Subject
Date

جلسه‌ی اول

منابع:

- مکانیزم‌ها و رباتیک   تألیف: محسن دوستی

✓- آنالیز مکانیزم‌ها و ربات‌ها   تألیف: Marghitu   و ترجمه: حاجی زین‌العابدینی

- رباتیک (تجزیه، تحلیل و کنترل)   تألیف: Asada   و ترجمه: حبیب‌نژاد

- رباتیک (تحلیل سیستم‌ها و کاربرد)   تألیف: بنجامین بیلو   و ترجمه: فاتح

- رباتیک (اصول اولیه و پروژه‌های کاربردی ساخت ربات‌ها)   تألیف: محمدی و احمدی برزک

سرفصل مطالب:

آنالیز مکان

آنالیز سرعت و شتاب

آنالیز نیروها

آنالیز ربات‌ها

پروژه درسی:

تحلیل یا ساخت

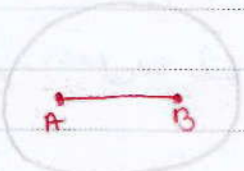
مقدمه ...

درجه آزادی DoF : تعداد مختصات مستقل برای توصیف حرکت یک جسم.

ذره : جسمی است بدون بعد به از چرخش و ارتعاش آن صرف نظر می گردد.

جسم صلب : جسمی که دارای ابعاد باشد و از حرکت دورانی آن نمی توان صرف نظر کرد.

طول پاره خط AB همواره ثابت است.



حداکثر تعداد درجه آزادی ذره در فضا ، $\underbrace{3}_{x,y,z}$ می باشد.

حداکثر تعداد درجه آزادی جسم صلب در فضا ، $\underbrace{6}_{x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z}$ می باشد.

θ_x : مربوط به جابجایی زاویه حول محور x

θ_y : " " " y

θ_z : " " " z

تعداد درجه آزادی یک جسم صلب در صفحه حداکثر 3 می باشد.

انواع حرکت در اجسام صلب :

۱ـ انتقالی : راستای جسم تغییر نمی کند. (در این حرکت بردار سرعت تمامی نقاط جسم صلب با هم مساوی اند)

Subject
Date

در حرکت انتقالی سرعت نسبی نقاط مختلف جسم صفر است. $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 0$

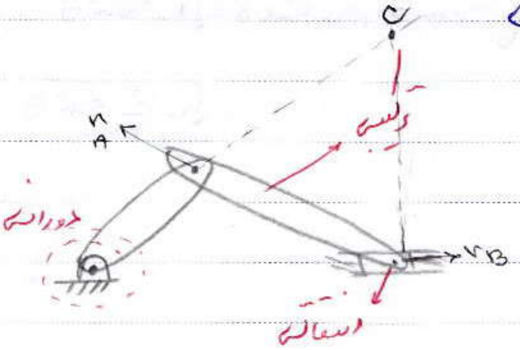
و همچنین برای جابجایی نسبی $\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 0$

و شتاب نسبی $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = 0$

۲- دورانی: همه‌ی نقاط جسم صلب حول یک نقطه ثابت به نام مرکز دوران، مسیر قطعه دایره‌ای طی می‌کنند.

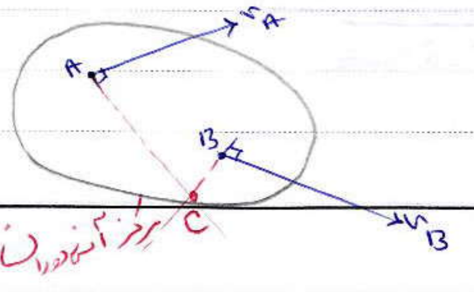
نکته:
پارامترهای خطی (جابجایی خطی، سرعت خطی و شتاب خطی) نقاط مختلف جسم صلب می‌توانند متفاوت باشند ولی پارامترهای زاویه‌ای در نقاط مختلف جسم صلب یکی است.

۳- حرکت ترکیبی: ترکیبی از انتقال و دوران



مثال

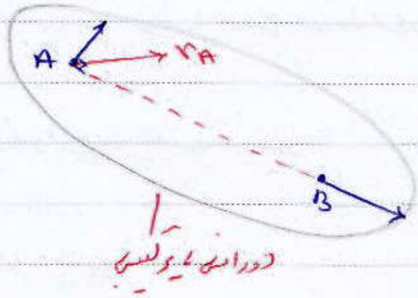
در حرکت ترکیبی مرکز دوران ثابت یا ساکن نداریم ولی مرکز دوران آنی در لحظه را داریم.



$v_A = \overline{AC}\,\omega$

$v_B = \overline{BC}\,\omega$

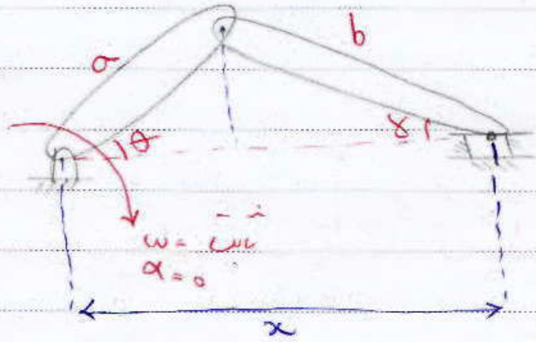
Subject
Date



B از دید $v_A = v_{A/B}$

$v_{A/B} = \overline{AB}\,\omega$

مثال



$x = a\cos\theta + b\cos\gamma$

$a\sin\theta = b\sin\gamma \rightarrow \sin\gamma = \frac{a}{b}\sin\theta \rightarrow \cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$= \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}$

$x = a\cos\theta + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}$

$x = a\cos\theta + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta}$

$\rightarrow v = -a\cancel{\dot\theta}^{\,\omega}\sin\theta + \frac{-2a^2\cancel{\dot\theta}^{\,\omega}\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{b^2 - a^2\sin\theta}}$

PAPCO

Subject
Date

در حالت کلی، حالت برعکس را داریم :

$$a\sin\theta = b\sin\gamma \rightsquigarrow \sin\theta = \frac{b\sin\gamma}{a} \rightsquigarrow \theta = \operatorname{ArcSin}\left[\frac{b\sin\gamma}{a}\right]$$

$$x = a\cos\theta + b\cos\gamma$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\sin^2\gamma}$$

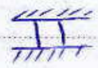
$$\rightsquigarrow x = a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\sin^2\gamma} + b\cos\gamma$$

$$\gamma = f(x)$$

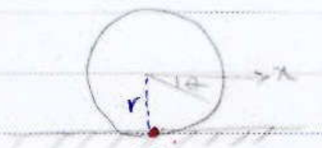
P4PCO

Subject
Date

جلسه‌ی دوم

انواع قیود :	شکل :	تعداد قید در صفحه :	تعداد قید در فضا :
• دورانی		2	5
• رفت و آمدی		2	5
• غلتشی		2	5

نکته ...



غلتش

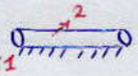
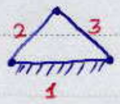
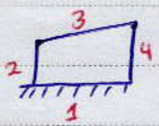
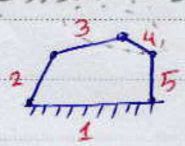
این نقطه مربوط به جسم و زمین است ، بنابراین در لحظه صفر می‌شود و مرکز دورانی دارد .

