محاسبات عددی :

احمد پاکباز

AHMAD . PAKBAZ

• معادله $(x-1)^3=0$ دارای ریشه $x=1$ از مرتبه سوم است .

• مرتبه همگرایی :

$\varepsilon = a - x_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a-x_{n+1}|}{|a-x_n|^R} = \beta$$

- با فرض اینکه دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ به ریشه $x=a$ همگرا باشد :

- R مرتبه همگرایی دنباله و اگر $R=1$ ، دنباله خطی است .

- مرتبه همگرایی معیاری از سرعت همگرا شدن یک روش است .

• روش نصف کردن (Bisection Method) :

1) بازه $[a,b]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(a)f(b)<0$ باشد .

2) بازه را نصف می‌کنیم : $c = a+b/2$

3) آنگاه :

الف) $f(a)f(c)<0$: یک ریشه در بازه $[a,c]$ وجود دارد .

ب) $f(b)f(c)<0$: یک ریشه در بازه $[b,c]$ وجود دارد .

ج) $f(c)=0$ ، $x=c$ ریشه معادله است .

این مراحل را تا جایی که طول بازه به حد کافی کوچک شود ادامه می‌دهیم .

نکته : تعداد تکرارهای لازم برای اینکه در روش نصف کردن به ریشه معادله در بازه $[a,b]$ با حداکثر خطای ε برسیم عبارت است از :

$$n = \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} + 1 .$$

✓ $\log(1) = 0$ ✓ $\log(0.1) = -1$

✓ $\log(2) = 0.3$ ✓ $\log(0.01) = -2$

• روش نابجایی (False Position method) :

1) بازه $[a,b]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(a)f(b)<0$ باشد .

2) نقطه c را از این رابطه بدست می‌آوریم :

$$c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

3) آنگاه :

الف) $f(a)f(c)<0$ ، یک ریشه در بازه $[a,c]$

ب) $f(b)f(c)<0$ ، " " " $[b,c]$

ج) $f(c)=0$: $x=c$ ریشه معادله است .

این مراحل را تا جایی که طول بازه به حد کافی کوچک شود ادامه می‌دهیم .

• روش نیوتن - رافسون (Newton-Raphson Method) :

- ریشه معادله با استفاده از رابطه متوالی بدست می‌آید :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

نکته : برای تعیین ریشه k ام یک عدد از روش نیوتن رافسون بصورت زیر استفاده میکنیم :

- $x = \sqrt[k]{b} \rightarrow x^k = b$

- $f(x) = x^k - b \rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$

- $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + b x_n^{1-k}\right]$

- شرط همگرایی روش نیوتن - رافسون :

$$\left|\frac{f(x_0) f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}\right| < 1 \quad \text{یا} \quad f(x_0) f''(x_0) < [f'(x_0)]^2$$

• روش وتری (Secant method) :

- در روش نیوتن-رافسون برای برخی محاسبات ممکن است بدست آوردن $f'(x)$ مشکل باشد، بنابراین از این روش استفاده می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

نکته : - روش نصف کردن و نابجایی همواره همگرا هستند ولی سایر روش ها یک شرایط تکمیلی دارند.

- روش نیوتن-رافسون از بقیه روش ها سریعتر است و روش نصف کردن و تکرار ساده از همه کندتر.

• روش تکرار ساده (Simple Fixed Point Interation) :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

مثال:

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}(x^2+1)$

$x_{n+1} = g(x) = \frac{1}{3}(x_n^2+1)$

حدس اولیه $x_0 = 1$ $\quad x_1 = \frac{1}{3}(1^2+1) = 0.667$

$x_1 = 0.667$ $\quad x_2 = \frac{1}{3}(0.667^2+1) = 0.481$

$\vdots$

- شرط همگرایی و یکتایی ریشه روش تکرار ساده برای حل معادلات غیرخطی $\quad \forall x \in [a,b] : |g'(x)| < 1$

