بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه ای بر

مکانیک جامدات غیر خطی

امید امیدی ارجنکی

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

مقدمه

برای استخراج معادلات غیرخطی عناصر محدود ضروری است که از روش جامع و مؤثر استفاده شود.

جامع ترین و مؤثرترین روش، روش سازگار مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته (Consistent Continuum- Mechanics-based Approach) است.

به عبارت دیگر لازم است معادلات حاکم بر مکانیک محیط پیوسته (Governing Continuum Mechanics Equations) برای یک روش حل عناصر محدود مبتنی بر تغییرمکان(Displacement-Based Finite Element Solution) ارائه گردد.

در این حالت نیز(همچون تحلیل خطی عناصر محدود)، از اصل کار مجازی باید استفاده نماییم. اما، باید امکان وقوع تغییرمکان ها، دوران ها،کرنش های بزرگ و نیز رابطه غیرخطی کرنش-تنش را نیز در فرمول بندی وارد نماییم.

مقدمه

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

- ریاضیات مقدماتی
- سینماتیک تغییر شکل
- تنش
- اصول تعادل
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

مقدمه

بیشتر جامدات بخصوص موادی مثل فلزات، بتون، چوب و غیره عموماً تحت اثر نیروهایی که به آنها وارد می شود دارای تغییر مکانهای کوچک هستند، و در صورتیکه نیروی وارد بر آنها خیلی زیاد نباشد، بعد از اینکه نیرو را از روی جسم برداریم به حالت اولیه خود بر می گردد . تئوری الا سیسیته خطی مدل بسیار مناسبی برای نشان دادن رفتار جامدات است .

معادله مشخصه مواد غیرخطی (معادلات ساختاری برای مواد *Finite* تغییر شکل *Finite*دارند) مثل پلیمرها . رفتار خیلی از مواد را می توان توسط تئوی الا سیسیته خطی بیان نمود . ولی چون این تئوری محدود به حالتی است که گرادیان تغییر مکان کوچک است رفتار بعضی از مواد مثل لاستیک ها و انواع پلیمرها که می توانند در محیط الاستیک دارای تغییر مکان نیز باشند، بوسیله تئوری الا سیسیته خطی قابل بیان نیست و باید از تئوری الا سیسیته *Finite* استفاده نمود .

ریاضیات

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه
- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه
- تجزیه طیفی در تانسورهای متقارن
- قوانین تبدیل بردارهای پایه
- قوانین تبدیل بردار و تانسور
- توابع عددی بردار و تانسور
- گرادیان یک میدان عددی
- مشتقات جهتدار و یا تعاریف جایگزین آن
- دیورژانس و کرل (واگرایی و حلقه)
- شیب میدان برداری
- قضایای انتگرال گیری

ریاضیات

- فضای سه بعدی اقلیدوسی با یک سیستم راست گرد متعامد.
- سه بردار:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

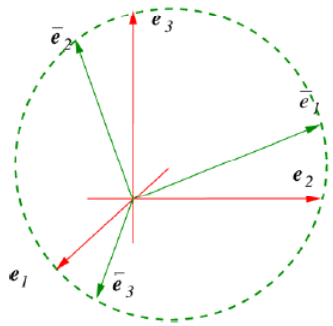
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}, \qquad \delta_{ij}\delta_{ij} = 3.$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$$



بردار های متعامد

- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- ضرب عددی:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})=u_iv_i$$

- جزء J ام یک بردار:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_j=(u_i\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j=u_i\delta_{ij}=u_j$$

- نرم بردار:

$$|\mathbf{u}|^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_iu_j\mathbf{e}_j=u_iu_j\delta_{ij}$$

$$=u_iu_i=u_1^2+u_2^2+u_3^2$$

- ضرب برداری:

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u},$$

$$|\mathbf{w}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta(\mathbf{uv}),\quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}=0$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_k=\varepsilon_{ijk}u_iv_j$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\varepsilon_{ijk}u_iv_j\mathbf{e}_k,$$

- ضرب عددی سه تایی:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta_{uv}|\mathbf{w}|\cos\theta_{(u\times v)w}$$

$$=\varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k$$

- بردار های متعامد
- **جبر عمومی بردارها**
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- **مجموعه تبدیلات خطی**
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in X.$$

$$xe = ex = x, \forall x \in X.$$

$$\forall x \in X, \exists x^{-1} \in X, \text{ s.t. } xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

ریاضیات

- تانسور درجه دو A تبدیل خطی روی u برای حصول v است:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

- توجه :

$$\mathbf{W} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \qquad W_{ij} = u_i v_j \neq v_i u_j$$

- جفتی W ترکیب خطی ضرایب جفتی های عددی است:

$$\mathbf{W} = \alpha(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{w} \otimes \mathbf{x})$$

- هر تانسور درجه دو A گاهاً با بردارهای پایه به صورت جفتی بیان می شود:

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- **تانسورهای درجه دو**
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- زوج یک تانسور درجه دو است که به صورت خطی بردار w به بردار n در جهت u با قانون زیر تبدیل شده است:

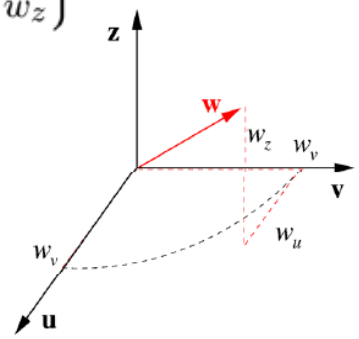
$$\mathbf{n} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u},$$

$$n_i = (u_i v_j) w_j = u_i (v_j w_j)$$

- مثلاً:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_u \\ w_v \\ w_z \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & u_u v_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & u_u v_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_u \\ w_v \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_u v_v w_v \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
  - **تفسیر دوطرفه یا زوجی**
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- **تانسورهای دکارتی**
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

- وقتی تانسور A در طول بردارهای پایه متعامد بهنجار محاسبه شود را تانسور دکارتی یا کارتزین گویند:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{unit tensor}$$

- که میتوان نوشت:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- اجزای دکارتی A را میتوان با روابط زیر بدست آورد:

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = A_{il}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\mathbf{e}_j = A_{il}(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = A_{il}\delta_{lj}\mathbf{e}_i = A_{ij}\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i \cdot A_{ij}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i A_{ij} = A_{ij}$$

- که $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ سه جزء در R دارد.

ریاضیات

- تانسور A را مثبت نیمه قطعی گویند اگر هر بردار غیر صفر v:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v}\geq 0 \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v}\leq 0)$$

- تانسور A را مثبت قطعی گویند اگر هر بردار غیر صفر v:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v}> 0 \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v}< 0)$$

- اثر ماتریس یا اثر جفتی:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_iv_i,$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}=A_{ij}\mathrm{tr}\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right)=A_{ij}\left(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\right)=A_{ij}\delta_{ij}=A_{ii}$$

- ترانهاده:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{v}\cdot\mathbf{u},$$

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A} \qquad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_i,$$

$$(\mathbf{A}^T)_{ij}=A_{ji}$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- **معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن**
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- تک شاخصی؛ بین تانسورها یا بین یک عدد و یک تانسور:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{Au} \neq \mathbf{uA}$$

- اجزای ضرب نقطه ای در طول یک بردار پایه متعامد:

$$(\mathbf{C})_{ij} = A_{ik}B_{kj}, \qquad (\mathbf{v})_i = A_{ik}u_k$$

- شاخص جفتی؛ بین دو تانسور که حاصل یک عدد است:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{AB}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}),$$

$$A_{ij}B_{ij}$$

- محاسبه نرم تانسور:

$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} : \mathbf{A})^{1/2} = (A_{ij}A_{ij})^{1/2} \geq 0$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- **ادغام تانسوری**
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- دترمینان :

$$\det \mathbf{A} = \det [\mathbf{A}] = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lrs} A_{il} A_{jr} A_{ks}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}, \quad \det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$$

- در دتر مینان غیر صفر:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbf{A}^{-T}$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- **دترمینان و معکوس ماتریس**
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- **تانسورهای متعامد**
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

- یک تانسور متعامد است که طول و زاویه بردارها حفظ شود:

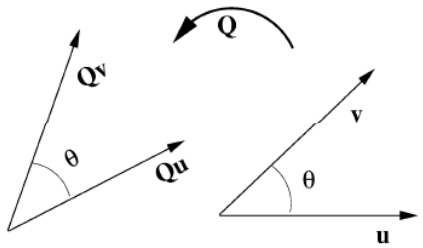
$$|\mathbf{Qu}| = |\mathbf{u}|, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$|\mathbf{Qu}|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qu} = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2, \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$$

$$\det(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = 1, \ \det(\mathbf{Q}) = \pm 1$$



ریاضیات

- عددی:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{A}),$$

- تانسوری:
  - تانسور درجه چهارم در توزیع تیلور، شیب (یا مشتق) تابع A در B است:

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathrm{grad}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \det \mathbf{A}\mathbf{A}^{-T}, \qquad \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial A_{ij}} = \det \mathbf{A} A^{-1}_{ji}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbb{I},$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- **شیب توابع تانسوری**
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- روابط دیفرانسیلی ویژه

ریاضیات

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- **دیورژانس و شیب میدان تانسوری**
- روابط دیفرانسیلی ویژه

- دیورژانس تانسوری:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{e}_j = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j}\delta_{kj}\cdot\mathbf{e}_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\cdot\mathbf{e}_i$$

- یا:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_j}\cdot\mathbf{e}_i$$

- گرادیان:

$$\operatorname{grad}\mathbf{A} = \nabla\otimes\mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k$$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{A}) = \operatorname{grad}\mathbf{A} : \mathbf{I} = \operatorname{div}\mathbf{A}$$

عملگر لاپلاس:

$$\nabla^2(\bullet) = \nabla\cdot\nabla(\bullet) = \nabla\cdot\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i\partial x_j}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i\partial x_j}\delta_{ij} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i^2}$$

ریاضیات

- میدان هارمونیک:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ and } \operatorname{curl}\mathbf{u} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- بردار های متعامد
- جبر عمومی بردارها
- مجموعه تبدیلات خطی
- تانسورهای درجه دو
- تفسیر دوطرفه یا زوجی
- تانسورهای دکارتی
- معرفه های مثبت و منفی، اثر ماتریس و ترانهادن
- ادغام تانسوری
- دترمینان و معکوس ماتریس
- تانسورهای متعامد
- شیب توابع تانسوری
- دیورژانس و شیب میدان تانسوری
- **روابط دیفرانسیلی ویژه**

ریاضیات

- هر تانسور درجه دو A میتواند به دو تانسور متقارن S و اریب W تجزیه شود:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \quad S_{ij} = S_{ji},$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) \quad W_{ij} = -W_{ji}$$

- **تانسورهای متقارن و اریب**
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

ریاضیات

- تانسورهای متقارن و اریب
- **تانسورهای پروجکشن**
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

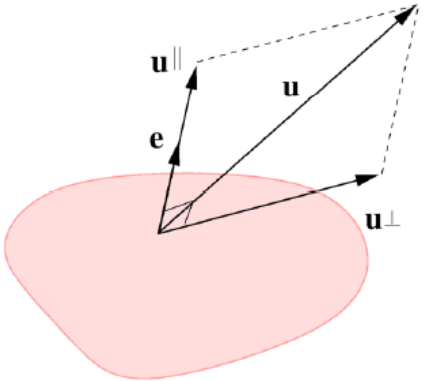
- بردار واحد e را داریم، بردار u تجزیه می شود به یک بردار در جهت e و یک بردار روی صفحه نرمال به e.

