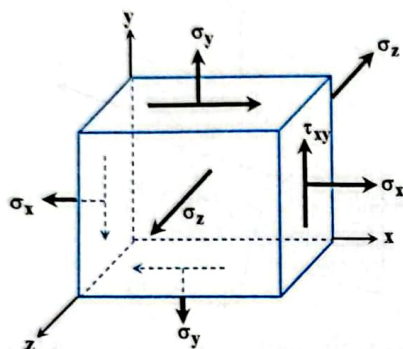
برش خالص



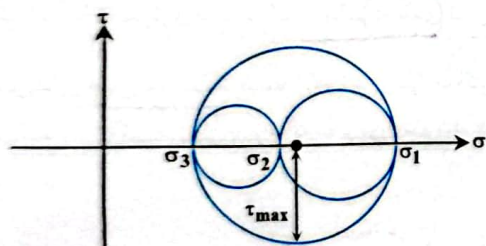
$$\sigma_2 = -\tau_0$$



در حالت کلی برای رسم دایره مور در سه بعد، از نمایی که المان دارای تنش برشی باشد، المان را مورد بررسی قرار داده و تنش‌های اصلی را محاسبه می‌نماییم. با داشتن تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 سه دایره گذرنده از این سه نقطه، دایره‌های مور در حالت سه بعد می‌باشند، به عنوان مثال اگر بخواهیم المان زیر را از نمای زیر بررسی کنیم نتیجه می‌شود:



برای المان فوق تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 را محاسبه می‌نماییم، از طرفی چون در وجوه المان که عمود بر محور Z می‌باشند، تنش برشی وجود ندارد لذا تنش σ_z تنش اصلی دیگر می‌باشد، با فرض $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ دایره مور برای المان فوق به صورت زیر خواهد شد:

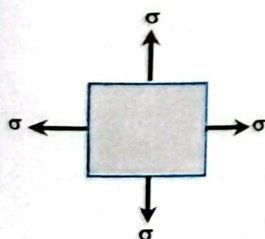


$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ (در صورتی که } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \text{ باشد)}$$

مثال ۲۱: برای حالت تنش نشان داده شده در شکل زیر، تنش برشی ماکزیمم در صفحه و تنش برشی ماکزیمم واقعی برابرند با:



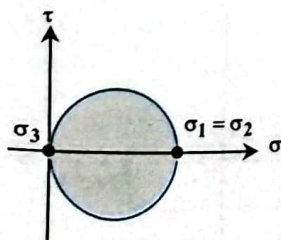
$$\sigma, \sigma \quad (1)$$

$$\sigma, 0 \quad (2)$$

$$\frac{\sigma}{2}, 0 \quad (3)$$

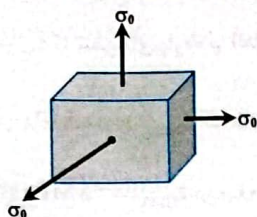
$$\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2} \quad (4)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» دایره مور سه بعدی تنش برای المان نشان داده شده به صورت زیر می‌باشد. این در حالی است که دایره مور تنش مربوط به المان صفحه‌ای تنها یک نقطه است. ($\sigma_1 = \sigma_2$)



$$\tau_{\max} \text{ در صفحه} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma - \sigma}{2} = 0$$

$$\tau_{\max} \text{ مطلق} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma - 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$



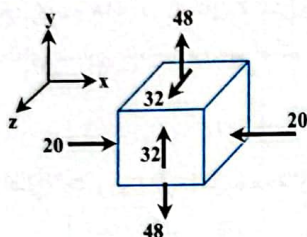
مثال ۲۲: تنش برشی ماکزیمم در المان زیر کدام است؟

- (۱) σ_0
 (۲) $\frac{\sigma_0}{2}$
 (۳) صفر
 (۴) $\sigma_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» المان تحت تنش‌های مساوی کششی قرار دارد. بنابراین می‌توان گفت جسم تحت کشش هیدرواستاتیک است. در جسم تحت

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_0) = 0$$

تنش هیدرواستاتیک، تنش برشی مساوی صفر است. چون:



مثال ۲۳: ماکزیمم تنش برشی برای حالت تنش زیر را بدست آورید.

- (۱) ۳۸
 (۲) ۴۲
 (۳) ۳۶
 (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۲» در صفحه‌ای که تنش قائم فشاری -20 MPa اعمال شده است تنش برشی وجود ندارد. بنابراین، این مؤلفه تنش، تنش اصلی خواهد بود. برای محاسبه مؤلفه‌های دیگر تنش اصلی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{48 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{48 - 0}{2}\right)^2 + 32^2} = 24 \pm 40 \begin{cases} \sigma_1 = 64 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -16 \text{ MPa} \end{cases}$$

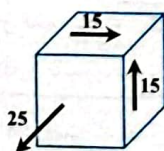
تنش برشی ماکزیمم برابر نصف تفاضل تنش قائم ماکزیمم و تنش قائم مینیمم است.

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(64 - (-16)) = 40 \text{ MPa}$$

مثال ۲۴: در یک حالت سه‌بعدی تنش، تنش برشی ماکزیمم از کدامیک از روابط زیر بدست می‌آید؟

- (۱) (تنش اصلی مینیمم - تنش اصلی ماکزیمم) $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$
 (۲) $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$
 (۳) $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$
 (۴) $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2})$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توضیحات متن درس تنش برشی ماکزیمم مطلق مساوی نصف تفاضل تنش‌های قائم اصلی حداکثر و حداقل است.



مثال ۲۵: برای میدان تنش داده شده ماکزیمم تنش برشی بر حسب $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ چقدر است؟

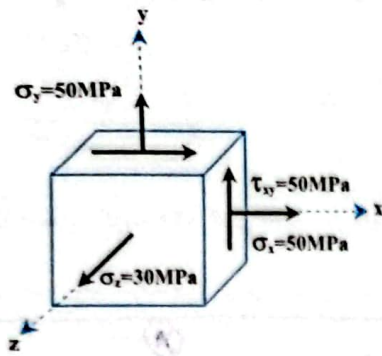
- (۱) ۴۰
 (۲) ۲۰
 (۳) ۱۵
 (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۲» چون در وجهی که تنش عمودی 25 MPa اعمال شده هیچ‌گونه تنش برشی اعمال نشده است بنابراین، این تنش یک تنش اصلی می‌باشد. اما برای محاسبه دو تنش اصلی دیگر در صفحه xy از رابطه مقابل استفاده می‌شود:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{0 + 15^2} = \pm 15 \Rightarrow \sigma_1 = 15, \sigma_2 = -15$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(15 - (-15)) = 15 \text{ MPa}$$

مثال ۲۶: تنش‌های وارده بر المان زیر را در نظر بگیرید. تنش برشی ماکزیمم عبارت است از:



(۱) $\tau_{max} = 50 \text{ MPa}$ در صفحه $(\tau_{xy})_{xy}$

(۲) $\tau_{max} = 25 \text{ MPa}$ در صفحه $(\tau_{xz})_{xz}$

(۳) $\tau_{max} = 50 \text{ MPa}$ در صفحه $(\tau_{yz})_{yz}$

(۴) $\tau_{max} = 25 \text{ MPa}$ در صفحه $(\tau_{xy})_{xy}$

پاسخ: گزینه «۱» در راستای Z تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین σ_z خود یکی از تنش‌های اصلی می‌باشد. از طرفی تنش برشی ماکزیمم داخل صفحه‌های مساوی شعاع دایره مور است، در نتیجه:

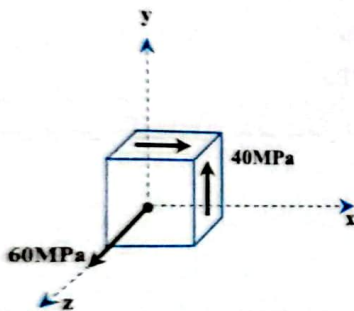
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - 50}{2}\right)^2 + 50^2} = 50$$

تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 در داخل صفحه XY برابر است با:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{ave} \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm R = 50 \pm 50 = 100, 0 \quad ; \quad \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(100 - 0) = 50$$

چون ماکزیمم و مینیمم تنش‌های اصلی مربوط به صفحه XY است لذا تنش برشی ماکزیمم در این صفحه اتفاق می‌افتد.

مثال ۲۷: در المان شکل زیر تنش‌های اصلی بر حسب MPa چقدر می‌باشند؟



(۱) ۸۰، صفر، -۲۰

(۲) ۴۰، ۴۰، -۴۰

(۳) ۴۰، ۴۰، ۴۰

(۴) ۸۰، ۶۰، صفر

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 40 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm R = 0 \pm 40 = \pm 40, \sigma_3 = 60 \text{ MPa}$$

پاسخ: گزینه «۲»

چون در صفحه‌ای که تنش قائم ۶۰ MPa اعمال شده هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد، بنابراین تنش $\sigma_z = 60 \text{ MPa}$ یک تنش اصلی است. دو تنش اصلی دیگر با توجه به روابط گفته شده در صفحه XY محاسبه شدند.

تانسور تنش

همانطور که می‌دانید تنش یک تانسور مرتبه دو می‌باشد؛ زیرا تعداد مؤلفه‌های آن در یک نقطه از جسم تحت تنش، مساوی نه بوده که سه مؤلفه آن تنش‌های قائم σ_x و σ_y و σ_z و شش مؤلفه دیگر آن تنش‌های برشی τ_{xy} و τ_{yx} و τ_{xz} و τ_{zx} و τ_{yz} و τ_{zy} می‌باشند که این شش مؤلفه بدلیل تقارن تانسور تنش، دارای سه مؤلفه مستقل است.

لازم به ذکر است که تقارن تانسور تنش از تعادل دورانی المان سه بعدی تنش حاصل می‌شود. به عنوان مثال از تعادل دورانی المان حول محور Z می‌توان نتیجه گرفت که مؤلفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{yx} با هم برابر هستند.

لازم به ذکر است که اندیس اول در تنش برشی معرف محور عمود بر صفحه بوده و اندیس دوم جهت یا راستای تنش برشی را مشخص می‌کند. به عنوان مثال τ_{xz} به معنای آن مؤلفه از تنش برشی است که در صفحه عمود بر محور X و در راستای محور Z اعمال شده است.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

به طور کلی تانسور تنش را می‌توان به صورت یک ماتریس 3×3 نمایش داد.

این ماتریس دارای سه مقدار اصلی می باشد که به تنش های قائم اصلی موسوم بوده و همان مقادیر ویژه ماتریس هستند. در صورتی که σ تنش قائم اصلی و مقدار ویژه ماتریس باشد، می توان آن را توسط معادله مشخصه زیر بدست آورد. این معادله مشخصه یک معادله درجه سوم بر حسب σ است.

$$\det(\sigma I - \sigma_{ij}) = \det \begin{bmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{yx} & \sigma - \sigma_y & -\tau_{yz} \\ -\tau_{zx} & -\tau_{zy} & \sigma - \sigma_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

I_1 و I_2 و I_3 ، ضرایب معادله درجه سوم فوق بوده که همان تغییرناپذیرهای تانسور تنش (Invariants) می باشند و بر حسب نه مؤلفه تنش یا تنش های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 = \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

با کمک روابط فوق می توان معادله درجه سوم یا معادله مشخصه تانسور تنش را حل نموده و تنش های اصلی را محاسبه نمود. لازم به ذکر است که ماتریس تنش همچنین دارای سه بردار ویژه می باشد که امتداد صفحات اصلی را نشان می دهند.

تذکره ۷: تغییرناپذیرهای تنش I_1 و I_2 و I_3 برای یک نقطه از جسم تحت تنش، همواره مقداری ثابت است. به عبارت دیگر با تغییر امتداد یا صفحات در یک نقطه، مؤلفه های تنش تغییر می کنند، اما تغییرناپذیرهای تنش تغییر نخواهند کرد. این کمیات مستقل از امتداد صفحات تنش می باشند.

در دستگاه XYZ مؤلفه های تنش و همچنین تغییرناپذیرهای تنش به صورت ذیل می باشند.

در دستگاه $X'Y'Z'$ مؤلفه های تنش و همچنین تغییرناپذیرهای تنش به صورت ذیل می باشند.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{تغییر صفحات تنش}]{\text{دوران محورهای مختصات و}} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix}$$

همان طور که مشاهده می شود با تغییر دستگاه محورهای مختصات مؤلفه های تنش تغییر نموده اما تغییرناپذیرهای تنش همچنان ثابت هستند.

تذکره ۸: اگر مؤلفه های سطر و ستون نظیر یک مؤلفه قطری از ماتریس تنش مساوی صفر باشند، آن مؤلفه قطری تنش اصلی محسوب می شود. به عنوان مثال در ماتریس زیر عناصر غیرقطری سطر و ستون متناظر با عنصر دوم قطر مساوی صفر هستند، بنابراین σ_y تنش اصلی محسوب می شود.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_y = \sigma_y \Rightarrow \sigma_y = \sigma_y$$

در این حالت برای محاسبه مقادیر دیگر تنش اصلی می توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$\sigma_1, \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۲۸: تنش های اصلی برای تانسور تنش داده شده عبارت است از:

$$-b, b, b \quad (۴)$$

$$-b, -b, 2b \quad (۳)$$

$$b, b, b \quad (۲)$$

$$-b, +2b, 0 \quad (۱)$$



✓ پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه مقادیر تنش‌های اصلی از رابطه زیر استفاده می‌شود. در نتیجه:

با توجه به روابط ارائه شده برای I_1, I_2, I_3 می‌توان مقادیر آنها را محاسبه نمود.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1) \rightarrow I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = -3b^2, \quad I_3 = \det |\sigma_{ij}| = 2b^3$$

$$(1) \rightarrow \sigma^3 - 3b^2\sigma - 2b^3 = 0$$

تنها گزینه‌ای که در رابطه فوق صدق می‌کند، گزینه ۳ است. البته از روش دیگری نیز می‌توان به نتیجه صحیح دست یافت، بدین صورت که I_1 که مجموع عناصر روی قطر اصلی است در این تانسور مساوی صفر می‌باشد، از طرفی در بین گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که مجموع تنش‌های مساوی صفر است گزینه ۳ است.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2)$$

✓ مثال ۲۹: برای میدان تنش داده شده مطلوب است تنش برشی ماکزیمم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 & 1400 & 0 \\ 1400 & 2100 & 0 \\ 0 & 0 & 7000 \end{bmatrix} \frac{N}{cm^2}$$

$$1317/4 \frac{N}{cm^2} \quad (2)$$

$$3875/6 \frac{N}{cm^2} \quad (1)$$

$$3274/8 \frac{N}{cm^2} \quad (4)$$

$$2882/7 \frac{N}{cm^2} \quad (3)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» روش اول: مقادیر ویژه ماتریس، تنش‌های اصلی می‌باشند:

$$\det[\sigma I - \sigma_{ij}] = 0 \Rightarrow [(\sigma - 2500)(\sigma - 2100) - 1400 \times 1400](\sigma - 7000) = 0$$

$$\sigma_1 = 7000, \quad \sigma^2 - 5600\sigma + 539000 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 4365/2, \quad \sigma_3 = 1234/8$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 2882/7 \frac{N}{cm^2}$$

روش دوم: با توجه به صفر بودن عناصر غیرقطری سطر و ستون سوم می‌توان نتیجه گرفت که σ_z تنش اصلی می‌باشد یا به عبارت دیگر تنش $7000 \frac{N}{cm^2}$ تنش اصلی است. اما برای یافتن دو تنش اصلی دیگر از رابطه روبرو استفاده می‌شود:

$$\sigma_3 = 7000 \frac{N}{cm^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{2500 + 2100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2500 - 2100}{2}\right)^2 + 1400^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 4365/2 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 1234/8 \text{ MPa}$$

اما تنش برشی ماکزیمم مطلق برابر نصف تفاضل تنش قائم ماکزیمم و تنش قائم مینیمم است.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(7000 - 1234/8) = 2882/7 \text{ MPa}$$

✓ مثال ۳۰: یک تیر به طول l و سطح مقطع دایره‌ای شکل در نظر می‌گیریم. محور z در امتداد محور تیر و محورهای x و y منطبق بر یکی از سطوح

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

مقاطع تیر است. ماتریس تانسور تنشها در سیستم مختصات xyz به صورت روبرو است:

کدام بار گذاری بر روی تیر می‌تواند حالت تنشهای فوق را به وجود بیاورد؟

(۲) خمشی خالص حول محور z

(۱) برشی در صفحه xy و پیچشی حول محور z

(۴) خمشی حول محور x و پیچشی حول محور z

(۳) خمشی حول محور x و فشاری در طول محور z

✓ پاسخ: گزینه «۴» اگر حول محور x خمشی ایجاد کنیم تنش در راستای محور تیر یعنی z بوجود آمده و در اثر لنگر پیچشی حول محور z ، مؤلفه‌های تنش برشی τ_{zx} و τ_{zy} به وجود می‌آید.