$x = r\theta$

• لغزشی		1	4

اگر در شکل بالا، حرکت به جای غلتشی، لغزشی باشد ، دیگر نمی‌تواند سر بخورد و سرعت آن در لحظه صفر نمی‌شود .

Subject
Date

نوع کلی دستگاه	درجه آزادی در صفحه	تعداد قیود	تعداد عضو	شکل دستگاه
سازه نامعین	-1	2	2	 زمین یک عضو
سازه معین	0	3	3	
$F=3(3-1)-2(3)=0$				
مکانیزم	1	4	4	
$F=3(4-1)-2(4)=1$				
زنجیره	2	5	5	2 درجه آزادی دارد چون 2 مفصل دارد. 
$F=3(5-1)-2(5)=2$				

رابطه تعداد درجه آزادی:

در صفحه: $F=3(n-1)-j_1-2j_2$

در فضا: $F=6(n-1)-j_1-2j_2-3j_3-4j_4-5j_5$

n: تعداد عضوها

j_1 ← تعداد مفصل یک قیدی

j_2 ← تعداد مفصل دو قیدی

j_3

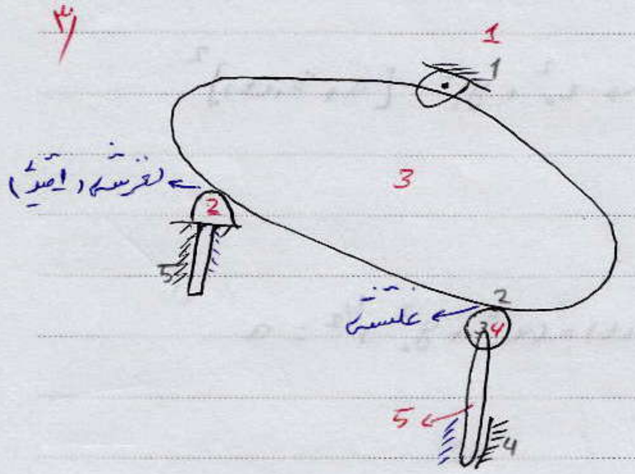
⋮

j_5

Subject

Date

۳/



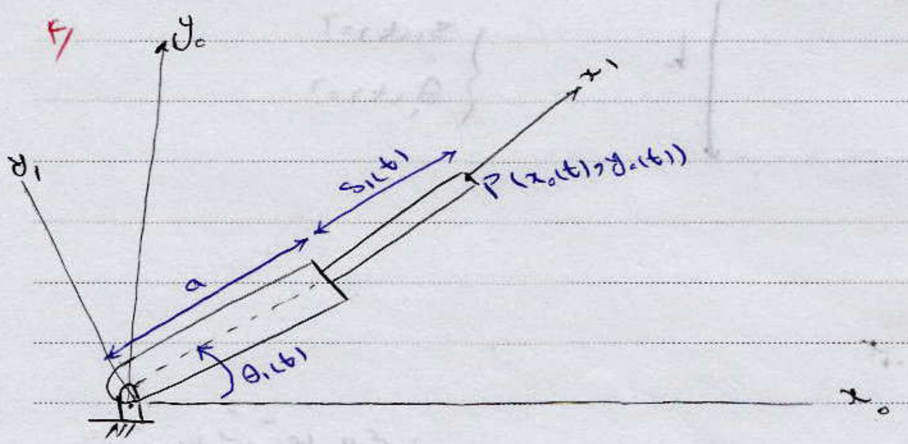
$$F = 3(5-1) - 1 - 2(5) = 1$$

$n = 5$

$j_1 = 1$

$j_2 = 5$

۴/



$$\begin{cases} s_1(t) = ? \\ \theta_1(t) = ? \end{cases}$$

PAPCO

۵/

Subject

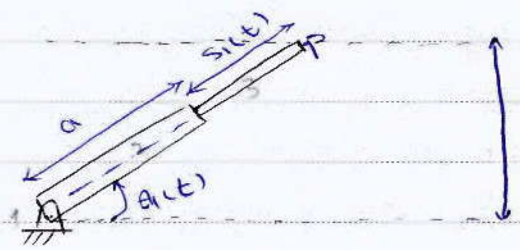
Date

$$\begin{cases} x_o^2 = [a+S_1(t)]^2 \cos\theta_1(t)^2 \\ y_o^2 = [a+S_1(t)]^2 \sin\theta_1(t)^2 \end{cases} \rightsquigarrow x_o^2 + y_o^2 = [a+S_1(t)]^2$$

$$(x_o^2+y_o^2)^{1/2} = [a+S_1(t)] \rightsquigarrow S_1(t) = (x_o^2+y_o^2)^{1/2} - a$$

$$\begin{cases} x_o = [a+S_1(t)]\cos\theta_1(t) \\ y_o = [a+S_1(t)]\sin\theta_1(t) \end{cases} \rightsquigarrow tg\,\theta_1(t) = \frac{y_o}{x_o} \rightsquigarrow \theta_1(t) = \mathrm{Arctg}\,\frac{y_o}{x_o}$$

ـ اگر کاتر P بر روی خط $y(t)=h$ با سرعت ثابت v حرکت کند:



$$\begin{cases} S_1(t) = ? \\ \theta_1(t) = ? \end{cases}$$

$y(t) = h$

$x_o(t) = v \cdot t$

با توجه به حل قسمت قبل داریم :

$S_1(t) = (v^2t^2 + h^2)^{1/2} - a$

$\theta_1(t) = \mathrm{Arctg}\,\frac{h}{vt}$

$n = 3$

$3(n-1) - \cancel{j_1} - 2j_2$

$3(3-1) - 2(2) =$

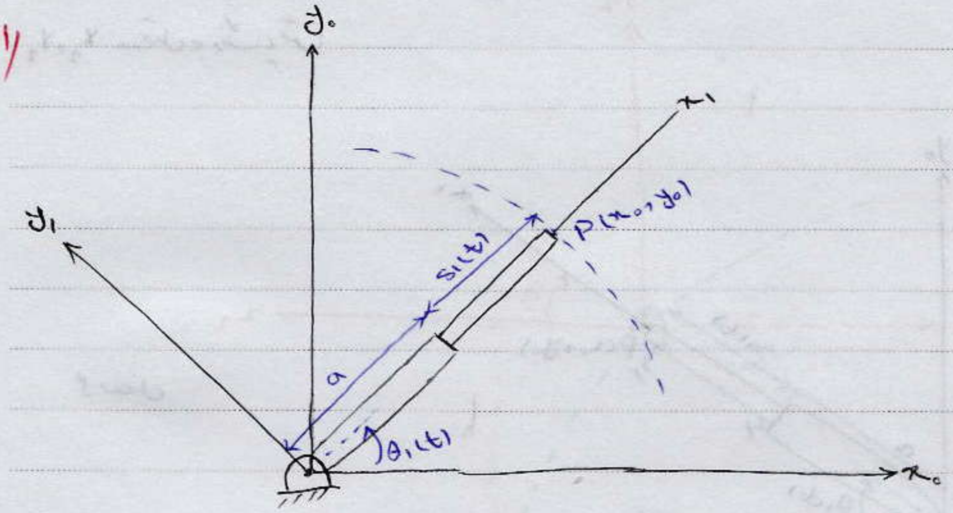
$\underline{F = 2}$

Subject

Date

جلسه‌ی سوم

1/ مثال



$$[a+s_1(t)]^2 = x_0^2 + y_0^2 \rightsquigarrow s_1(t) = \sqrt{x_0^2+y_0^2} - a$$

$$\begin{cases} x_0 = [a+s_1(t)]\cos\theta_1(t) \\ y_0 = [a+s_1(t)]\sin\theta_1(t) \end{cases}$$