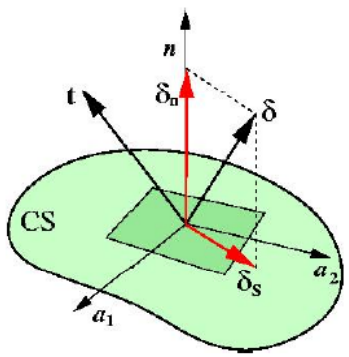
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$$

- معرفی تانسور Pe درجه دو:

$$\mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} = (\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\,\mathbf{u} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}}{}^{\parallel}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{I} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\,\mathbf{u} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}}{}^{\perp}\mathbf{u}$$





$$\delta_n = |\boldsymbol{\delta}_{\parallel}|$$

$$\boldsymbol{\delta}_S = \boldsymbol{\delta}_{\perp}$$

ریاضیات

- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- **تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)**
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

• هر تانسور درجه دو A میتواند به این دو تانسور تجزیه شود:

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \mathrm{dev}\mathbf{A},$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\mathbf{I} : \mathbf{A}) = \frac{1}{3}A_{ii}$$

عملگر اعوجاج:

$$\mathrm{dev}(\bullet) = (\bullet) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\bullet)\mathbf{I},$$

$$\mathrm{dev}(\bullet)_{ij} = (\bullet)_{ij} - \frac{1}{3}(\bullet)_{kk}\delta_{ij}$$

ریاضیات

- تانسور درجه سه (۲۷ مؤلفه):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

- ادغام دوتایی یک تانسور درجه دو و سه یک بردار ارائه میکند:

$$\mathcal{A} : \mathbf{B} = \mathcal{A}_{ijk}B_{jk}\mathbf{e}_i$$

- تانسور درجه چهار (۸۱ مؤلفه):

$$\mathbb{A} = A_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

- ادغام دوتایی یک تانسور درجه چهار و دو یک تانسور درجه دو ارائه میکند:

$$\mathbb{A} : \mathbf{B} = A_{ijkl}B_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

- بدست آوردن درجه ۴ از دو تانسور درجه ۲:

$$\mathbb{D} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, \qquad D_{ijhl} = A_{ij}B_{hl}$$

- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- **تانسورهای درجه بالا**
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

ریاضیات

- دو تانسور درجه دو B و C را داریم:

$$\mathbf{B} : \mathbb{A}^T : \mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbb{A} : \mathbf{B} = (\mathbb{A} : \mathbf{B}) : \mathbf{C},$$

$$\left(\mathbb{A}^T\right)^T = \mathbb{A}, \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$$

- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- **تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها**
- تانسورهای مقادیر ویژه
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

ریاضیات

- مقادیر ویژه تانسور A یک مجموعه اعداد هستند که

$\lambda \in \mathbb{C}$

و حاصل $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ وارون پذیر نیست.

- مقادیر ویژه به مختصات وابستگی ندارند.

- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- **تانسورهای مقادیر ویژه**
- تانسورهای عمومی بردارهای ویژه

ریاضیات

- بردارهای ویژه چپ یا راست V یا u که $\in \mathbb{C}^n$ باشند وابسته اند به یک مقدار ویژه λ تانسور درجه دو A که:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{or} \quad \left(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

- بردار ویژه چپ v2و راست u1متعامند اگر و فقط اگر:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \iff (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\,\mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

$$\left(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{I}\right)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

- تانسورهای متقارن و اریب
- تانسورهای پروجکشن
- تانسورهای کروی واعوجاج(کرنش برشی)
- تانسورهای درجه بالا
- تانسورهای درجه ۴ و ترانهاده آنها
- تانسورهای مقادیر ویژه
- **تانسورهای عمومی بردارهای ویژه**

ریاضیات

- تجزیه طیفی در تانسورهای متقارن
- قوانین تبدیل بردارهای پایه
- قوانین تبدیل بردار و تانسور
- توابع عددی بردار و تانسور
- گرادیان یک میدان عددی
- مشتقات جهتدار و یا تعاریف جایگزین آن
- دیورژانس و کرل (واگرایی و حلقه)
- شیب میدان برداری
- قضایای انتگرال گیری

مقدمه ای بر مکانیک جامدات غیر خطی

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

- **فضای برداری و فضای اقلیدوسی**
- سینماتیک تغییر شکل
- تنش
- اصول تعادل
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

اساس سیستم متریک و عمومی

•فضای برداری و فضای اقلیدوسی

•در فضای حقیقی اعداد $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$ را در نظر میگیریم. جمع : $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ و ضرب: $\mathbf{z} = \alpha\, \mathbf{u}$.

•اگر در R بتوانیم تعداد nبردار غیر وابسته خطی تعریف کنیم آن فضا را فضای n-بعدی گویند.

•فضای اقلیدوسی یک فضای برداری حقیقی است که با ضرب داخلی تعریف می شود. دو عدد حقیقی u و v:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0, \text{ and } (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

اساس سیستم متریک و عمومی

•در فضای سه بعدی

•در فضای برداری R یک سری بردار ثابت پایه تعریف میکنیم به نام بردارهای پایه هم وردا (تغییرات باهم دارند.) $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1,2,3}$,

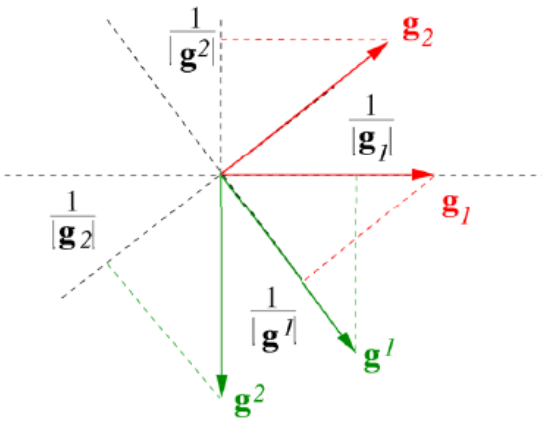
•غیر صفر، نامتوازی، خطی غیر وابسته و نرمال نشده، نامتعامد

$$(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 \neq 0$$

•در فضای دو تایی R' دو سری بردار پایه تعریف میکنیم به نام بردارهای پایه ضد وردا (تغییرات ندارند.) $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1,2,3}$,

•رابطه آنها با دلتای کرونکر توصیف میشود.

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j$$

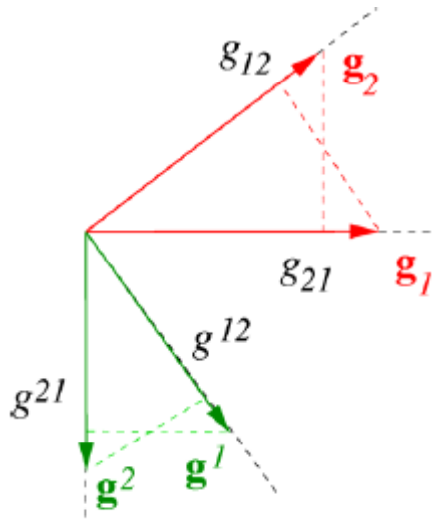


اساس سیستم متریک و عمومی

•در فضای سه بعدی

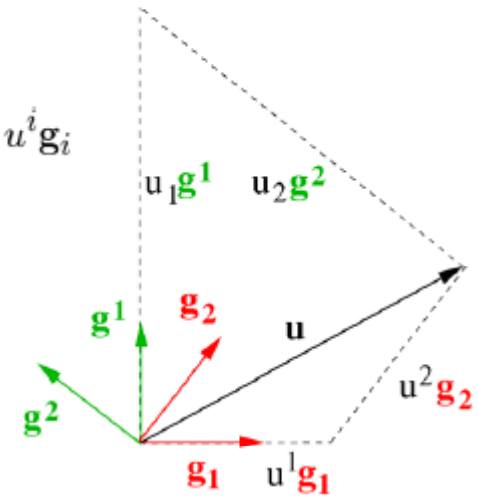
•ضرب برداری:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}$$



•هر بردار $\mathbf{u}$ را میتوان با بردارهای پایه تعریف کرد:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = u^i \mathbf{g}_i$$

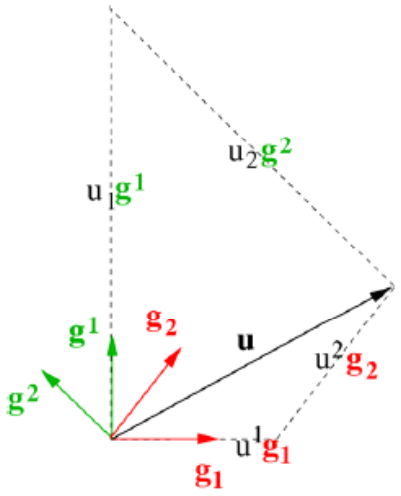


•جابجایی اندیس ها:

$$\mathbf{g}^i = g^{ij}\mathbf{g}_j, \quad \mathbf{g}_i = g_{ij}\mathbf{g}^j$$

$$\text{trial}: \mathbf{g}^i = a^{ik}\mathbf{g}_k, \quad (\mathbf{g}^i)\cdot\mathbf{g}^j = (a^{ik}\mathbf{g}_k)\cdot\mathbf{g}^j = a^{ik}\delta^j_k = a^{ij} = g^{ij}$$

اساس سیستم متریک و عمومی



•تانسور متریک

•ماتریس با اجزاء اندیس پایین معکوس ماتریس با اجزاء اندیس بالا است.

$$[g_{ij}] = [g^{ij}]^{-1}, \qquad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}^{-1}$$

•داریم:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = g^{ij} g_{kl} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^l = g^{ij} g_{kl} \delta^l_j = \delta^i_k \quad \Longleftrightarrow \quad g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k$$

•برای u داریم:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = u^i \mathbf{g}_i$$

•که u ها با اندیس های بالا و پایین i پایه های هموردا و ضدوردای u هستند. برای جابجایی شاخص ها در u:

$$\delta^i_j u_i = u_j, \qquad \delta^j_i u^i = u^j$$

مقدمه ای بر مکانیک جامدات غیر خطی

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

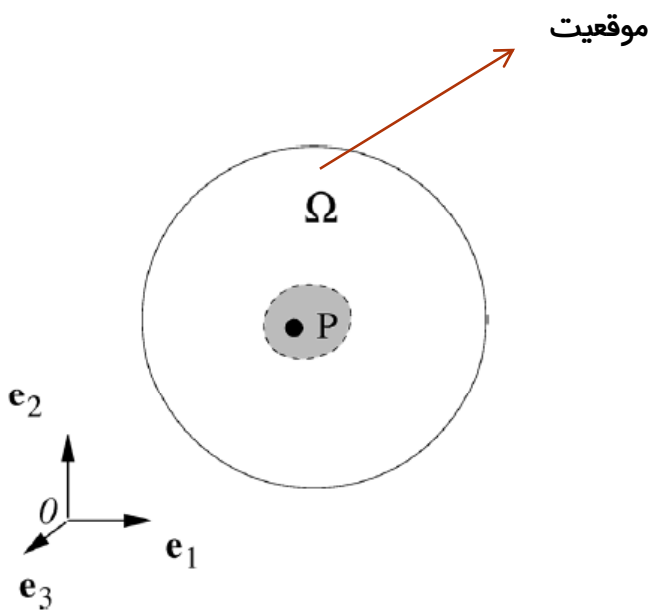
- فضای برداری و فضای اقلیدوسی
- **سینماتیک تغییر شکل**
- تنش
- اصول تعادل
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

محیط پیوسته

•سیستم ماکروسکوپیک با حجم و جرم پیوسته و ذرات زنجیره ای و به هم پیوسته دارد.

