بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده ریاضی

سئوالات امتحانی پایان‌ترم دانشکده ریاضی

نام درس: معادلات دیفرانسیل	نام استاد:	ترم تحصیلی: اول ۹۸-۱۳۹۷	کل مدت زمان امتحان:
رشته تحصیلی:	مقطع تحصیلی: کارشناسی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۷/۱۱/۰۷	۱۲۰ دقیقه
نام دانشجو:		شماره دانشجویی:	شماره صفحه : ۱ از ۱

بارم هر سؤال ۲ نمره

۱- محاسبه کنید

۱) $$\mathbf{L}^{-1}\left\{e^{2s}\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s(s+4)}\right)\right\}$$

۲) $$\mathbf{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{4(t-x)}}{x}\sin(3x)dx\right\}$$

۲- از دستگاه معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی زیر، فقط جواب $y_1(x)$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y_1''(t)+\int_0^t y_2'(u)e^{(u-t)}du = 1 \\ 2y_1'(t)+y_2'(t)=t \\ y_1(0)=y_1'(0)=0 \\ y_2(0)=1. \end{cases}$$

۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$2y''(t)+y'(t)+2y(t)=\begin{cases} 0 & 0\le x<5 \\ 1 & 5\le x<20, \\ 0 & x\ge 20 \end{cases} \quad y(0)=y'(0)=0$$

۴- معادله دیفرانسیل $xy''+(1+x)y'-y=0$ را در نظر بگیرید.

الف) به روش سری‌های توانی، جواب معادله دیفرانسیل فوق را حول نقطهٔ $x=0$ به‌دست آورید.

ب) اگر به روش سری‌های توانی بخواهیم جواب معادله دیفرانسیل فوق را حول نقطهٔ $x=1$ با شرط $y(1)=2$ و $y'(1)=5$ بیابیم، ضریب $(x-1)^3$ کدام است؟

سربلند و پیروز باشید

پاسخ پایان ترم «معادلات دیفرانسیل»
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ابراهیم شاه ابراهیمی - بهمن ۹۷

math-teacher.blog.ir

① $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{2s}\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s(s+4)}\right)\right]$

ابتدا e^{2s} را در نظر نمی‌گیریم و لاپلاس معکوس عبارت باقی‌مانده را می‌یابیم سپس به جای t در عبارت ایجاد شده $(t+2)$ قرار داده و حاصل را در $u_{-2}(t)$ ضرب می‌کنیم.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\overbrace{\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s(s+4)}\right)}^{F(s)}\Big] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}(F(s))=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}(F'(s))} *$$

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}} F(s)=\ln(s^2+2s+3)-\ln(s)-\ln(s+4)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} F'(s)=\underbrace{\frac{2s+2}{s^2+2s+3}}_{\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2}}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathcal{L}^{-1}(F'(s))=2e^{-t}\cos\sqrt{2}t-1-e^{-4t}$$

$$\xrightarrow{*} \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s(s+4)}\right)\right)=\boxed{-\frac{1}{t}\left(2e^{-t}\cos(\sqrt{2}t)-1-e^{-4t}\right)}$$

و در نهایت پاسخ نهایی برابر است با:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{2s}\ln\left(\frac{s^2+2s+3}{s(s+4)}\right)\right]=\boxed{\frac{-1}{t+2}\left(2e^{-(t+2)}\cos(\sqrt{2}(t+2))-1-e^{-4(t+2)}\right)u_{-2}(t)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - بهمن ۹۷

math-teacher.blog.ir

② $\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{e^{4(t-x)}}{x}\sin(3x)\,dx\right)$

$$\begin{cases} f(t-x) = e^{4(t-x)} \longrightarrow f(t) = e^{4t} \\ g(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x} \longrightarrow g(t) = \dfrac{\sin(3t)}{t} \end{cases}$$

«کانولوشن»

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(e^{4t}) \times \underbrace{\mathcal{L}\left(\frac{\sin(3t)}{t}\right)}_{(\mathrm{I})} = \boxed{\frac{1}{s-4} \times \left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}} \mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9} \longrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin(3t)}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{3}{s^2+9}\,ds$$

$$= tg^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)\Big|_s^\infty = \underline{\overline{\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - بهمن ۹۷

۲)

$$\begin{cases} y_1'' + \int_0^t y_2' \cdot e^{(a-t)}\, da = 1 \\ 2y_1' + y_2' = t \end{cases}$$

لاپلاس می‌گیریم $\longrightarrow$

$\mathcal{L}(y_1) = F(s)$

$\mathcal{L}(y_2) = G(s)$

$$\begin{cases} s^2F(s) - s\cancelto{0}{f(0)} - \cancelto{0}{f'(0)} + \dfrac{sG(s) - \cancelto{1}{g(0)}}{s+1} = \dfrac{1}{s} \\ 2sF(s) - 2\cancel{f(0)} + sG(s) - \cancel{g(0)} = \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2)F(s) + \left(\dfrac{s}{s+1}\right)G(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} \\ (2s)F(s) + (s)G(s) = \dfrac{1}{s^2} + 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow F(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \\ \frac{1}{s^2}+1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & \frac{s}{s+1} \\ 2s & s \end{vmatrix}} = \frac{1 + \cancel{\frac{s}{s+1}} - \frac{s}{s^2(s+1)} - \cancel{\frac{s}{s+1}}}{s^3 - \frac{2s^2}{s+1}}$$