دومی را بر اولی تقسیم می‌کنیم : $tg\,\theta_1(t) = \frac{y_0}{x_0} \rightsquigarrow \theta_1 = Arctg\,\frac{y_0}{x_0}$

کارگیر P باید در خط $y_0(t)=h$ با سرعت ثابت v حرکت کند.

$$\begin{cases} t=0 \\ x_0(t)=0 \end{cases} \rightsquigarrow \vec{r}(t) = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} \rightsquigarrow \vec{r}(t) = x_0\hat{i} + h\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = vt\,\hat{i} + h\,\hat{j}$$

$$s_1(t) = \sqrt{(vt)^2+h^2} - a \quad , \quad \theta_1 = Arctg\,\frac{h}{vt}$$

PAPCO

7/

Subject

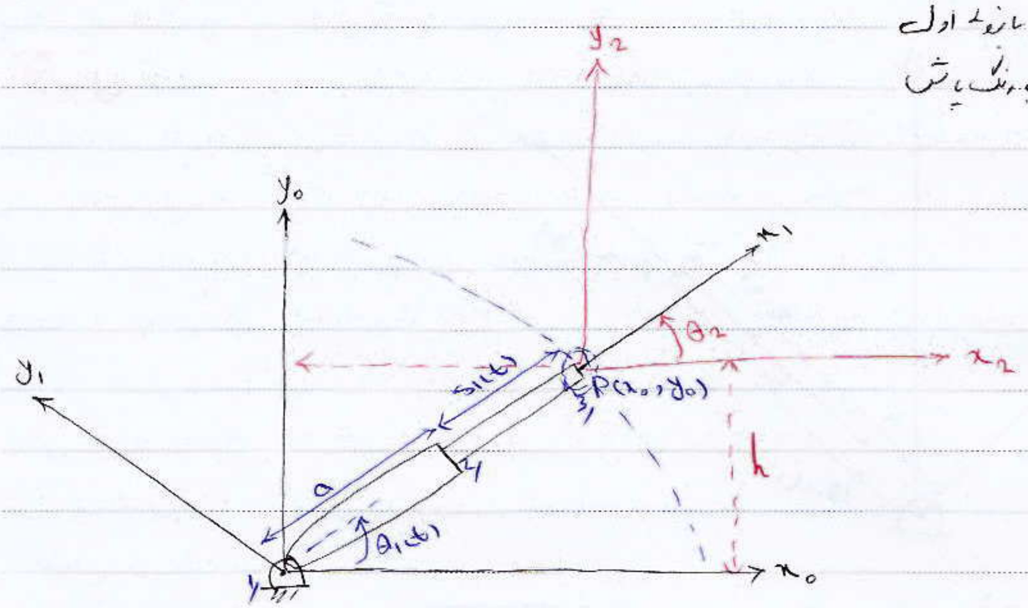
Date

۲/

x_0, y_0 متصل به زمین

x_1, y_1 متصل به بازوی اول

x_2, y_2 متصل به رنگ پاش



۳ مفصل

نازل رنگ پاش با سرعت ثابت به موازات محور x_0 حرکت کند، متغیرهای θ_1 و θ_2 و S_1 را تعیین کنید.

سرعت زاویه‌ای رنگ پاش $=0$: $\dot{\theta}_1(t) + \dot{\theta}_2(t) = 0 \rightarrow \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1$

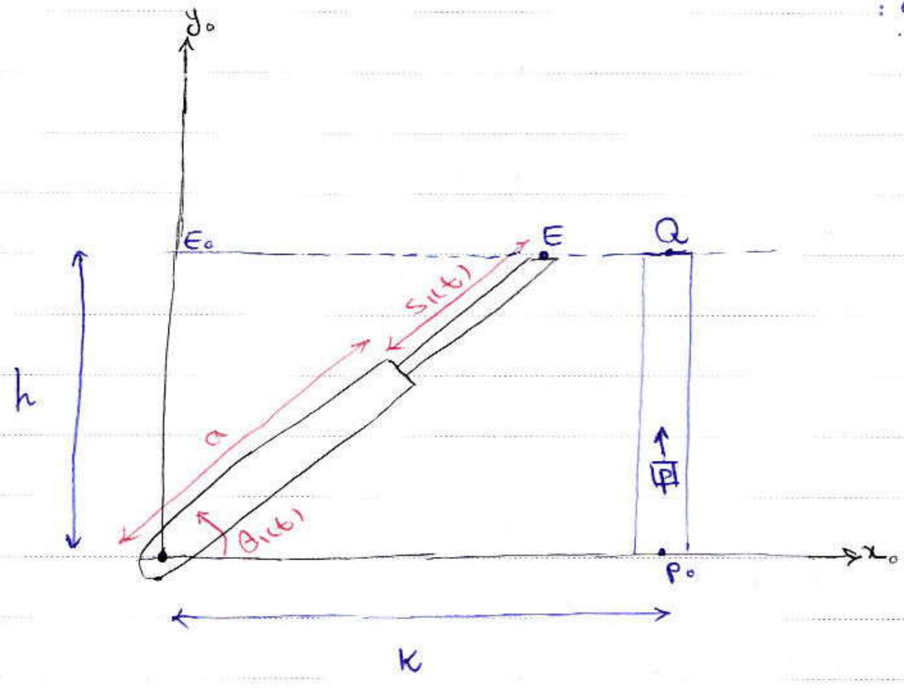
$\theta_2 = -\theta_1$

راه حل کاملاً شبیه مثال را می‌باشد.