•ذرات پیوسته بخش کوچکی از محیط پیوسته یک نقطه P ماده هستند و با موارد زیر نباید اشتباه گرفته شوند:

- نقطه جرمی نیوتونی
- ملکولها و اتم های گسسته



سینماتیک (بررسی حرکت)

•حرکت

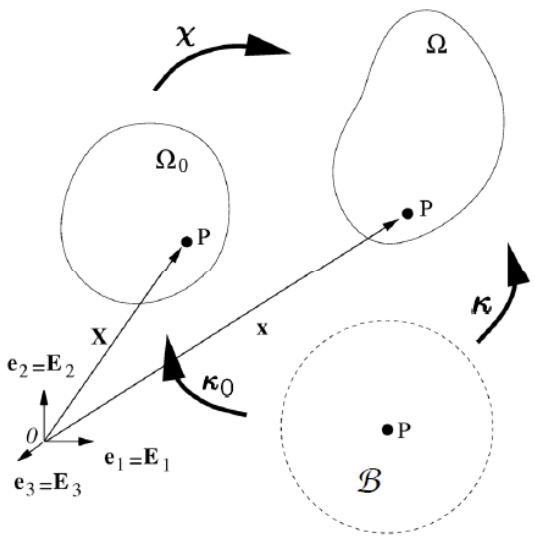
•حرکت، موقعیت، جهت و راستا و شکل یک جسم را تغییر میدهد. جسم پیوسته ای که بتواند شکلش را تغییر دهد را دگردیس پذیر یا Deformable گویند.

•در مکانیک محیط های پیوسته، موقعیت اشغال شده توسط ذره P را در زمان t اینگونه توصیف میکنند:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\kappa}\left[\boldsymbol{\kappa}_0^{-1}(\mathbf{X}), t\right] = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \qquad x_a = \chi_a(X_1, X_2, X_3, t)$$

حوزه برداری $\boldsymbol{\chi}$ را «حرکت» گویند. این حوزه مکان x را در X برای همه tهای ثابت مشخص میکند.

این رابطه تمام موقعیت های متوالی P را ارائه میکند. دنباله ای از این موقعیت ها مسیر (یا خط مسیر) را ارائه میکند.



سینماتیک (بررسی حرکت)

•سرعت و شتاب

•سرعت و شتاب به ترتیب مشتق اول و دوم حرکت χ هستند نسبت به زمان.

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}$$

•V و A توابعی هستند از مختصات ماده (X1 و X2 و X3) که نرخ زمانی تغییر موقعیت و سرعت یک ذره X در لحظه t را نشان میدهند.

مقدمه ای بر مکانیک جامدات غیر خطی

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

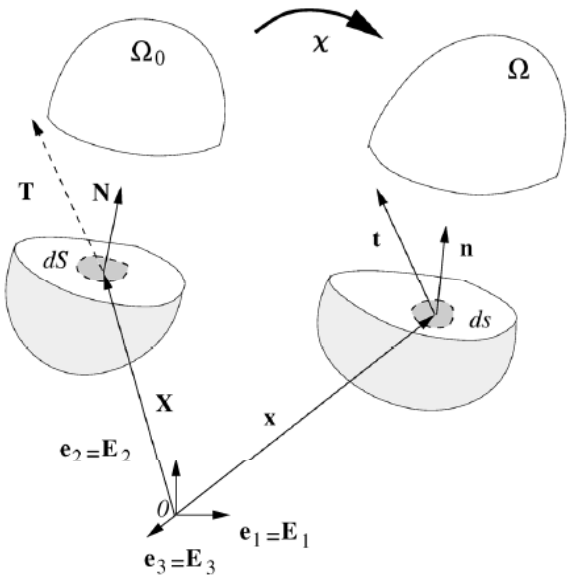
- فضای برداری و فضای اقلیدوسی
- سینماتیک تغییر شکل
  - تنش
- اصول تعادل
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

تنش

•تصویر برداری کشش

•طبق یک تغییر شکل محیط پیوسته B: در زمان t (t=0) موقعیت مشخص (اول) را اشغال کرده است. نیروهای خارجی روی مرز و نیروهای داخلی روی هر سطحی از جسم وارد می شوند.

•با داشتن نقطه P معلوم با مختصات x در مختصات جاری (یا X در مختصات مرجع) هر صفحه به طرف خارج و نرمال n (N) در P جسم را در دو بخش قطع میکند.



تنش

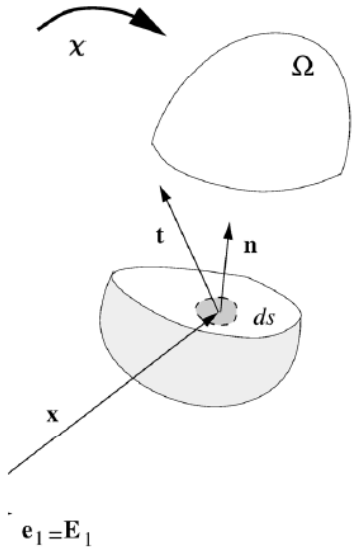
•تنش کوشی

•سطح عنصر ds را در مختصات محلی و برآیند نیروی بینهایت کوچک df را روی ds در نظر بگیرید.

•بردار کشش t را در مختصات محلی تعریف میکنیم (فرض کوشی):

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds \qquad \mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}),$$

•T بردار کشش (حقیقی) کوشی اعمال شده روی ds با بردار نرمال خارجی n است. (نیرو در واحد سطح در مختصات محلی)



•بردار t که روی سراسر سطح عناصر اعمال میشود، به عنوان کشش سطحی، نیروهای تماسی، بردار تنش یا بار به آن اشاره شده است.

تنش

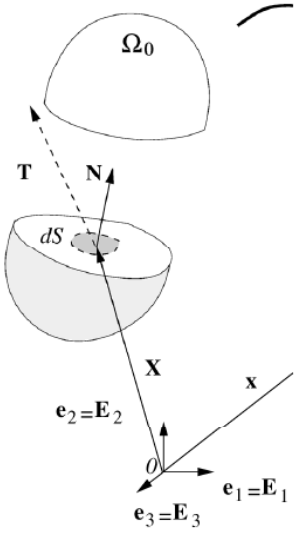
•تنش پیولا

•سطح عنصر dS را در مختصات مرجع و برآیند نیروی بینهایت کوچک df را روی dS در نظر بگیرید.

•بردار کشش T را در مختصات مرجع تعریف میکنیم:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}dS, \qquad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$$

•T اولین بردار کشش پیولا (اسمی) اعمال شده روی جهت و راستای مشابه کشش کوشی است. (نیرو در واحد سطح در مختصات مرجع). این بردار یک شبه کشش است که شدت نیروی اعمال شده را توصیف نمیکند و یک تابع از X و N است.



•بردار T که روی سراسر سطح عناصر اعمال میشود، به عنوان کشش سطحی، نیروهای تماسی، بردار تنش یا بار به آن اشاره شده است.

•و رابطه بین آنها:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})ds = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})dS,$$

تنش

•قضیه تنش کوشی

•حوزه های تانسور درجه دوم منحصر به فرد σ و P وجود دارد (قانون کوشی):

•حوزه تانسور فضایی متقارن σ (تانسور تنش کوشی یا تانسور تنش حقیقی):

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}, \qquad t_a = \sigma_{ab}n_b$$

•حوزه تانسوری دو نقطه ای نامتقارن P (تانسور تنش پیولا یا تانسور تنش اسمی، تنش پیولا):

$$\mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}, \qquad T_a = P_{aA}N_A$$

•قضیه کوشی توضیح می دهد که اگر بردارهای کشش T یا t وابسته به بردارهای نرمال خارجی N یا n باشند، باید در N یا n خطی باشند.

تنش

•قضیه تنش کوشی

•با توجه به قانون سوم نیوتن (کنش و واکنش) داریم:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}), \qquad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = -\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, -\mathbf{N})$$

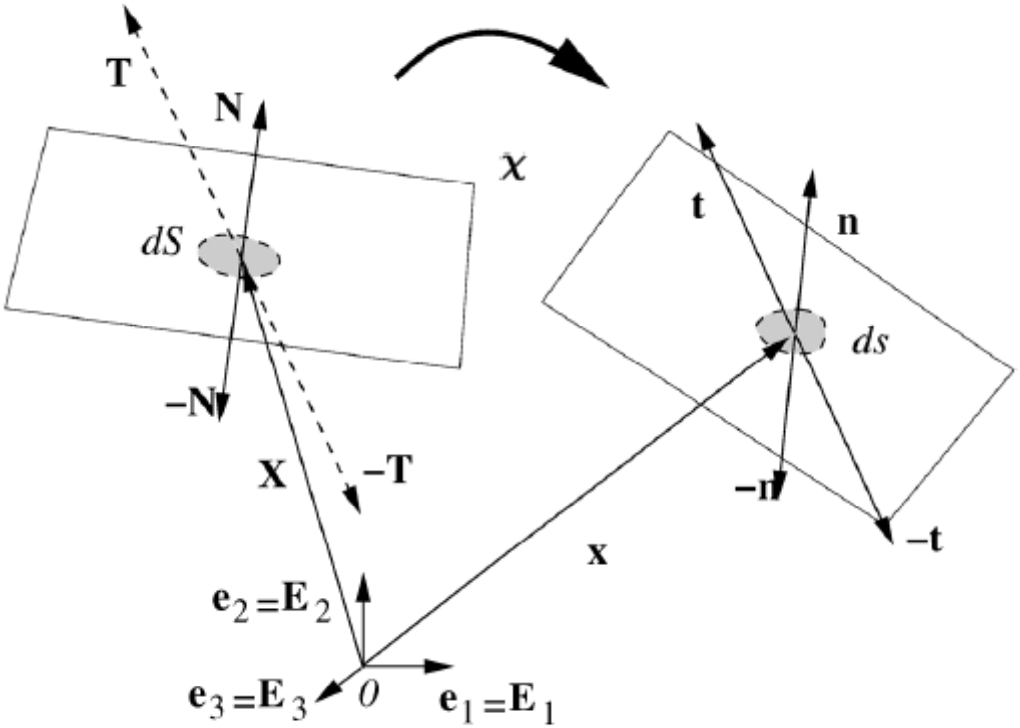
•و به صورت ماتریسی:

$$[\mathbf{t}] = [\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{n}]$$

تنش

- قانون کنش و واکنش

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}), \qquad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = -\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, -\mathbf{N})$$



تنش

•ارتباط بین تانسورهای تنش

•از تعریف بردارهای کشش داریم:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})ds = \mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N})dS, \qquad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}ds = \mathbf{P}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}dS$$

•وبا توجه به فرمول نانسون:

$$\mathbf{n}ds = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dS$$

•بدست می آید:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dS = \mathbf{P}(\mathbf{X},t)\mathbf{N}dS,$$

•که منجر به تبدیل پیولا می شود:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X},t) = J\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\mathbf{F}^{-T}, \qquad P_{aA} = J\sigma_{ab}F^{-1}_{Ab}$$

تنش

•اجزای تنش

•با تصویر کردن تنش کوشی واحد روی یک مجموعه بردار پایه متعامد بهنجار ea داریم: $\mathbf{e}_a \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{e}_b} = \sigma_{ab}$

•سه بردار $\mathbf{t}_{eb}$ که نشان دهنده بردارهای کشش کوشی هستند روی سطح عناصر با نرمال های خارجی در جهت بردارهای پایه اعمال میشوند.