مثال ۳۱: در نقطه A با مؤلفه‌های تنش $\begin{bmatrix} \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{bmatrix}$ مؤلفه‌های تنش‌های اصلی کدام است؟

- (۱) $2\sigma, 0, 0$ (۲) $3\sigma, 0, 0$ (۳) $-\sigma, \sigma, \sigma$ (۴) $2\sigma, 0, 5\sigma$

پاسخ: گزینه «۲» تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد زیرا I_1 یک نامتغیر بوده و مجموع تنش‌های قائم همواره مقداری ثابت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ; \quad \sigma + \sigma + \sigma = 3\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

تنها در گزینه (۲) مجموع تنش‌های قائم اصلی مساوی 3σ شده است.

مثال ۳۲: تانسور تنش در نقطه‌ای از سازه بصورت $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 2\sigma \\ 0 & \sigma & 0 \\ 2\sigma & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ می‌باشد، تنش‌های اصلی در آن نقطه کدامند؟

- (۱) $2\sigma, \sigma, -\sigma$ (۲) $\sigma, 0, \sigma$ (۳) σ, σ, σ (۴) $2\sigma, 2\sigma, -\sigma$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید ضرایب نامتغیر معادله مشخصه را بدست آورده، سپس با حل معادله درجه سوم ریشه‌های معادله که همان تنش‌های اصلی می‌باشند را بدست آورد، البته می‌توان بدون حل معادله درجه سوم و با تعیین I_1, I_2, I_3 برای گزینه‌ها به جواب صحیح دست یافت. با توجه به رابطه ارائه شده در متن درس، I_1 ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

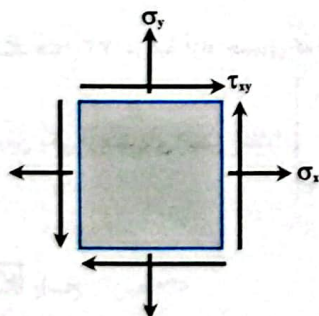
$$I_1 = \sigma_o, \quad I_2 = \sigma_o^2 + (\sigma_o^2 - 4\sigma_o^2) + \sigma_o^2 = -\sigma_o^2, \quad I_3 = \sigma_o(\sigma_o^2) + 2\sigma_o(-2\sigma_o^2) = -3\sigma_o^3$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \sigma^3 - 3\sigma_o\sigma^2 - \sigma_o^2\sigma + 3\sigma_o^3 = 0$$

$$\sigma(\sigma^2 - \sigma_o^2) - 3\sigma_o(\sigma^2 - \sigma_o^2) = 0 \Rightarrow (\sigma - 3\sigma_o)(\sigma - \sigma_o)(\sigma + \sigma_o) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 3\sigma_o, \sigma_2 = \sigma_o, \sigma_3 = -\sigma_o$$

حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای

حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به خاطر تشابه اسمی که دارند نباید یکسان در نظر گرفته شوند، در یک المان تنش صفحه‌ای، کرنش در جهت Z مخالف صفر است، بنابراین المان در حالت کرنش صفحه‌ای نمی‌باشد و در یک المان کرنش صفحه‌ای، تنش در جهت محور Z معمولاً مخالف صفر است. بنابراین حتی در شرایط معمولی نیز این دو حالت همزمان در یک جسم اتفاق نمی‌افتند. (بجز حالت خاصی که تنش‌های عمودی وارد بر المان مساوی و مختلف علامت باشند یعنی $\sigma_x = -\sigma_y$ و در مواقعی که نسبت پواسون مساوی صفر است).



حالت تنش صفحه‌ای: در المان شکل روبرو که حالت تنش صفحه‌ای است شرایط زیر برقرار می‌باشد:

(۱) آن مؤلفه‌هایی از تنش که اندیس Z دارند برابر صفر هستند. $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$

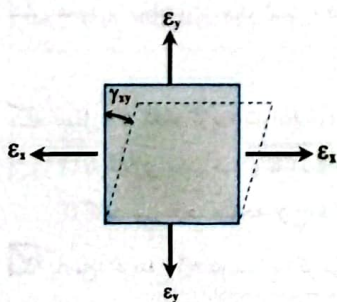
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ می‌توانند مقادیر غیر صفر داشته باشند. $\epsilon_z \neq 0$

(۲) تنها دو مؤلفه کرنش برشی که دارای اندیس Z هستند برابر صفر هستند. $\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ می‌توانند مقادیر غیر صفر داشته باشند.

همان‌طور که در بالا نیز بدان اشاره شد در المان تنش صفحه‌ای، کرنش قائم در جهت محور Z برابر صفر نمی‌باشد چرا که کرنش در جهت عمود بر صفحه تابعی از مؤلفه‌های کرنش داخل صفحه‌ای است.

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$



حالت کرنش صفحه‌ای: المان شکل زیر در حالت کرنش صفحه‌ای بوده که دارای شرایط زیر است:

(۱) آن مؤلفه‌های تنش برشی که دارای اندیس Z بوده برابر صفر می‌باشند. $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ می‌توانند مخالف صفر باشند. $\epsilon_z \neq 0$

(۲) آن مؤلفه‌هایی از کرنش که دارای اندیس Z هستند، برابر صفر می‌باشند.

$\epsilon_z = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ می‌توانند مخالف صفر باشند.

اما تنش قائم در راستای محور Z مخالف صفر است و تابعی از تنش‌های قائم داخل صفحه می‌باشد.

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow \sigma_z = \frac{\nu E}{1 - \nu - \nu^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

حالت تنش صفحه‌ای معمولاً در صفحات نازکی که نیروهای وارده بر وسط آن اثر کنند یا در سطح آزاد یک عضو که عاری از تنش می‌باشد، بوجود می‌آید. برای مثال این حالت، می‌توان به پوسته‌های جدار نازک تحت فشار اشاره نمود. اما در حالت کرنش صفحه‌ای عموماً تغییر شکل‌های ماده در صفحات موازی اتفاق افتاده و این تغییر شکل‌ها در تمام این صفحات یکسان است. در چنین حالتی اگر محور Z عمود بر صفحاتی که تغییر شکل‌ها اتفاق می‌افتد، انتخاب شود کرنش‌های ε_z و γ_{xz} و γ_{yz} صفر شده و تنها مؤلفه‌های کرنش باقی مانده عبارت از ε_x و ε_y و γ_{xy} خواهند بود. چنین حالتی در صفحه‌ای که لبه‌هایش تحت بارهای گسترده یکنواخت قرار گرفته و طرفین جانبی آن توسط تکیه‌گاه‌های صلب مقید شده است و یا در سازه‌هایی که بعد آن در یکی از جهات مثلاً Z نسبت به ابعاد دیگر طویل بوده و بارگذاری یکنواخت (مستقل از Z) باشد، بوجود می‌آید، مانند دیواره سد یا میله‌ای به طول بی‌نهایت که سطح جانبی آن تحت بار گسترده یکنواخت قرار گرفته است.

قانون عمومی هوک

برای یک حالت سه بعدی تنش می‌توان کرنش‌ها را بر حسب مؤلفه‌های تنش به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

هم‌چنین می‌توان مؤلفه‌های تنش را بر حسب مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{cases}$$

$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e$
 $\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e$
 $\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e$
 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$
 $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

مثال ۳۳: در لبه آزاد جسمی که از ماده تراکم‌ناپذیر ساخته شده و در حالت کرنش صفحه‌ای قرار دارد، تانسور تنش به صورت زیر است. کدام مقدار

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

مبین یکی از تنش‌های اصلی است؟

۶۰۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

-۴۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\varepsilon_z = 0 = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

در حالت کرنش صفحه‌ای $\sigma_z \neq 0$ می‌باشد از طرفی چون تنش‌های برشی مربوط به سطر و ستون سوم مساوی صفر است، بنابراین تنش $\sigma_z = 200 \text{ MPa}$ خود یک تنش اصلی است. در لبه آزاد جسم یکی از تنش‌های اصلی مانند σ_y مساوی صفر بوده (همواره بر روی سطح آزاد جسم تنش عمود بر سطح برابر صفر است). همچنین در شرایط تراکم‌ناپذیری $\nu = \frac{1}{2}$ می‌باشد، در نتیجه:

$$200 = \frac{1}{2} \sigma_x \Rightarrow \sigma_x = 400 \text{ MPa}$$

مثال ۳۴: کدام گزینه شرایط کرنش صفحه‌ای در صفحه $x-y$ را بیان می‌کند؟

(۱) بارگذاری یکنواخت و هندسه جسم در جهت Z ثابت باشد.

(۲) تنش در جهت Z صفر باشد.

(۳) کلیه نیروها در صفحه $x-y$ قرار داشته باشند.

(۴) ضخامت جسم در جهت Z در مقایسه با دیگر ابعاد آن ناچیز باشد.

پاسخ: گزینه «۱» ☒ در شرایط کرنش صفحه‌ای هندسه جسم در جهت Z ثابت بوده و بارگذاری نیز یکنواخت می‌باشد مانند دیواره سد (بارگذاری مستقل از Z)

۸

تانسور کرنش

کرنش نیز همانند تنش یک تانسور مرتبه دو متقارن بوده که مؤلفه‌های آن در هر نقطه از جسم به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

در رابطه فوق u_i مؤلفه i ام جابجایی یک نقطه مفروض از جسم بوده و x_i نیز مختصه i ام دستگاه محورهای مختصات مورد نظر است. به عنوان مثال اگر دستگاه محورهای مختصات دکارتی می‌توان نوشت:

$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ در این حالت به عنوان مثال دو مؤلفه کرنش ε_{xx} و ε_{xy} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

در این حالت تانسور کرنش به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$

اگر دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر گرفته شود، آن‌گاه:

در این حالت تانسور کرنش به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \frac{\gamma_{rz}}{2} \\ \frac{\gamma_{\theta r}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\theta z}}{2} \\ \frac{\gamma_{zr}}{2} & \frac{\gamma_{z\theta}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های کرنش در دستگاه مختصات قطبی برحسب مؤلفه‌های جابجایی در هر نقطه از جسم به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \\ \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases}$$

در رابطه فوق u, v, w به ترتیب جابجایی در جهت شعاعی، محیطی و در راستای محور Z می‌باشد.

همانند روشی که برای تعیین تنش‌های اصلی به کار برده شد، برای تعیین مقادیر کرنش‌های اصلی کافی است معادله مشخصه کرنش که در زیر آورده شده

$$\det[\varepsilon I - \varepsilon_{ij}] = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0$$

است، حل شود:

I_1, I_2, I_3 در رابطه فوق تغییرناپذیرهای کرنش می‌باشند که برحسب مؤلفه‌های کرنش یا کرنش‌های اصلی $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ و ε_3 به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

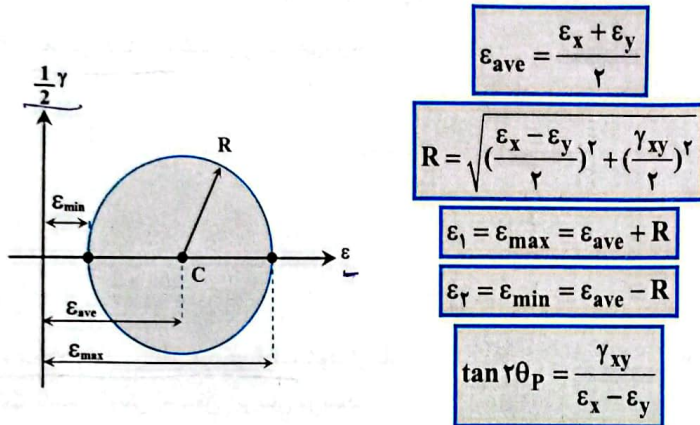
$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \varepsilon_x \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \quad ; \quad I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$



برای حالت کرنش صفحه‌ای نیز می‌توان همانند حالت تنش صفحه‌ای روابط تبدیل کرنش‌ها را تعیین کرد. در این جا به اختصار به ذکر روابط بسنده می‌شود.

$$\begin{cases} \epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

اگر در یک نقطه از جسم، المان مربوطه در راستاهای X و Y افزایش طول دهد کرنش‌های قائم مثبت بوده، همچنین اگر زاویه اولیه المان پس از تغییر شکل کوچکتر شود کرنش برشی دارای مقداری مثبت خواهد بود. دایره مور در حالت کرنش صفحه‌ای نیز به صورت زیر می‌باشد:



از روابط فوق به ترتیب می‌توان میانگین کرنش قائم و شعاع دایره مور، کرنش‌های اصلی و زاویه صفحات اصلی کرنش را تعیین نمود. همچنین می‌توان کرنش برشی ماکزیمم در حالت کرنش صفحه‌ای را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = R \Rightarrow \gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

تذکره ۹: در حالت کرنش صفحه‌ای و در حالت کلی مجموع کرنش‌های قائم مربوط به یک المان مکعبی از ماده، مستقل از جهت گیری المان می‌باشد. به عبارت دیگر:

مقدار ثابت: $\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_{max} + \epsilon_{min}$ در حالت کرنش صفحه‌ای

مقدار ثابت: $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} + \epsilon_{z'} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ در حالت سه بعدی

تذکره ۱۰: در یک ماده همگن و ایزوتروپیک در محدوده الاستیک، محورهای اصلی کرنش بر محورهای اصلی تنش منطبق می‌باشند.

