بسم الله الرحمن الرحیم

بررسی نکات و تست‌های مبحث مقادیر ویژه در آزمون‌های دکتری

تهیه کننده: حسین زارع

بهمن‌ماه ۱۳۹۹

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$ را یک مقدار ویژه‌ی A می‌نامیم هرگاه بردار **ناصفر** $x \in \mathbb{F}^n$ موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$.
بردار x یک بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ و زوج مرتب (λ, x) یک زوج ویژه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود.

نتیجه ۱: فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A باشد. بنابراین

$$\lambda x - Ax = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0.$$

حال اگر ماتریس $\lambda I - A$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه دستگاه $(\lambda I - A)x = 0$ دارای جواب یکتای $x = 0$ است که با ناصفر بودن بردار ویژه در تناقض است. پس باید $\lambda I - A$ وارون‌ناپذیر باشد، یا به طور معادل، $\det(\lambda I - A) = 0$.

نتیجه ۲: اگر x یک بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ باشد، آنگاه هر مضرب ناصفر بردار x نیز یک بردار ویژه‌ی متناظر با λ است. زیرا اگر $c \neq ۰$، آنگاه

$$A(cx) = cAx = c\lambda x = \lambda(cx).$$

نتیجه ۳: اگر $x_۱, x_۲$ دو بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ باشند، آنگاه مجموع آن‌ها نیز یک بردار ویژه‌ی متناظر با λ است. زیرا

$$A(x_۱ + x_۲) = Ax_۱ + Ax_۲ = \lambda x_۱ + \lambda x_۲ = \lambda(x_۱ + x_۲).$$

بنابراین مجموعه بردارهای ویژه‌ی متناظر با یک مقدار ویژه‌ی λ تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. این فضای برداری را فضای ویژه‌ی متناظر با λ می‌نامند و آن را با E_λ نشان می‌دهند. در حقیقت داریم

$$E_\lambda = \{x \mid Ax = \lambda x\} = \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

نتیجه ۴: اگر A وارون‌پذیر و (λ, x) یک زوج ویژه‌ی A باشد، آنگاه $(1/\lambda, x)$ یک زوج ویژه‌ی A^{-1} است. زیرا

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x.$$

نتیجه ۵: اگر λ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x.$$

بنابراین λ^2 یک مقدار ویژه‌ی A^2 است. به همین ترتیب به ازای هر $n > 2$ داریم $A^n x = \lambda^n x$.
به طور کلی، اگر

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m,$$

و (λ, x) یک زوج ویژه‌ی A باشد، آنگاه $(q(\lambda), x)$ یک زوج ویژه‌ی $q(A)$ است که در آن

$$q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m.$$

قضیه: اگر $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_k\}$ مقادیر ویژه‌ی متمایز ماتریس A باشند و

$$\{(\lambda_۱, x_۱), (\lambda_۲, x_۲), \dots, (\lambda_k, x_k)\}$$

مجموعه زوج‌های ویژه‌ی A باشد، آنگاه $S = \{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$ مستقل خطی است. به بیان دیگر، بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز A، مستقل خطی هستند.

اثبات: اگر S وابسته‌ی خطی و $R = \{y_۱, y_۲, \dots, y_r\}$ زیرمجموعه‌ی مستقل خطی ماکسیمال S باشد، آنگاه $y_{r+۱} \in S \backslash R$ وجود دارد به طوری که $y_{r+۱} = \sum_{i=۱}^{r} \alpha_i y_i$. بنابراین داریم

$$۰ = (A - \lambda_{r+۱} I) y_{r+۱} = \sum_{i=۱}^{r} \alpha_i (A y_i - \lambda_{r+۱} y_i) = \sum_{i=۱}^{r} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{r+۱}) y_i.$$

چون R مستقل خطی است، پس به ازای هر i داریم $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{r+۱}) = ۰$ و چون مقادیر ویژه متمایز هستند، پس $\alpha_i = ۰$. در نتیجه $y_{r+۱} = ۰$ که با ناصفر بودن بردار ویژه در تناقض است.

قضیه: بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز یک ماتریس متقارن، متعامد هستند.

اثبات: فرض کنید (λ_i, x_i) و (λ_j, x_j) دو زوج ویژه‌ی ماتریس متقارن A باشند و $\lambda_i \neq \lambda_j$. در این صورت

$$\begin{aligned}
Ax_i = \lambda_i x_i \quad &\Longrightarrow \quad x_i^T A^T = \lambda_i x_i^T \\
&\Longrightarrow \quad x_i^T A = \lambda_i x_i^T \\
&\Longrightarrow \quad x_i^T A x_j = \lambda_i x_i^T x_j \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_j x_i^T x_j = \lambda_i x_i^T x_j \\
&\Longrightarrow \quad (\lambda_j - \lambda_i) x_i^T x_j = ۰.
\end{aligned}$$

از آنجا که $\lambda_i \neq \lambda_j$، داریم $x_i^T x_j = ۰$ و بنابراین x_i و x_j متعامد هستند.

تست: فرض کنید A ماتریسی ۱۰×۱۰ باشد که عناصر روی قطر آن ۱ است و بقیه‌ی درایه‌های آن -۱ هستند. در این صورت مجموع درایه‌های وارون A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{-۳}{۲}$

۲) -۱

۳) $\frac{-۵}{۴}$

۴) $\frac{-۳}{۴}$

تست: فرض کنید A ماتریسی 10×10 باشد که عناصر روی قطر آن ۱ است و بقیه‌ی درایه‌های آن -1 هستند. در این صورت مجموع درایه‌های وارون A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{-3}{2}$
۲) -1
۳) $\frac{-5}{4}$
۴) $\frac{-3}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. فرض کنید $\mathbf{u}$ برداری ۱۰تایی باشد که تمام مؤلفه‌های آن برابر با ۱ هستند. در این صورت $A\mathbf{u} = -8\mathbf{u}$. پس با توجه به نتیجه‌ی ۴ داریم $A^{-1}\mathbf{u} = \frac{-1}{8}\mathbf{u}$. از سوی دیگر، با استفاده از بردار $\mathbf{u}$ می‌توان مجموع تمام درایه‌های هر ماتریس دلخواه 10×10 مانند B را با محاسبه‌ی $\mathbf{u}^T B\mathbf{u}$ بدست آورد. بنابراین مجموع درایه‌های A^{-1} برابر است با:

$$\mathbf{u}^T A^{-1}\mathbf{u} = \frac{-1}{8}\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \frac{-1}{8} \times 10 = \frac{-5}{4}.$$

تست: اگر S ماتریسی باشد که $S^T = -S$ و عدد مختلط $\lambda = a + bi$ مقدار ویژه‌ی S باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) $a = \circ$
۲) $b = \circ$
۳) $b\lambda$ مقدار ویژه‌ی S است.
۴) $a\lambda$ مقدار ویژه‌ی S است.

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است.
گیریم x بردار ویژه‌ی S متناظر با مقدار ویژه‌ی λ باشد. بنابراین $Sx = \lambda x$ و در نتیجه

$$\overline{x}^T Sx = \lambda \overline{x}^T x = \lambda \|x\|^۲. \qquad (۱)$$

از خواص ضرب داخلی داریم $\overline{x}^T Sx = (Sx)^T \overline{x}$ و با توجه به پادمتقارن بودن S داریم

$$(Sx)^T \overline{x} = x^T S^T \overline{x} = -x^T S\overline{x} = -x^T \overline{Sx} = -x^T \overline{\lambda x} = -\overline{\lambda} x^T \overline{x} = -\overline{\lambda}\|x\|^۲.$$

از این رو، تساوی (۱) معادل است با $\lambda\|x\|^۲ = -\overline{\lambda}\|x\|^۲$. از آنجا که $x \neq ۰$، پس $\|x\| \neq ۰$.
بنابراین $\lambda = -\overline{\lambda}$ و در نتیجه

$$-(a - bi) = a + bi \Rightarrow -a + bi = a + bi \Rightarrow a = ۰.$$

نتیجه ۶: مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های پادمتقارن یا صفرند یا موهومی محض. به طور مشابه می‌توان دید که مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های متقارن، حقیقی‌اند.