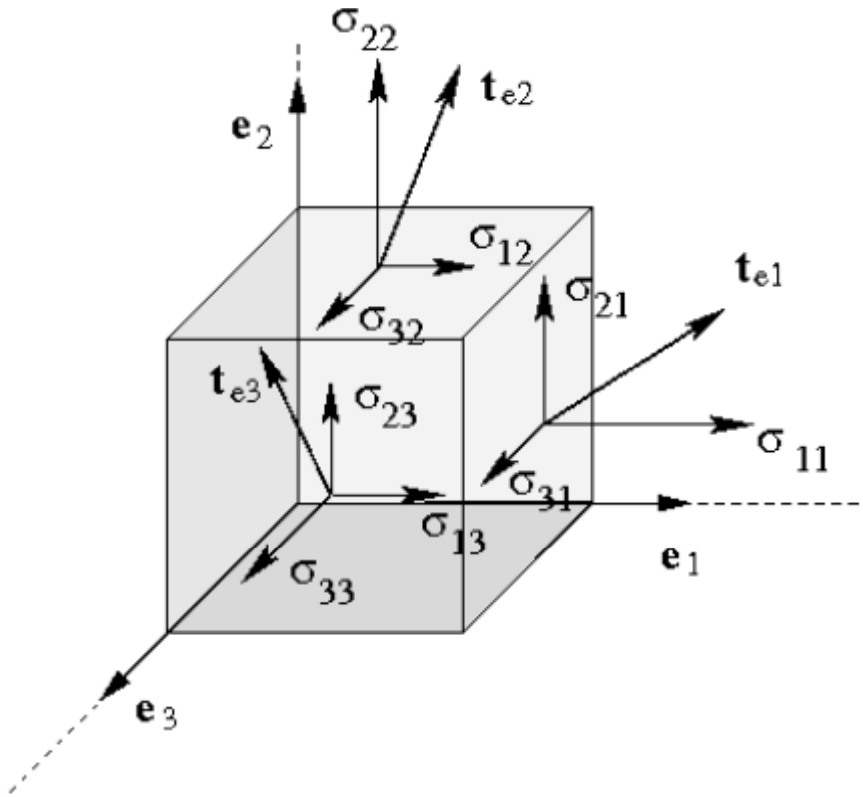
•در حالت ماتریسی، ستون تنش را میتوان به عنوان اجزای بردارهای کشش اعمال شده روی صفحات نرمال به بردارهای پایه دانست.

$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_1 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_2 = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$$

• شش جزء غیر وابسته به دلیل تقارن وجود دارد. اولین اندیس جهت و دومین اندیس شماره صفحه ای است که کشش روی آن اعمال شده است.

تنش

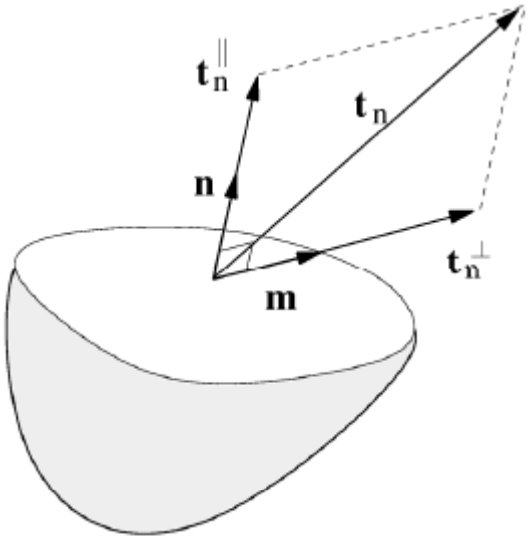
- اجزای تنش مماسی و نرمال



تنش

•تنش نرمال و برشی

•با فرض بردار کششی کوشی $\mathbf{t_n}$ وارد برنقطه x روی صفحه عنصر جهت داده شده توسط بردار نرمال n و بردار مماس m:



بردار $\mathbf{t_n}$ متشکل از اجزای موازی و متعامد بردار نرمال است:

$$\mathbf{t_n} = \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} + \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp}$$

$$\mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{t_n})\mathbf{n} = \mathbf{P}_n^{\parallel}\mathbf{t_n},\ \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp} = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{t_n})\mathbf{m} = \mathbf{P}_n^{\perp}\mathbf{t_n}$$

$$\mathbf{P}_n^{\parallel} = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \qquad \mathbf{P}_n^{\perp} = \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$$

با فرض: $\mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} = \sigma\mathbf{n}, \qquad \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp} = \tau\mathbf{m}$

داریم:

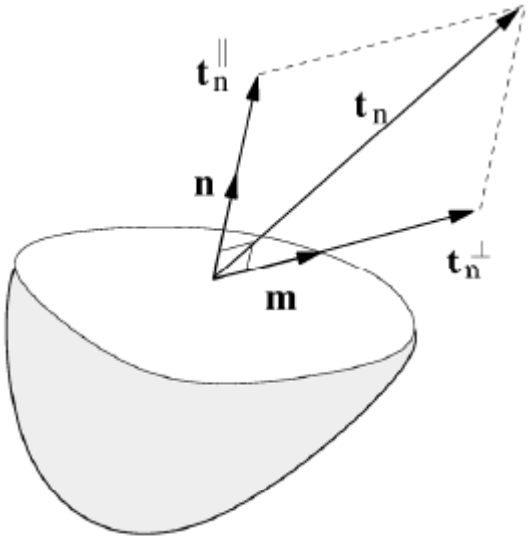
$$\sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t_n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$$

$$\tau = \mathbf{m}\cdot\mathbf{t_n} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$$

تنش

•مقدار حدی تنش ها

•با فرض بردار کششی کوشی $\mathbf{t_n}$ وارد برنقطه x روی صفحه عنصر جهت داده شده توسط بردار نرمال n و بردار مماس m:



بردار $\mathbf{t_n}$ متشکل از اجزای موازی و متعامد بردار نرمال است:

$$\mathbf{t_n} = \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} + \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp}$$

$$\mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{t_n})\mathbf{n} = \mathbf{P}_n^{\parallel}\mathbf{t_n},\ \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp} = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{t_n})\mathbf{m} = \mathbf{P}_n^{\perp}\mathbf{t_n}$$

$$\mathbf{P}_n^{\parallel} = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \qquad \mathbf{P}_n^{\perp} = \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$$

با فرض: $\mathbf{t}_\mathbf{n}^{\parallel} = \sigma\mathbf{n}, \qquad \mathbf{t}_\mathbf{n}^{\perp} = \tau\mathbf{m}$

داریم:

$$\sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t_n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$$

$$\tau = \mathbf{m}\cdot\mathbf{t_n} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **مقدمه**

معادلات حاکم محیط پیوسته در واقع بسطی از رابطه عمومی ارائه شده برای تحلیل خطی عناصر محدود خواهد بود:

Internal virtual work — External virtual work $\mathcal{R}$

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\tau}\, dV = \int_V \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^B\, dV + \int_{S_f} \bar{\mathbf{U}}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f}\, dS + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^{iT} \mathbf{R}_C^i$$

Stresses in equilibrium with applied loads

Virtual strains corresponding to virtual displacements $\bar{\mathbf{U}}$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **بیان مسئله اصلی**

در یک تحلیل غیرخطی

۱- تعادل جسم را باید در شرایط کنونی (Current Configuration) درنظر گرفت.

۲- در حالت کلی باید از یک فرمول بندی افزایشی (Incremental Formulation) استفاده شود.

۳- برای توصیف بارگذاری و حرکت جسم از یک متغیر زمانی استفاده نماییم.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

•بیان مسئله اصلی

برای ایجاد فرمول بندی، حرکت(Motion) یک جسم عمومی را در یک دستگاه مختصات ثابت دکارتی(Stationary Cartesian System) درنظر می گیریم و فرض می نماییم که جسم می تواند تغییرمکان های بزرگ، کرنش های بزرگ شده و رفتار غیرخطی مصالح از خود نشان دهد.

هدف اصلی، تعیین موقعیت های تعادل(Equilibrium Positions) کل جسم در نقاط زمانی گسسته ۰ و Δt و $۲\Delta t$ و $۳\Delta t$ و ... است و Δt نمو در زمان می باشد.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

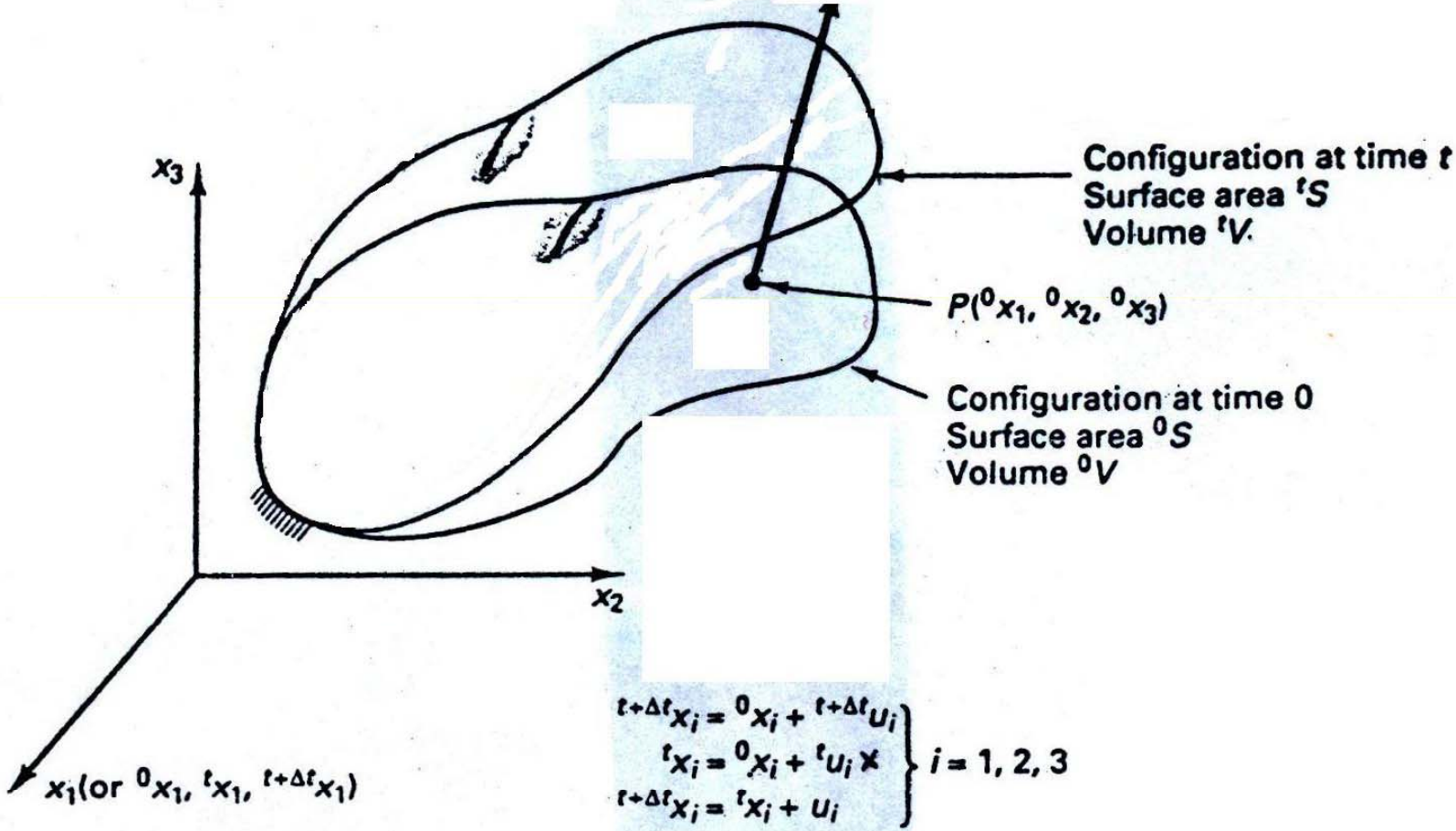
برای ایجاد یک استراتژی حل(Solution Strategy)