Subject
Date

۲۰

- حرکت تعقیب :



وقتی P در موقعیت P_0 است ، E در موقعیت E_0 است و مشخص شده که با سرعت ثابت v
در راستای قائم ($\vec{v} = v\hat{j}$) حرکت می‌کند. کارگیر از حالت سکون باید در راستای EQ بگونه‌ای
هدایت شود تا P و E در یک لحظه با هم به نقطه‌ی Q برسند و کارگیر در نقطه‌ی Q باز به حالت
سکون درآید.

$$\vec{r}_0(t) = \vec{x}_0(t)\,\hat{i} + y_0\,\hat{j}$$
$$\vec{r}_0(t) = x_0(t)\,\hat{i} + h\,\hat{j}$$

$$h = vt \rightsquigarrow \boxed{t = \frac{h}{v}}$$

Subject

Date

$$\begin{cases} t = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = h/v \\ x_0 = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ v_0 = 0 = \dfrac{dx_0}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = h/v \\ v_0 = \dfrac{dx_0}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$S_1(t) = \sqrt{x_0^2(t) + h^2} - a^2$$

$$\theta_1(t) = \operatorname{Arctg} \frac{h}{x_0(t)}$$

$$x_0(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$ تابع رو حدس می‌زنیم ←

$$\begin{cases} t = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 0 = 0 + 0 + 0 + d \rightsquigarrow \boxed{d = 0}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ \dfrac{dx_0}{dt} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \frac{dx_0}{dt} = 3at^2 + 2bt + c \rightsquigarrow 0 = 0 + 0 + C \rightsquigarrow \boxed{C = 0}$$

$$\begin{cases} t = h/v \\ \dfrac{dx_0}{dt} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{0 = \frac{3ah^2}{v^2} + 2\frac{bh}{v}}$$

$$\begin{cases} t = h/v \\ x_0 = k \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{k = a\left(\frac{h}{v}\right)^3 + b\left(\frac{h}{v}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{*} \begin{cases} a = -2\left(\dfrac{v}{h}\right)^3 \\ b = 3k\left(\dfrac{a}{h}\right)^2 \end{cases}$$

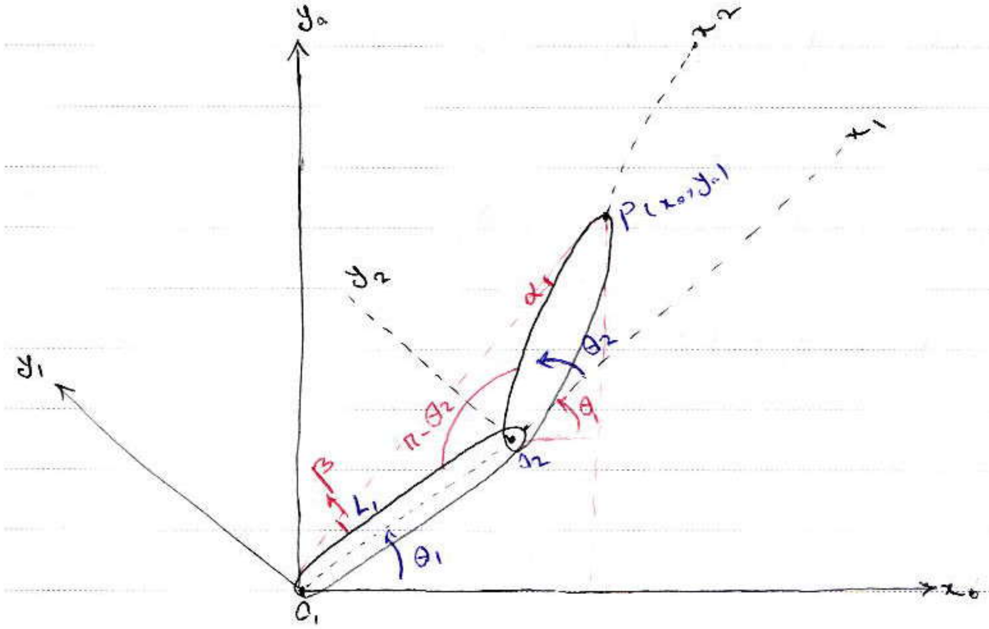
Subject
Date

$$* \rightsquigarrow x_0(t) = -2\left(\frac{v}{h}\right)^3 t^3 + 3K\left(\frac{v}{h}\right)^2 t^2$$

رابطه‌ی ۸ و ۹ در رابطه‌ی مربوط به $s_1(t)$ و $\theta_1(t)$ جایگذاری می‌کنیم و مقادیر آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۲/

$\theta_1(t)$?
$\theta_2(t)$?



x_0 : طول نقطه p
y_0 : عرض نقطه p

$$\begin{cases} x_0 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_0 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

Subject
Date

$$O_1P^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\pi - \theta_2)$$

$$x_0^2 + y_0^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \rightarrow \theta_2 = \text{ArcCos}\, l$$

$$\sin\theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_2} \rightarrow \theta_2 = \text{ArcSin}$$

$$x_0 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - l_2\sin\theta_1\underbrace{\sin\theta_2}_{\sqrt{1-\cos^2\theta_2}}$$

$$x_0 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - l_2\sin\theta_2\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$$

$$x_0 = \cos\theta_1(l_1 + l_2\cos\theta_2) - l_2\sin\theta_2\sqrt{1-\cos^2\theta_1}$$

$\theta_1 =$ بررسی سوال ۳

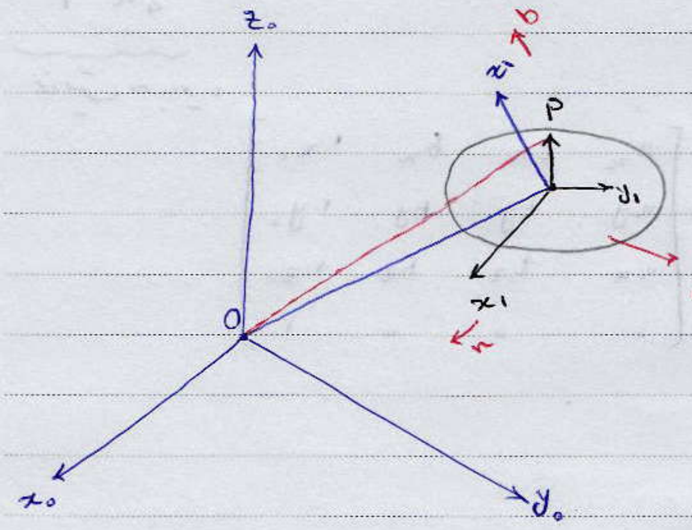
PAPCO

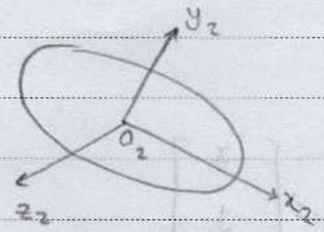
Subject
Date

جلسه‌ی چهارم

معادلات ریاضی ماتریسی حرکت ربات:

دستگاه $x_1 y_1 z_1$ متصل به بازوی شماره ۱ ربات با مبدأ O_1





$\vec{OP} = P(x_0, y_0, z_0) = \vec{OO_1} + \vec{O_1P} \rightarrow {}^0P = {}^0O_1 + {}^0_1R\,{}^1P$ (1)

بردار موقعیت نقطه P در دستگاه xyz_0

بردار موقعیت O_1 در دستگاه xyz_0

بردار موقعیت نقطه P نسبت به دستگاه $x_1y_1z_1$

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} n_x & t_x & b_x \\ n_y & t_y & b_y \\ n_z & t_z & b_z \end{bmatrix} \qquad {}^1P = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه P در $x_1y_1z_1$

${}^1P = {}^1O_2 + {}^1_2R\,{}^2P$ (2)

Subject
Date

از ترکیب (1),(2) $\Rightarrow {}^0p = {}^0O_1 + {}^0_1R\,{}^1O_1O_2 + {}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2p$

اگر تعداد بازوها به چهار عدد افزایش پیدا کند، داریم:

$${}^0p = {}^0O_1 + {}^0_1R\,{}^1O_1O_2 + {}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2O_2O_3 + {}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2_3R\,{}^3O_3O_4 + {}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2_3R\,{}^3_4R\,{}^4p$$