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. چندجمله‌ای

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است، چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود.

- این چندجمله‌ای از درجه‌ی n است و ضریب جمله‌ی پیشرو (λ^n) برابر با ۱ است.
- مقادیر ویژه‌ی A ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی $p(\lambda) = ۰$ هستند. پس با توجه به قضیه‌ی اساسی جبر می‌توان نوشت

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_۱)(\lambda - \lambda_۲)\dots(\lambda - \lambda_n),$$

که در آن $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A هستند.

- داریم $p(۰) = \det(-A)$. در نتیجه:

$$(-۱)^n \det(A) = (۰ - \lambda_۱)(۰ - \lambda_۲)\dots(۰ - \lambda_n) = (-۱)^n \lambda_۱\lambda_۲\dots\lambda_n$$

بنابراین $\det(A) = \prod_{i=۱}^{n} \lambda_i$.

◄ تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

داریم

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

اگر این دترمینان را نسبت به سطر اول بسط دهیم، آنگاه جمله‌ی $a_{n-1}\lambda^{n-1}$ تنها در حاصل‌ضرب $(\lambda - a_{11})\dots(\lambda - a_{nn})$ ظاهر می‌شود و داریم $a_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = -\operatorname{tr}(A)$.
از طرفی ضریب λ^{n-1} در حاصل‌ضرب $(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$ برابر است با

$$a_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

بنابراین $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

- فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. داریم

$$\det(A) = 0 \iff \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

بنابراین A وارون‌ناپذیر است اگر و تنها اگر دست کم یک مقدار ویژه‌ی صفر داشته باشد.

- اگر چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به شکل

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

باشد، آنگاه

$$\det(A) = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_k^{n_k}, \quad \mathrm{tr}(A) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_k\lambda_k.$$

یادآوری: اگر عدد مختلط z یک ریشه‌ی معادله‌ی چندجمله‌ای $p(x) = 0$ باشد، آنگاه $\overline{z}$ نیز یک ریشه‌ی معادله است. از این رو، هر چندجمله‌ای از درجه‌ی فرد حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

نتیجه ۷: اگر A ماتریسی $n \times n$ و $\lambda = a + bi$ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه $\overline{\lambda} = a - bi$ نیز یک مقدار ویژه‌ی A است. اگر n فرد باشد، آنگاه A حداقل یک مقدار ویژه‌ی حقیقی دارد.

چندجمله‌ای مشخصه در حالت‌های خاص

- چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^۲ - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^۲ - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

- چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $A = \operatorname{diag}(d_۱, d_۲, \dots, d_n)$ عبارت است از

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - d_۱)(\lambda - d_۲)\dots(\lambda - d_n).$$

در حالت خاص، چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس همانی برابر است با $(\lambda - ۱)^n$.

- اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی A و A^T با هم برابرند، زیرا:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I - A^T).$$

اگرچه مقادیر ویژه‌ی A و A^T با هم برابرند، بردارهای ویژه‌ی آن‌ها لزوماً یکسان نیستند.

◄ فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳$ باشد. داریم

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_۱)(\lambda - \lambda_۲)(\lambda - \lambda_۳) \\ &= \lambda^۳ - (\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳)\lambda^۲ + (\lambda_۱\lambda_۲ + \lambda_۱\lambda_۳ + \lambda_۲\lambda_۳)\lambda - \lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳. \end{aligned}$$

قبلاً دیدیم که $\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = \mathrm{tr}(A)$ و $\lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳ = \det(A)$. حال توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lambda_۱\lambda_۲ + \lambda_۱\lambda_۳ + \lambda_۲\lambda_۳ &= \frac{۱}{۲}[(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳)^۲ - (\lambda_۱^۲ + \lambda_۲^۲ + \lambda_۳^۲)] \\ &= \frac{۱}{۲}[\mathrm{tr}(A)^۲ - \mathrm{tr}(A^۲)]. \end{aligned}$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه‌ی A عبارت است از

$$p(\lambda) = \lambda^۳ - \mathrm{tr}(A)\lambda^۲ + \frac{۱}{۲}[\mathrm{tr}(A)^۲ - \mathrm{tr}(A^۲)]\lambda - \det(A).$$

از طرفی، با محاسبه‌ی مستقیم می‌توان دید که چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^{۳}-\operatorname{tr}(A)\lambda^{۲}+\left(\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\right)\lambda-\det(A) \\ &= \lambda^{۳}-\operatorname{tr}(A)\lambda^{۲}+\operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A))\lambda-\det(A). \end{aligned}$$

از مقایسه‌ی روابط به دست آمده، رابطه‌ی زیر برای ماتریس‌های ۳×۳ حاصل می‌شود:

$$\operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A))=\frac{۱}{۲}[\operatorname{tr}(A)^{۲}-\operatorname{tr}(A^{۲})].$$

یادآوری: برای هر ماتریس $n\times n$ مانند A داریم $\det(\operatorname{adj}(A))=(\det(A))^{n-۱}$.

◄ اگر $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k$ بلوک‌هایی مربعی از ابعاد دلخواه باشند و

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & \mathbf{B}_2 & A_{23} & \cdots & A_{2k} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_3 & \cdots & A_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_k \end{bmatrix},$$

آنگاه با توجه به خواص دترمینان داریم $\det(A) = \det(\mathbf{B}_1)\ldots\det(\mathbf{B}_k)$. به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda \mathbf{I}_1 - \mathbf{B}_1)\ldots\det(\lambda \mathbf{I}_k - \mathbf{B}_k).$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه‌ی A برابر با حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$ است. این رابطه برای ماتریس‌های پایین‌مثلثی بلوکی، قطری بلوکی، مثلثی و قطری نیز برقرار است.

نتیجه ۸: مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های مثلثی و قطری همان درایه‌های واقع بر قطر اصلی هستند.

- چندجمله‌ای مشخصه‌ی A^{-1}:

اگر A ماتریسی $n \times n$، وارون‌پذیر و چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن $p(\lambda)$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی A^{-1} عبارت است از

$$q(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\det(A)}\lambda^n p\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) = \frac{1}{p(0)}\lambda^n p\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

در حقیقت داریم

$$\begin{aligned} q(\lambda) = \det(\lambda I - A^{-1}) &= \det\left(A^{-1}(\lambda A - I)\right) \\ &= \det(A^{-1})\det(\lambda A - I) \\ &= \det(A^{-1})(-1)^n \det(I - \lambda A) \\ &= \det(A^{-1})(-1)^n \lambda^n \det\left(\frac{1}{\lambda} I - A\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\det(A)}\lambda^n p\Big(\frac{1}{\lambda}\Big). \end{aligned}$$

- چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی AB و BA:

فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ باشد. قرار می‌دهیم

$$C = \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} I_m & \circ \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix}.$$

در این صورت C و D ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه‌ی $m+n$ هستند و داریم:

$$CD = \begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & \lambda A \\ \circ & \lambda I_n \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ \circ & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}.$$

اکنون از تساوی $\det(CD) = \det(DC)$ نتیجه می‌شود

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

بنابراین اگر $m = n$، آنگاه چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی AB و BA با هم برابرند. اگر $m < n$، آنگاه BA وارون‌پذیر نیست و داریم $\sigma(BA) = \sigma(AB) \cup \{\circ\}$ که در آن $\sigma(AB)$ و $\sigma(BA)$ به ترتیب مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی AB و BA هستند. برای $m > n$ نیز رابطه‌ی مشابهی داریم.

یادآوری: اگر A ماتریسی $n \times n$ و وارون‌پذیر و u, v دو بردار nتایی باشند، آنگاه
الف) $\det(I + uv^T) = ۱ + v^T u$.
ب) $\det(A + uv^T) = \det(A)(۱ + v^T A^{-۱} u)$.