• روش اتکین (Aitken Method):

• $x_n^* = x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

$\Delta^k x_n = \Delta^{k-1}(\Delta x_n) \longrightarrow \Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

• روش استفنسن (Steffensen Method):

• $x_n^{(i+1)} = x_n^{(i)} - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = x_n^{(i)} - \dfrac{(x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)})^2}{x_{n+2}^{(i)} - 2x_{n+1}^{(i)} + x_n^{(i)}}$

$x_{n+1}^{(i)} = g(x_n^{(i)})$

$x_{n+2}^{(i)} = g(x_{n+1}^{(i)})$

- هرگاه معادله $x = g(x)$ دارای جواب $x = \alpha$ بوده و $g'(\alpha) \neq 1$ آنگاه مرتبه همگرایی روش استفنسن 2 است.

• حل دستگاه دو معادله، دو مجهول غیرخطی با روش نیوتن - رافسون:

• $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$

① $F(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{bmatrix}$

② $$J(x_n, y_n) = \begin{array}{cc} \text{مشتق نسبت به } x & \text{مشتق نسبت به } y \\ \left[\begin{array}{c} \partial/\partial x\, f_1(x_n, y_n) \\ \partial/\partial x\, f_2(x_n, y_n) \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \partial/\partial y\, f_1(x_n, y_n) \\ \partial/\partial y\, f_2(x_n, y_n) \end{array}\right] \end{array}$$

• ماتریس ژاکوبین

③ $J(x_n, y_n) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -F(x_n, y_n)$

④ $x_{n+1} = x_n + \Delta x$

$y_{n+1} = y_n + \Delta y$

• درونیابی با روش لاگرانژ:

• $P_n(x) = l_0(x) f(x_0) + \cdots + l_n(x) f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) f(x_i)$

- $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}} \left[\dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}\right] = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

تذکر: وقتی در صورت مسأله بیان می‌شود حل معادله با استفاده از درونیابی مرتبه دوم ^{2} لاگرانژ یعنی سه ^{3} جمله باید نوشت.

نکته : چون چند جمله‌ای درونیابی لاگرانژ از همه نقاط عبور می‌کند پس نقطه $x = x_i$ و $y = y_i$ باید روی خط مورد نظر باشد.

مثال)

• $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ $\longrightarrow$ چند جمله‌ای درونیابی لاگرانژ $= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

چون $x = 1$ و $y = \sqrt{1} = 1$ روی خط $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ وجود دارد.

• روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن :

• $P_n(x) = f_0^{[0]} + (x - x_0) f_0^{[1]} + (x - x_0)(x - x_1) f_0^{[2]} + \dots + (x - x_{n-1}) f_0^{[n]}$

- $f_i^{[0]} = f_i$

- $f_i^{[1]} = f[x_i , x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$

- $f_i^{[2]} = f[x_i , x_{i+1} , x_{i+2}] = \dfrac{f(x_{i+1} , x_{i+2}) - f(x_i , x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$

• روش تفاضلات پیشرو نیوتن و تفاضلات پسرو نیوتن :

۱- تفاضلات پیشرو نیوتن :

• $P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \left[{r \atop s}\right] \Delta^s f_0 = f_0 + r\Delta f_0 + \dfrac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$

✓ اولین تفاضل پیشرو نیوتن : $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ $\qquad$ - $x = x_0 + rh$

✓ دومین تفاضل پیشرو نیوتن : $\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$ $\qquad$ - $\left[{r \atop s}\right] = \dfrac{r!}{s!\,(r-s)!}$

$\vdots$

✓ k امین تفاضل پیشرو نیوتن : $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

۲- تفاضلات پسرو نیوتن :

• $P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \left[{-r \atop s}\right] \nabla^s f_n = f_n + r\nabla f_n + \dfrac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \dfrac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$

✓ اولین تفاضل پسرو نیوتن : $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ $\qquad$ - $x = x_n + rh$

✓ دومین تفاضل " " : $\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$

$\vdots$

✓ k امین تفاضل " " : $\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$

نکته : اگر x نزدیک به نقاط درونیاب ابتدای جدول باشد از روش پیشرو نیوتن و اگر نزدیک به نقاط درونیاب انتهای جدول باشد از روش تفاضلات پسرو استفاده می کنیم.

