www.irysc.com

مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران

نهم و دهم اردیبهشت هشتاد و نه

پاسخ سوالات:

محمد شریفی

سیامک احمدپور

یاسر احمدی فولادی

روز اول

۱) IRYSC.COM a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + ۱$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(a-b)^۲ + (ab+۱)^۲$ مربع کامل نیست.

۲) IRYSC.COM n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر روی یک استقامت نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{۲}{۳}(n^۲ - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) IRYSC.COM دایره‌های $W_۱$ و $W_۲$ در D و P متقاطع‌اند. A و B به‌ترتیب روی $W_۱$ و $W_۲$ هستند به‌طوری که AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی $W_۲$ را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید

$$\angle DPM = \angle BDC$$

روز دوم

۴) IRYSC.COM ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{b, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}$$

ثابت کنید معادله‌ی $P(x) = ۰$ در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ جواب ندارد.

۵) IRYSC.COM در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به‌ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) IRYSC.COM مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت‌نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت‌نام کرده‌اند. می‌دانیم اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-۱)^۲$ بیش‌تر نیست.

پاسخ‌ها

۱) IRYSC.COM توجه کنید که

$$(a-b)^۲+(ab+۱)^۲=(a+b)^۲+(ab-۱)^۲=(a^۲+۱)(b^۲+۱).$$

اگر $a^۲+۱$ و $b^۲+۱$ عامل اول مشترکی مانند p داشته باشند، آن‌گاه

$$p\mid(a^۲+۱)-(b^۲+۱)=(a-b)(a+b)$$

بنابراین $p\mid a\pm b$ (به ازای یکی از انتخاب‌های $+$ و یا $-$). بنابراین

$$p\mid a(a\pm b)-(a^۲+۱)=\pm ab-۱\Rightarrow p\mid ab\mp ۱\Rightarrow p\mid(a\pm b,ab\mp ۱)$$

که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین $(a^۲+۱,b^۲+۱)=۱$. حال اگر $(a^۲+۱)(b^۲+۱)$ مربع کامل شود، هریک از اعداد $a^۲+۱$ و $b^۲+۱$ باید مربع کامل شوند، که غیر ممکن است؛ زیرا $a^۲<a^۲+۱<(a+۱)^۲$.

۲) IRYSC.COM دو نقطه‌ی A و B را در نظر بگیرید. از آن‌جا که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند، در هر یک از دو سوی خط AB، حداکثر دو نقطه مانند C وجود دارند که مثلث ABC مساحت ۱ داشته باشد. پس برای هریک از $\binom{n}{۲}$ انتخابِ دو نقطه برای A و B، حداکثر ۴ مثلث ABC با مساحت ۱ به دست می‌آیند. هر چنین مثلث ABCای سه بار به خاطر سه رأسش شمرده می‌شود. پس، حداکثر $\frac{۴}{۳}\binom{n}{۲}$ مثلث با مساحت ۱ می‌توانند وجود داشته باشند.

۳) IRYSC.COM فرض کنید خط PD، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی L قطع کند. طبق قوت نقطه‌ی L نسبت به دو دایره،

$$LA^۲=LD\cdot LP=LB^۲$$

بنابراین L نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB است.
دو مثلث PCB و PBA متشابه‌اند؛ زیرا

$$\angle PCB=\frac{۱}{۲}\angle PDB=\angle PBA,\qquad \angle PBC=\frac{۱}{۲}\widehat{PC}=\angle PDC=\frac{۱}{۲}\widehat{ADP}=\angle PAB$$

از تشابه دو مثلث و این‌که PM و PL میانه‌های دو مثلث‌اند، نتیجه می‌گیریم دو مثلث PMC و PLB متشابه‌اند. بنابراین

$$\angle CPM=BPL\Rightarrow\angle CPB=\angle MPD$$

از طرفی $\angle CPB=\frac{۱}{۲}\widehat{CB}=\angle CDB$. درنتیجه $\angle MPD=\angle CDB$.

۴) IRYSC.COM با توجه به فرض مسئله، $b,b+d>۰$. فرض کنید $x\in[-۱,۱]$ ریشه‌ای از این معادله باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
۰&=|ax^۳+bx^۲+cx+d|\geq|bx^۲+d|-|ax^۳+cx|\\
&=(b+d)x^۲+d(۱-x^۲)-\left|x\left((a+c)x^۲+c(۱-x^۲)\right)\right|\\
&\geq(b+d)x^۲+d(۱-x^۲)-|(a+c)x^۲+c(۱-x^۲)|\\
&\geq(b+d)x^۲+d(۱-x^۲)-\left(|a+c|x^۲+|c|(۱-x^۲)\right)\\
&\geq\min\{b,b+d\}(x^۲+۱-x^۲)-\max\{|a+c|,|c|\}(x^۲+۱-x^۲)\\
&=\min\{b,b+d\}-\max\{|a+c|,|c|\}>۰.
\end{aligned}$$

که غیرممکن است. (توجه کنید که در نابرابری‌های بالا از نابرابری مثلث، و این‌که $b,b+d>۰$ و $۱-x^۲\geq۰$ استفاده کرده‌ایم.)

۵) IRYSC.COM نقطه‌ی برخورد دو خط CE و BF را O می‌نامیم. فرض کنید

$$\angle BEC = BCE = \frac{۱}{۲}\angle ABC = \alpha, \quad \angle CBF = \angle CFB = \frac{۱}{۲}\angle ACB = \beta$$

بنابراین $\alpha + \beta = ۶۰^\circ$ و نتیجتا $\angle BOC = ۱۲۰^\circ$. پس چهارضلعی $ABOC$ محاطی است. درنتیجه

$$\angle OAC = \angle OBC = \beta, \quad \angle OAB = \angle OCB = \alpha$$

$$\Rightarrow OA = OE = OF \Rightarrow \angle OEF = \angle OFE = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KAC = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{KC} = \angle KEC = ۳۰^\circ \Rightarrow \angle EAK = \angle FAK = ۳۰^\circ$$

۶) IRYSC.COM a_k را بیشینه‌ی شمار زیرمجموعه‌های k عضوی، $k \geq ۲$، بگیرید. هیچ دو زیرمجموعه‌ی k عضوی‌ای نمی‌توانند دو عضو مشترک داشته باشند. پس، همه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضویِ زیرمجموعه‌های k عضوی، گوناگون هستند. به این ترتیب، نابرابری‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\binom{k}{۲} a_k \leq \binom{n}{۲};$$

$$a_k \leq \frac{n(n-۱)}{k(k-۱)}, \quad n \geq ۲$$

با جمع بستن a_k ها برای k از ۲ تا n، شمار بیشینه‌ی خواسته شده به دست می‌آید:

$$\sum_{k=۲}^{n} a_k \leq \sum_{k=۲}^{n} \frac{n(n-۱)}{k(k-۱)} = n(n-۱)\sum_{k=۲}^{n}\left(\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k}\right) = n(n-۱)\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = (n-۱)^۲$$