برای اثبات (الف) کافی است قاعده‌ی دترمینان حاصل‌ضرب، در تساوی زیر به کار گرفته شود:

$$\begin{bmatrix} I & ۰ \\ v^T & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + uv^T & u \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & ۰ \\ -v^T & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & u \\ ۰ & ۱ + v^T u \end{bmatrix}.$$

برای اثبات (ب) می‌نویسیم

$$A + uv^T = A(I + A^{-۱} uv^T)$$

و قاعده‌ی دترمینان حاصل‌ضرب را همراه با رابطه‌ی قسمت (الف) به کار می‌گیریم.

- چندجمله‌ای مشخصه‌ی $D+uv^T$ که در آن $D=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ عبارت است از

$$\hat{p}(\lambda)=p(\lambda)-\sum_{i=1}^{n}u_iv_ip_i(\lambda)$$

که در آن:

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-D)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-d_i),\qquad p_i(\lambda)=\frac{p(\lambda)}{\lambda-d_i}=\prod_{j\neq i}(\lambda-d_j).$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-D-uv^T)&=\det(\lambda I-D)\left(1-v^T(\lambda I-D)^{-1}u\right)\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}(\lambda-d_i)\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{u_iv_i}{\lambda-d_i}\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-d_i)-\sum_{i=1}^{n}\left(u_iv_i\prod_{j\neq i}(\lambda-d_j)\right).\end{aligned}$$

تست: اگر A یک ماتریس مربعی حقیقی و غیر همانی باشد که $A^T = A^۲$، آنگاه مقادیر ویژه‌ی A کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

۱) ۱ و ۲
۲) ۲ یا ۲−
۳) ۰ یا ۱
۴) ۰ و ۱−

تست: اگر A یک ماتریس مربعی حقیقی و غیر همانی باشد که $A^T = A^2$، آنگاه مقادیر ویژه‌ی A کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

۱) ۱ و ۲

۲) ۲ یا ۲−

۳) ۰ یا ۱

۴) ۰ و ۱−

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. گیریم λ یک مقدار ویژه‌ی A باشد. از این رو، λ یک مقدار ویژه‌ی A^T است و چون طبق فرض $A^T = A^2$، پس λ یک مقدار ویژه‌ی A^2 نیز هست. بنابراین داریم $\lambda = \lambda^2$ و از آنجا خواهیم داشت $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$.

تست: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی با درایه‌های صحیح باشد. اگر $n \in \mathbb{N}$ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) $\det(A) \mid n$

۲) $n \mid \operatorname{tr}(A)$

۳) $n \mid \operatorname{rank}(A)$

۴) $n \mid \det(A)$

تست: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی با درایه‌های صحیح باشد. اگر $n \in \mathbb{N}$ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) $\det(A) \mid n$

۲) $n \mid \operatorname{tr}(A)$

۳) $n \mid \operatorname{rank}(A)$

۴) $n \mid \det(A)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. زیرا همان‌طور که دیدیم، دترمینان یک ماتریس برابر با حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌ی آن است.

تست: فرض کنید A ماتریسی ۲×۲ است به طوری که $\operatorname{tr}(A) = \frac{۱}{۲}\det(A)$. در این صورت کدام یک از مقادیر زیر نمی‌تواند مقدار ویژه‌ی A باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) $\frac{-۱}{۲}$

تست: فرض کنید A ماتریسی ۲×۲ است به طوری که $\mathrm{tr}(A) = \frac{۱}{۲}\det(A)$. در این صورت کدام یک از مقادیر زیر نمی‌تواند مقدار ویژه‌ی A باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) $\frac{-۱}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است.
فرض کنیم $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ مقادیر ویژه‌ی A باشند. بنابراین $\mathrm{tr}(A) = \lambda_۱ + \lambda_۲$ و $\det(A) = \lambda_۱\lambda_۲$.
در نتیجه از فرض مسئله داریم

$$\lambda_۱ + \lambda_۲ = \frac{۱}{۲}\lambda_۱\lambda_۲.$$

اکنون اگر $\lambda_۱ = ۲$، آنگاه خواهیم داشت $\lambda_۲ = ۲ + \lambda_۲$، که منجر به تناقض $۲ = ۰$ می‌شود.
پس ۲ نمی‌تواند یک مقدار ویژه‌ی A باشد.

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۱۰×۳ و B یک ماتریس ۳×۱۰ با درایه‌های حقیقی باشند. اگر $-۱, ۲, ۴$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس AB باشند، آنگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی متمایز BA عبارتند از: (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) $-۱, ۲, ۴$

۲) $۰, -۱, ۲, ۴$

۳) $-۱, ۰, ۱, ۲, ۴$

۴) $-۱, ۰, ۱, -۲, ۲, -۴, ۴$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۱۰×۳ و B یک ماتریس ۳×۱۰ با درایه‌های حقیقی باشند. اگر $-۱, ۲, ۴$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس AB باشند، آنگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی متمایز BA عبارتند از: (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) $-۱, ۲, ۴$
۲) $۰, -۱, ۲, ۴$
۳) $-۱, ۰, ۱, ۲, ۴$
۴) $-۱, ۰, ۱, -۲, ۲, -۴, ۴$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. در حقیقت، BA وارون‌پذیر نیست و با توجه به مطالب بیان شده داریم

$$\sigma(BA) = \sigma(AB) \cup \{۰\} = \{۰, -۱, ۲, ۴\}.$$

تست: فرض کنید A ماتریسی ۳×۳ باشد و مقادیر ویژه‌ی آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند. اگر $\mathrm{tr}(A) = ۹$ و $\det(A) = -۲۱$، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از: (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) ۴
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

تست: فرض کنید A ماتریسی ۳×۳ باشد و مقادیر ویژه‌ی آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند. اگر $\mathrm{tr}(A) = ۹$ و $\det(A) = -۲۱$، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از: (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) ۴
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. مقادیر ویژه‌ی A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_۱ = \lambda - d, \quad \lambda_۲ = \lambda, \quad \lambda_۳ = \lambda + d.$$

در این صورت از تساوی $\mathrm{tr}(A) = \lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۹$ داریم $\lambda = ۳$. در نتیجه، با جایگذاری λ در تساوی‌های بالا و با در نظر گرفتن این که $\det(A) = \lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳$، خواهیم داشت

$$۳ \times (۹ - d^۲) = -۲۱ \overset{d>۰}{\Longrightarrow} d = ۴ \Rightarrow \lambda_۳ = ۷.$$

تست: ماتریس $A \in M_۵(\mathbb{R})$ در رابطه‌ی $A^۲ - ۴A - I = ۰$ صدق می‌کند. اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_۵$ مقادیر ویژه‌ی A باشند، آنگاه مقدار عبارت

$$(a_۱ - \frac{۱}{a_۱}) + (a_۲ - \frac{۱}{a_۲}) + \cdots + (a_۵ - \frac{۱}{a_۵})$$

کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۶)

۱) ۴

۲) -۲۰

۳) ۲۰

۴) -۴

تست: ماتریس $A \in M_{۵}(\mathbb{R})$ در رابطه‌ی $A^{۲} - ۴A - I = ۰$ صدق می‌کند. اگر $a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{۵}$ مقادیر ویژه‌ی A باشند، آنگاه مقدار عبارت

$$(a_{۱} - \frac{۱}{a_{۱}}) + (a_{۲} - \frac{۱}{a_{۲}}) + \cdots + (a_{۵} - \frac{۱}{a_{۵}})$$

کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۶)

۱) ۴
۲) -۲۰
۳) ۲۰
۴) -۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با توجه به فرض داریم $A(A - ۴I) = I$. بنابراین A وارون‌پذیر است و $A^{-۱} = A - ۴I$. اکنون اگر مجموع خواسته شده در مسئله را S بنامیم، داریم

$$S = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(A^{-۱}) = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(A - ۴I) = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(A) + ۴\operatorname{tr}(I) = ۲۰.$$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{۲}) = ۳.$$