(۶)

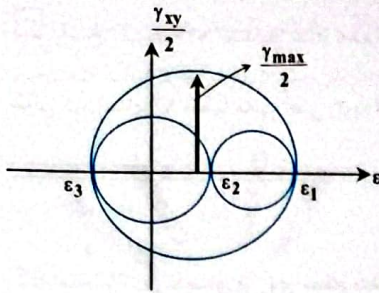
کرنش سه بعدی

در بحث کرنش نیز می‌توان با استفاده از کرنش‌های اصلی $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ، سه دایره مور همانند بحث تنش رسم نمود. از آنجا که با صفر شدن τ_{xy} مقدار γ_{xy} نیز صفر می‌شود ($\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G \times 0 = 0$)، بنابراین محورهای اصلی تنش و محورهای اصلی کرنش برهم منطبقند و به دو صورت می‌توان مقادیر کرنش‌های اصلی را بدست آورد:

۱- با در اختیار داشتن مقادیر کرنش $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ در حالت تنش دو بعدی ($\sigma_3 = 0$) از روی دایره مور دو بعدی می‌توان ϵ_1, ϵ_2 را محاسبه نموده و با داشتن این دو مقدار کرنش اصلی، کرنش اصلی سوم نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1) \quad ; \quad \begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} \{\sigma_1 - \nu\sigma_2\} \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E} \{\sigma_2 - \nu\sigma_1\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)}{1 - \nu^2} \\ \sigma_2 = \frac{E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)}{1 - \nu^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2), (2) \rightarrow \epsilon_3 = \frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$



البته اگر حالت کرنش صفحه‌ای حاکم باشد، $\epsilon_3 = 0$ می‌باشد.

با معلوم بودن سه کرنش اصلی دایره مور کرنش به صورت زیر رسم می‌شود: (با فرض $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$)

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}}{2} \Rightarrow \gamma_{\max} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}$$

۲- با در اختیار داشتن $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ، در حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_z = 0$)، مقادیر کرنش‌های اصلی با محاسبه تنش‌های اصلی σ_1, σ_2 به صورت زیر

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad ; \quad \epsilon_3 = \frac{\nu}{\nu-1}(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{-\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

محاسبه می‌شوند:

مثال ۳۵: در نقطه‌ای از یک جسم تحت بار، حالت کرنش صفحه‌ای حکم فرماست. اگر در این نقطه کرنش‌ها برابر باشند با:

$$\epsilon_x = 400 \times 10^{-6}, \quad \epsilon_y = 200 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = 200 \times 10^{-6}$$

کرنش‌های اصلی در امتدادهای زیر اتفاق می‌افتد.

$22/5^\circ$ (۱)	$22/5^\circ$ (۲)	30° (۳)	$-22/5^\circ$ (۴)
$67/5^\circ$	$112/5^\circ$	120°	$22/5^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» طبق رابطه زیر می‌توان زاویه صفحات کرنش‌های اصلی را بدست آورد.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \Rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{200 \times 10^{-6}}{400 \times 10^{-6} - 200 \times 10^{-6}} = 1 \Rightarrow 2\theta_p = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$$

مثال ۳۶: اگر کرنش‌های نقطه‌ای به صورت $\epsilon_x = -0.00012, \epsilon_y = 0.00112, \gamma_{xy} = -0.00020$ اندازه‌گیری شده باشند، کرنش‌های اصلی و امتدادهای مربوطه را تعیین کنید.

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

پاسخ: با توجه به رابطه روبرو می‌توان کرنش‌های اصلی را بدست آورد:

$$\Rightarrow \epsilon_{1,2} = \frac{-0.00012 + 0.00112}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-0.00012 - 0.00112}{2}\right)^2 + \left(\frac{-0.00020}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{1,2} = 0.0005 \pm 0.000628 \Rightarrow \epsilon_1 = 0.00112, \epsilon_2 = -0.000088$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{-0.00020}{-0.00012 - 0.00112} = 0.16129 \Rightarrow 2\theta_p = 9.2^\circ, 189.2^\circ \Rightarrow \theta_p = 4.6^\circ, 94.6^\circ$$

مثال ۳۷: در صورتی که در یک وضعیت کرنش صفحه‌ای $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}, \epsilon_y = 200 \times 10^{-6}, \gamma_{xy} = 150 \times 10^{-6}$ باشد، مطلوبست محاسبه حداکثر کرنش برشی مطلق.

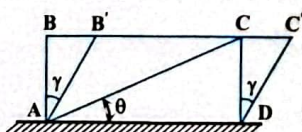
618×10^{-6} (۴)	76×10^{-6} (۳)	200×10^{-6} (۲)	100×10^{-6} (۱)
--------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------

پاسخ: گزینه «۴» طبق رابطه زیر می‌توان کرنش ماکزیمم را بدست آورد.

$$(\gamma_{xy})_{\max} = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \sqrt{(600 \times 10^{-6})^2 + 150^2 \times 10^{-12}} = 618 \times 10^{-6}$$

از طرفی چون وضعیت کرنش صفحه‌ای است، بنابراین $\epsilon_z = 0$ بوده و کرنش برشی ماکزیمم بدست آمده در مقدار مطلق کرنش برشی حداکثر است.

مثال ۳۸: در شکل زیر کرنش قطری برحسب کرنش برشی $\gamma = \frac{\tau}{G}$ کدام است؟



$\frac{\gamma}{2} \sin \theta$ (۲)	$\gamma \sin 2\theta$ (۱)
------------------------------------	---------------------------

$\frac{\gamma}{2} \sin \theta$ (۴)	$\gamma \sin \theta$ (۳)
------------------------------------	--------------------------



✓ پاسخ: گزینه «۴» به دلیل عدم تغییرات طول در جسم تنها برش ساده در جسم روی داده و کرنش‌های قائم مساوی صفر می‌باشند، در نتیجه کرنش

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

طولی در راستای x' که با محور افقی زاویه θ می‌سازد برابر است با:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0 \Rightarrow \epsilon_{x'} = \frac{\gamma}{2} \sin 2\theta$$

مثال ۳۹: در نقطه‌ای بر روی سطح بدنه جسمی کرنش‌های اصلی منطبق بر سطح عاری از بار جانبی خارجی برابر $\epsilon_1 = +3/5 \times 10^{-4}$ و $\epsilon_2 = +1 \times 10^{-4}$ اندازه‌گیری شده است. اگر مدول برش برابر $G = 8 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون برابر $\nu = 0.25$ باشد، مقدار حداکثر تنش برشی در نقطه مزبور بر حسب MPa چقدر است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۲/۸ (۲)

۴ (۱)

✓ پاسخ: گزینه «۱» چون سطح خارجی عاری از بارگذاری خارجی جانبی است پس تنش در راستای عمود بر سطح جسم و تنش برشی مماس بر سطح جسم برابر صفر بوده و در نتیجه جسم در حالت تنش صفحه‌ای است و کرنش اصلی در جهت سوم برابر است با:

$$\epsilon_3 = \frac{\nu}{\nu - 1} (\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{0.25}{-0.75} (1 + 3/5) \times 10^{-4} = -1/5 \times 10^{-4}$$

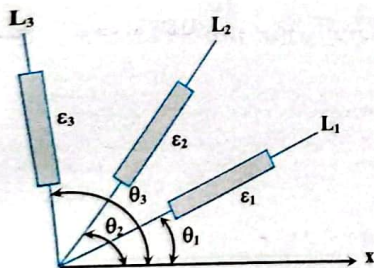
$$\gamma_{\max} = (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}) = (3/5 \times 10^{-4} + 1/5 \times 10^{-4}) = 5 \times 10^{-4}$$

از طرفی کرنش برشی ماکزیمم برابر است با:

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} = 8 \times 10^3 \times (5 \times 10^{-4}) = 4 \text{ MPa}$$

اندازه‌گیری کرنش

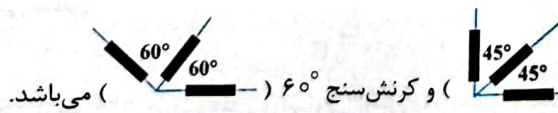
با استفاده از کرنش‌سنج‌های الکتریکی می‌توان به روش راحت و دقیقی کرنش‌های قائم را در کاربردهای عملی اندازه‌گیری کرد. بدین ترتیب که با استفاده از ترکیب و نصب سه کرنش‌سنج که با محور x به ترتیب زوایای θ_1 و θ_2 و θ_3 می‌سازند، کرنش را در سه راستای مذکور محاسبه کرده $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ سپس با حل سه معادله زیر، کرنش قائم در راستای x و y و همچنین کرنش برشی γ_{xy} محاسبه می‌شود:



$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3 \end{cases}$$

در رابطه فوق $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ معلوم بوده و ϵ_x, ϵ_y و $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ مجهول می‌باشند.

اکنون با داشتن کرنش‌های ϵ_x و ϵ_y و $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ و با استفاده از قانون هوک می‌توان مؤلفه‌های تنش را محاسبه نمود.



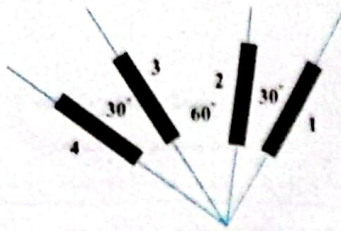
می‌باشد.

ترکیب‌های کرنش‌سنجی که بیشتر در صنعت متداول است، کرنش‌سنج 45° و کرنش‌سنج 60° (و کرنش‌سنج 60°) می‌باشد. به عنوان مثال در یک ترکیب کرنش‌سنج 45° می‌توان نتیجه گرفت:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 45^\circ, \theta_3 = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_x \times 1 + \epsilon_y \times 0 + \gamma_{xy} \times 0 \Rightarrow \epsilon_x = \epsilon_1 & (1) \\ \epsilon_2 = \epsilon_x \times \frac{1}{2} + \epsilon_y \times \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \times \frac{1}{2} \xrightarrow{(1), (2)} \epsilon_2 = \frac{1}{2} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_3 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} & (3) \\ \epsilon_3 = \epsilon_x \times 0 + \epsilon_y \times 1 + \gamma_{xy} \times 0 \Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_3 & (2) \end{cases} \quad \xrightarrow{(3)} \gamma_{xy} = 2\epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_3)$$

مثال ۴۰: چهار عدد کرنش سنج Strain gage در نقطه‌ای از جسم الاستیک مطابق شکل نصب گردیده‌اند. اگر مقادیر کرنش قرائت شده توسط کرنش سنج‌های ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر باشند با: $\epsilon_1 = 4 \times 10^{-6}$ و $\epsilon_2 = 12 \times 10^{-6}$ و $\epsilon_3 = 6 \times 10^{-6}$ ، مقداری که کرنش سنج شماره ۴ باید قرائت کند چقدر خواهد بود؟

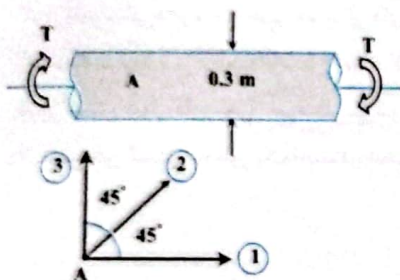


- (۱) 10×10^{-6}
 (۲) 8×10^{-6}
 (۳) -8×10^{-6}
 (۴) -2×10^{-6}

پاسخ: گزینه «۴» کرنش سنج‌های (۱) و (۳) و همچنین کرنش سنج‌های (۲) و (۴) برهم عمودند، پس طبق تذکره ۹ می‌توان نوشت:

$$\epsilon_1 + \epsilon_3 = \epsilon_2 + \epsilon_4 \Rightarrow (4 \times 10^{-6} + 6 \times 10^{-6}) = 12 \times 10^{-6} + \epsilon_4 \Rightarrow \epsilon_4 = -2 \times 10^{-6}$$

مثال ۴۱: در یک استوانه جدار نازک تحت پیچش وضعیت کرنش در سه امتداد $\epsilon_r = 0/0002$ ، $\epsilon_\theta = 0/0004$ ، $\epsilon_z = -0/0001$ در نقطه A خوانده شده است. مقدار پیچش T را بدست آورید. قطر بیرونی ۳۰ cm و ضخامت لوله ۲۰ mm است. $G = 1 \times 10^{11}$ (Pa).



- (۱) ۷۰ kN.m
 (۲) ۱۶۱/۷ kN.m
 (۳) ۳۲۳/۴ kN.m
 (۴) $2/59 \times 10^3$ kN.m

پاسخ: گزینه «۳» برای حل مسئله از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\epsilon = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow \epsilon_1 = 0/0002 = \epsilon_x + \epsilon_y \times 0 + \gamma_{xy} \times 0 \Rightarrow \epsilon_x = 0/0002$$

$$\theta_r = 45 \Rightarrow \epsilon_r = 0/0004 = \epsilon_x \times \frac{1}{2} + \epsilon_y \times \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \times \frac{1}{2}$$

$$\theta_r = 90 \Rightarrow \epsilon_r = -0/0001 = \epsilon_x \times 0 + \epsilon_y \times 1 + \gamma_{xy} \times 0 \Rightarrow \epsilon_y = -0/0001$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = 0/0008 - 0/0002 + 0/0001 = 0/0007$$

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = 10^{11} \times 0/0007 = 70 \times 10^6 \text{ Pa} = 70 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \frac{J}{R} = \frac{70 \times 10^6 \times \frac{\pi}{32} (0/3^4 - 0/02^4)}{0/15} = 161727 \text{ N.m} \approx 161/7 \text{ kN.m}$$

مثال ۴۲: کرنش‌های اندازه‌گیری شده در راستای صفر درجه و 45° و 90° در یک نقطه از سازه تحت اثر یک بارگذاری به ترتیب برابر ϵ_x و ϵ_y و ϵ_z می‌باشند. در این نقطه کرنشهای اصلی کدامند؟

- (۱) $\epsilon_x, -\epsilon_x$ (۲) $\epsilon_x, -\epsilon_y$ (۳) $\epsilon_x, -2\epsilon_y$ (۴) $\epsilon_x, -4\epsilon_y$

پاسخ: گزینه «۲» طبق رابطه زیر می‌توان نوشت:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

$$\theta = 0 \xrightarrow{(1)} \epsilon_1 = -\epsilon_x = \epsilon_x + 0 + 0 \Rightarrow \epsilon_x = -\epsilon_x \quad (2) \quad \theta = 90 \xrightarrow{(1)} \epsilon_r = \epsilon_y = 0 + \epsilon_y + 0 \Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_y \quad (3)$$

$$\theta = 45 \xrightarrow{(1)} \epsilon_r = \epsilon_x = \epsilon_x \times \frac{1}{2} + \epsilon_y \times \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = 8\epsilon_x \quad (4)$$



اما مختصات مرکز دایره مور کرنش و همچنین شعاع آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\epsilon_x), (\epsilon_y), (\gamma_{xy}) \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \Delta\epsilon_o, \quad \epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-\epsilon_o + \Delta\epsilon_o}{2} = \epsilon_o$$

$$\epsilon_{max} = \epsilon_{ave} + R = \epsilon_o + \Delta\epsilon_o = \epsilon_o; \quad \epsilon_{min} = \epsilon_{ave} - R = \epsilon_o - \Delta\epsilon_o = -\epsilon_o$$

مخازن تحت فشار

مخازن تحت فشار مانند مخازن گروی و استوانه‌ای نمونه‌ای بارز از مسائل تنش صفحه‌ای می‌باشند، در جداره این مخازن به لحاظ آنکه تحت خمش مقاومت کمی از خود نشان می‌دهد، می‌توان نیروهای داخلی وارد بر یک قسمت جداره این مخازن را مماس بر سطح آن فرض نمود. قاعده کلی برای مخازن جدار نازک

آن است که نسبت شعاع به ضخامت بزرگتر از ده باشد $\left(\frac{r}{t} > 10\right)$ در این حالت تنش‌های بدست آمده در حالت استاتیکی دارای دقت قابل قبولی می‌باشند.