نمایش همگن:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0_1T = \begin{bmatrix} n_x & t_x & b_x & {}^1x_0 \\ n_y & t_y & b_y & {}^1y_0 \\ n_z & t_z & b_z & {}^1z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0p = {}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4p$$

ماتریس انتقال برای بازو با مفصل رفت و آمدی $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

دوران حول محور x $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_i & -S_i \\ 0 & S_i & C_i \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} C_i = \cos\theta_i \\ S_i = \sin\theta_i \end{cases}$$

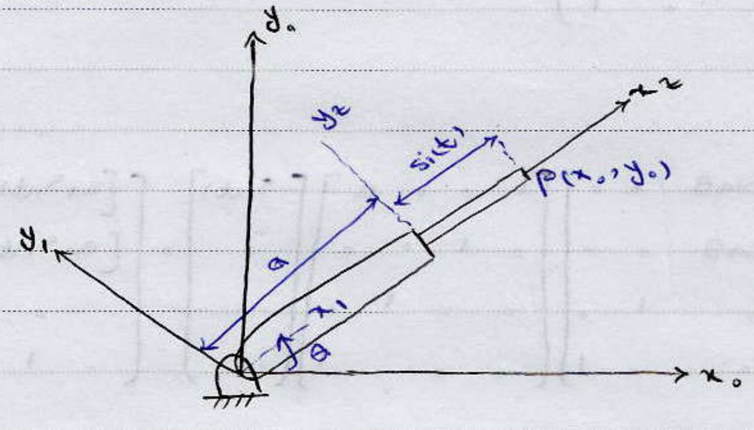
Subject
Date

دوران حول محور y
$$R = \begin{bmatrix} C_i & 0 & S_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_i & 0 & C_i \end{bmatrix}$$

دوران حول محور z
$$R = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 \\ S_i & C_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال

بر اساس پارامترها تحلیل موقعیت کنید.



$$x_0 = [a + s_1(t)] \cos\theta$$

$$y_0 = [a + s_1(t)] \sin\theta$$

این مثال را بر اساس شناخت جدیدی که در صفحه‌ی قبل بدست آمد حل می‌کنیم :

Subject
Date

$${}^{0}P = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}P$$

$${}^{0}P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} [a+S_1(t)]\cos\theta \\ [a+S_1(t)]\sin\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1(t)+a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

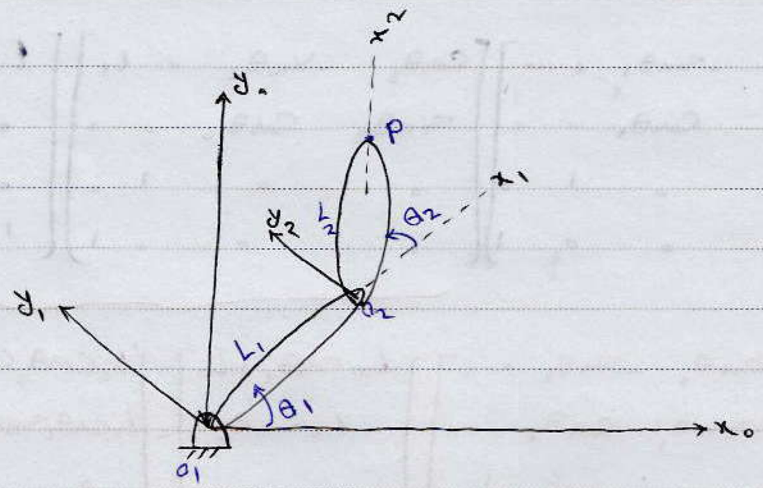
$$\begin{bmatrix} (S_1(t)+a)\cos\theta \\ (S_1(t)+a)\sin\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject

Date

مثال



$$x_0 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_0 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z = 0$$

$${}^0p = {}^0_1T \; {}^1_2T \; {}^2_3T \; {}^2P \qquad {}^2p = \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2\cos\theta_2 + L_1 \\ L_2\sin\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\cos\theta_2\cos\theta_1 + L_1\cos\theta_1 - L_2\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ L_2\cos\theta_2\sin\theta_1 + L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

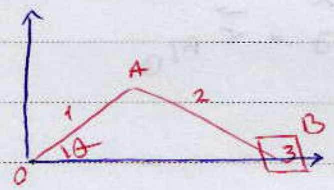
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2\cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1\cos\theta_1 \\ L_2\sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1\sin\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

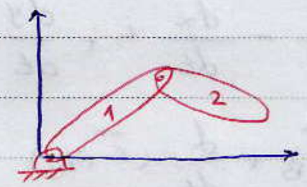
Subject
Date

جلسه‌ی پنجم

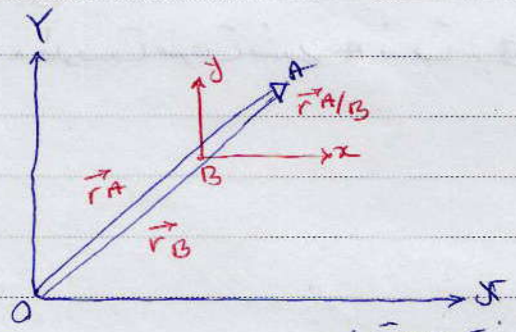
تحلیل سرعت ربات

عضو صلب : عضوی است که فاصله بین دو نقطه‌ی دلخواه آن همواره ثابت است .





حرکت نسبی :
- حرکت نسبت به دستگاه مختصاتی که دارای حرکت انتقالی است .
- حرکت نسبت به دستگاه مختصاتی که دارای حرکت دورانی است .



$r_{A/B}$ ← بردار موقعیت نقطه A در دستگاه مختصات متحرک

r_A ← بردار موقعیت نقطه A در دستگاه مختصات مرجع

r_B ← بردار موقعیت مبدأ دستگاه متحرک (B) در دستگاه مرجع

$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$r_A = \vec{r}_B \times \vec{r}_{A/B}$

Subject
Date

$$\frac{d r \vec{A}}{rt} = \frac{d r \vec{B}}{dt} + \frac{d}{dt} \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})$$

۱) حرکت نسبت به دستگاه مختصات متحرک دارای حرکت انتقالی :

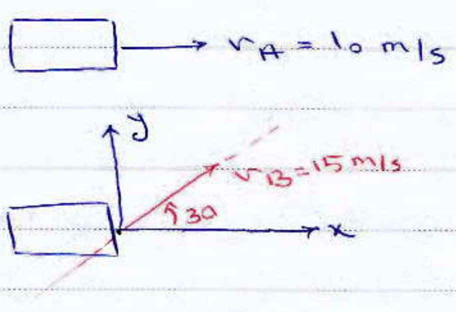
$$\frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

مثال

مطلوبست سرعت نسبی A نسبت به B :



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$10\hat{i} = 15\cos 30\,\hat{i} + 15\sin 30\,\hat{j} + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{v}_{A/B} = \underbrace{\left(10 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)\hat{i}}_{(v_{A/B})x} \underbrace{- 7.5\,\hat{j}}_{(v_{A/B})y}$$