در این صورت $\operatorname{tr}(A^{۳})$ برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. فرض کنیم λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه‌ی A باشند. از آنجا که λ_1 و λ_2 در معادله‌ی $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ صدق می‌کنند، با قرار دادن آن‌ها در معادله و جمع روابط حاصل، داریم

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \operatorname{tr}(A)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\det(A) = 0$$

یا به طور معادل،

$$\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A)^2 + 2\det(A) = 0.$$

از این که $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = 3$، خواهیم داشت $\det(A) = 3$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^3) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 &= (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)\\ &= \operatorname{tr}(A)\left(\operatorname{tr}(A^2) - \det(A)\right)\\ &= 3 \times (3 - 3)\\ &= 0.\end{aligned}$$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که

$$\operatorname{tr}(A^{۲}) = ۱, \operatorname{tr}(A) = ۰, \det(A) = ۰.$$

حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌ی ناصفر A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۷)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\sqrt{۲}$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که

$$\operatorname{tr}(A^۲) = ۱, \operatorname{tr}(A) = ۰, \det(A) = ۰.$$

حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌ی ناصفر A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۷)
۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. چندجمله‌ای مشخصه‌ی A عبارت است از

$$p(\lambda) = \lambda^۳ - \operatorname{tr}(A)\lambda^۲ + \frac{۱}{۲}[\operatorname{tr}(A)^۲ - \operatorname{tr}(A^۲)]\lambda - \det(A) = \lambda^۳ - \frac{۱}{۲}\lambda.$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی ناصفر A عبارتند از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با $\frac{-۱}{۲}$.

نتیجه ۹: اگر ماتریس‌های A و B متشابه باشند (یعنی اگر ماتریس وارون‌پذیری مانند P موجود باشد به طوری که $B = P^{-۱}AP$) آنگاه A و B دارای چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی یکسانی هستند. زیرا

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - P^{-۱}AP)\\ &= \det(P^{-۱}(\lambda I - A)P)\\ &= \det(P^{-۱})\det(\lambda I - A)\det(P)\\ &= \det(\lambda I - A).\end{aligned}$$

عکس این موضوع درست نیست. برای مثال، ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان هستند، اما متشابه نیستند.

- ماتریس‌های متشابه رتبه و مقادیر ویژه‌ی یکسان (و از این رو اثر و دترمینان برابر) دارند.

تعریف: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی مستقل خطی شامل n بردار ویژه‌ی A یک مجموعه‌ی کامل بردارهای ویژه‌ی A نامیده می‌شود.

تعریف: ماتریس $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ را قطری‌شدنی می‌نامیم هرگاه با یک ماتریس قطری متشابه باشد. به بیان دیگر ماتریس وارون‌پذیری مانند P و ماتریسی قطری مانند D موجود باشند به طوری که

$$P^{-1}AP = D$$

نتیجه ۱۰: فرض کنید $P = [x_1|x_2|\dots|x_n]$ و $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. داریم

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\iff AP = PD \\ &\iff [Ax_1|Ax_2|\dots|Ax_n] = [\lambda_1 x_1|\lambda_2 x_2|\dots|\lambda_n x_n]. \end{aligned}$$

بنابراین A قطری شدنی است اگر و تنها اگر n بردار ویژه‌ی مستقل خطی (یعنی مجموعه‌ی کاملی از بردارهای ویژه) داشته باشد. در این صورت، ستون‌های P عبارتند از بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی A، و درایه‌های قطری ماتریس D عبارتند از مقادیر ویژه‌ی متناظر با آن‌ها.

نتیجه ۱۱: اگر A ماتریسی $n \times n$ با n مقدار ویژه‌ی متمایز باشد، آنگاه A قطری شدنی است.
زیرا، همانطورکه دیدیم که بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز، مستقل خطی هستند.

توجه: برخلاف نتیجه‌ی بالا، لزومی ندارد که مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس قطری شدنی متمایز باشند.
برای مثال ماتریس همانی قطری شدنی است، ولی مقادیر ویژه‌ی آن متمایز نیستند.

تعریف: اگر A ماتریسی $n \times n$ و λ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه چندگانگی جبری λ عبارت است از مرتبه تکرار λ به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مشخصه‌ی A. همچنین چندگانگی هندسی λ عبارت است از بعد فضای ویژه‌ی E_λ.

توجه: چندگانگی‌های جبری و هندسی لزوماً با هم برابر نیستند. برای مثال فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

داریم $p(\lambda) = \lambda^۲$. بنابراین چندگانگی جبری $\lambda = ۰$ برابر است با ۲. اما چندگانگی هندسی آن برابر است با $\dim E_۰ = \dim \mathcal{N}(A - ۰I) = \mathrm{null}(A) = ۱$.

◄ اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ دو مقدار ویژه‌ی متمایز ماتریس A باشند و $x \in E_{\lambda_۱} \cap E_{\lambda_۲}$، آنگاه

$$\begin{cases} Ax = \lambda_۱ x \\ Ax = \lambda_۲ x \end{cases} \Rightarrow (\lambda_۱ - \lambda_۲)x = ۰ \Rightarrow x = ۰.$$

بنابراین $E_{\lambda_۱} \cap E_{\lambda_۲} = \{۰\}$.

قضیه: اگر $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_k\}$ مقادیر ویژه‌ی متمایز $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ باشند، آنگاه احکام زیر معادلند:

۱) A روی $\mathbb{F}$ قطری شدنی است.

۲) A مجموعه‌ی کاملی از بردارهای ویژه (یعنی n بردار ویژه‌ی مستقل خطی) دارد.

۳) چندگانگی‌های جبری و هندسی هر مقدار ویژه‌ی λ_i با هم برابرند. یعنی چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_۱)^{n_۱} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

است که در آن $n_i = \dim E_{\lambda_i}$، به ازای هر i.

۴) $\mathbb{F}^n = E_{\lambda_۱} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$.

قضیه: (کیلی–همیلتون) اگر A ماتریسی مربعی با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $p(\lambda)$ باشد، آنگاه

$$p(A) = 0.$$

به عبارت دیگر، هر ماتریس مربعی در معادله‌ی مشخصه‌ی خود صدق می‌کند.

تعریف: (چندجمله‌ای مینیمال) اگر A ماتریسی مربعی باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال A عبارت است از چندجمله‌ای تکین $m(\lambda)$ با کوچکترین درجه‌ی ممکن به طوری که $m(A) = 0$.

- چندجمله‌ای مینیمال A منحصر به فرد است.
- ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه و مینیمال یکسان هستند و تنها ممکن است مرتبه‌ی تکرار آن‌ها متفاوت باشد.
- چندجمله‌ای مینیمال A هر چندجمله‌ای $f(\lambda)$ را که $f(A) = 0$، عاد می‌کند.
- چندجمله‌ای مینیمال ماتریس‌های متشابه با هم برابرند.

تعریف: ماتریس $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ را مثلثی‌شدنی می‌نامیم هرگاه با یک ماتریس مثلثی متشابه باشد.

قضیه: فرض کنید A ماتریسی مربعی روی $\mathbb{F}$ و $\{\lambda_۱, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{F}$ مقادیر ویژه‌ی متمایز A باشند. در این صورت،

۱) A روی $\mathbb{F}$ مثلثی‌شدنی است، اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال A به صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی (نه لزوماً متمایز) باشد:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_۱)^{d_۱}(\lambda - \lambda_۲)^{d_۲}\dots(\lambda - \lambda_k)^{d_k}, \quad d_i \geq ۱.$$

۲) A روی $\mathbb{F}$ قطری شدنی است، اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال A به صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی **متمایز** باشد، یعنی $m(\lambda)$ ریشه‌ی تکراری نداشته باشد:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_۱)(\lambda - \lambda_۲)\dots(\lambda - \lambda_k).$$

نکته: اگر چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A روی میدان $\mathbb{F}$ به حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های خطی تجزیه شود، آنگاه A روی $\mathbb{F}$ مثلثی‌شدنی است. از طرفی، هر چندجمله‌ای روی $\mathbb{C}$ به حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌هایی خطی تجزیه می‌شود. بنابراین هر ماتریس روی $\mathbb{C}$ مثلثی‌شدنی است.