فرض

=

- **جواب ها برای متغیرهای سینماتیک و استاتیکی برای همه گام های زمانی از ۰ تا زمان t (از جمله خود t) به دست آمده اند**

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته



$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \\ {}^tx_i &= {}^0x_i + {}^tu_i \\ {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^tx_i + u_i \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3$$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

برای ایجاد یک استراتژی حل(Solution Strategy)

فرض

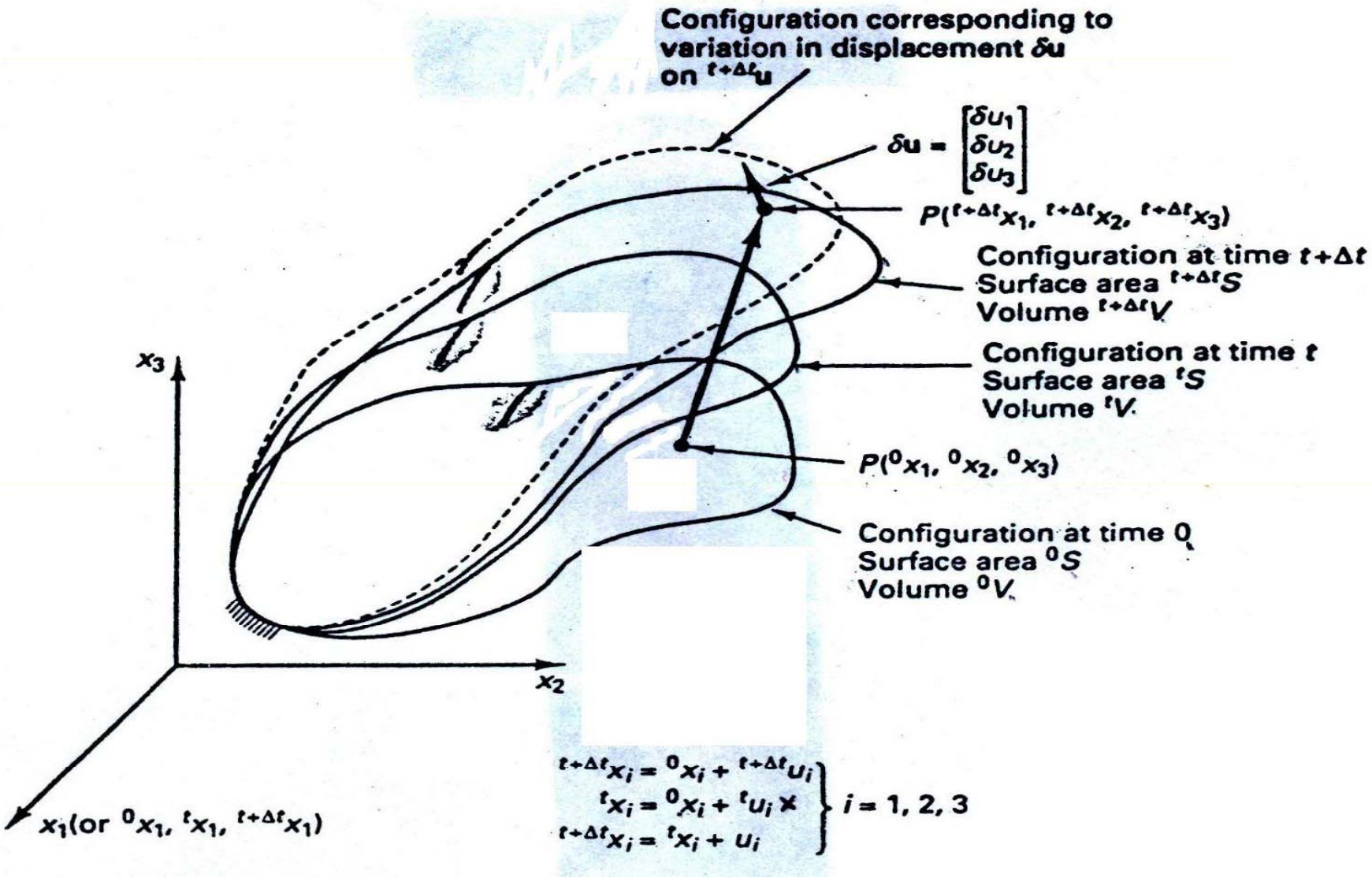
=

جواب ها برای متغیرهای سینماتیک و استاتیکی برای همه گام های زمانی از ۰ تا زمان t (از جمله خود t) به دست آمده اند

↓

فرآیند حل برای موقعیت تعادل مورد نیاز بعدی متناظر با زمان" t+ Δt " یک فرآیند نمونه و شاخص به شمار می رود و می تواند به طور مکرر مورد استفاده قرار گیرد تا مسیر کامل پاسخ حاصل شود.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته



تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

•بیان مسئله اصلی

نکته ۱: از آنجایی که در تحلیل، تمامی ذرات (Particles) جسم را در حرکتشان از بافتار اولیه (Original Configuration) تا بافتار نهایی نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت دنبال می کنیم، از آن رو در واقع یک فرمول بندی لاگرانژی (Lagrangian Formulation) را اتخاذ نموده ایم.

نکته ۲: فرمول بندی لاگرانژی در مقابل فرمول بندی اولری(Eulerian Formulation) قرار دارد که معمولاً درتحلیل مسائل مکانیک سیالات مورد استفاده قرار می گیرد.

نکته ۳: لازم به ذکر است که در تحلیل جامدات و سازه ها، عموماً از فرمول بندی لاگرانژی استفاده می شود که بیانگر یک روش تحلیل بسیار مؤثرتر و در عین حال طبیعی تر نسبت به فرمول بندی اولری می باشد.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **بیان مسئله اصلی**

در تحلیل لاگرانژی افزایشی (Lagrangian Incremental Analysis)، تعادل جسم در زمان t+ Δt را با استفاده از اصل تغییرمکان مجازی (Principle of Virtual Displacements) بیان می کنیم.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **بیان مسئله اصلی**

اصل تغییرمکان های مجازی:

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}\, \delta_{t+\Delta t}e_{ij}\, d^{t+\Delta t}V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$$

$$\delta_{t+\Delta t}e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^{t+\Delta t}x_i}\right)$$

$$^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B\, \delta u_i\, d^{t+\Delta t}V + \int_{{}^{t+\Delta t}S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S\, \delta u_i^S\, d^{t+\Delta t}S$$

$^{t+\Delta t}f_i^B$ = component of externally applied forces per unit volume at time t+Δt

$^{t+\Delta t}f_i^S$ = component of externally applied surface tractions per unit area at t+Δt

$^{t+\Delta t}S_f$ = surface at time t+Δt on which external tractions are applied

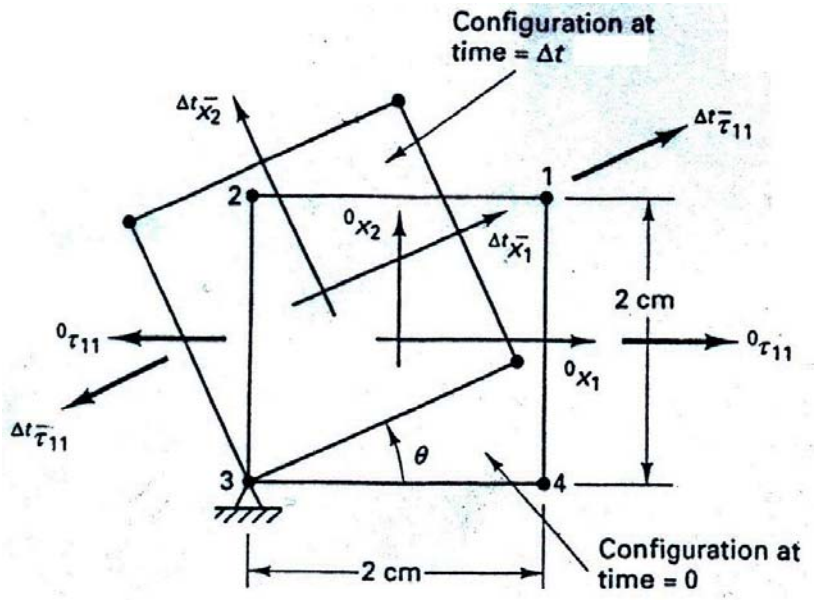
لازم به ذکر است که در بیان رابطه مذکور فرض می شود که بارهای متمرکز سطحی وجود ندارند، به عبارت دیگر مؤلفه های $f_i^{S_f}$ تمامی بارهای سطحی را شامل می شوند.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

مشکلات اصلی در کاربرد اصل کار مجازی ارائه شده در بالا عبارتند از:

- ✓ بافتار جسم در زمان **t+Δt** مجهول است(مشکل اصلی).

- ✓ محاسبه تنش های **Cauchy** در مدت زمان **t+Δt** باید دوران های صلب جسمی (**Rigid Body Rotation**) مصالح را نیز در نظر بگیرد. زیرا، مؤلفه های تانسور تنش **Cauchy** هنگامی که تحت اثر یک دوران صلب جسمی قرار می گیرند، تغییر می کنند.



$$^{t+\Delta t}\tau = R.\ {}^{t}\tau.R^{T}$$

- ✓ به دلیل تغییر بافتار جسم پیوسته در یک تحلیل تغییرشکل های بزرگ، باید به صورت ظریف و دقیق معیارهای مناسب تنش و کرنش و روابط مشخصه ای را بکار برد.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

استفاده از یک نمادگذاری (Notation) مؤثر برای یک تحلیل عمومی تغییرشکل های بزرگ حائز اهمیت است زیرا، در تحلیل با کمیت های بسیاری مواجه هستیم. در ذیل به برخی نکات مهم و قراردادهای مورد استفاده در نمادگذاری بکار رفته در تحلیل تغییرشکل های بزرگ اشاره می نماییم.