فرضیات مخازن جدار نازک تحت فشار:

۱- سطوح دورانی می‌باشند.

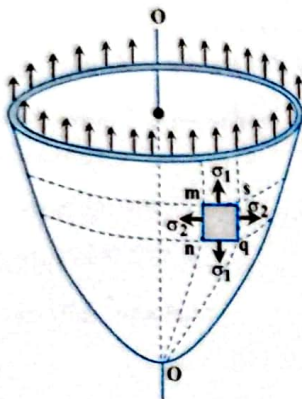
۲- فشار لزوماً یکنواخت نیست ولی نسبت به محور متقارن است.

۳- از ناپیوستگی‌های سطح نظیر خمیدگی‌های تند و تیز صرف‌نظر می‌شود.

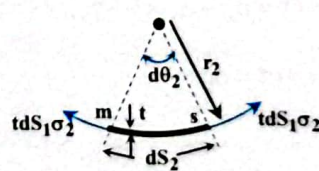
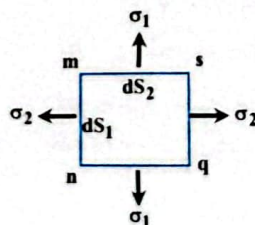
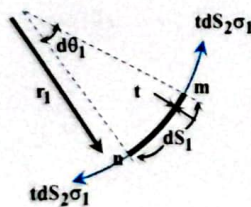
۴- ضخامت دیواره در مقایسه با شعاع انحناء کوچک است.

۵- از خمش دیواره‌های مخزن صرف‌نظر می‌شود.

۶- تنش‌های کششی به طور یکنواخت در ضخامت آن توزیع شده است.



اگر المان $msqn$ از جداره مخزن را جدا نموده و دیاگرام آزاد آن رسم شود، بر جداره‌های آن، تنش‌های قائم کششی σ_1 و σ_2 اعمال می‌شود. تنش کششی در امتداد نصف‌النهار بوده و σ_2 تنش کششی در امتداد عمود بر نصف‌النهار است.



نیروهای کششی ناشی از تنش σ_1 عمود بر وجوه ms و nq در راستای عمود بر جزء و در راستای شعاعی دارای مؤلفه زیر است:

$$\text{مؤلفه نیروی کششی ناشی از تنش } \sigma_1 \text{ در راستای شعاعی} = r[tds_r \sigma_1] \sin \frac{d\theta_1}{2} \quad (d\theta_1 \ll 1) \Rightarrow \sin \frac{d\theta_1}{2} \approx \frac{d\theta_1}{2} \rightarrow tds_r \sigma_1 d\theta_1 = tds_r \sigma_1 \frac{dS_1}{r_1}$$

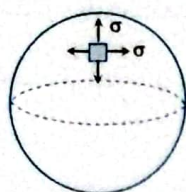
نیروهای کششی ناشی از تنش σ_2 عمود بر وجوه mn و sq در راستای عمود بر جزء و در راستای شعاعی دارای مؤلفه زیر است:

$$\text{مؤلفه نیروی کششی ناشی از تنش } \sigma_2 \text{ در راستای شعاعی} = r[tds_r \sigma_2] \sin \frac{d\theta_2}{2} \quad (d\theta_2 \ll 1) \Rightarrow \sin \frac{d\theta_2}{2} \approx \frac{d\theta_2}{2} \rightarrow tds_r \sigma_2 d\theta_2 = tds_r \sigma_2 \frac{dS_2}{r_2}$$

حاصل جمع مؤلفه‌های عمودی بر وجوه المان با فشار عمود بر جزء (P) مزبور در حال تعادل قرار می‌گیرد:

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow t\sigma_1 \frac{dS_1 dS_2}{r_1} + t\sigma_2 \frac{dS_1 dS_2}{r_2} = PdS_1 dS_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{P}{t}}$$

در رابطه فوق، r_1 شعاع انحناء مخزن در جهت نصف‌النهاری و r_2 شعاع انحناء مخزن در جهت عمود بر نصف‌النهار می‌باشد. همچنین P فشار نسبی داخل مخزن و t ضخامت جدار مخزن را نشان می‌دهد.

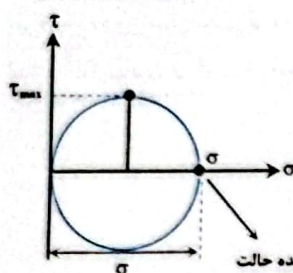


الف) مخازن کروی تحت فشار: در کره بدلیل تقارن موجود در شکل آن، اگر تحت فشار داخلی نسبی P قرار گیرد هر المان دلخواه از آن تحت اثر تنش‌های کششی یکنواخت در تمامی جهات قرار می‌گیرد. اگر فشار داخلی (نسبی) مساوی P ، ضخامت جدار t و شعاع داخلی کره r باشد، تنش کششی ایجاد شده مساوی است با:

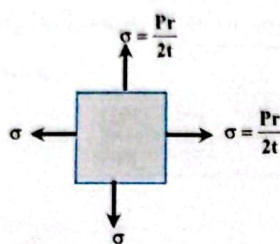
$$\frac{\sigma_1}{r_i} + \frac{\sigma_2}{r_i} = \frac{P}{t} \quad r_i = r_o = r, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma = \frac{Pr}{2t} = \frac{Pd}{4t}$$

دگر این نکته لازم است که اگر فشار داخل و بیرون مخزن با یکدیگر برابر باشند هیچ گونه تنش در جداره مخزن ایجاد نمی‌شود و تنها افزایش فشار داخلی نسبت به فشار بیرونی سبب ایجاد تنش در مخزن خواهد شد.

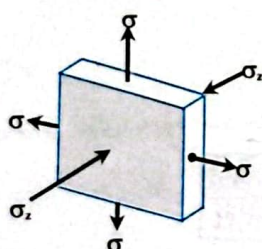
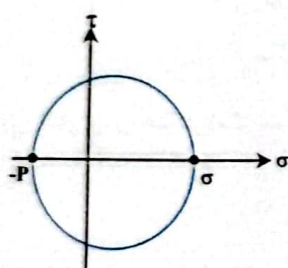
البته اگر فشار خارجی بیشتر از فشار داخلی باشد امکان گسیخته شدن مخزن در اثر پدیده کماتش وجود خواهد داشت. در المان واقع بر سطح خارجی مخزن تنها تنش‌های کششی σ بر جداره جانبی المان اعمال می‌شود و تنش‌های برشی داخل صفحه مساوی صفر است. در نتیجه تنش σ تنش اصلی بوده و دایره مور مربوط به این حالت تنش صفحه‌ای (صفحه مماس بر سطح ظرف) به صورت یک نقطه می‌باشد. ولی به هر جهت تنش برشی ماکزیمم در جداره ظرف صفر نمی‌باشد و مساوی شعاع دایره مور است و نظیر دوران 45° در خارج صفحه‌ی تنش است. دایره مور برای المان سه بعدی تنش در سطح خارجی یک کره جدار نازک به صورت روبرو می‌باشد.



این نقطه نشان دهنده حالت تنش اعمال شده بر یک المان واقع بر سطح خارجی مخزن کروی است.



$$\tau_{\max}(\text{in plane}) = 0, \quad \tau_{\max} \text{ مطلق} = \frac{1}{2} \sigma = \frac{Pr}{4t}$$



شکل فوق مربوط به دایره مور المان سه بعدی تنش برای یک المان واقع بر سطح خارجی مخزن کروی می‌باشد. اما تنش در سطح داخلی مخزن تنها شامل تنش‌های کششی σ نمی‌باشد بلکه تنش فشاری $\sigma_z = -P$ نیز بر سطح داخلی المان اعمال می‌شود. بنابراین دایره مربوط به المان سه بعدی تحت تنش برای یک المان بر روی سطح داخلی مخزن کروی به شکل روبرو است:

در شکل فوق همچنان σ_z, σ تنش‌های اصلی می‌باشند و تنش برشی داخلی صفحه‌ای مساوی صفر است.

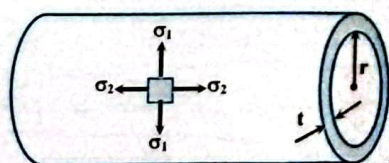
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma = \frac{Pr}{2t}, \quad \sigma_z = -P, \quad \tau_{\max}(\text{in plane}) = 0$$

مقدار تنش برشی ماکزیمم بر روی المان‌هایی که از 45° دوران حول محورهای x و y بدست می‌آیند برابر است با:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(\sigma - (-P)) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma + P}{2} = \frac{Pr}{4t} + \frac{P}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{Pr}{4t} \left(1 + \frac{2t}{r}\right)$$

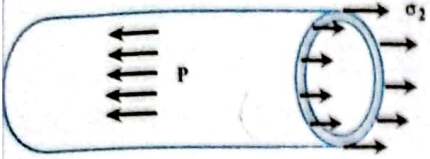
می‌توان از جمله $\frac{2t}{r}$ در مقایسه با عدد یک صرف‌نظر نمود. چون ضخامت جداره از شعاع داخلی بسیار کوچکتر است. تنش برشی ماکزیمم در رابطه فوق،

تنش برشی ماکزیمم مطلق در یک مخزن کروی می‌باشد.



ب) مخازن استوانه‌ای تحت فشار: در مخازن جدار نازک استوانه‌ای بدلیل تقارن محوری ظرف و محتوای آن نسبت به محور استوانه، هیچ گونه تنش برشی بر المان نشان داده شده اعمال نمی‌شود. بنابراین تنش‌های σ_1 و σ_2 تنش‌های اصلی هستند، تنش σ_1 با نام تنش حلقوی یا تنش مماسی (Hoop Stress) و تنش σ_2 با نام تنش طولی یا محوری (Longitudinal Stress) مشهور است. با نوشتن معادلات تعادل برای المان، تنش‌های σ_1 و σ_2 قابل محاسبه‌اند.

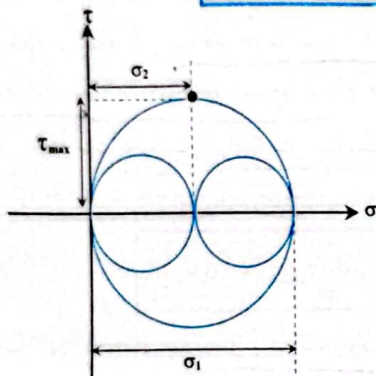
در استوانه شعاع انحناء در جهت طولی بی نهایت بوده $(r_p \rightarrow \infty)$ ، بنابراین $\frac{\sigma_r}{r_p}$ مساوی صفر می شود اما $r_i = r$ می باشد. پس تنش σ_1 را می توان از رابطه زیر بدست آورد. اما برای تعیین σ_r کافی است استوانه را برشی طولی زده سپس در این راستا، معادله تعادل را نوشت:



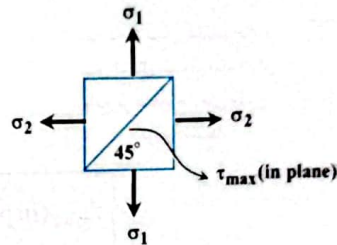
$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1}{r} + 0 &= \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{Pr}{t} = \frac{Pd}{2t} \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow \sigma_r(2\pi r t) - P(2\pi r) = 0 \Rightarrow \sigma_r = \frac{Pr}{2t} = \frac{Pd}{4t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_1 = 2\sigma_r$$

در سطح بیرونی مخزن چون تنش شعاعی (σ_r) مساوی صفر است لذا حالت تنش بوجود آمده، تنش صفحه ای بوده و σ_1 و σ_r تنش های اصلی می باشند (چون تنش برشی بر وجوه المان اعمال نمی شود). حداکثر تنش برشی به وجود آمده بر صفحه ای که از دوران المان تنش، حول محور Z به اندازه 45° بدست می آید، به وقوع می پیوندد.

$$\tau_{\max(\text{in plan})} = \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2} = \frac{Pr}{2t} = \frac{Pd}{4t}$$

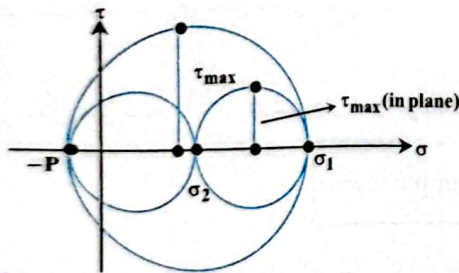


(دایره مور مربوط به یک المان بر روی سطح خارجی مخزن)



ولی تنش برشی حداکثر (ماکزیمم تنش برشی مطلق) بوجود آمده، خارج از صفحه بوده و مساوی است با:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{Pr}{2t} = \frac{Pd}{4t}$$



(دایره مور مربوط به یک المان بر روی سطح داخلی مخزن)

شکل فوق، دایره مور المان، واقع بر سطح خارجی استوانه جدار نازک را نشان می دهد. در سطح داخلی استوانه جدار نازک، وضعیت تنش به صورت زیر می باشد (به علت اعمال فشار بر سطح داخلی المان، تنش سوم که در راستای شعاعی است، برابر $-P$ می باشد).

$$\sigma_1 = \frac{Pr}{t}, \quad \sigma_r = \frac{Pr}{2t}, \quad \sigma_z = -P$$

تنش های فوق، تنش های اصلی می باشند، تنش های برشی حداکثر نیز از روابط زیر بدست می آیند:

$$\tau_{\max(\text{in plane})} = \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2} = \frac{Pr}{2t}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_r}{2} = \frac{Pr}{2t} + \frac{P}{2} = \tau_{\max} = \frac{P}{2} \left(\frac{r}{t} + 1 \right)$$

در شکل فوق می توان دایره مور المان واقع بر سطح داخلی مخزن را مشاهده نمود.