ساده سازی $\longrightarrow$

$$F(s) = \frac{s^2+s-1}{s^3(s^2+s-2)} = \frac{\cancel{s^2+s-2}}{\cancel{s^3(s^2+s-2)}} + \frac{1}{s^3(s^2+s-2)}$$

$$\longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^3(s^2+s-2)}}$$

لاپلاس معکوس $\longrightarrow$

$$y_1 = \frac{t^2}{2} + \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+s-2)}\right)}$$

:)

خودش یه سوال کامله!

$$= -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{e^{-2t}}{24} + \frac{e^t}{3} - \frac{3}{8}$$

پاسخ آخر

$$\longrightarrow \boxed{y_1 = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{24}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{3}{8}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - ۹۷

(۳) $2y'' + y' + 2y = (1-0)\,u_5(t) + (0-1)\,u_{20}(t)$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} 2\left(s^2F(s) - s\cancel{f(0)} - \cancel{f'(0)}\right) + sF(s) - \cancel{f(0)} + 2F(s) = \left(e^{-5s} - e^{-20s}\right)\left(\cancel{\mathcal{L}(1)}\right)$ $\quad \frac{1}{s}$

$\longrightarrow (2s^2+s+2)\,F(s) = \dfrac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}$

$\longrightarrow F(s) = \dfrac{1}{2(s^2+\frac{1}{2}s+1)\,s}\left(e^{-5s} - e^{-20s}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ مشابه سوال ۱

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^x f(t)\,dt$

$$\boxed{\frac{1}{s^2+\frac{1}{2}s+1} \longrightarrow \frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sqrt{\frac{16}{15}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\,t\right)e^{-\frac{1}{4}t}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{1}{4}x}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\,\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)dx}$$

$$\xrightarrow{\text{با تاخیرها}} \boxed{\begin{aligned} y = &\left[\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{1}{4}(x-5)}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\,\sin\frac{\sqrt{15}}{4}(x-5)\,dx\right]u_5(t) \\ &+ \left[\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{1}{4}(x-20)}\,\frac{4}{\sqrt{15}}\,\sin\frac{\sqrt{15}}{4}(x-20)\,dx\right]u_{20}(t)\end{aligned}}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - بهمن ۹۷

(۴) $\xrightarrow[\text{استانداردسازی}]{\div x} y''+\frac{(1+x)}{x}y'-\frac{1}{x}y=0$

الف) $x=0$ نقطه غیرعادی است.

$\lim_{x\to 0} \cancel{x}\frac{(1+x)}{\cancel{x}} = 1$

$\lim_{x\to 0} x^{\cancel{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right) = 0$ $\longrightarrow$ منظم است $\xrightarrow{\text{معین}}$ $m(m-1)+m+0=0$

$m^2\cancel{-m}\cancel{+m}=0$

$m^2=0 \longrightarrow \boxed{m=0,0}$

$\xrightarrow{\text{فرم جواب}}$ $\boxed{y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ $\boxed{y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$

$\xrightarrow{\text{برای } y_1}$ $y'=\sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''=\sum_0^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در سوال}}$ $\underbrace{\sum_0^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\sum_0^{\infty} n^2 a_n x^{n-1}}+\underbrace{\sum_0^{\infty} n a_n x^{n}-\sum_0^{\infty} a_n x^{n}}_{\sum_0^{\infty}(n-1)a_n x^{n}}=0$

جمله صفرم برابر صفر است. $\underbrace{\sum_0^{\infty} n^2 a_n x^{n-1}}_{\sum_1^{\infty} n^2 a_n x^{n-1}}$ انتقال $\underbrace{\sum_0^{\infty}(n-1)a_n x^{n}}_{\sum_1^{\infty}(n-2)a_{n-1}x^{n-1}}$

$\longrightarrow \sum_1^{\infty}\left(n^2a_n+(n-2)a_{n-1}\right)x^{n-1}=0 \longrightarrow n^2a_n+(n-2)a_{n-1}=0$

$\longrightarrow \boxed{a_{n-1}=-\frac{n^2}{n-2}}$ $n\geq 1$

ب) جواب حول $x=1$ $\xrightarrow{\text{نقطه عادی}}$ $y=\sum_0^{\infty} a_n(x-1)^n$

$y=\sum_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$ کافیست بسط تیلور بنویسیم

$\xrightarrow[x_0=1]{n=3}$ $\boxed{y=\frac{f'''(1)\,(x-1)^3}{3!}}$ $\longrightarrow$ بنابراین ضریب جمله $(x-1)^3$ برابر است با $\boxed{\frac{f'''(1)}{3!}}$

$\xrightarrow[x=1,\ y=2,\ y'=5]{\text{شروط داده شده}}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری در سوال}}$ $y''+2(5)-2=0 \longrightarrow \boxed{y''=-8}$

$\xrightarrow[\text{و دوباره جایگذاری}]{\text{مشتق از صورت سوال}}$ $y''+xy'''+y'+(1+x)y''-y'=0 \longrightarrow -8+y'''+5-16-5=0$

$\longrightarrow \boxed{y'''=24}$

بنابراین ضریب جمله $(x-1)^3$ برابر است با $\frac{24}{3!}$ یعنی $\boxed{4}$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - بهار ۹۷