۱- حرکت جسم در یک دستگاه مختصات دکارتی ثابت درنظر گرفته می شود.

۲- کلیه متغیرهای سینماتیک و استاتیکی در این دستگاه مختصات اندازه گرفته می شوند.

۳- برای توصیف تحلیل در همه جا از نمادگذاری تانسوری (Tensor Notation) استفاده می شود.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

۴- مختصات نقطه عمومی (Generic Point)

بافتار جسم

$^{t}x_i$

محور مختصات

مختصات در زمان ۰	$^{0}x_1,\ ^{0}x_2,\ ^{0}x_3$	$i = 1, 2, 3$
مختصات در زمان t	$^{t}x_1,\ ^{t}x_2,\ ^{t}x_3$	
مختصات در زمان t+Δt	$^{t+\Delta t}x_1,\ ^{t+\Delta t}x_2,\ ^{t+\Delta t}x_3$	

۵- تغییر مکان ها

بافتار جسم

$^{t}u_i$

محور مختصات

تغییرمکان در زمان ۰	$^{0}u_1,\ ^{0}u_2,\ ^{0}u_3$	$i = 1, 2, 3$
تغییرمکان در زمان t	$^{t}u_1,\ ^{t}u_2,\ ^{t}u_3$	
تغییرمکان در زمان t+Δt	$^{t+\Delta t}u_1,\ ^{t+\Delta t}u_2,\ ^{t+\Delta t}u_3$	

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

بنابر این داریم :

$$ {}^{t}x_i = {}^{0}x_i + {}^{t}u_i \qquad i = 1, 2, 3 $$

$$ {}^{t+\Delta t}x_i = {}^{0}x_i + {}^{t+\Delta t}u_i $$

و بنابر این نمو تغییرمکان ها در زمان t+Δt به صورت زیر خواهد بود:

$$ u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^{t}u_i $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

به هنگام حرکت جسم، حجم، سطح، چگالی جرم، تنش ها و کرنش ها به طور پیوسته تغییر می کنند. بنابر این داریم :

چگالی جرم در زمان ۰، t و t+Δt $\quad {}^{0}\rho,\ {}^{t}\rho,\ {}^{t+\Delta t}\rho$

سطح در زمان ۰، t و t+Δt $\quad {}^{0}A,\ {}^{t}A,\ {}^{t+\Delta t}A$

حجم در زمان ۰، t و t+Δt $\quad {}^{0}V,\ {}^{t}V,\ {}^{t+\Delta t}V$

به علت نامعلوم بودن بافتار جسم در زمان t+Δt، تنش ها و کرنش ها را به یک بافتار تعادل معلوم ارجاع خواهیم داد. در این صورت اندیس پایین سمت چپ، معرف و نشانگر بافتار تعادلی خواهد بود که نسبت به آن کمیت مورد نظر تعیین می شود. به عنوان مثال:

نیروهای حجمی در زمان t+Δt نسبت به بافتار ۰ اندازه گیری می شوند $\quad {}^{t+\Delta t}_{0}f_i^{B}$

نیروهای سطحی در زمان t+Δt نسبت به بافتار ۰ اندازه گیری می شوند $\quad {}^{t+\Delta t}_{0}f_i^{S}$

نکته: اگر کمیت مورد نظر در زمان t+ Δt نسبت به بافتار مربوط به t+Δt اندازه گیری شود، در این صورت نیازی به اندیس پایین سمت نیست. ${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\tau_{ij} = {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

برای بیان مشتق گیری ها از نماد کاما(Comma Notation) استفاده می کنیم. در این نمادگذاری، مشتق گیری نسبت به مختصاتی که بعد از کاما می آید و اندیس پایین سمت چپ نشانگر زمان مربوط به بافتاری است که مختصات نسبت به آن بافتار اندازه گیری می شود.

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}u_{i,j} = \frac{\partial^{t+\Delta t}u_i}{\partial\ {}^{0}x_j} $$

$$ {}^{0}_{t+\Delta t}x_{m,n} = \frac{\partial\ {}^{0}x_m}{\partial^{t+\Delta t}x_n} $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **معیار های تنش و کرنش**

نکته: تانسورهای مختلف تنش و کرنشی وجود دارند که در اصل می توان از آنها استفاده نمود ولی اگر هدف، یافتن یک روش حل عناصر محدود عمومی و موثر باشد، در این صورت معیارهای اندکی وجود دارند که باید در نظر گرفته شوند.

یکی از مهمترین و کارآمدترین معیارهای کرنش که در تحلیل غیر خطی عناصر محدود از آن استفاده می شود، معیار کرنش Green-Lagrange است. برای تعریف معیار کرنش Green-Lagrange لازم است که در ابتدا چند تعریف مبنایی و مقدماتی ارائه شوند:

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

تعریف گرادیان تغییرشکل

از نقطه نظر مفهوم فیزیکی، گرادیان تغییرشکل، توصیف گر کشامدها (Stretches) و دوران هایی (Rotations) می باشند که تارهای مصالح (Material Fibers) از زمان 0 الی زمان t متحمل می شوند.

$$ {}_0^tX = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_3} \\ \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_3} \\ \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_3} \end{bmatrix} $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

به عنوان مثال، گرادیان تغییرشکل برای عنصر چهار گرهی که تحت اثر تغییر شکل های بزرگ قرار می گیرد را محاسبه می نماییم. توابع درونیابی تغییرمکان برای این عنصر را بر حسب r و s به عنوان مختصات طبیعی می توان استخراج کرد.

اکنون از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$ {}^{t}x_i = \sum_{k=1}^{4} h_k \, {}^{t}x_i^k $$

$$ \frac{\partial {}^{t}x_i}{\partial {}^{0}x_j} = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^{0}x_j} \right) {}^{t}x_i^k $$

و در نهایت گرادیان تغییرشکل به صورت زیر بدست می آید:

$$ {}^{t}_{0}X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (5 + {}^{0}x_2) & (1 + {}^{0}x_1) \\ \frac{1}{2}(1 + {}^{0}x_2) & \frac{1}{2}(9 + {}^{0}x_1) \end{bmatrix} $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

• تانسور تغییر شکل راست و چپ

با استفاده از تعریف گرادیان تغییرشکل، تانسور تغییرشکل راست و چپ Cauchy-Green را به صورت زیر تعریف می نماییم:

تانسور تغییرشکل راست Cauchy-Green
(Right Cauchy-Green Deformation)

$$ {}^{t}_{0}C = {}^{t}_{0}X^{T} . {}^{t}_{0}X $$

تانسور تغییرشکل چپ Cauchy-Green
(Left Cauchy-Green Deformation)

$$ {}^{t}_{0}B = {}^{t}_{0}X . {}^{t}_{0}X^{T} $$

نکته: در حالت کلی ${}^{t}_{0}C$ و ${}^{t}_{0}B$ با یکدیگر برابر نیستند.

نکته: از گرادیان تغییرشکل در تعیین کشامد یک تار مادی و تغییر در زاویه بین تارهای مادی مجاور هم به دلیل تغییرشکل استفاده می شود. در این محاسبه از تانسور تغییرشکل راست Cauchy-Green استفاده می کنیم.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **تانسور کرنش**

اکنون می توان تانسور کرنشی را که در تحلیل عناصر محدود حائز ارزش می باشد، تعریف نمود.

تانسور کرنش Green- Lagrange را می توان برحسب تانسور کشامد راست ${}_0^tU$ نوشت:

$$ {}_0^t\varepsilon = \frac{1}{2}\left({}_0^tU\,{}_0^tU - I\right) $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **تانسور کرنش**

تانسور کرنش Green- Lagrange برحسب تانسور تغییر شکل Cauchy-Green به صورت زیر نوشته می شود:

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_{0}\varepsilon &= \frac{1}{2}\left({}^{t}_{0}U\,{}^{t}_{0}R^{T}\,{}^{t}_{0}R\,{}^{t}_{0}U - I\right) \\
&= \frac{1}{2}\left({}^{t}_{0}X^{T}\,{}^{t}_{0}X - I\right) \\
&= \frac{1}{2}\left({}^{t}_{0}C - I\right)
\end{aligned}
$$

مؤلفه های تانسور کرنش Green- Lagrange را می توان برحسب تغییرمکان ها نوشت. روابط زیر را قبلا ارائه داده ایم:

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{t}x_i &= {}^{0}x_i + {}^{t}u_i \\
{}^{t+\Delta t}x_i &= {}^{0}x_i + {}^{t+\Delta t}u_i
\end{aligned}
\right\} \quad i = 1, 2, 3
$$

همچنین داریم:

$$
{}^{t}_{0}C = {}^{t}_{0}X^{T}\,{}^{t}_{0}X
$$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **تانسور کرنش**

$$ {}_0^tC = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_1} \\ \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_2} \\ \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_3} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_3} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_1}{\partial\ {}^0x_3} \\ \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_2}{\partial\ {}^0x_3} \\ \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_1} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_2} & \frac{\partial\ {}^tx_3}{\partial\ {}^0x_3} \end{bmatrix} $$

بنابراین در حالت کلی ${}_0^t\varepsilon_{ij}$ را به صورت مؤلفه ای زیر می توان نوشت:

$$ {}_0^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[{}_0^tu_{i,j} + {}_0^tu_{j,i} + {}_0^tu_{k,i}\cdot{}_0^tu_{k,j}\right] \qquad i,j,k = 1,2,3 $$

لازم به یادآوری است که در تعریف تانسور کرنش Green- Lagrange، تمامی مشتقات نسبت به مختصات اولیه (Initial Coordinate) ذرات می باشند. به این دلیل است که می گوییم، تانسور کرنش Green-Lagrange نسبت به مختصات اولیه جسم تعریف می شود.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **تانسور کرنش**

می توان نشان داد که مؤلفه های تانسور کرنش Green- Lagrange تحت اثر یک دوران صلب جسمی مصالح ناوردا (Invariant) است یعنی:

$$ {}^{t}_{0}\varepsilon = {}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon $$

مؤلفه های تانسور کرنش Green- Lagrange در زمان t به صورت زیر مشخص می شوند:

$$ {}^{t}_{0}\varepsilon = \frac{1}{2}\left({}^{t}_{0}X^{T}\,{}^{t}_{0}X - I\right) $$

که در آن ${}^{t}_{0}X$ گرادیان تغییرشکل در زمان t است.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

•معیار تنش دوم پیولا

اکنون که تانسور کرنش Green-Lagrange را تعریف نمودیم، حالا باید تانسور تنش مناسبی را که بتوان با این تانسور کرنش مورد استفاده قرار داد، تعریف نماییم.