PAPCO

Subject

Date

$$|\vec r_{A/B}| = r_{A/B} = \sqrt{(r_{A/B})_x^2 + (r_{A/B})_y^2}$$

$$\rightsquigarrow \vec r_{A/B} = -\vec r_{B/A}$$

۲) حرکت نسبی به دستگاه متحرک دارای حرکت دورانی:

$$\vec r_A = \vec r_B + \frac{d}{dt}(\vec r_{A/B})$$

$$\frac{d\vec r_{A/B}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat i + x\frac{d\hat i}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat j + y\frac{d\hat j}{dt} = \dot x\hat i + \dot y\hat j + x\frac{d\hat i}{dt} + y\frac{d\hat j}{dt}$$

$$\Delta\hat i = \hat i_2 - \hat i_1 = (1)\Delta\theta\,\hat j$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat j \rightsquigarrow \frac{di}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat j \rightsquigarrow \dot{\hat i} = \dot\theta\,\hat j$$

$\Delta t \to 0$

$$\Delta\hat j = \hat j_2 - \hat j_1 = -(1)\Delta\theta\,\hat i$$

$$\frac{\Delta j}{\Delta t} = \frac{-\Delta\theta}{\Delta t}\hat j \rightsquigarrow \frac{dj}{dt} = -\dot\theta\,\hat i \rightsquigarrow \dot{\hat j} = -\dot\theta\,\hat i$$

اثبات $\dot{\hat i}$ و $\dot{\hat j}$ هم ببینید.

$$\frac{d\vec r_{A/B}}{dt} = \underbrace{\dot x\hat i + \dot y\hat j}_{\dot r} + x\dot\theta\,\hat j - y\dot\theta\,\hat i$$

PAPCO

۱۴

Subject

Date

$$\frac{d r_{A/B}}{dt} = \vec{\dot{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$\omega = \dot{\theta}$ ← سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات دورانی

$$\vec{\rho} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{\dot{\rho}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = \omega x\hat{j} - \omega y\hat{i}$$

بردار موقعیت نسبی

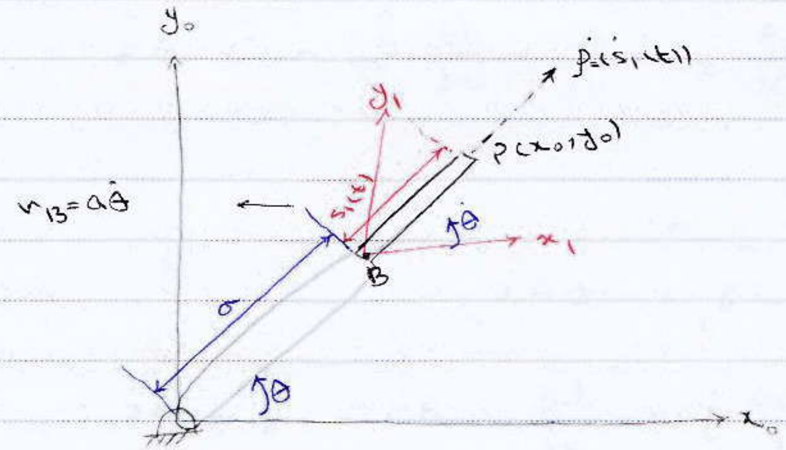
$$\rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) \rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{\dot{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

سرعت نقطه A

سرعت مبدأ دستگاه متحرک

سرعت دورانی دستگاه مختصات دورانی

مثال



$$\begin{cases} x_0 = [a + s_1(t)]\cos\theta \\ y_0 = [a + s_1(t)]\sin\theta \end{cases}$$

PAPCO

Subject

Date

$$\begin{cases} \dfrac{dx_o}{dt} = \dfrac{ds_1(t)}{dt} \cos\theta - [a + s_1(t)]\dot{\theta} \sin\theta = (v_p)_x \\ \dfrac{dy_o}{dt} = \dot{s}_1(t) \sin\theta + [a + s_1(t)]\dot{\theta} \cos\theta = (v_p)_y \end{cases}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_B + \dot{\vec{s}} + \vec{\omega} \times \vec{s}$$

$$\vec{s} = s_1(t) \cos\theta \, \hat{i} + s_1(t) \sin\theta \, \hat{j}$$

$$\omega = \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{s}_1(t) \cos\theta \, \hat{i} + \dot{s}_1(t) \sin\theta \, \hat{j}$$ سرعت نسبت به دستگاه دوار است

$$\vec{v}_B = -a\dot{\theta} \sin\theta \, \hat{i} + a\dot{\theta} \cos\theta \, \hat{j}$$

$$\vec{v}_p = -a\dot{\theta} \sin\theta \, \hat{i} + a\dot{\theta} \cos\theta \, \hat{j} + \dot{s}_1(t) \cos\theta \, \hat{i} + \dot{s}_1(t) \sin\theta \, \hat{j}$$

$$+ \dot{\theta}\hat{k} \times (s_1(t) \cos\theta \, \hat{i} + s_1(t) \sin\theta \, \hat{j})$$

$$\dot{\theta} s_1 \cos\theta \, \hat{j} - \dot{\theta} s_1 \sin\theta \, \hat{i}$$

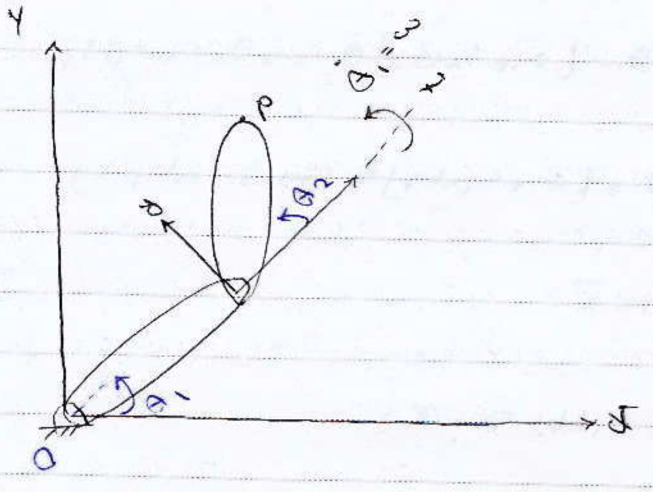
$$\vec{v}_p = \overbrace{(-a\dot{\theta} \sin\theta + \dot{s}_1 \cos\theta - \dot{\theta} s_1 \sin\theta)}^{v_p(x)} \hat{i} +$$

$$\underbrace{(a\dot{\theta} \cos\theta + \dot{s}_1 \sin\theta + \dot{\theta} s_1 \cos\theta)}_{v_p(y)} \hat{j}$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_B + \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \rho$$

Subject
Date

مثال



$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = b\cos\theta_2\,\hat{i} + b\sin\theta_2\,\hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \dot\theta_1\,\hat{k}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = -b\dot\theta_2\sin\theta_2\,\hat{i} + b\dot\theta_2\cos\theta_2\,\hat{j}$$

$$v_B = -a\dot\theta_1\sin\theta_1\,\hat{i} + a\dot\theta_1\cos\theta_1\,\hat{j}$$

$$v_P = -a\dot\theta_1\sin\theta_1\,\hat{i} + a\dot\theta_1\cos\theta_1\,\hat{j} - b(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2)\,i$$

$$+ b(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)\,\hat{j} + \dot\theta_1 K \times [b\cos(\theta_1+\theta_2)\,i +$$

$$b\sin(\theta_1+\theta_2)\,j]$$

$$v_P = (-a\dot\theta_1\sin\theta_1 - b\dot\theta_2\sin\theta_2 - b\dot\theta_2\sin\theta_2)\,i$$