تست: اگر A ماتریسی ۷×۷ با درایه‌های حقیقی باشد، آنگاه کدام یک از تساوی‌های زیر می‌تواند درست باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) $A^۲ + ۳A + ۳I = ۰$

۲) $A^۲ + ۲A + ۵I = ۰$

۳) $A^۲ - ۳A + ۴I = ۰$

۴) $A^۲ - ۳A + ۲I = ۰$

تست: اگر A ماتریسی ۷×۷ با درایه‌های حقیقی باشد، آنگاه کدام یک از تساوی‌های زیر می‌تواند درست باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) $A^{۲} + ۳A + ۳I = ۰$
۲) $A^{۲} + ۲A + ۵I = ۰$
۳) $A^{۲} - ۳A + ۴I = ۰$
۴) $A^{۲} - ۳A + ۲I = ۰$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. از آنجا که A ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی فرد است، چندجمله‌ای مشخصه‌ی A و در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال A دست کم یک ریشه‌ی حقیقی دارد. از سوی دیگر، چندجمله‌ای مینیمال A هر چندجمله‌ای $f(\lambda)$ را که $f(A) = ۰$، عاد می‌کند. از این رو، گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که چندجمله‌ای f متناظر با آن، دارای ریشه‌ی حقیقی باشد. برای گزینه‌ی ۴ داریم

$$f(\lambda) = \lambda^{۲} - ۳\lambda + ۲ \Rightarrow \Delta = ۱ > ۰$$

و بنابراین $f(\lambda)$ دارای ریشه‌ی حقیقی است. ضمن اینکه $A = I$ تنها در این گزینه صدق می‌کند.

تست: فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{F})$، به طوری که A در چندجمله‌ای مشخصه‌ی B صدق می‌کند و B نیز در چندجمله‌ای مشخصه‌ی A صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی متمایز A با مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی متمایز B برابر است.
۲) A و B رتبه‌ی یکسان دارند.
۳) A و B چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان دارند.
۴) A قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر B قطری‌شدنی باشد.

تست: فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{F})$، به طوری که A در چندجمله‌ای مشخصه‌ی B صدق می‌کند و B نیز در چندجمله‌ای مشخصه‌ی A صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟
(دکتری ریاضی ۹۱)

۱) مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی متمایز A با مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی متمایز B برابر است.
۲) A و B رتبه‌ی یکسان دارند.
۳) A و B چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان دارند.
۴) A قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر B قطری‌شدنی باشد.

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. فرض کنید $m_A(\lambda)$ و $p_A(\lambda)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه‌ی A و $m_B(\lambda)$ و $p_B(\lambda)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های مینیمال و مشخصه‌ی B باشند. اگر مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی A و B را به ترتیب $\sigma(A)$ و $\sigma(B)$ بنامیم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} p_B(A) = \circ \Rightarrow m_A \mid p_B \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \sigma(B) \\ p_A(B) = \circ \Rightarrow m_B \mid p_A \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A) \end{cases} \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B).$$

تست: چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ عبارت است از $x^۲ - ۱$ و چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ عبارت است از $x^۲ + ۱$. اگر $AB = BA$، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس AB عبارت است از: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $x^۴ - ۱$
۲) $x^۲ + ۱$
۳) $x^۲ - ۱$
۴) $x^۴ + ۱$

تست: چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ عبارت است از $x^۲ - ۱$ و چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ عبارت است از $x^۲ + ۱$. اگر $AB = BA$، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس AB عبارت است از: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $x^۴ - ۱$

۲) $x^۲ + ۱$

۳) $x^۲ - ۱$

۴) $x^۴ + ۱$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با توجه به اینکه $x^۲ - ۱$ چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A است، داریم $A^۲ - I = ۰$ و در نتیجه $A^۲ = I$. با استدلالی مشابه داریم $B^۲ = -I$. بنابراین

$$(AB)^۲ = ABAB = AABB = A^۲B^۲ = -I.$$

اگر فرض کنیم $f(x) = x^۲ + ۱$، آنگاه $f(AB) = ۰$ و چندجمله‌ای مینیمال AB چندجمله‌ای m با کوچکترین درجه است به طوری که $m \mid f$ و $m(AB) = ۰$. اما f در $\mathbb{R}$ تحویل‌ناپذیر است. پس $m = f$.

تست: اگر $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ و $\operatorname{tr}(AB) = 0$، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

۱) $A^2 = B^2$
۲) $AB^2 = B^2A$
۳) $A^2B^2 = B^2A^2$
۴) $(AB)^2 = (BA)^2$

تست: اگر $A, B \in M_۲(\mathbb{R})$ و $\mathrm{tr}(AB) = ۰$، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟
(دکتری ریاضی ۹۷)

۱) $A^۲ = B^۲$
۲) $AB^۲ = B^۲A$
۳) $A^۲B^۲ = B^۲A^۲$
۴) $(AB)^۲ = (BA)^۲$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. چنانچه قضیه‌ی کیلی–همیلتون را برای ماتریس‌های AB و BA به کار بگیریم، داریم

$$(AB)^۲ - \mathrm{tr}(AB)AB + \det(AB)I = ۰,$$
$$(BA)^۲ - \mathrm{tr}(BA)BA + \det(BA)I = ۰.$$

اما $\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = ۰$ و $\det(BA) = \det(AB)$. در نتیجه،

$$(AB)^۲ = (BA)^۲.$$

تست: اگر A ماتریسی ۳×۳ با درایه‌هایی در میدان $\mathbb{R}$ باشد و داشته باشیم

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{۲}) = ۰, \det(A) = ۱$$

آنگاه: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $A^{۳} = A + I$
۲) $A^{۳} = I$
۳) $A^{۲} = I$
۴) $A^{۳} = A^{۲} + I$

تست: اگر A ماتریسی 3×3 با درایه‌هایی در میدان $\mathbb{R}$ باشد و داشته باشیم

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = 0, \det(A) = 1$$

آنگاه: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $A^3 = A + I$
۲) $A^3 = I$
۳) $A^2 = I$
۴) $A^3 = A^2 + I$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت زیر است:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \operatorname{tr}(A)\lambda^2 + \frac{1}{2}[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)]\lambda - \det(A) = \lambda^3 - 1,$$

و بنابر قضیه‌ی کیلی–همیلتون داریم $p(A) = 0$. در نتیجه $A^3 = I$.

تست: ماتریس $A \in M_{۳}(\mathbb{R})$ در رابطه‌ی $A^{۲} + ۴A + ۳I = ۰$ صدق می‌کند. $\operatorname{tr}(A)$ کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۶)

۱) -۷
۲) -۵
۳) -۳
۴) -۱

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. قرار می‌دهیم $f(x) = x^{۲} + ۴x + ۳$. در این صورت $f(A) = ۰$ و $f(x) = (x+۱)(x+۳)$. چون A ماتریسی ۳×۳ است، درجه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی A برابر با ۳ می‌باشد. از این رو، چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به شکل

$$p(x) = (x+۱)^{\alpha}(x+۳)^{\beta}$$

است که در آن α و β عددهایی صحیح و نامنفی‌اند و $\alpha + \beta = ۳$. در نتیجه حالت‌های زیر را داریم:

- $\alpha = ۰, \beta = ۳ \Rightarrow p(x) = (x+۱)^{۰}(x+۳)^{۳} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = -۹.$
- $\alpha = ۱, \beta = ۲ \Rightarrow p(x) = (x+۱)^{۱}(x+۳)^{۲} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = -۷.$
- $\alpha = ۲, \beta = ۱ \Rightarrow p(x) = (x+۱)^{۲}(x+۳)^{۱} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = -۵.$
- $\alpha = ۳, \beta = ۰ \Rightarrow p(x) = (x+۱)^{۳}(x+۳)^{۰} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = -۳.$

بنابراین $\mathrm{tr}(A)$ نمی‌تواند -۱ باشد.