یک معیار تنش که همراه با تانسور کرنش Green-Lagrange مورد استفاده قرار می گیرید و مزدوج کاری(Work- Conjugate) با آن تانسور کرنش می باشد، تانسور تنش دوم Piola می باشد که به صورت ${}^{t}_{0}S$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

چگالی جرمی(Mass density) در زمان 0

تانسور تنش Cauchy در زمان t

$${}^{t}_{0}S = \frac{{}^{0}\rho}{{}^{t}\rho} \cdot {}^{0}_{t}X \cdot {}^{t}\tau \cdot {}^{0}_{t}X^{T}$$

$${}^{t}_{0}X^{-1} = {}^{0}_{t}X$$

چگالی جرمی(Mass density) در زمان t

می توان ${}^{t}\tau$ را به راحتی بر حسب ${}^{t}_{0}S$ نوشت:

$${}^{t}\tau = \frac{{}^{t}\rho}{{}^{0}\rho} \cdot {}^{t}_{0}X \cdot {}^{t}_{0}S \cdot {}^{t}_{0}X^{T}$$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **معیار تنش دوم پیولا**

تانسور تنش معرفی شده را می توان به صورت مؤلفه ای زیر نوشت:

$$ {}^{t}_{0}S_{ij} = \frac{{}^{0}\rho}{{}^{t}\rho} \cdot {}^{0}_{t}x_{i,m} \cdot {}^{0}_{t}x_{j,n} \cdot {}^{t}\tau_{mn} \qquad \begin{Bmatrix} m = 1,2,3 \\ n = 1,2,3 \end{Bmatrix} $$

$$ {}^{t}\tau_{mn} == \frac{{}^{t}\rho}{{}^{0}\rho} \cdot {}^{t}_{0}x_{m,i} \cdot {}^{t}_{0}x_{n,j} \cdot {}^{t}_{0}S_{ij} \qquad \begin{Bmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{Bmatrix} $$

نکته۱: تانسور تنش نخست Piola به صورت ${}^{t}_{0}S.\ {}^{t}_{0}X^{T}$ **تعریف می شود.**

نکته۲: مباحث فراوانی در مورد طبیعت فیزیکی تانسور تنش دوم Piola انجام شده است. اگرچه، می توان تبدیل انجام شده در روی تانسور تنش Cauchy را به برخی استدلالات هندسی ارتباط داد، ولی باید به این نکته اذعان نمود که تنش دوم Piola مفهوم و معنی فیزیکی اندکی دارد و در عمل تنش های Cauchy باید محاسبه شوند.

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **معیار تنش دوم پیولا**

همانند تانسور کرنش Green-Lagrange می توان ثابت نمود که مؤلفه های تانسور تنش دوم Piola تحت اثر یک دوران صلب جسمی مصالح، ناوردا (Invariant) می باشند. به عبارت دیگر:

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}S = {}^{t}_{0}S $$

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

• رابطه کار مجازی داخلی با استفاده از معیار تنش دوم PIOLA و معیار کرنش GREEN-LAGRANGE

اکنون می توانیم رابطه کار مجازی داخلی را با استفاده از معیار تنش دوم Piola و معیار کرنش Green-Lagrange بنویسیم:

$$\int_{{}^tV} {}^t\tau_{kl}\,\delta\,{}_te_{kl}\,d\,{}^tV = \int_{{}^tV}\left(\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}.\,{}^t_0S_{ij}.\,{}^t_0x_{k,i}.\,{}^t_0x_{l,j}\right)\left({}^0_tx_{m,k}.\,{}^0_tx_{n,l}.\,\delta\,{}^t_0\varepsilon_{mn}\right)d\,{}^tV$$

$$= \int_{{}^tV}\left(\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}.\,{}^t_0S_{ij}.\,\delta_{mi}.\,\delta_{nj}.\,\delta\,{}^t_0\varepsilon_{mn}\right)d\,{}^tV = \int_{{}^0V}{}^t_0S_{ij}\,\delta\,{}^t_0\varepsilon_{mn}\,d^0V$$

توجه داشته باشید که در رابطه آخر، از اصل بقای جرم و رابطه ${}^t\rho\,d\,{}^tV = {}^0\rho\,d\,{}^0V$ استفاده کرده ایم.

در ارتباط با رابطه کار مجازی داخلی ارائه شده در بالا ذکر نکاتی چند ضروری است:

تحلیل غیرخطی محیط پیوسته

- **رابطه کار مجازی داخلی با استفاده از معیار تنش دوم PIOLA و معیار کرنش GREEN-LAGRANGE**

✓ **رابطه مذکور که به فرم مؤلفه ای نوشته شده است، در واقع یک معادله تانسوری است.**

✓ **انتگرال گیری ها روی حجم اولیه انجام می گیرد.**

✓ **به جای بافتار اولیه، هر بافتار پیشین محاسبه شده ای را می توان مورد استفاده قرار داد که در آن تنش دوم Piola و معیار کرنش Green-Lagrange نسبت به آن بافتار تعریف می شوند.**

مقدمه ای بر مکانیک جامدات غیر خطی

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

- فضای برداری و فضای اقلیدوسی
- سینماتیک تغییر شکل
- تنش
- **اصول تعادل**
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

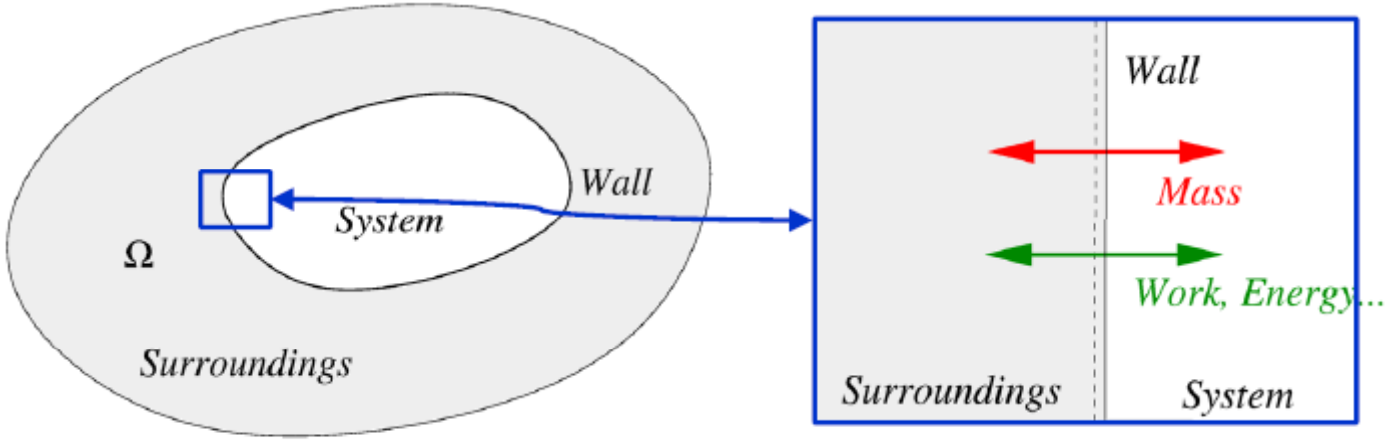
اصول تعادل

•سیستم ها و جرم

•جرم: خواص فیزیکی پیوسته توزیع شده که مقدار ماده در جسم B را تخمین میزند.

•یک مقدار از جرم (مجموعه ای از ماده) یک سیستم - تکمیل شده توسط محیط اطراف - را تعریف میکند. سیستم و محیط توسط مرز از هم تمیز داده می شوند (دیواره سیستم).

•تعامل بین سیستم و محیط توسط مرز اتفاق می افتد که امکان اجازه شار انرژی یا جرم را دارد و یا ندارد .



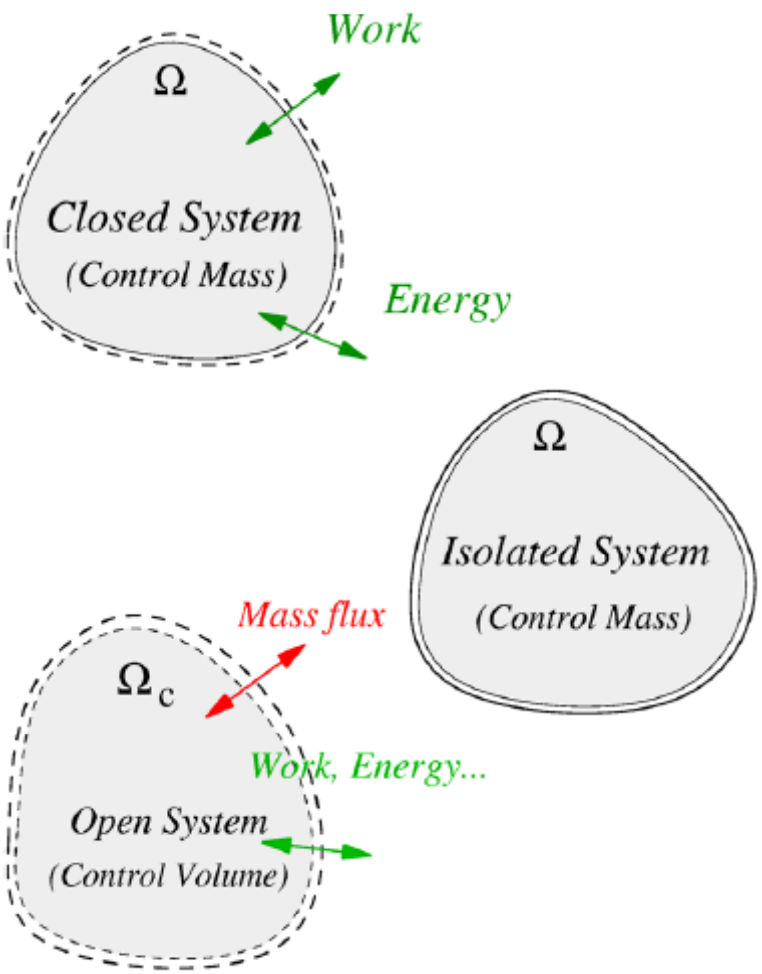
اصول تعادل

•سیستم های باز، بسته و عایق

•یک سیستم بسته (جرم کنترل) یک مقدار ثابت از جرم در منطقه ای معلوم با مرز معلوم است. مرز وابسته به زمان، و تنها انرژی مثل کار یا حرارت می تواند از مرز عبور کند.

•یک سیستم بسته با مرز عایق اجازه تبادل انرژی را نمی دهد. (سیستم عایق مکانیکی یا حرارتی)

•یک سیستم باز (حجم کنترل) یک مقدار ثابت از حجم در منطقه معلوم با مرز معلوم است. مرز وابستگی به زمان ندارد و هم انرژی و هم جرم می توانند از مرز عبور کنند (سطح کنترل).



اصول تعادل

•حفاظت جرم در سیستم های بسته

•اگر فرض کنیم که منابع جرم و افت جرم وجود نداشته باشد جرم جسم در حال حرکت یک کمیت پایدار است. برای یک سیستم بسته جرم کل تا حد زیادی حفظ می شود:

$$m(\Omega_0) = m(\Omega) > 0, \quad \forall\, t$$

$$dm(\mathbf{X}) = dm(\mathbf{x}, t) > 0$$

$$\frac{D}{Dt} m(\Omega_0) = \frac{D}{Dt} m(\Omega) = 0$$

•جرم جسم در مختصات مرجع و محلی با حوزه های عددی پیوسته ρ_0 (چگالی مرجع) و ρ (چگالی جرم مکانی یا فضایی) مشخص شده است:

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \lim_{\Delta V(\Omega_0)\to 0} \frac{\Delta m(\Omega_0)}{\Delta V(\Omega_0)}, \qquad \rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta v(\Omega)\to 0} \frac{\Delta m(\Omega)}{\Delta v(\Omega)},$$

• ΔV ، یک حد از حجم میانگین ماده است.