Subject
Date

$$\vec{v}_P = v_{Px}\,\hat{i} + v_{Py}\,\hat{j}$$

$$x_P = a\cos\theta_1 + b\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$y_P = a\sin\theta_1 + b\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$(v_P)_x = \frac{dx_P}{dt} = -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - b(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\underbrace{\sin(\theta_1+\theta_2)}_{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1}$$

$$(v_P)_y = \frac{dy_P}{dt} = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + b(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\underbrace{\cos(\theta_1+\theta_2)}_{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}$$

PAPCO

Subject
Date

جلسه‌ی ششم

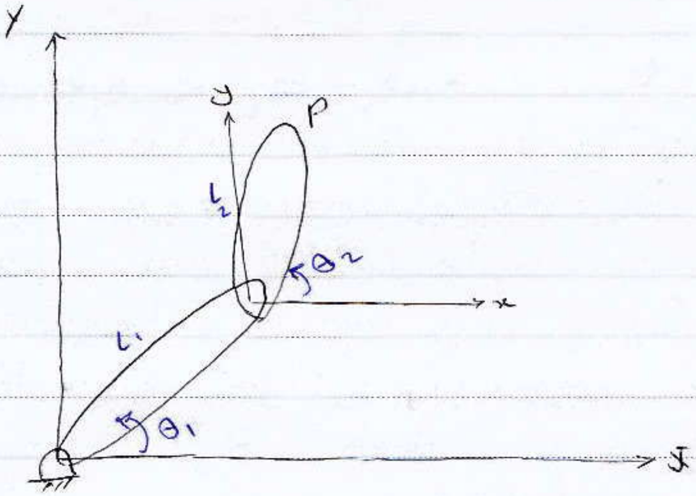
حرکت نسبی :

الف) نسبت به دستگاه مختصات دارای حرکت انتقالی $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

ب) نسبت به دستگاه مختصات دارای حرکت دورانی $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} + \vec{\rho}$

مثال

XY ← دستگاه متحرک دارای حرکت انتقالی



$$\vec{v}_B = -v_B \sin\theta_1 \hat{i} + v_B \cos\theta_1 \hat{j} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \hat{i} + L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \hat{j}$$

$$- v_{P/B} \sin\theta_2 \hat{i} + v_{P/B} \cos\theta_2 \hat{j}$$

$$v_{P/B} = L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

Subject
Date

$$\vec{\dot{\rho}} = L_2 \dot{\theta}_2 (-\sin\theta_2 \hat{i} + \cos\theta_2 \hat{j})$$

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}_1 \hat{k}$$

$$\vec{\rho} = L_2 (\cos\theta_2 \hat{i} + \sin\theta_2 \hat{j})$$

* جواب V_P در مختصات متحرک انتقالی :

$$\vec{V_P} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \hat{i} + L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \hat{j} - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin\theta_2 \hat{i} +$$
$$L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2 \hat{j}$$

$$\vec{V_P} = [-L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin\theta_2] \hat{i} +$$
$$[L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2] \hat{j}$$

* جواب V_P در مختصات متحرک دورانی :

$$\vec{V_P} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \hat{i} + L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \hat{j} + L_2 \dot{\theta}_2 (-\sin\theta_2 \hat{i} + \cos\theta_2 \hat{j})$$
$$+ \dot{\theta}_1 \hat{k} \times (L_2 \cos\theta_2 \hat{i} + L_2 \sin\theta_2 \hat{j})$$

$$\vec{V_P} = (-L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - L_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2) \hat{i} +$$
$$(L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 + L_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1) \hat{j}$$

Subject
Date

جلسه‌ی هفتم

تحلیل شتاب در بررسی قانون دوم نیوتون:

انواع حرکت در اجسام صلب:

۱- حرکت انتقالی ←

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m\bar{a}_x \\ \Sigma F_y = m\bar{a}_y \\ \Sigma M_A = m\bar{a}d \end{cases}$$

نقطه دلخواه

۲- حرکت دورانی ←

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m\bar{a}_x \\ \Sigma F_y = m\bar{a}_y \\ \Sigma M_O = I_O\alpha \end{cases}$$

مرکز دوران

۳- حرکت ترکیبی ←

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m\bar{a}_x \\ \Sigma F_y = m\bar{a}_y \\ \Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \end{cases}$$

نقطه دلخواه

$\bar{a}_x$ ← شتاب خطی مرکز ثقل در راستای x

$\bar{a}_y$ ← " " " y

α ← شتاب زاویه‌ای

I_O ← ممان اینرسی جرمی حول O

$\bar{I}$ ← ممان اینرسی جرمی حول مرکز ثقل

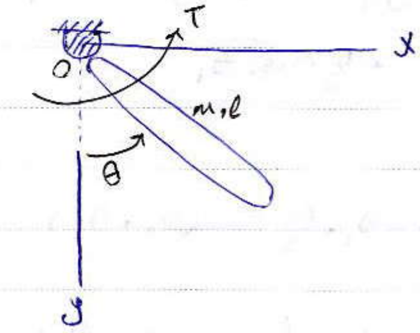
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt} = \ddot{\theta}$$

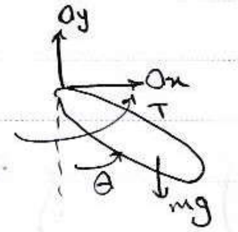
Subject
Date

مثال

مطلوبست معادله‌ی حرکت سیستم شکل روبرو.

میله $I_O = \frac{1}{3} m l^2$





$x_G = \bar{x} = \frac{l}{2}\sin\theta \rightsquigarrow \dot{\bar{x}} = \bar{v}_x = \frac{l}{2}\dot\theta\cos\theta \rightsquigarrow \ddot{\bar{x}} = \bar{a}_x = \frac{l}{2}\ddot\theta\cos\theta - \frac{l}{2}\dot\theta^2\sin\theta$

$y_G = \bar{y} = \frac{l}{2}\cos\theta \rightsquigarrow \dot{\bar{y}} = \bar{v}_y = -\frac{l}{2}\dot\theta\sin\theta \rightsquigarrow \ddot{\bar{y}} = \bar{a}_y = -\frac{l}{2}\ddot\theta\sin\theta - \frac{l}{2}\dot\theta^2\cos\theta$

حل:

$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightsquigarrow O_x = m(\frac{l}{2}\ddot\theta\cos\theta - \frac{l}{2}\dot\theta^2\sin\theta)$

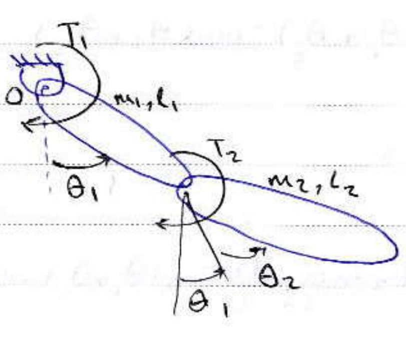
$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \rightsquigarrow -O_y + mg = m(-\frac{l}{2}\ddot\theta\sin\theta - \frac{l}{2}\dot\theta^2\cos\theta)$