تست: ماتریس $n \times n$ مانند A با درایه‌های مختلط که $n > ۱$، در تساوی $A^n = ۲A$ صدق می‌کند. در این صورت: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) A مثلثی‌شدنی نیست.

۲) A قطری‌شدنی است.

۳) A قطری‌شدنی نیست.

۴) A مثلثی‌شدنی است ولی قطری‌شدنی نیست.

تست: ماتریس $n \times n$ مانند A با درایه‌های مختلط که $n > ۱$، در تساوی $A^n = ۲A$ صدق می‌کند. در این صورت: (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) A مثلثی‌شدنی نیست.
۲) A قطری‌شدنی است.
۳) A قطری‌شدنی نیست.
۴) A مثلثی‌شدنی است ولی قطری‌شدنی نیست.

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. چون $A^n - ۲A = ۰$، پس با در فرض

$$f(\lambda) = \lambda^n - ۲\lambda = \lambda(\lambda^{n-۱} - ۲)$$

داریم $f(A) = ۰$ و چندجمله‌ای مینیمال A چندجمله‌ای m با کوچکترین درجه است به طوری که $f \mid m$ و $m(A) = ۰$. از طرفی f دارای n ریشه‌ی متمایز در اعداد مختلط است. یکی $\lambda = ۰$ و بقیه، ریشه‌های $(n-۱)$ام عدد ۲. بنابراین چندجمله‌ای مینیمال نیز بدون ریشه‌ی تکراری است و در نتیجه A قطری‌شدنی است.

تست: فرض کنید $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تبدیلی خطی باشد که $T(a,b,c)=(0,a,b)$. اگر $f_i(x)$ چندجمله‌ای ویژه‌ی T^i باشد، آنگاه مقدار $f_1+f_2-2f_3$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) -1
۲) 0
۳) 1
۴) 2

تست: فرض کنید $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ تبدیلی خطی باشد که $T(a,b,c)=(0,a,b)$. اگر $f_i(x)$ چندجمله‌ای ویژه‌ی T^i باشد، آنگاه مقدار $f_1+f_2-2f_3$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) -1
۲) 0
۳) 1
۴) 2

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. به سادگی دیده می‌شود که نمایش ماتریسی T به صورت زیر است:

$$T=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

ماتریس T سه مقدار ویژه‌ی صفر دارد که مقادیر ویژه‌ی T^{2} و T^{3} نیز هستند. بنابراین

$$f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)=(x-0)(x-0)(x-0)=x^{3}\Rightarrow f_1+f_2-2f_3=0.$$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ وارون‌پذیر با درایه‌های واقع در میدان $\mathbb{F}$ باشد. اگر

$$\det(A) = ۱, \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-۱}) = ۰,$$

آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) $A^{۵} = I$
۲) $A^{۲} = I$
۳) $A^{۳} = I$
۴) $A^{۴} = I$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. فرض کنید $p(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A باشد. بنابراین $p(\lambda)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^{۳} - \operatorname{tr}(A)\lambda^{۲} + b\lambda - \det(A) \\ &= \lambda^{۳} - (۰)\lambda^{۲} + b\lambda - ۱ \\ &= \lambda^{۳} + b\lambda - ۱, \end{aligned}$$

که در آن $b = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A))$. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه‌ی $A^{-۱}$ به صورت زیر است:

$$q(\lambda) = \frac{۱}{p(۰)}\lambda^{۳} p\left(\frac{۱}{\lambda}\right) = -\lambda^{۳}\left(\frac{۱}{\lambda^{۳}} + \frac{b}{\lambda} - ۱\right) = -۱ - b\lambda^{۲} + \lambda^{۳}.$$

چون طبق فرض $\operatorname{tr}(A^{-۱}) = ۰$، پس $b = ۰$. با جایگذاری b در $p(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت $p(\lambda) = \lambda^{۳} - ۱$ به دست می‌آید. اکنون بنابر قضیه‌ی کیلی–همیلتون، $p(A) = ۰$. بنابراین

$$A^{۳} - I = ۰ \Rightarrow A^{۳} = I.$$

تست: فرض کنید A یک ماتریس ۴×۴ با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که

$$A^{۲} + ۲A + ۳I = ۰.$$

در این صورت $\mathrm{tr}(A^{-۱})$ برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) $۲/۳$

۲) $-۲/۳$

۳) $۴/۳$

۴) $-۴/۳$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. فرض کنیم $f(\lambda)=\lambda^۲+۲\lambda+۳$. در این صورت $f(A)=۰$ و چندجمله‌ای مینیمال A چندجمله‌ای m با کمترین درجه است به طوری که $m \mid f$ و $m(A)=۰$. اما f در $\mathbb{R}$ تحویل‌ناپذیر است. پس $m=f$. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه‌ی A برابر است با

$$p(\lambda)=m(\lambda)^۲=\lambda^۴+۴\lambda^۳+۱۰\lambda^۲+۱۲\lambda+۹.$$

در نتیجه چندجمله‌ای مشخصه‌ی $A^{-۱}$ به صورت زیر است:

$$q(\lambda)=\frac{۱}{p(۰)}\lambda^۴ p\Big(\frac{۱}{\lambda}\Big)=\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}\lambda+\frac{۱۰}{۹}\lambda^۲+\frac{۱۲}{۹}\lambda^۳+\lambda^۴.$$

از این رو،

$$\operatorname{tr}(A^{-۱})=-\frac{۱۲}{۹}=-\frac{۴}{۳}.$$

تست: اگر $S,T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌های

$$S\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲x+y\\x+y\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-x+y\end{bmatrix}$$

داده شده باشند، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس ST کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) $x^۲+۲x-۳$
۲) $x^۲+۲x+۳$
۳) $x^۲-۲x-۳$
۴) $x^۲-۲x+۲$

تست: اگر $S,T:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ با ضابطه‌های

$$S\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲x+y\\x+y\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-x+y\end{bmatrix}$$

داده شده باشند، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس ST کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) $x^۲+۲x-۳$
۲) $x^۲+۲x+۳$
۳) $x^۲-۲x-۳$
۴) $x^۲-۲x+۲$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ صحیح است. فرض کنیم $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ST باشد. داریم

$$S=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۱&۱\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad ST=\begin{bmatrix}-۳&۱\\۰&۱\end{bmatrix}.$$

بنابراین $p(x)=x^۲-\mathrm{tr}(ST)x+\det(ST)=x^۲+۲x-۳$.

تست: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ دارای دو مقدار ویژه‌ی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشد که $\lambda_۱ < \lambda_۲$. اگر W_{λ_i} که $۱ \leq i \leq ۲$، فضای ویژه‌ی نظیر مقدار ویژه‌ی λ_i باشد، آنگاه $\dim W_{\lambda_۱} - \dim W_{\lambda_۲}$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) -۱
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. چون A ماتریسی قطری بلوکی است، پس چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن برابر با حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی بلوک‌های قطری آن است:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = p_{\mathbf{B}_1}(\lambda) \times p_{\mathbf{B}_2}(\lambda) &= \left(\lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{B}_1)\lambda + \det(\mathbf{B}_1)\right)(\lambda - 5) \\ &= (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 5) \end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 5$. از طرفی داریم

$$\begin{cases} \dim W_{\lambda_1} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{null}(A - I) = 3 - \operatorname{rank}(A - I) = 1 \\ \dim W_{\lambda_2} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{null}(A - 5I) = 3 - \operatorname{rank}(A - 5I) = 2. \end{cases}$$

در نتیجه $\dim W_{\lambda_2} - \dim W_{\lambda_1} = 1$.

تست: فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و به ازای هر عدد طبیعی m، $\operatorname{tr}(A^m) = 0$. در این صورت در مورد A چه می‌توان گفت؟ (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $I + A^2$ وارون‌ناپذیر است.