اصول تعادل

•شکل محلی و عمومی حفظ جرم

•با استفاده از چگالی، شکل دیفرانسیلی از معادلات حفظ جرم می شود:

$$dm(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})dV = dm(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)dv > 0$$

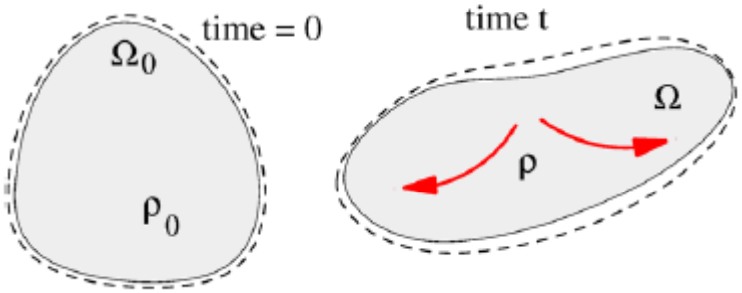
•فرم محلی معادله پیوستگی:

$$\frac{dv}{dV} = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\rho(\mathbf{x},t)}$$

•فرم انتگرال معادله پیوستگی، به معنای حفظ جرم:

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X})dV = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x},t)dv = \text{const} > 0$$

•و نرخ تغییرجرم کل باید صفر باشد:



$$\dot{m} = \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x},t)dv = 0$$

اصول تعادل

•حفاظت جرم در سیستم های باز

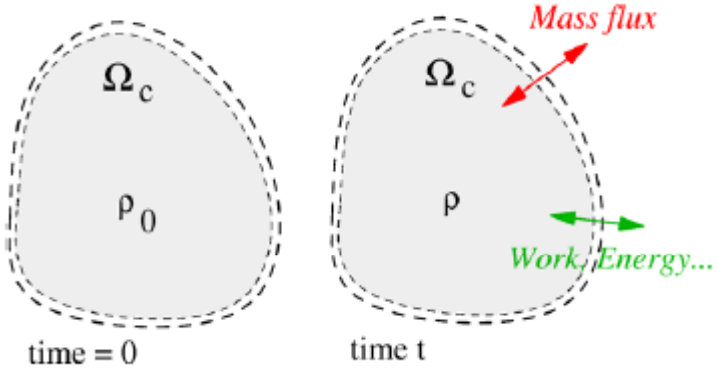
•برای یک سیستم باز با حجم معین، تغییر جرم در زمان با انتگرال گیری و دیفرانسیل گیری همزمان محاسبه میشود:

$$\dot{m} = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_c} \rho(\mathbf{x},t)dv = \int_{\Omega_c} \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} dv = -\int_{\Omega_c} \mathrm{div}(\rho(\mathbf{x},t)\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t))dv$$

$$\int_{\Omega_c} \mathrm{div}\left(\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right) dv = \int_{\partial\Omega_c} \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} ds$$

•مقدار $\rho\mathbf{v}$ را شار جرم گویند.

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_c} \rho(\mathbf{x},t)dv = -\int_{\partial\Omega_c} \rho(\mathbf{x},t)\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n} ds$$



مقدمه ای بر مکانیک جامدات غیر خطی

مکانیک یعنی بررسی حرکت و تغییر شکل ماده تحت تأثیر سیستم نیروهاست.

مکانیک محیطهای پیوسته، به خوبی، پدیده های مختلف را بدون توصیف پیچیدگی های ساختار میکروسکوپی داخلی آن پدیده توضیح می دهد: در واقع ما جامد (Solid) را یک **سیستم ماکروسکوپیک** می دانیم.

- فضای برداری و فضای اقلیدوسی
- سینماتیک تغییر شکل
- تنش
- اصول تعادل
- عینیت (Objectivity)
- ترمودینامیک مواد
- ابرکشسانی (Hyper elasticity)
- پلاستیسیته
- ویسکوزیته
- رفتارهای دیگر

عینیت

•عینیت (جنبه فلسفی مکانیک)

•عینیت یک حسی است که خواص ماکروسکوپیک مواد توسط انتخاب یک ناظر تحت تأثیر قرار نمیگیرد.

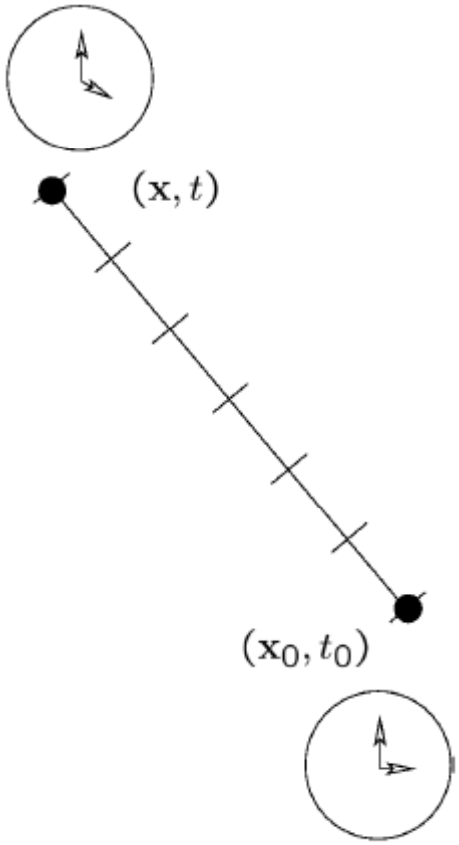
•حالت تنش در یک جسم، و همچنین کمیت های فیزیکی با یک ویژگی ذاتی، و به طور کلی، هر توصیف کمی و کیفی پدیده های فیزیکی (مانند قوانین ساختاری) باید تحت یک تغییر ناظر، ثابت، نامتغیر و ناوردا باشند.

•این مفهوم به نام عینیت یا بی تفاوتی فریم و قاب مواد نامیده میشود. در حقیقت مفهوم عینیت در علم بدان معنی است که توصیف کمی و کیفی پدیده های فیزیکی، زمانی که پدیده ها تحت شرایط گوناگون مشاهده شوند، بدون تغییر باقی می مانند. برای مثال، فرآیندهای فیزیکی (مانند خواص مواد) تحت تغییرات ناظران ثابت می باشند.

•نیاز به تعریف یک ناظر و ایجاد قوانین تغییر ناپذیری برای مشخص شدن عینیت است.

عینیت

•ناظران اقلیدوسی



•ناظر اقلیدسی توسط یک خط کش (برای اندازه گیری موقعیت نسبی در فضای سه بعدی) و یک ساعت (برای اندازه گیری خطای زمان) تعریف شده است.

•یک رویداد توسط یک ناظر در شرایط موقعیت x و در زمان t ثبت می شود و با (x, t) نشان داده میشود.

•در فضای اقلیدسی دو رویداد (x, t) و (x0, t0) را در نظر بگیرید، (x0, t0) ثابت است، در حالی که اولی رویداد در حال رخ دادن است.

•فاصله محاسبه می شود با: $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$

•فاصله زمانی محاسبه شده با ساعت: $\Delta t = t - t_0$

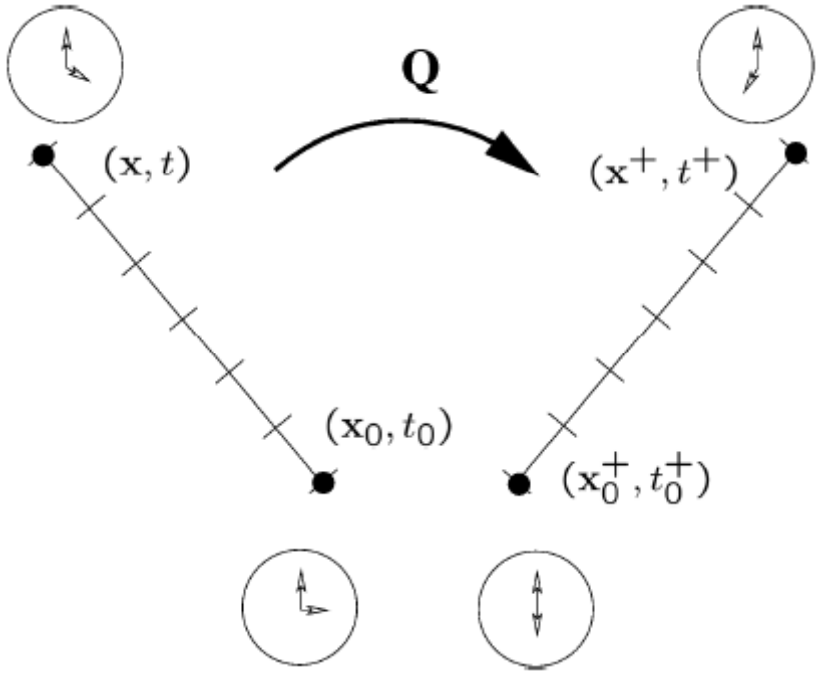
عینیت

•ناظران و نقشه ها

•ناظر، فاصله ها و بازه های زمانی را ذخیره میکند: $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \quad \Delta t = t - t_0$

•ذخیره های یک ناظر دومی را هم در نظر بگیرید.

•نقشه Q(t) نشان میدهد که تبدیل جفت های (x, t) و (x0, t0) به (x+, t+) و (x0+, t0+) در راهی بودند که در هر دو، فاصله و بازه های زمانی حفظ شده اند.



$$d^+ = |\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}_0^+| = d, \quad \Delta t^+ = t^+ - t_0^+ = \Delta t$$

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}_0^+ = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \qquad t^+ - t = \alpha$$

•با داشتن Q میتوان سرعت، شتاب و جابجایی را حساب کرد.

عینیت

- روابط عینیت

Field Quantity	Original	Under rigid-body rotation
General Spatial Vectors	$\mathbf{u}$	$\mathbf{Qu}$
General Spatial Tensors	$\mathbf{A}$	$\mathbf{QAQ^T}$
Material Strain Tensors	$\mathbf{U, C, E}$	$\mathbf{U, C, E}$
Material Stress Tensors	$\mathbf{S}$	$\mathbf{S}$
Two-Point Deformation Tensors	$\mathbf{F}$	$\mathbf{QF}$
Two-Point Stress Tensors	$\mathbf{P}$	$\mathbf{QP}$
Spatial Strain Tensors	$\mathbf{v, b, e}$	$\mathbf{QvQ^T, QbQ^T, QeQ^T}$
Spatial Stress Tensors	$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$	$\mathbf{Q\sigma Q^T, Q\tau Q^T}$

منابع

✓An Introduction To Nonlinear Solid Mechanics, Anna Pandolfi, Doctoral School – Politecnico Di Milano, January – February 2012

✓Nonlinear Solid Mechanics, Bifurcation Theory And Material Instability, Davide Bigoni, University Of Trento, Cambridge University Press

✓Non-linear Finite Element Analysis Of Solids And Structures, René De Borst, Wiley Series In Computational Mechanics

✓مکانیک محیط های پیوسته، نجفی زاده، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

✓مکانیک محیط های پیوسته برای مهندسین، توماس میس و جورج میس، ترجمه دکتر عباس راستگو و مهندس محمد مهدی هیهات، چاپ سوم، انتشارات دانشگاه تهران