تذکره ۱۱: اگر استوانه جدار نازک تحت فشار بین دو تکیه گاه صلب قرار گرفته باشد یا آنکه دارای طولی زیاد باشد، هر المان تحت تنش از استوانه در

حالت کرنش صفحه ای است، بنابراین مؤلفه های تنش محیطی و محوری آن به صورت زیر بدست می آیند: $\sigma_\theta = \sigma_t = \sigma_1 = \frac{Pr}{t}$ تنش محیطی یا مماسی

$$\sigma_r = \nu \times \frac{Pr}{t} = \nu \times \frac{Pr}{t} \quad \sigma_z = \nu \times \frac{Pr}{t} = \nu \times \frac{Pr}{t} \quad \epsilon_a = \epsilon_x = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_a - \nu \sigma_t) = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_1) = 0 \Rightarrow \sigma_r = \nu \sigma_1 \Rightarrow \sigma_z = \nu \sigma_1$$

بنابراین به طور خلاصه برای استوانه‌های جدار نازک دو سر مقید (یا استوانه‌های جدار نازک طولی می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{Pr}{t} \quad (\text{تنش محیطی یا مماسی}) \\ \sigma_r = \frac{vPr}{t} \quad (\text{تنش طولی}) \end{array} \right.$$

در استوانه جدار نازک طولی یا دو سر مقید

تذکره ۱۲: مؤلفه‌های کرنش در استوانه جدار نازک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\epsilon_1 = \epsilon_t = \frac{\text{محیط اولیه} - \text{محیط ثانویه}}{\text{محیط اولیه}} = \frac{2\pi(r+dr) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{dr}{r} \quad \text{یا} \quad \epsilon_1 = \frac{\Delta r}{r}$$

بنابراین تغییرات شعاع در استوانه جدار نازک را می‌توان از حاصل ضرب کرنش محیطی در شعاع استوانه بدست آورد. $(\Delta r = \epsilon_1 \cdot r)$

$$\epsilon_r = \epsilon_a = \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = L \times \frac{1}{E} \{ \sigma_r - v\sigma_1 \} = \frac{1}{E} \{ \sigma_a - v\sigma_1 \}$$

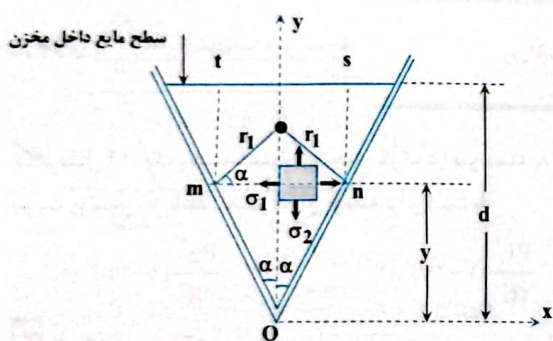
با جایگذاری مقادیر تنش محیطی و تنش محوری، تغییرات طول استوانه بدست می‌آید.

و اما تغییر ضخامت در استوانه نیز توسط رابطه $\Delta t = \epsilon_r \times t$ محاسبه می‌شود که در آن کرنش شعاعی مساوی است با:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - v(\sigma_\theta + \sigma_a) \} = \frac{-v}{E} (\sigma_1 + \sigma_r)$$

ج) مخزن جدار نازک مخروطی تحت فشار: مخازن جدار نازک مخروطی معمولاً

برای نگهداری مایعات مورد استفاده قرار می‌گیرند، اگر به ارتفاع d در مخزن، مایعی به وزن مخصوص γ ($\gamma = \rho g$) قرار گرفته باشد، در هر نقطه از مخزن دو مؤلفه تنش محیطی σ_1 و تنش طولی σ_r ایجاد می‌شود. بنابراین حالت تنش در هر نقطه از المان، تنش صفحه‌ای یا دو محوری می‌باشد. اگر یک المان دلخواه در روی سطح mn در نظر گرفته شود، عمود بر وجوه آن دو مؤلفه تنش σ_1 و σ_r ایجاد می‌شود که می‌توان آن‌ها را به روش زیر محاسبه نمود:



$$P = \gamma(d-y)$$

در روی سطح mn ، شعاع انحناء r_1 به سمت بی‌نهایت میل نموده بنابراین نسبت $\frac{\sigma_r}{r_1}$ به سمت صفر میل می‌کند، اما شعاع انحناء r_1 مساوی است با:

$$r_1 = \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_r}{r_1} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma_1 \times \frac{\cos \alpha}{y \tan \alpha} = \frac{\gamma(d-y)}{t} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\gamma(d-y) y \tan \alpha}{t \cos \alpha}$$

اما برای محاسبه تنش σ_r کافی است از معادله تعادل در جهت y استفاده شود. برآیند تنش σ_r بر روی محیط دایره‌ای mn در جهت y ، باید وزن مربوط به حجم مایع درون فضای $tsnomt$ را خنثی کند، بنابراین:

$$2\pi(y \tan \alpha) t \sigma_r \cos \alpha = \pi(y \tan \alpha)^2 (d-y) \gamma + \pi(y \tan \alpha)^2 \frac{1}{3} y \gamma \Rightarrow \sigma_r = \frac{\gamma y \tan \alpha (d - \frac{2}{3} y)}{2 t \cos \alpha}$$

مؤلفه‌های تنش σ_1 و σ_r تابعی از متغیر y می‌باشند و هر کدام از این مؤلفه‌ها در یک عمق مشخص از مایع به حداکثر مقدار خود می‌رسند.

تذکره ۱۳: حداکثر تنش σ_r در $y = \frac{3}{4}d$ به وقوع پیوسته و مقدار آن برابر است با:

$$\frac{d\sigma_r}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}d \Rightarrow (\sigma_r)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{d^2 \gamma \tan \alpha}{t \cos \alpha}$$

$$\frac{d\sigma_1}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{d}{2} \Rightarrow (\sigma_1)_{\max} = \frac{\gamma d^2 \tan \alpha}{2t \cos \alpha}$$

و حداکثر تنش σ_1 در $y = \frac{d}{2}$ رخ می‌دهد که برابر است با:

نسبت تنش محیطی ماکزیمم به تنش طولی ماکزیمم مساوی $\frac{4}{3}$ است.

تذکره ۱۴: اگر در داخل مخزن به جای مایع، گازی با فشار نسبی ثابت P باشد، مقادیر تنش محیطی σ_1 و طولی σ_2 توسط روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\sigma_1 = \frac{P(d-y)\tan \alpha}{t \cos \alpha} = \frac{P(d-y)\sin \alpha}{t \cos^2 \alpha} ; \quad \sigma_2 = \frac{P(d-y)\tan \alpha}{2t \cos \alpha} = \frac{P(d-y)\sin \alpha}{2t \cos^2 \alpha}$$

اما مقادیر ماکزیمم تنش طولی و محیطی در این حالت در $y = 0$ (کف مخزن) رخ داده و برابر خواهد بود با:

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{Pd \tan \alpha}{t \cos \alpha} ; \quad (\sigma_2)_{\max} = \frac{Pd \tan \alpha}{2t \cos \alpha}$$

مثال ۴۳: یک پوسته جدار نازک استوانه‌ای به شعاع R ، ضخامت h و طول L تحت فشار داخلی P قرار دارد، مدول الاستیسیته پوسته E و ضریب پواسون ν می‌باشد. اگر دو سر پوسته بسته باشد، تغییر ضخامت آن برابر است با:

$$\frac{-2\nu PR}{2E} \quad (۴) \quad \frac{-2\nu PRh}{2E} \quad (۳) \quad \frac{2PRh\nu}{2E} \quad (۲) \quad \frac{2\nu PR}{2E} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» طبق تذکره (۱۲) می‌توان تغییر ضخامت را با استفاده از کرنش شعاعی بدست آورد:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)) = \frac{1}{E}(0 - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_\theta) = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{PR}{2h} + \frac{PR}{h}\right) = -\frac{3\nu PR}{2hE}$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{-3\nu PR}{2E} \quad \text{از طرفی } \epsilon_r = \frac{\Delta h}{h} \text{ می‌باشد، در نتیجه:}$$

مثال ۴۴: یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک دو سر بسته به شعاع a با ضخامت t و طول L تحت فشار داخلی P قرار دارد. اگر مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون ν باشد، تغییر شعاع پوسته برابر است با:

$$\frac{PL^2}{tE}(1-\nu) \quad (۴) \quad \frac{Pa^2}{2tE}(2-\nu) \quad (۳) \quad \frac{PL^2}{2tE}(1-2\nu) \quad (۲) \quad \frac{Pa^2}{2tE}(1-2\nu) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به تذکره (۱۲) می‌توان تغییر شعاع استوانه را با استفاده از کرنش محیطی بدست آورد.

$$\sigma_x = \frac{Pa}{2t} , \quad \sigma_\theta = \sigma_y = \frac{Pa}{t} , \quad \sigma_z = \sigma_r = 0$$

$$\epsilon_y = \epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \frac{\nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \frac{Pa}{tE} - \frac{\nu}{E} \times \frac{Pa}{2t} = \frac{Pa}{2tE}(2-\nu) \quad (۱)$$

از طرفی کرنش محیطی مساوی تغییرات محیط دایره بر محیط اولیه است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(a + \Delta a) - 2\pi a}{2\pi a} = \frac{\Delta a}{a} \xrightarrow{(۱)} \frac{\Delta a}{a} = \frac{Pa}{2tE}(2-\nu) \Rightarrow \Delta a = \frac{Pa^2}{2tE}(2-\nu)$$

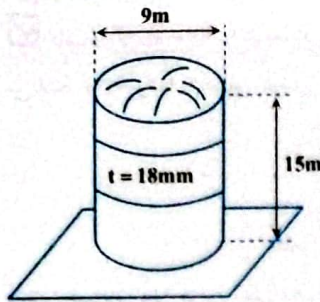
مثال ۴۵: یک ظرف فشاری کروی به قطر $1/2m$ را می‌خواهیم از فولادی به استحکام نهایی $\sigma_u = 450MPa$ بسازیم. با توجه به اینکه ضریب اطمینانی معادل ۱.۴ لازم بوده و ممکن است فشار نسبی به $2MPa$ برسد، مطلوب است تعیین کمترین ضخامت که می‌توان برای این مخزن انتخاب کرد.

پاسخ: برای تعیین تنش در مخزن کروی ابتدا باید شعاع داخلی مخزن کروی بدست آورده شود.

$$r = \frac{1/2}{2} - t = 0.25 - t \Rightarrow r(mm) = 250 - t(mm)$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} = \frac{450}{4} = 112.5MPa$$

$$\sigma_{all} = \frac{Pr}{2t} \Rightarrow 112.5 = \frac{2 \times (250 - t)}{2t} \Rightarrow t \geq 7.9mm$$



مثال ۴۶: موقعی که مخزن نشان داده شده در شکل را با ظرفیت کامل پر کنیم سطح آب به ارتفاع $14/5m$ می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش قائم ماکزیمم و تنش برشی ماکزیمم در این مخزن ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)
پاسخ: ابتدا شعاع داخلی مخزن محاسبه می‌شود.

$$r = \frac{d}{2} - t = \frac{9000}{2} - 18 = 4482mm$$

فشار ماکزیمم ایجاد شده ناشی از فشار ستون آب در کف مخزن برابر خواهد بود با:

$$P = \rho gh = 1000 \frac{kg}{m^3} \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 14/5m = 142245Pa \Rightarrow P = 0.142MPa$$

از طرفی تنش ماکزیمم ایجاد شده در مخزن استوانه‌ای برابر تنش محیطی بوده که مقدار آن مساوی است با:

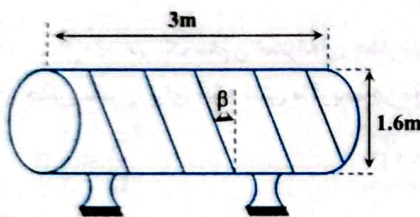
$$\sigma_{max} = \frac{Pr}{t} = \frac{0.142 \times 4482}{18} = 35/26MPa$$

در سطح داخلی مخزن، تنش حداقل که در راستای شعاعی بوده همان فشار داخلی مخزن بوده که مقدار آن برابر است با:

$$\sigma_{min} = \sigma_r = -P = -0.142MPa$$

ما از طرفی تنش برشی ماکزیمم مساوی نصف تفاضل تنش قائم ماکزیمم و تنش قائم مینیمم است.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2} \times (35/26 + 0.142) = 17/75MPa$$



مثال ۴۷: مخزن فشاری نشان داده شده دارای ضخامت $8mm$ بوده و از طریق جوشکاری

به لب ساخته شده است. زاویه خط جوش نسبت به صفحه عرضی معادل $\beta = 20^\circ$ می‌باشد.

فشار نسبی داخل آن مساوی $600kPa$ باشد، مطلوب است:

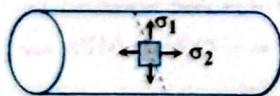
الف - تعیین تنش قائم بر خط جوش ب - تعیین تنش برشی موازی جوش

پاسخ: ابتدا تنش‌های محیطی و محوری در روی سطح خارجی مخزن محاسبه می‌شود:

$$\sigma_1 = \frac{Pr}{t} = \frac{(600 \times 10^{-3} MPa) \times 792}{8} = 59/4MPa$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_1 = 29/7MPa$$

طبق شکل اگر المان به اندازه‌ی 20° پادساعتگرد دوران داده شود، تنش σ_y بر خط جوش عمود خواهد بود. بنابراین از رابطه تبدیلات تنش برای محاسبه σ'_y استفاده می‌شود.



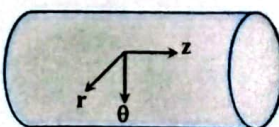
$$\sigma'_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos(2 \times 20) + \tau \sin(2 \times 20)$$

$$\Rightarrow \sigma'_y = 44/55 - 14/85 \cos 40 = 33/174MPa$$

چنین تنش برشی ایجاد شده به موازات خط جوش برابر است با:

$$\tau' = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 40 + \tau \cos 40 \Rightarrow \tau' = -\frac{(29/7 - 59/4)}{2} \times \sin 40 = 9/545MPa$$

مثال ۴۸: یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک دارای شعاع متوسط r و ضخامت t می‌باشد. این مخزن تحت فشار P قرار دارد. کرنش سنجی بر روی



$$\frac{r(1-\nu)}{\epsilon_0 Et} \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon_0 t}{\nu r} \quad (1)$$

$$\frac{\nu t \epsilon_0}{r} \quad (4)$$

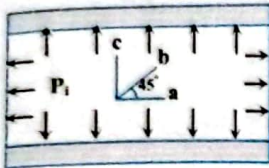
$$\frac{\epsilon_0 Et}{r(\frac{1}{2} - \nu)} \quad (3)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قانون هوک عمومی می‌توان کرنش را در راستای محوری بدست آورد. تنش شعاعی در مخازن جدا نازک مساوی صفر می‌باشد ($\sigma_r = 0$) بنابراین کرنش محوری برابر است با:

$$\epsilon_z = \epsilon_o = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} \Rightarrow \epsilon_z = \epsilon_o = \frac{1}{E} \left\{ \frac{Pr}{2t} - \nu \frac{Pr}{t} \right\} = \frac{Pr}{Et} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \Rightarrow P = \frac{E \epsilon_o t}{r \left(\frac{1}{2} - \nu \right)}$$

طبق توضیحات متن درس تنش محیطی و محوری به ترتیب برابر $\frac{Pr}{2t}$ و $\frac{Pr}{t}$ می‌باشد.

✓ مثال ۴۹: استوانه جدار نازکی دو سر بسته از جنس یک ماده ترد، تحت فشار داخلی p_i قرار گرفته است. اگر بار p_i را آنقدر زیاد کنیم تا استوانه گسیخته شود سطح مقطع شکست.