۲) $I - A^2$ وارون‌ناپذیر است.

۳) A پوچ‌توان است.

۴) $\operatorname{tr}(AB) = 0$ برای هر ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$.

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A باشند. بنابراین از فرض نتیجه می‌شود که به ازای $m = 1, 2 \dots, n$ داریم $\lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m = 0$. اگر تمام λ_iها با هم برابر باشند، آنگاه همگی آن‌ها باید صفر باشند. در غیر این صورت فرض کنید که $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ مقادیر ویژه‌ی متمایز و ناصفر A باشند. آنگاه شرط $\mathrm{tr}(A^m) = 0$ به ازای هر m نتیجه می‌دهد

$$\beta_1^m + \beta_2^m + \dots + \beta_k^m = 0, \quad m = 1, \dots, k. \qquad (2)$$

اما اگر دستگاه

$$\beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \dots + \beta_k^m x_k = 0, \quad m = 1, \dots, k$$

را در نظر بگیریم آنگاه با توجه به دترمینان واندرموند، ماتریس ضرایب دستگاه نامنفرد بوده و بنابراین دستگاه دارای جواب یکتای $x = 0$ است که با (۲) در تناقض است. بنابراین تمام مقادیر ویژه‌ی A برابر با صفر هستند. در نتیجه چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت $p(\lambda) = (\lambda - 0)^n = \lambda^n$ است و قضیه‌ی کیلی–همیلتون ایجاب می‌کند که $A^n = 0$. بنابراین A پوچ‌توان است.

تست: فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد. کدام گزینه صحیح است؟ منظور از $A(i|j)$ ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام به دست آمده است. (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $$f'(x) = \sum_{j=۱}^{n} x \det(xI - A(j|j))$$

۲) $$f'(x) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} \det(xI - A(i|j))$$

۳) $$f'(x) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} x \det(xI - A(i|j))$$

۴) $$f'(x) = \sum_{j=۱}^{n} \det(xI - A(j|j))$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. اگر درایه‌های یک ماتریس $n \times n$ مانند A توابع مشتق‌پذیری از x باشند، آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\det(A)) = \det(D_۱) + \det(D_۲) + \cdots + \det(D_n)$$

که در آن D_i همان ماتریس A است که از سطر iام آن مشتق گرفته شده است. بنابراین مشتق

$$f(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{۱۱} & -a_{۱۲} & \dots & -a_{۱n} \\ -a_{۲۱} & x - a_{۲۲} & \dots & -a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n۱} & -a_{n۲} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

برابر است با

$$f'(x) = \det(xI - A(۱|۱)) + \cdots + \det(xI - A(n|n)) = \sum_{j=۱}^{n} \det(xI - A(j|j)).$$

تست: فرض کنید W زیرفضایی از ماتریس‌های $n \times n$ باشند که اعضای آن متقارن هستند و چندجمله‌ای ویژه‌ی آن‌ها به شکل $x^n + a_{n-۲}x^{n-۲} + a_{n-۳}x^{n-۳} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ باشند. در این صورت بعد W روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\dfrac{(n-۱)^۲}{۴}$

۲) $\dfrac{n(n+۲)}{۴}$

۳) $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\dfrac{(n-۱)(n+۲)}{۲}$

تست: فرض کنید W زیرفضایی از ماتریس‌های $n \times n$ باشند که اعضای آن متقارن هستند و چندجمله‌ای ویژه‌ی آن‌ها به شکل $x^n + a_{n-۲}x^{n-۲} + a_{n-۳}x^{n-۳} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ باشند. در این صورت بعد W روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\dfrac{(n-۱)^۲}{۴}$

۲) $\dfrac{n(n+۲)}{۴}$

۳) $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\dfrac{(n-۱)(n+۲)}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. با توجه به اینکه ضریب $x^{n-۱}$ در چندجمله‌ای مشخصه صفر است، اثر هر عضو W صفر است. بنابراین از بُعد ماتریس‌های $n \times n$ متقارن یک واحد کم می‌کنیم:

$$\dim W = \frac{n(n+۱)}{۲} - ۱ = \frac{n^۲ + n - ۲}{۲} = \frac{(n-۱)(n+۲)}{۲}.$$

تست: اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $A^۳ = A$ در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{tr}(A^۲)$

۲) $(\operatorname{tr}A)^۲ = (\operatorname{tr}A^۲)^۲$

۳) $(\operatorname{tr}A^۲)^۲ = (\operatorname{tr}A^۴)^۲$

۴) $\operatorname{rank}(A^۲) = \operatorname{tr}(A^۲)$

تست: اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ و $A^۳ = A$ در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{tr}(A^۲)$
۲) $(\operatorname{tr}A)^۲ = (\operatorname{tr}A^۲)^۲$
۳) $(\operatorname{tr}A^۲)^۲ = (\operatorname{tr}A^۴)^۲$
۴) $\operatorname{rank}(A^۲) = \operatorname{tr}(A^۲)$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. گیریم $f(x) = x^۳ - x = x(x-۱)(x+۱)$. در این صورت $f(A) = ۰$ و چون چندجمله‌ای مینیمال A چندجمله‌ای f را عاد می‌کند، پس به صورت حاصل‌ضربی از عوامل خطی مجزا نوشته می‌شود. بنابراین A قطری‌شدنی است و مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن زیرمجموعه‌ای از $\{۰, -۱, ۱\}$ است.

فرض کنید $n = ۳$ و $\sigma(A) = \{۰, -۱, ۱\}$. در این صورت مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A^۲$ عبارتند از $۰, ۱, ۱$ و

$$۰ = (\operatorname{tr}A)^۲ \neq (\operatorname{tr}A^۲)^۲ = ۴.$$

تست: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -۴ & \sqrt{۲} & ۱ & ۱۳۹۴ \\ \sqrt{۵} & ۹ & ۱۳۹۵ & ۴ \\ ۹۶ & ۱۳۹۶ & ۳ & -\sqrt{۷} \\ ۱۳۹۷ & \sqrt{۳} & ۹۷ & ۱۳ \end{bmatrix}$. در این صورت داریم:

(دکتری ریاضی ۹۵)

۱) A وارون‌ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن می‌باشد.

۲) A وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن می‌باشد.

۳) A وارون‌ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن نمی‌باشد.

۴) A وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن نمی‌باشد.

تست: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱۳۹۴ & ۱ & \sqrt{۲} & -۴ \\ ۴ & ۱۳۹۵ & ۹ & \sqrt{۵} \\ -\sqrt{۷} & ۳ & ۱۳۹۶ & ۹۶ \\ ۱۳ & ۹۷ & \sqrt{۳} & ۱۳۹۷ \end{bmatrix}$. در این صورت داریم:

(دکتری ریاضی ۹۵)

۱) A وارون‌ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن می‌باشد.

۲) A وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن می‌باشد.

۳) A وارون‌ناپذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن نمی‌باشد.

۴) A وارون‌پذیر است و ۱ مقدار ویژه‌ی آن نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. می‌دانیم که هر ماتریس غالب قطری وارون‌پذیر است. بنابراین A وارون‌پذیر است. از طرفی اگر $\lambda = ۱$ یک مقدار ویژه‌ی A باشد، آنگاه باید $\det(A-\lambda I) = ۰$. اما مجدداً دیده می‌شود که $A - \lambda I$ به ازای $\lambda = ۱$ غالب قطری است. بنابراین $\det(A - \lambda I)$ نمی‌تواند صفر باشد. در نتیجه، ۱ مقدار ویژه‌ی A نمی‌باشد.