$\Sigma M_O = I_O\alpha \rightsquigarrow T - mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3} m l^2\ddot\theta \rightsquigarrow \frac{1}{3} m l^2\ddot\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta = T$

معادله حرکت

مثال

معادله‌ی حرکت؟

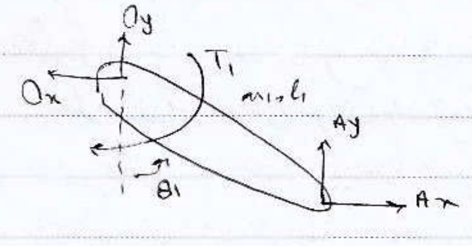


$\bar{I} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

$\alpha = \ddot\theta_1 + \ddot\theta_2$

$m_2 \bar{a}_2 d_2 = m_2 \bar{a}_x \frac{L_2}{2}\cos(\theta_1+\theta_2) - m_2 \bar{a}_y \frac{L_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2)$

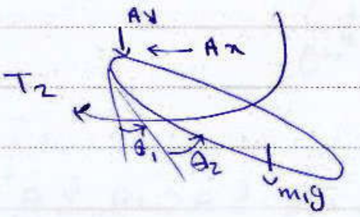
Subject
Date



$$\Sigma M_O = I_O \alpha$$

$$-T_1 - m_1 g \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 + A_y \cdot l_1 \sin\theta_1 + A_x l_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1$$

دیاگرام جرم ۲ آزاد :



$$\begin{cases} \bar{x}_2 = l_1 \sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \bar{y}_2 = l_1 \cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{\bar{y}}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

حل :

$$\ddot{\bar{X}}_2 = \bar{a}_{2x} = -l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1+\theta_2) + \frac{l^2}{2}(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\ddot{\bar{Y}}_2 = \bar{a}_{2y} = -l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 - l_1 \ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1+\theta_2) - \frac{l^2}{2}(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Sigma M_A = -T_2 - m_2 g \frac{l_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2)$$

ملاحظه جواب :

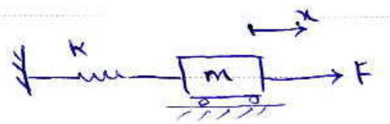
$$-T_2 - m_2 g \frac{l_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2) + m\bar{a}_{2x} \cdot \frac{l_2}{2}\cos(\theta_1+\theta_2) - m a_{2y} \frac{l_2}{2}\sin(\theta_1+\theta_2)$$

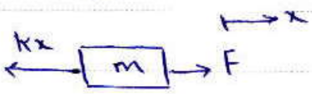
Subject
Date

جلسه‌ی هشتم

روش نیوتن و لاگرانژ :

قانون دوم نیوتن : $\Sigma F = ma$





$\Sigma F = ma$

معادله حرکت $F - kx = m\ddot{x} \rightsquigarrow m\ddot{x} + kx = F$

لاگرانژین :

انرژی جنبشی سیستم

$$L = K - P$$

لاگرانژین

انرژی پتانسیل سیستم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = F_i \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_i} = M_i \end{cases}$$

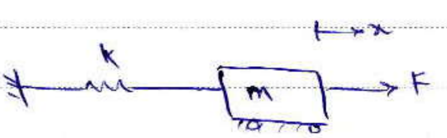
x_i ← مختصات خطی

F_i ← نیروی خارجی وارد بر سیستم

θ_i ← مختصات دورانی

M_i ← گشتاور خارجی وارد بر سیستم

مثال



$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$P = \frac{1}{2} k x^2$

$L = K - P = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

Subject
Date

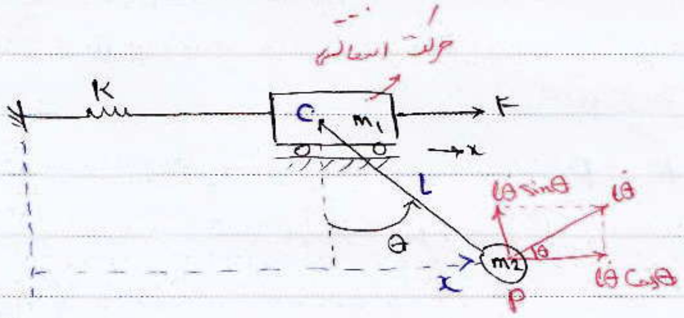
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}}_{m\ddot{x} - (-kx) = F_i} = F_i$$

$$\rightsquigarrow m\ddot{x} + kx = F$$ معادله حرکت سیستم

مثال



اگر بخواهیم از روش نیوتن حل کنیم، باید جرم‌ها را جدا جدا محاسبه کنیم و کار پیچیده می‌شود پس
از لاگرانژ حل می‌کنیم:

$K = K_1 + K_2$ انرژی جنبشی

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

$$x_2 = x + l\sin\theta \qquad \dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \rightsquigarrow \dot{x}_2^2 = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2$$

$$y_2 = l\cos\theta \quad \rightsquigarrow \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\theta}\sin\theta \rightsquigarrow \dot{y}_2^2 = l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2\left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$$

Subject
Date

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta\right]$$

$$P = \frac{1}{2} k x^2 + m_2 g (l - l\cos\theta)$$

$$L = K - P = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2\dot{\theta}^2 + l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) - \frac{1}{2} k x^2 - m_2 g (l - l\cos\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\theta} \cos\theta\right] - kx = F$$

$$\rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos\theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin\theta - kx = F$$ معادله حرکت ۱

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = M_i$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[(m_2 l^2 \dot{\theta} + m_2 l \dot{x} \cos\theta)\right] - \left[-m l \dot{\theta} \dot{x} \sin\theta + m_2 g l \sin\theta\right] = M$$

$$\rightarrow m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \cos\theta - \cancel{m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta} + \cancel{m_2 l \dot{\theta} \dot{x} \sin\theta} - m_2 g l \sin\theta = M$$ معادله حرکت ۲

$$\begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 l \cos\theta \\ m_2 l \cos\theta & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l \sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject
Date

انرژی جنبشی :

ذره : $K = \frac{1}{2} m v^2$

جسم صلب :

حرکت انتقالی : $K = \frac{1}{2} m v^2$

حرکت دورانی : $K = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ ← ممان اینرسی جرمی حول مرکز دوران O

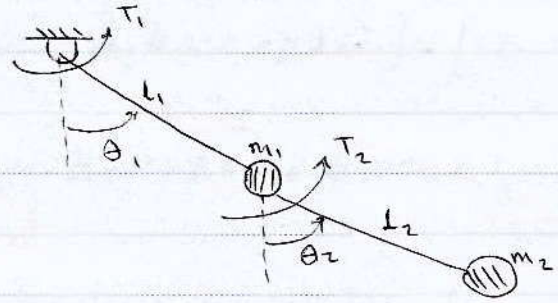
حرکت ترکیبی : $K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

سرعت خطی مرکز ثقل

ممان اینرسی جرم حول مرکز ثقل

تمرین

1/



2/