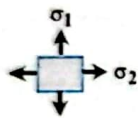


(۱) در امتداد oa خواهد بود.

(۲) در امتداد ob خواهد بود.

(۳) در امتداد oc خواهد بود.

(۴) برای ضخامت‌های متفاوت در جهات مختلف خواهد بود.



✓ پاسخ: گزینه «۱» ماده ترد در جهت عمود بر تنش کششی ماکزیمم گسیخته خواهد شود چون دو سر استوانه بسته است لذا سطح مقطع شکست در امتداد عمود بر تنش مماسی یعنی امتداد oa خواهد بود.

✓ مثال ۵۰: در یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت t_1 با درپوش‌های نیمکره به ضخامت t_2 تحت فشار داخلی P و ضریب پواسون برای جنس مخزن، برای آنکه تنش ماکزیمم در دو قسمت نیمکره و استوانه‌ای یکسان باشد، نسبت ضخامت‌ها چقدر باید انتخاب شود؟

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2-\nu}{1-\nu} \quad (۴)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = 2 \quad (۳)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = 1 \quad (۲)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» با توجه به توضیحات متن درس درباره تنش در مخازن جدار نازک استوانه‌ای و کروی می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{Pr}{t_1} \text{ در استوانه} \\ \sigma_2 = \frac{Pr}{2t_2} \text{ در کره} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2t_2} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 2$$

✓ مثال ۵۱: استوانه جدار نازک طولی به قطر 100mm و ضخامت 3mm متر، تحت اثر فشار داخلی 6MPa قرار گرفته است. تنش طولی ایجاد شده در آن چند MPa است؟ ($\nu = 0.3$)

$$100 \quad (۴)$$

$$50 \quad (۳)$$

$$30 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» چون استوانه بسیار طولی است لذا کرنش طولی در آن صفر است (حالت کرنش صفحه‌ای). بنابراین می‌توان از رابطه کرنش محوری، تنش محوری را بدست آورد.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu \sigma_\theta \} = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu \frac{Pr}{t} = 0.3 \times \frac{6 \times 50}{3} = 30 \text{ MPa}$$

✓ مثال ۵۲: مخزن استوانه‌ای جدار نازک با انتهای بسته و با شعاع داخلی r تحت اثر فشار داخلی P قرار گرفته و همچنین نیروی محوری F به انتهای آن اعمال شده است. مطلوبست مقدار نیروی F به منظور ایجاد برش خالص در دیواره سیلندر.

$$F = \pi r^2 P \quad (۱)$$

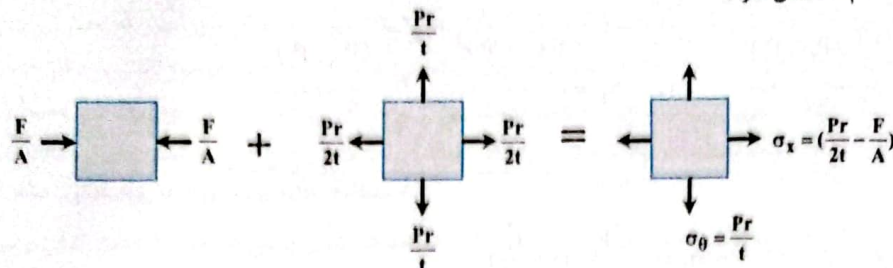
$$F = \frac{2Pr}{t} \quad (۲)$$

$$F = 2\pi r^2 P \quad (۳)$$

(۴) به هیچ وجه تحت شرایط بارگذاری برش خالص روی نمی‌دهد.



✓ پاسخ: گزینه «۳» برای ایجاد برش خالص باید تنش‌های قائم قرینه یکدیگر باشند (حالت برش خالص به زمانی گفته می‌شود که روی المان دو تنش قائم اصلی با ویژگی $\sigma_1 = -\sigma_2$ اعمال شود).



$$\sigma_\theta = -\sigma_x \Rightarrow \frac{Pr}{t} = -\left(\frac{Pr}{rt} - \frac{F}{A}\right) \Rightarrow F = \frac{rPr}{rt} \cdot A = \frac{rPr}{rt} \times 2\pi rt = 2\pi r^2 P$$

✓ مثال ۵۳: یک استوانه جدار نازک دو انتها بسته به شعاع r ، ضخامت t و طول L تحت فشار داخلی P قرار دارد. ضریب پواسون ν برابر است با:

$$\nu_0 = \frac{\epsilon_\theta}{\epsilon_L} \quad (۴)$$

$$\nu = \frac{\epsilon_\theta - 2\epsilon_L}{2\epsilon_\theta - \epsilon_L} \quad (۳)$$

$$\nu = \frac{-\epsilon_\theta}{\epsilon_L} \quad (۲)$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_L}{\epsilon_\theta} \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» مقدار کرنش‌های محیطی و طولی توسط قانون عمومی هوک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \epsilon_L = \frac{1}{E} \{\sigma_L - \nu\sigma_\theta\} \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{E} \{\sigma_\theta - \nu\sigma_L\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_L = \frac{1}{E} \left\{ \frac{Pr}{rt} - \nu \frac{Pr}{t} \right\} \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{E} \left\{ \frac{Pr}{t} - \nu \frac{Pr}{rt} \right\} \end{cases} ; \begin{cases} E\epsilon_L = \frac{Pr}{t} \left(\frac{1}{r} - \nu \right) \\ E\epsilon_\theta = \frac{Pr}{t} \left(1 - \frac{\nu}{r} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\epsilon_L}{\epsilon_\theta} = \frac{1 - \nu}{1 - \frac{\nu}{r}}$$

$$\epsilon_L - \frac{\nu}{r} \epsilon_L = \frac{1}{r} \epsilon_\theta - \nu \epsilon_\theta \Rightarrow \nu = \frac{\epsilon_\theta - 2\epsilon_L}{2\epsilon_\theta - \epsilon_L}$$

✓ مثال ۵۴: استوانه جدار نازکی به شعاع r و طول L و ضخامت t که دو انتهای آن مسدود است تحت فشار داخلی P واقع شده است. تغییر طول

استوانه در کدام گزینه صحیح می‌باشد؟ خواص ارتجاعی مخزن E و ν مفروض است. $\epsilon_{(طولی)} = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_\theta)$

$$\Delta L = \frac{P.r.L}{E.t} (1 + \nu) \quad (۴)$$

$$\Delta L = \frac{P.r.L}{2E.t} (1 - 2\nu) \quad (۳)$$

$$\Delta L = \frac{P.r.L}{E.t} (1 - 2\nu) \quad (۲)$$

$$\Delta L = \frac{P.r.L}{E.t} (1 + 2\nu) \quad (۱)$$

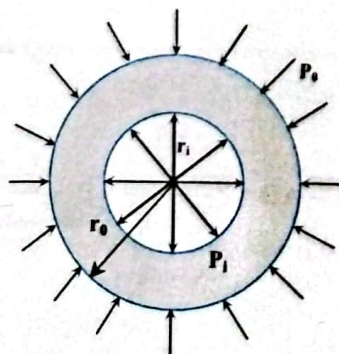
$$\sigma_z = \frac{Pr}{rt}, \quad \sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» در استوانه جدار نازک مؤلفه‌های تنش به صورت روبرو است:

اکنون تغییر طول استوانه را می‌توان با استفاده از مقدار کرنش محوری به صورت زیر به دست آورد:

$$\Delta L = \epsilon_L \times L = \frac{L}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_\theta) = \frac{L}{E} \left(\frac{Pr}{rt} - \nu \frac{Pr}{t} \right) \Rightarrow \Delta L = \frac{PrL}{2Et} (1 - 2\nu)$$

مخازن استوانه‌ای جدار ضخیم



اگر مخزن جدار ضخیم با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o تحت تأثیر فشارهای داخلی P_i و خارجی P_o قرار گیرد تنش‌های بوجود آمده در استوانه جدار ضخیم علاوه بر تنش‌های محیطی و طولی شامل تنش شعاعی نیز می‌شود.

برای حل مسئله ابتدا باید از معادلات تعادل آغاز نمود.

معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای برای یک المان کوچک به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) + f_\theta = 0$$



در استوانه بدلیل تقارن حول محور استوانه $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ می باشد از طرفی نیروهای حجمی f_r و f_θ نیز مساوی صفر می باشند. با حل دو معادله فوق تنش های شعاعی و محیطی به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2 + \frac{r_o^2 r_i^2}{r^2} (P_o - P_i)}{r_o^2 - r_i^2} \quad ; \quad \sigma_t = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} (P_o - P_i)}{r_o^2 - r_i^2}$$

اگر فشار خارجی $P_o = 0$ باشد، روابط فوق به صورت زیر ساده خواهند شد:

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right) \quad \sigma_t = \frac{r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right)$$

در صورتی که عکس العمل های ناشی از فشار داخلی در دو سر استوانه توسط دیوارها تحمل شوند تنش طولی نیز در استوانه بوجود آمده و مساوی است با:

$$\sigma_L = \frac{P_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

تذکره ۱۵: مقادیر بدست آمده برای تنش ها در استوانه های جدار نازک و ضخیم تنها با استفاده از معادلات تعادل تعیین شده است در نتیجه برای محدوده الاستیک و پلاستیک دارای اعتبار است ولی در این تنش ها اثرات تمرکز تنش در نظر گرفته نشده اند.

مثال ۵۵: اگر یک المان کوچک در داخل یک استوانه که تحت فشار داخلی قرار دارد در نظر گرفته شود، کدامیک از فرمولهای زیر معادله رابط

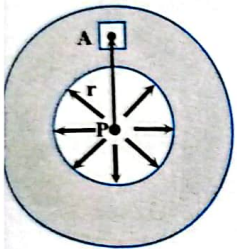
تعادل را برحسب σ_r (تنش شعاعی) و r (شعاع از مرکز) در نقطه A می دهد؟

$$\frac{\sigma_t + \sigma_r}{r} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad (۲)$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad (۴)$$

$$\frac{d\sigma_t}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_t}{r} = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (۳)$$



پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از رابطه تعادل در راستای شعاعی و با مساوی صفر قرار دادن تنش برشی $\tau_{r\theta}$ و نیروی حجمی f_r می توان نتیجه گرفت که گزینه «۳» صحیح است.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r \xrightarrow{\tau_{r\theta}=f_r=0} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

مثال ۵۶: در صورتی که فرم کلی تنش ها در یک مخزن جدار ضخیم تحت فشار P ، به صورت $\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}$ و $\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2}$ بوده و $K = \frac{r_o}{r_i}$

باشد، تنش برشی ماکزیمم τ_{max} کدام ضریب از $\frac{P}{K^2 - 1}$ است؟

$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$K^2 \quad (۲)$$

$$K^2 + ۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» تنش برشی ماکزیمم طبق دایره مور مساوی نصف تفاضل تنش قائم ماکزیمم و تنش قائم مینیمم است. در استوانه جدار ضخیم

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{(A + \frac{B}{r^2}) - (A - \frac{B}{r^2})}{2} = \frac{B}{r^2} = \frac{B}{r_i^2}$$

تنش ماکزیمم برابر تنش محیطی و تنش مینیمم برابر تنش شعاعی است. بنابراین:

$$\sigma_r|_{r=r_o} = 0 \Rightarrow A = \frac{B}{r_o^2} \quad (۱)$$

از طرفی:

$$\sigma_r|_{r=r_i} = -P \Rightarrow A - \frac{B}{r_i^2} = -P \Rightarrow \frac{B}{r_o^2} - \frac{B}{r_i^2} = -P \Rightarrow B = P \frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } r_i^2 \text{ می شود}} B = P \frac{r_o^2}{\frac{r_o^2}{r_i^2} - 1} = P \frac{r_o^2}{K^2 - 1}$$

$$\tau_{max} = P \frac{r_o^2}{K^2 - 1} \times \frac{1}{r_i^2} = P \frac{K^2}{K^2 - 1}$$

معیارهای تسلیم برای مواد نرم

ماده نرم به ماده‌ای اطلاق می‌شود که دارای کرنش شکستنی بیش از ۵٪ باشد. رفتار مواد نرم به گونه‌ای است که تحت افزایش بار محوری به تدریج بر تغییر شکل الاستیک یا ارتجاعی آن افزوده شده تا آنکه در یک مقدار تنش مشخصی که به تنش تسلیم موسوم است وارد فاز پلاستیک می‌شود. در محدوده پلاستیک ماده نرم تغییر شکل قابل توجهی از خود نشان داده و در نهایت پس از ایجاد گلوئی گسیخته می‌شود. مواد نرم عموماً در برابر برش ضعیف‌تر از کشش می‌باشند. از طرفی دیگر طراحی و محاسبات مواد نرم تحت بارهای استاتیکی، براساس تنش تسلیم صورت می‌پذیرد که در زیر به مهمترین پرکاربردترین آنها اشاره می‌شود:

(۱) معیار ترسکا (ملاک تنش برشی ماکزیمم): برطبق این معیار، تا زمانی که حداکثر تنش برشی در جسم از مقدار تنش برشی ماکزیمم در یک نمونه آزمایشگاهی از همان جنس در لحظه شروع تسلیم کمتر باشد، جسم مذکور سالم باقی مانده و تسلیم نخواهد شد. بر طبق این معیار تنش برشی لحظه تسلیم در فرآیند کشش ساده نصف تنش تسلیم کششی است.

$$\tau_y = \frac{1}{2} \sigma_y$$

اگر جسم تحت تنش صفحه‌ای، دارای تنش‌های اصلی هم علامت σ_1 و σ_2 باشد $(|\sigma_1| > |\sigma_2|)$ معیار ترسکا به صورت $|\sigma_1| < \sigma_y$ بیان شده و اگر جسم تحت تنش‌های مختلف علامه باشند، معیار ترسکا به صورت $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_y$ خواهد بود. این معیار از لحاظ ترسیمی در صفحه تنش‌های اصلی به صورت یک تنش ضلعی مورب می‌باشد. ضریب ایمنی در معیار ترسکا به صورت زیر تعریف می‌شود:

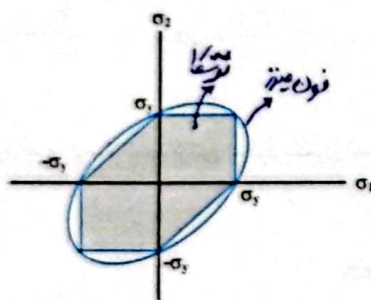
$$F.S. = \frac{\sigma_y}{|\sigma_{\max}|} = \frac{\sigma_y}{\sigma_1} \quad \text{اگر } \sigma_1 \sigma_2 > 0 \text{ و } |\sigma_1| > |\sigma_2|$$

$$F.S. = \frac{\sigma_y}{|\sigma_1 - \sigma_2|} \quad \text{اگر } \sigma_1 \sigma_2 < 0 \text{ و } \sigma_1 > \sigma_2$$

(۲) معیار فون میز (ملاک انرژی کرنشی وایچش ماکزیمم (انرژی برشی ماکزیمم)): بر طبق این معیار، تا زمانی که حداکثر چگالی انرژی کرنشی وایچش ذخیره شده در جسم کمتر از چگالی انرژی کرنشی وایچش ذخیره شده در یک نمونه آزمایشگاهی تحت کشش که به تسلیم رسیده است باشد، ماده مذکور سالم باقی می‌ماند. برطبق این معیار تنش (برشی) تسلیم مساوی ۵۷۷٪ برابر تنش تسلیم در کشش است.

$$\tau_y = 0.577 \sigma_y$$

برای ماده‌ای که تحت تنش صفحه‌ای قرار گرفته و σ_1 و σ_2 تنش‌های اصلی باشند، معیار فون میز به صورت زیر بیان می‌شود:



$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_y^2 \quad \text{بر طبق تنش‌های اصلی}$$

در صورتی که رابطه فوق ارضاء شود جسم در شرایط ایمن قرار دارد. ضریب ایمنی در چنین حالتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F.S. = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}}$$

(۳) معیار فون میز در صفحه تنش‌های اصلی به صورت یک بیضی می‌باشد که شش ضلعی ترسکا در داخل آن محاط است. در نتیجه معیار ترسکا از معیار فون میز محافظه کارانه‌تر است چرا که ناحیه ایمن داخل شش ضلعی کوچکتر از ناحیه ایمن داخل بیضی است.