تست: $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ و $J_۳$ ماتریسی ۳×۳ است که تمام درایه‌های آن ۱ می‌باشد. برای ماتریس زیر مجموع $\operatorname{rank}(A)$ و تکرر مقدار ویژه‌ی صفر کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۷)

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & I_۳ \\ J_۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ صحیح است. به وضوح، چهار سطر نخست A مستقل خطی و دو سطر آخر A وابسته‌ی خطی هستند. بنابراین $\operatorname{rank}(A) = ۴$ و $\operatorname{null}(A) = ۲$. علاوه بر این می‌توان دید که چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\lambda^۲ I_۳ - J_۳) = \det(\lambda^۲ I_۳ - \mathbf{u}_۳\mathbf{u}_۳^T) \\
&= \det(\lambda^۲ I_۳)(۱ - \mathbf{u}_۳^T(\lambda^۲ I_۳)^{-۱}\mathbf{u}_۳) \\
&= \lambda^۶\left(۱ - \sum_{i=۱}^{۳} \frac{۱}{\lambda^۲}\right) \\
&= \lambda^۶ - ۳\lambda^۴ \\
&= \lambda^۴(\lambda^۲ - ۳).
\end{aligned}$$

بنابراین مجموع $\operatorname{rank}(A)$ و تکرر مقدار ویژه‌ی صفر برابر است با ۸.

تست‌های ایراد دار

بدون گزینه‌ی صحیح، با گزینه‌ی اعلام‌شده‌ی اشتباه و دارای بیش از یک گزینه‌ی صحیح

تست: فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ ماتریسی قطری‌شدنی و λ یک مقدار ویژه‌ی A با تکرر ۷ باشد. اگر J ماتریسی 10×10 باشد که تمام درایه‌های آن ۱ است، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر حداقل ۷ است.
۲) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر ۶ است.
۳) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر حداقل ۶ است.
۴) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر ۷ است.

تست: فرض کنید $A \in M_{۱۰}(\mathbb{R})$ ماتریسی قطری‌شدنی و λ یک مقدار ویژه‌ی A با تکرر ۷ باشد. اگر J ماتریسی ۱۰×۱۰ باشد که تمام درایه‌های آن ۱ است، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دکتری ریاضی ۹۹)

۱) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر حداقل ۷ است.

۲) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر ۶ است.

۳) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر حداقل ۶ است.

۴) λ یک مقدار ویژه‌ی $A+J$ با تکرر ۷ است.

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. چون A قطری‌شدنی است، پس با یک ماتریس قطری D متشابه است، یعنی ماتریس وارون‌پذیری چون P وجود دارد به طوری که $P^{-۱}AP = D$. فرض کنید

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{\text{۷ مرتبه}}, \alpha, \beta, \gamma).$$

همچنین فرض کنید $\mathbf{u}$ برداری ۱۰تایی باشد که تمام مؤلفه‌های آن برابر با ۱ هستند. در این صورت $J = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$.

حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
p_{A+J}(x) &= \det(xI - A - J) = \det(xI - PDP^{-۱} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \\
&= \det(xI - PDP^{-۱})(۱ - \mathbf{u}^T(xI - PDP^{-۱})^{-۱}\mathbf{u}) \\
&= \det(xI - D)(۱ - \mathbf{u}^T P(xI - D)^{-۱}P^{-۱}\mathbf{u}) \\
&= \left(\prod_{i=۱}^{۱۰}(x - d_i)\right)\left(۱ - \sum_{i=۱}^{۱۰}\frac{\mathbf{u}_i^۲}{x-d_i}\right) \\
&= \prod_{i=۱}^{۱۰}(x - d_i) - \sum_{i=۱}^{۱۰}\mathbf{u}_i^۲\left(\prod_{j\neq i}(x - d_j)\right) \\
&= (x-\lambda)^۷(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\
&- ۷(x-\lambda)^۶(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\
&- (x-\lambda)^۷(x-\beta)(x-\gamma) - (x-\lambda)^۷(x-\alpha)(x-\gamma) \\
&- (x-\lambda)^۷(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\lambda)^۶ Q(x,\lambda,\alpha,\beta,\gamma).
\end{aligned}$$

بنابراین تکرر λ برابر با ۶ است. (در پاسخنامه، گزینه‌ی ۳ صحیح اعلام شده است.)

تست: فرض کنید A ماتریسی ۴×۴ باشد که درایه‌های آن به دلخواه با اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۶$ پر شده است، به طوری که هر عدد دقیقاً یکبار ظاهر شده است. اگر J ماتریسی ۴×۴ باشد که تمام درایه‌هایش ۱ هستند، آنگاه ماکسیمم مقدار ویژه‌ی AJ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۸)

۱) ۵۰۰
۲) ۵۴۴
۳) ۶۰۰
۴) ۹۴۴

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به اینکه درایه‌های ماتریس AJ مثبت هستند و

$$۰ \leq \operatorname{rank}(AJ) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(J)\}$$

داریم $\operatorname{rank}(AJ) = \operatorname{rank}(J) = ۱$ و بنابراین AJ دارای سه مقدار ویژه‌ی صفر است. از این رو، تنها مقدار ویژه‌ی ناصفر AJ برابر است با $\operatorname{tr}(AJ)$. این در حالی است که

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AJ) &= (AJ)_{۱۱} + (AJ)_{۲۲} + (AJ)_{۳۳} + (AJ)_{۴۴} \\
&= \sum_{j=۱}^{۴} a_{۱j} + \sum_{j=۱}^{۴} a_{۲j} + \sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j} + \sum_{j=۱}^{۴} a_{۴j} \\
&= \sum_{i=۱}^{۴} \sum_{j=۱}^{۴} a_{ij} \\
&= ۱۳۶.
\end{aligned}$$

تست: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی 7×7 باشد و $A^3 = 5A^2 - 6A$. اگر $\mathrm{tr}(A) = 8$، آنگاه رتبه‌ی A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

تست: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی ۷×۷ باشد و $A^{۳}=۵A^{۲}-۶A$. اگر $\operatorname{tr}(A)=۸$، آنگاه رتبه‌ی A برابر است با: (دکتری ریاضی ۹۵)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه‌های ۲ و ۳ هر دو می‌توانند صحیح باشند. فرض کنیم $f(x)=x^{۳}-۵x^{۲}+۶x$. در این صورت $f(A)=۰$ و $f(x)=x(x-۲)(x-۳)$. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت زیر است:

$$p(x)=x^{d_۱}(x-۲)^{d_۲}(x-۳)^{d_۳}$$

که در آن $d_۱+d_۲+d_۳=۷$ و $۲d_۲+۳d_۳=۸$. واضح است که d_iها به طور یکتا مشخص نمی‌شوند. مثلاً اگر $d_۱=۳, d_۲=۴, d_۳=۰$، آنگاه $\operatorname{rank}(A)=۴$. این در حالی است که اگر $d_۱=۴, d_۲=۱, d_۳=۲$ در نظر گرفته شوند، آنگاه $\operatorname{rank}(A)=۳$.

تست: ماتریس‌های $A, B \in M_۲(\mathbb{R})$ موجودند که $A^۲ = B^۲ = I$. در این صورت مقادیر ویژه‌ی AB کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) $۱ \pm \sqrt{۳}$

۲) $۳ \pm ۲\sqrt{۲}$

۳) $۲, \frac{۱}{۲}$

۴) $۲ \pm ۲\sqrt{۳}$

تست: ماتریس‌های $A, B \in M_{۲}(\mathbb{R})$ موجودند که $A^{۲} = B^{۲} = I$. در این صورت مقادیر ویژه‌ی AB کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) $۱ \pm \sqrt{۳}$
۲) $۳ \pm ۲\sqrt{۲}$
۳) $۲, \frac{۱}{۲}$
۴) $۲ \pm ۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه‌های ۲ و ۳ هر دو می‌توانند صحیح باشند.
فرض کنیم $\lambda_{۱}, \lambda_{۲}$ مقادیر ویژه‌ی AB باشند. در این صورت باید داشته باشیم

$$\lambda_{۱}\lambda_{۲} = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \pm ۱.$$

با توجه به این مطلب، گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند. برای دیدن امکان درستی گزینه‌های ۲ و ۳ می‌توان ماتریس‌های A و B را به ترتیب، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}, B_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \quad A_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, B_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix}.$$

با سپاس از توجه شما