نکته : هرگاه مقادیر ستون m ام جدول تفاضلات برابر باشند چند جمله ای درونیاب از درجه حداکثر m است.

• برازش منحنی توسط روش کمترین مربعات :

- هرگاه مجموعه ای از نقاط مانند $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ داشته باشیم و بخواهیم تابعی شکل $y=f(x)$ را بدست آوریم از روش کمترین مربعات استفاده می کنیم.

- $y = ax+b$

- مقادیر a و b از روابط مقابل بدست می آید.

$$\begin{cases} bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

نکته : هرگاه بخواهیم منحنی داده را با معادله $y = mx^A$ برازش کنیم با معلوم بودن A و m عبارتست از :

$$\bullet\ m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^A y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2A}}$$

مثال) $y = mx$, $(1,2),(2,3.5),(-1,-1)$ $A=1$

$$m = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} = \frac{(1\times2)+(2\times3.5)+(-1)(-1)}{1^2+2^2+(-1)^2} = 1.667$$

• انتگرال گیری :

- روش مستطیلی :

$$\bullet \int_a^b f(x)\,dx \simeq h\,[f(0)+f(1)+\dots+f(n)] \quad , \quad h=\frac{b-a}{n}$$

- روش ذوزنقه :

$$\bullet \int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[\frac{f_0}{2}+f_1+\dots+\frac{f_n}{2}\right] \quad , \quad h=\frac{b-a}{n}$$

خطا متناسب با h^2 ($1/h^2$ یا) است یعنی اگر طول گام h نصف شود میزان خطا $1/4$ می گردد.

$$h=\sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}} \quad , \quad M_2 = Max\,|f''(x)| \quad , \quad x\in[a,b]$$

خطای روش ذوزنقه ای برای چند جمله ای های درجه یک و کمتر بدون خطا است.

- روش سیمپسون (Simpson Method) :

- در این روش چندجمله‌ای درجه 2 را با روش 1/3 و چندجمله‌ای درجه 3 را با روش 3/8 حل می‌کنیم.

✓ روش 1/3 سیمپسون :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n\right]$$

• ضریب جملات فرد 4 و ضریب جملات زوج 2 است.

$$E=-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}_{(c)}$$

✓ روش 3/8 سیمپسون :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}h\left[f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+\cdots+f_n\right]$$

• ضریب جملات مضرب 3، 2 و بقیه ضریب‌ها 3 است.

$$E=-\frac{b-a}{80}h^4 f^{(4)}_{(c)}$$

✓ خطای روش سیمپسون برای چندجمله‌ای‌های درجه 3 و کمتر بدون خطا است، و خطا در آن از مرتبه h^4 یا $\frac{1}{n^4}$ است.

$$h=\sqrt[4]{\frac{180E}{(b-a)M_4}} \quad , \quad M_4=Max\left|f^{(4)}_{(x)}\right|$$

که M برای عبارات $Sin x$, $Cos x$ یک است. ($M=1$).

- خطای مرحله kام روش رامبرگ متناسب است با h^{2k+2}.

- رابطه انتگرال‌گیری گاوسی برای کلیه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر $2n-1$ دقیق است.

- روش نقطه میانی (Midpoint method) :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[f(x_0+h/2)+f(x_1+h/2)+\cdots+f(x_{n-1}+h/2)\right]$$

$$E=-\frac{(b-a)h^2}{24}f''_{(c)}$$

✓ در حالتی که تابع تحت انتگرال در نقاط $x=a$ یا $x=b$ تعریف نشده باشد از روش میانی استفاده می‌کنیم.