در صورتی که همان، تحت تنش در سه جهت (بارگذاری عمومی) قرار گیرد، معیار فون میز به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \leq 2\sigma_y^2$$

ضریب اطمینان در چنین حالتی برحسب مؤلفه‌های تنش و همچنین برحسب تنش‌های اصلی $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F.S. = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}} \Rightarrow F.S. = \frac{\sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}$$

$$F.S. = \frac{\sigma_y}{\sigma_e}$$

به طور کلی ضریب اطمینان طبق معیار فون میز به صورت مقابل تعریف می‌گردد:

که σ_e (یا σ') را (تنش مؤثر) در معیار فون میز گویند که به روش گفته شده در بالا (بسته به این که تنش دو بعدی یا سه بعدی باشد) به دست می‌آید. به عنوان مثال، تنش مؤثر برای تنش دو بعدی به صورت زیر است: (σ_1 و σ_2 تنش‌های اصلی هستند).

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 = 6K^2$$

تنش تسلیم
۲۷۰

معیار فون میز
بر حسب تنش اصلی



فصل پنجم: تبدیلات تنش و کرنش

برای مواد ترد نیز معمولاً از دو معیار کولن و مور استفاده می‌شود که اغلب در درس طراحی اجزاء مورد استفاده قرار می‌گیرد. تفاوت مواد ترد و مواد نرم در این می‌باشد که در معیارهای مربوط به مواد ترد، تنش‌ها به جای آنکه با تنش تسلیم سنجیده شوند با استحکام نهایی قطعه σ_{UT} مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه در معیار کولن گسیختگی در جسم زمانی به وقوع می‌پیوندد که تنش قائم ماکزیمم در آن به حد بحرانی یعنی استحکام نهایی قطعه برسد. در معیار کولن مور، ضریب ایمنی قطعه در برابر شکست در یک المان تحت تنش صفحه‌ای در صورتی که تنش‌های اصلی مختلف‌العلامه باشند (σ_1 کششی و σ_2 فشاری) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sigma_1}{S_{UT}} - \frac{\sigma_2}{S_{UC}} = \frac{1}{n}$$

در رابطه فوق σ_1 و σ_2 تنش‌های اصلی بوده و S_{UT} و S_{UC} به ترتیب استحکام کششی و فشاری قطعه می‌باشند.

مثال ۵۷: در یک استوانه جدار نازک که دو سر آن بسته است، قطر داخلی ۲۰۰ mm و ضخامت ۱۰ mm و فشار داخل استوانه برابر ۲۵ MPa می‌باشد. اگر حد تسلیم فلز ۷۷۰ MPa باشد، ضریب اطمینان در مقابل تغییر شکل پلاستیک برای یک نقطه روی سطح داخلی استوانه چقدر است (از تئوری ماکزیمم تنش برشی استفاده شود).

۶ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۳ (۱)

☒ پاسخ: گزینه «۳» چون نسبت ضخامت به شعاع مساوی $\frac{1}{10}$ است، استوانه را جدار نازک فرض کرده، بنابراین تنش برشی ماکزیمم در استوانه جد

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

نازک مساوی است با:

اما بزرگترین تنش قائم و کوچکترین تنش قائم مربوط به یک المان در روی سطح داخلی مخزن استوانه‌ای به ترتیب تنش محیطی و تنش شعاعی خواهد بود که مقدار آن‌ها برابرند با:

$$\sigma_r = -P \quad \text{و} \quad \sigma_1 = \sigma_t = \frac{Pr}{t}$$

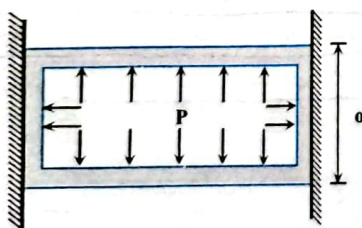
در نتیجه:

$$\tau_{\max} = \frac{Pr}{2t} + \frac{P}{2} = \frac{25 \times 100}{2 \times 10} + \frac{25}{2} = 192.5 \text{ MPa}$$

در تئوری ترسکا تنش برشی تسلیم مساوی نصف تنش کششی تسلیم است. بنابراین:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_Y}{2} = \frac{0.5 \times 770}{2} = 192.5$$

مثال ۵۸: فاصله دو دیوار دقیقاً مساوی طول مخزن در فشار صفر است، فشار را به P می‌رسانیم، چه نیرویی بین مخزن و دیوار رد و بدل می‌شود؟



$$F = (1 - \nu)\pi R^2 P \quad (1)$$

$$F = (1 - 2\nu)\pi R^2 P \quad (2)$$

$$F = (1 - \nu)\pi R^2 P \quad (3)$$

$$F = (1 - \frac{\nu}{2})\pi R^2 P \quad (4)$$

☒ پاسخ: گزینه «۲» نیرویی که از طرف تکیه‌گاه‌ها به دو سر استوانه اعمال می‌شود با نوشتن معادله سازگاری برای کرنش بدست خواهد آمد.

$$\epsilon_x = 0 \Rightarrow -\frac{F}{AE} + \epsilon_x = 0$$

$$\Rightarrow F = AE\epsilon_x \quad (1) \quad , \quad A = 2\pi R t \quad (\text{مساحت مقطع استوانه}) \Rightarrow F = (2\pi R t)E\epsilon_x \quad (2)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu(\sigma_\theta + \sigma_r)}{E} = \frac{Pr}{2tE} - \frac{\nu}{E} \frac{Pr}{t} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{Pr}{2tE}(1 - 2\nu) \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow F = (2\pi R t) \frac{Pr}{2tE}(1 - 2\nu) = \pi R^2 P(1 - 2\nu)$$

مثال ۵۹: در سؤال قبل اگر فشار مخزن را زیاد کنیم طبق تئوری فون میز در چه فشاری مخزن تسلیم می‌شود؟ (Y تنش تسلیم)

$$P = \frac{Yt}{R\sqrt{1-2\nu+\nu^2}} \quad (۴) \quad P = \frac{Yt}{R\sqrt{1+2\nu+\nu^2}} \quad (۳) \quad P = \frac{Yt}{R\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \quad (۲) \quad P = \frac{Yt}{R\sqrt{1+\nu+\nu^2}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» طبق معیار فون میز جسم زمانی به تسلیم می‌رسد که در حالت تنش صفحه‌ای عبارت زیر برقرار باشد:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = Y^2 \quad (۱)$$

در این حالت تنش مماسی مساوی محیطی یا با حالت استوانه دو سرباز است اما مقدار تنش طولی تابعی از مقدار کرنش محوری می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{PR}{t} \\ \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_\theta}{E} = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu \sigma_\theta = \frac{\nu PR}{t} \end{aligned} \right\} \quad (۲)$$

$$(۲), (۱) \Rightarrow \frac{\nu^2 P^2 R^2}{t^2} - \frac{\nu PR}{t} \times \frac{PR}{t} + \frac{P^2 R^2}{t^2} = Y^2 \Rightarrow P = \frac{Yt}{\sqrt{R^2 - R^2 \nu + \nu^2 R^2}} \Rightarrow P = \frac{Yt}{R\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$$

مثال ۶۰: فشار هوا در یک سیلندر جدار نازک به ضخامت t و شعاع R برابر P می‌باشد. اگر مقاومت تسلیم ماده Y باشد، محاسبه نمایید مقدار P را برای حالتی که تسلیم بر مبنای تئوری و اماندگی انرژی و پیچش اتفاق بیفتد.

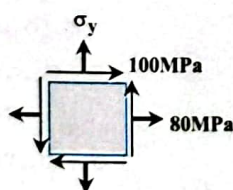
$$P = \frac{Yt}{R} \quad (۱) \quad P = 0.577 \frac{Yt}{R} \quad (۲) \quad P = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Yt}{R} \quad (۳) \quad 0.5Y \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۳» در یک استوانه جدار نازک مقادیر تنش‌های مماسی و طولی برابر خواهند بود با:

$$\sigma_x = \frac{PR}{rt} \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{PR}{t}$$

اما تسلیم طبق معیار فون میز هنگامی رخ می‌دهد که:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = Y^2 \Rightarrow \frac{P^2 R^2}{t^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right) = Y^2 \Rightarrow P^2 = \frac{Y^2 t^2}{R^2 \times \frac{3}{4}} \Rightarrow P = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Yt}{R}$$



مثال ۶۱: حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در شکل. در نقطه‌ای از یک قطعه

ماشین به وجود آمده است. قطعه مذکور از یک آلیاژ آلومینیومی به استحکام

سیلان $\sigma_y = 280 \text{ MPa}$ ساخته شده است. با استفاده از ملاک تنش برش ماکزیم تنش

کششی σ_y را به گونه‌ای بیابید که پدیده تسلیم در قطعه اتفاق بیفتد.

پاسخ: مؤلفه‌های تنش طبق شکل داده شده در صورت مسئله برابر است با:

$$\sigma_x = 80 \text{ MPa} \quad , \quad \tau_{xy} = 100 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_y = ? \quad , \quad \sigma_z = \sigma_{\min} = 0$$

طبق معیار ترسکا می‌توان نوشت:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}\sigma_y \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - 0) = \frac{1}{2}\sigma_y \Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_y$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow 280 = \frac{80 + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{80 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 100^2}$$

$$\Rightarrow 560 - (80 + \sigma_y) = 2\sqrt{\left(\frac{80 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 100^2} \Rightarrow (480 - \sigma_y)^2 = 4 \times \left[\left(\frac{80 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 100^2\right] \Rightarrow \sigma_y = 230 \text{ MPa}$$

مثال ۶۲: در بحرانی ترین نقطه از یک قطعه تانسور تنش به صورت زیر داده شده است. براساس ملاک تسلیم فون میززی σ_y حداقل تنش تسلیم

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماده برای اینکه در آن نقطه تسلیمی رخ ندهد برابر است با:

$$\sigma_y = 4\sigma_0 \quad (۴)$$

$$\sigma_y = 3\sigma_0 \quad (۳)$$

$$\sigma_y = 2\sigma_0 \quad (۲)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» روش اول: می توان با حل معادله مشخصه تنش ابتدا تنش های اصلی را محاسبه نموده سپس با استفاده از معیار فون میززی حداقل تنش تسلیم را بدست آورد.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 \quad I_2 = -\sigma_0^2 - \sigma_0^2 - \sigma_0^2 = -3\sigma_0^2 \quad I_3 = -\sigma_0(-\sigma_0^2) + \sigma_0(\sigma_0^2) = 2\sigma_0^3$$

$$\sigma^3 + (-3\sigma_0^2)\sigma - 2\sigma_0^3 = 0 \Rightarrow \sigma^3 - 3\sigma_0^2\sigma - 2\sigma_0^3 = 0$$

معادله مشخصه تنش به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\sigma^3 - \sigma_0^2\sigma - 2\sigma_0^2\sigma - 2\sigma_0^3 = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma^2 - \sigma_0^2) - 2\sigma_0^2(\sigma + \sigma_0) = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma - \sigma_0)(\sigma + \sigma_0) - 2\sigma_0^2(\sigma + \sigma_0) = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma + \sigma_0)[\sigma^2 - \sigma_0^2 - 2\sigma_0^2] = 0 \Rightarrow (\sigma + \sigma_0)[(\sigma - \sigma_0)(\sigma + \sigma_0)] = 0$$

$$\text{ریشه مضاعف: } \sigma_1 = -\sigma_0, \quad \sigma_2 = 2\sigma_0$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = 2\sigma_0$$

روش دوم: در این روش بدون استفاده از تنش های اصلی به طور مستقیم رابطه تنش تسلیم را با مؤلفه های تنش نوشته و سپس مسئله حل می شود. طبق معیار فون میززی تسلیم در قطعه زمانی آغاز می شود که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}} = \sqrt{\frac{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2 + 6(\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + \sigma_0^2)}{2}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{6(3\sigma_0^2)}{2}} = 2\sigma_0$$

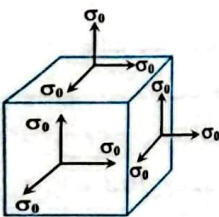
مثال ۶۳: حالت تنش برای یک المان از جسم بارگذاری شده به گونه ای است که تمامی مؤلفه های تنش با هم برابرند. تنشهای اصلی برای این جسم عبارتند از:

$$\sigma_0, \sigma_0, \sigma_0 \quad (۱)$$

$$\sigma_0, 0, \sigma_0 \quad (۲)$$

$$0, 0, 2\sigma_0 \quad (۳)$$

$$\sigma_0, 2\sigma_0, 2\sigma_0 \quad (۴)$$



✓ پاسخ: گزینه «۳» تانسور تنش به صورت $\begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$ می باشد. با توجه به معادله مشخصه تنش برای این تانسور و حل آن می توان ریشه های معادله که تنش های اصلی هستند را بدست آورد.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_0 + \sigma_0 + \sigma_0 = 3\sigma_0 \quad I_2 = I_2 = 0$$

$$\sigma^3 - 3\sigma_0\sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2(\sigma - 3\sigma_0) = 0 \Rightarrow \sigma_{1,2} = 0, \quad \sigma_3 = 3\sigma_0$$

البته بدون حل معادله، می توان گزینه های (۲) و (۴) را حذف نمود چرا که مجموع تنش های اصلی باید مساوی I_1 باشد ($I_1 = 3\sigma_0$).



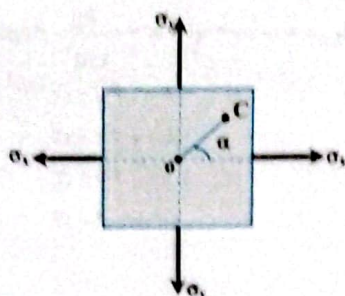
مثال ۳۴: یک مکعب مستطیل در دو امتداد عمودی بر هم تحت تنش های کششی $\sigma_x = \sigma_y$ قرار می گیرد، اگر کرنش در امتداد محور x مساوی با a باشد، در امتداد y چقدر است؟

الف) $\frac{a}{2}$

ب) $\frac{a}{\cos \alpha}$

ج) $a \cos \alpha$

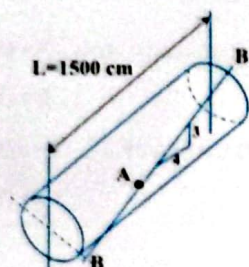
د) $a \sin \alpha$



پاسخ: گزینه «د» چون مستطیل تحت دو تنش عمودی مساوی قرار دارد بنابراین دایره مور آن یک نقطه خواهد بود. در این حالت مؤلفه های کرنش قائم بر راستای x نیز برابر شده و همچنین کرنش برشی نیز مساوی صفر می شود.

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad ; \quad \epsilon_{oc} = \frac{a+a}{2} + \frac{a-a}{2} \cos 2\alpha + 0 = a$$

مثال ۳۵: مخزن استوانه ای شکل زیر از ورقی به ضخامت ۸ میلی متر و جنس فولادی ساخته شده است. قطر داخلی مخزن یک متر می باشد. تنش عمودی بر صفحه BB در محل A برابر است با $\sigma = 410 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. فشار داخل مخزن بر حسب $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ کدام است؟



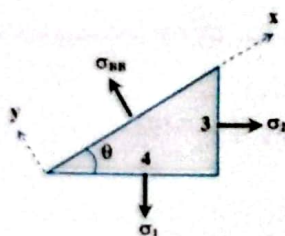
الف) ۵

ب) ۹

ج) ۸

د) ۱۸

پاسخ: گزینه «ج» روش اول: یکی از روشهای محاسبه فشار داخلی مخزن نوشتن معادله تعادل برای المان مثلثی نشان داده شده بر روی سطح خارجی مخزن است.



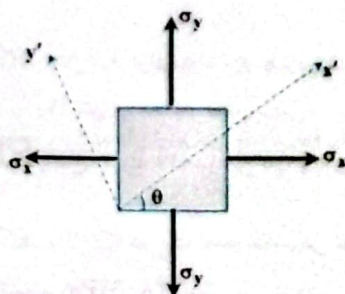
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_{BB} \times 5 - \sigma_r \times 3 \sin \theta - \sigma_1 \times 4 \times \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{BB} \times 5 - \sigma_r \times 3 \times \frac{3}{5} - \sigma_1 \times 4 \times \frac{4}{5} = 0 \quad (1)$$

$$\text{برای مخزن استوانه ای: } \sigma_r = \frac{Pr}{2t}, \quad \sigma_1 = \frac{Pr}{t}$$

$$(1) \Rightarrow 25 \times 410 = 9 \times \frac{P \times 500}{2 \times 8} + 16 \times \frac{P \times 500}{8} \Rightarrow P = 8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

روش دوم:



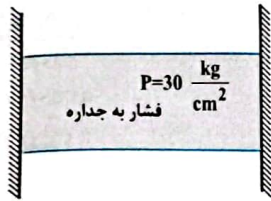
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + 0$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\frac{Pr}{2t} + \frac{Pr}{t}}{2} - \frac{\frac{Pr}{2t} - \frac{Pr}{t}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \sigma_{y'} = \frac{rPr}{4t} + \frac{Pr}{4t} \left[\left(\frac{r}{5} \right)^2 - \left(\frac{r}{5} \right)^2 \right] \Rightarrow 410 = \frac{rP \times 500}{4 \times 8} + \frac{P \times 500}{4 \times 8} \left(\frac{r}{25} \right) \Rightarrow P = 8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

مثال ۶۶: استوانه جدار نازکی از طرف دو قاعده بین دو تکیه‌گاه صلب مطابق شکل مقابل قرار گرفته است. قطر استوانه ۸۰ cm، ضخامت جداره آن

۲ cm، $P = 30 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ و $\nu = 0.3$ می‌باشد. تنش‌های مماسی و طولی بر حسب $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ به ترتیب کدام است؟



۱۸۰، ۶۰۰ (۱)

۶۰۰ و صفر (۲)

۳۰۰، ۶۰۰ (۳)

۳۰۰، ۹۰ (۴)

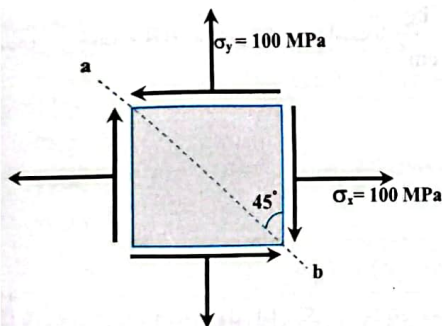
$$\sigma_{\theta} = \frac{PR}{t} = \frac{30 \times 40}{2} = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار تنش محیطی در استوانه جدار نازک برابر است با:

اما چون استوانه در راستای طولی مقید است بنابراین کرنش در راستای طولی مساوی صفر است. از این طریق می‌توان مقدار تنش طولی را بدست آورد.

$$\epsilon_x = 0 = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu \sigma_{\theta} \} \Rightarrow \sigma_x = \nu \sigma_{\theta} = 0.3 \times 600 = 180 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

مثال ۶۷: برای المان نشان داده شده، هر دو تنش‌های برشی و قائم روی صفحه ab مساوی صفر است مقدار τ_{xy} بر حسب MPa چقدر است؟



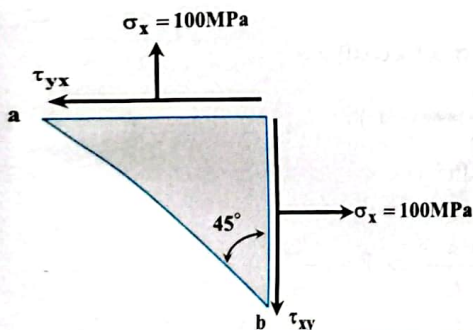
۷۰ (۱)

۵۰ (۲)

۱۰۰ (۳)

۲۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از معادلات تعادل المان مثلی می‌توان به این نتیجه رسید:



$$\tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\tau_{yx} \times A + \sigma_x \times A = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \sigma_x = 100 \text{ MPa}$$

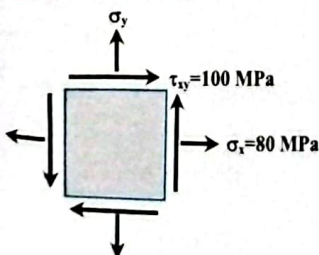
مثال ۶۸: برای مواد نرم بهترین تنوری شکست، کدام تنوری است؟

(۱) تنوری حداکثر تنش برشی (۲) تنوری حداکثر تنش کششی (۳) تنوری فون میزز (۴) تفاوتی نمی‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» در بین تنوری‌های شکست مختلف برای مواد نرم بهترین تنوری، تنوری فون میزز می‌باشد که با نتایج تجربی تطابق بهتری نشان می‌دهد.

مثال ۶۹: در یک قطعه مکانیکی تنش دو بعدی زیر اتفاق افتاده است. با در نظر گرفتن معیار تنش برشی ماکزیمم، σ_y را تعیین کنید. تنش تسلیم

کششی ۲۸۰ MPa است.



۲۸۰ MPa (۱)

۱۱۶ MPa (۲)

۲۱۰ MPa (۳)

۲۳۰ MPa (۴)

✓ پاسخ: گزینه «۲» طبق معیار تنش برشی ماکزیمم، تنش برشی تسلیم برابر نصف تنش کششی تسلیم است.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} ; \tau_{\max} = 0.5\sigma_y \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{100 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 100^2} = 0.5 \times 280 = 140 \text{ MPa}$$

$$\left(\frac{100 - \sigma_y}{2}\right)^2 + 100^2 = 140^2 \Rightarrow \sigma_y = 115.96 \approx 116 \text{ MPa}$$

✓ مثال ۷۰: کدامیک از جملات زیر در خصوص مسائل با تنش‌های چند محوره صحیح است؟

- (۱) زاویه بین صفحات تنش‌های اصلی و ماکزیمم تنش برشی برابر ۹۰ درجه می‌باشد.
- (۲) در صفحاتی که ماکزیمم تنش برشی وجود دارد هیچگونه تنش نرمال وجود ندارد.
- (۳) در صفحاتی که ماکزیمم و مینیمم هستند (صفحات تنش‌های اصلی) تنش برشی ماکزیمم وجود دارد.
- (۴) در صفحاتی که ماکزیمم و مینیمم تنش نرمال (تنش‌های اصلی) وجود دارند هیچگونه تنش برشی وجود ندارد.

✓ پاسخ: گزینه «۴» در صفحات تنش اصلی مقدار تنش برشی صفر است (به توضیحات متن درس رجوع شود).

✓ مثال ۷۱: محور فولادی به قطر ۱۰ mm تحت پیچش قرار دارد اگر تنش تسلیم فولاد در کشش 140 MN/m^2 و ضریب اطمینان طراحی را ۲ فرض

کنیم براساس معیار تسلیم ترسکا گشتاور پیچشی مجاز ماکزیمم عبارتست از:

$$6/87 \text{ Nm} \quad (۴)$$

$$7/94 \text{ Nm} \quad (۳)$$

$$2/28 \text{ Nm} \quad (۲)$$

$$12/2 \text{ Nm} \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۴»

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_y}{n} \Rightarrow \frac{0.5\sigma_y}{n} = \tau_{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \frac{0.5\sigma_y}{n} \times \frac{\pi d^3}{16} = \frac{0.5 \times 140}{2} \times \pi \times \frac{10^3}{16} \Rightarrow T = 6872 \text{ N.mm} = 6/87 \text{ N.m}$$

✓ مثال ۷۲: یک لوله طویل و مستقیم انتقال گاز در داخل زمین و زیر اثر فشار داخلی 10 kg/cm^2 قرار گرفته است. قطر لوله ۵۰ سانتیمتر و ضخامت

جدار آن یک سانتیمتر است. تنش طولی در آن چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است؟ ($\nu = 0.3, E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)

$$500 \quad (۴)$$

$$250 \quad (۳)$$

$$150 \quad (۲)$$

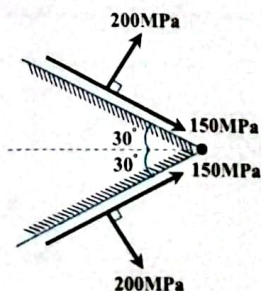
$$75 \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» چون استوانه طویل می‌باشد می‌توان آن را حالت کرنش صفحه‌ای فرض نمود، در نتیجه:

$$\epsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu \sigma_\theta = \nu \frac{PR}{t} = 0.3 \times \frac{10 \times 25}{1} = 75 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

توضیحات مشروح استوانه جدار ضخیم طویل در متن درس ارائه شده است.

✓ مثال ۷۳: وضعیت تنش‌ها در دو صفحه که با هم زاویه ۶۰ می‌سازند مطابق شکل نشان داده شده است. مقدار تنش اصلی چه میزان است؟



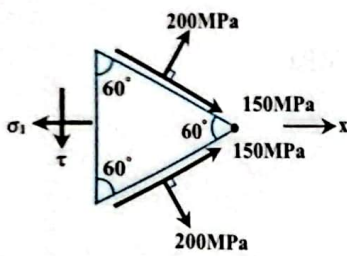
$$\sigma_1 = 200 \text{ MPa} \quad (۱)$$

$$\sigma_1 = 200\sqrt{3} + 150 \text{ MPa} \quad (۲)$$

$$\sigma_1 = 200 + 150\sqrt{3} \text{ MPa} \quad (۳)$$

$$\sigma_1 = 200\sqrt{3} + 150\sqrt{3} \text{ MPa} \quad (۴)$$

✓ پاسخ: با رسم دیاگرام آزاد المان مثلثی شکل و نوشتن معادلات تعادل برای آن می توان نتیجه گرفت که σ_1 تنش اصلی است.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_1 A + 2 \times 150 A \cos 30^\circ + 2 \times 200 A \sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 150 \sqrt{3} + 200 \text{ MPa}$$

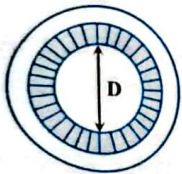
(مؤلفه های تنش اعمال شده بر وجوه مایل همدیگر را در جهت y خنثی می کنند)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

چون تنش برشی بر روی وجه عمودی مساوی صفر است، بنابراین σ_1 تنش اصلی می باشد.

مثال ۷۴: مخزنی به قطر $D = 1/5$ متر و به ارتفاع ۳۰ متر از آب پر شده و توسط تسمه هایی فلزی کمربندی محکم شده است. سطح مقطع تسمه کمربندی

معادل ۳ سانتی متر مربع و تنش کششی مجاز آن $1400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ می باشد. حداکثر فاصله بین دو تسمه چند سانتی متر است؟ (فشار معادل هر متر آب $\frac{1 \text{ N}}{\text{cm}^2}$)

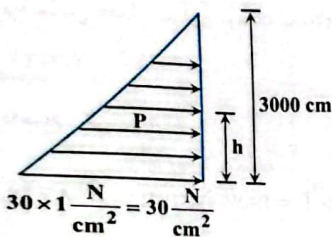


(۱) ۶/۲

(۲) ۸/۹

(۳) ۹/۳

(۴) ۱۸/۶



✓ پاسخ: گزینه «۴» فشار در فاصله h از کف مخزن را می توان با توجه به تشابه مثلث بدست آورد.

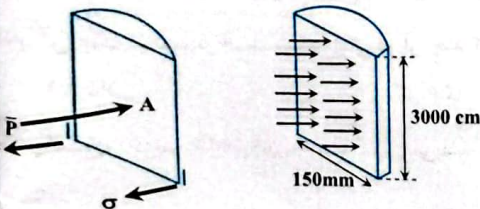
(مقدار فشار آب P در عمق h با فاصله h رابطه خطی داشته و منحنی توزیع فشار به شکل زیر است)

$$\frac{P}{30} = \frac{3000 - h}{3000} \Rightarrow P = \frac{3000 - h}{100}$$

چون توزیع فشار خطی است بنابراین می توان مقدار فشار متوسط را از رابطه ی زیر بدست آورد:

$$(\bar{P}) \text{ فشار متوسط} = \frac{P_{\max} + P}{2} = \frac{(30 + P)}{2} = \frac{6000 - h}{200}$$

نیروی موجود در تسمه ها باید نیروی ناشی از فشار آب را خنثی کنند. نیروی ناشی از فشار آب برابر حاصل ضرب فشار متوسط در مساحت سطح تصویر یافته بوده و نیروی ناشی از تسمه ها از حاصل ضرب تنش مجاز تسمه در مساحت سطح مقطع تسمه ضربدر ۲ است. البته مقدار تنش باید در عدد ۹/۸۱ ضرب شده تا kg به N تبدیل شود.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{P} \times A = (\sigma \times 9/81) \times 2 \times 3 \text{ cm}^2 \Rightarrow \left(\frac{6000 - h}{200} \right) 150 h = 1400 \times 6 \times 9/81$$

h در رابطه فوق فاصله حداکثر مجاز بین دو تسمه می باشد.

$$\Rightarrow (6000h - h^2) = 109872 \Rightarrow h^2 - 6000h + 109872 = 0 \Rightarrow h = 18/4 \text{ cm}$$