www.Mohandesyar.com

مسائل فصل هشتم

۸-۱. یک تیر ساده از نیمرخ IPE ۳۶۰ به‌طور همزمان تحت تأثیر بار گستردهٔ یکنواختی به میزان ۳۰ کیلو نیوتن بر متر (که شامل وزن تیر نیز می‌شود) و نیروی کششی معادل ۳۵۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم اگر دهانهٔ تیر ۳ متر باشد.

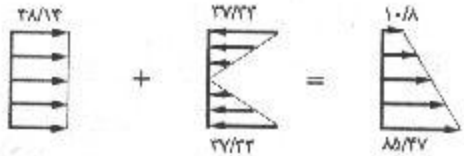
$$M_{max} = \frac{۱}{۸} = wL^۲ = \frac{۱}{۸}(۳۰)(۳)^۲ = ۳۳/۷۵\,kN.m$$

از جدول ۴ ضمیمه برای IPE ۳۶۰ :

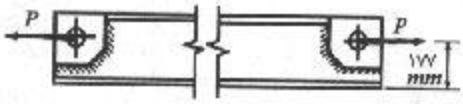
$$A = ۷۲/۷\,cm^۲,\ \left(S = \frac{c}{I}\right),\ S = ۹۰۴\,cm^۳$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۳۵۰ \times ۱۰^۳}{۷۲۷۰} + \frac{۳۳۷۵۰ \times ۱۰^۲}{۹۰۴ \times ۱۰^۲} = ۴۸/۱۴ + ۳۷/۳۳ = ۸۵/۷۴\,MPa$$ کششی

$$\sigma_{min} = ۴۸/۱۴ - ۳۷/۳۳ = ۱۰/۸\,MPa$$ کششی



۸-۲. یک تیرآهن IPE ۲۷۰ همانند شکل زیر تحت تأثیر نیروی کششی خارج از مرکز P مساوی ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای به وجود آمده در بالهای نیمرخ در وسط تیر.



مسأله ۸-۲

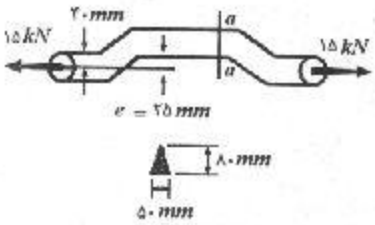
با استفاده از جدول ۴ ضمیمه برای IPE ۲۷۰ :

$$A = ۴۵/۹\ cm^۲\ ,\quad S = ۴۲۹\ cm^۳,\quad h = ۲۷۰\ mm$$

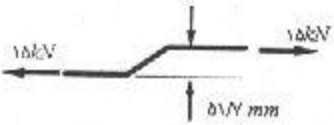
$$M = P.\,e = ۵۰۰ \times \left(۱۷۷ - \frac{h}{۲}\right) = ۲۱۰۰۰\ kN\,.\,m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳}{۴۵۹۰} + \frac{۲۱ \times ۱۰^۶}{۴۲۹ \times ۱۰^۳} = ۱۵۷/۹\ MPa$$

۸-۳. یک قطعه از ماشین که از آن برای انتقال نیروی کششی ۱۵ کیلونیوتنی استفاده می‌شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در ناحیهٔ خارج از محور قطعه.



مسأله ۸-۳



$$e = ۲۵ + \frac{۸۰}{۳} = ۵۱/۷\ mm$$

www.Mohandesyar.com

$$M = ۱۵۰۰۰ \times ۰/۰۵۱۷ = ۷۷۵/۵\ N.m$$

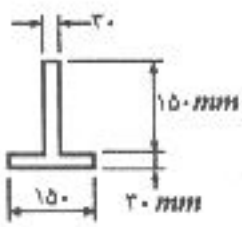
$$I = \frac{۱}{۳۶}(۵۰)(۸۰)^۳ = ۷/۱۱ \times ۱۰^۵\ mm$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{MC}{I} = \frac{۱۵۰۰۰}{\frac{۱}{۲}(۵۰)(۸۰)} - \frac{۷۷۵/۵ \times ۱۰^۳ \times \left(\frac{۲}{۳} \times ۸۰\right)}{۷/۱۱ \times ۱۰^۵} = ۷/۵ - ۵۸/۱۷ = -۵۰/۷\ MPa$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{۱۵۰۰۰}{\frac{۱}{۲}(۵۰)(۸۰)} + \frac{۷۷۵/۵ \times ۱۰^۳ \times \left(\frac{۱}{۳} \times ۸۰\right)}{۷/۱۱ \times ۱۰^۵} = ۷/۵ + ۲۹/۱ = ۳۶/۶\ MPa$$

در نتیجه تنش ماکزیمم $۵۰/۷\ MPa$ از نوع فشاری بوده که در بالای مقطع ایجاد می‌شود.

۸-۴. یک قطعه ماشین، مطابق قطعهٔ مسأله ۸-۳، منتهی با مقطع سپری که در شکل نشان داده شده، مفروض است. در انتهای این قطعه نیروی کششی P در فاصلهٔ ۹۰ میلی‌متری از سطح تحتانی بال تأثیر می‌کند و میزان خروج از مرکز e از خط تأثیر نیرو مساوی ۶۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که مقدار P مساوی ۱۷۵ کیلونیوتن و رفتار تیر در محدودهٔ ارتجاعی قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در قطعه.



مسأله ۸-۴

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۳۰)(۱۵) + (۱۵۰ \times ۳۰)(۱۰۵)}{۲ \times (۱۵۰ \times ۳۰)} = ۶۰mm \text{ از پایین}$$

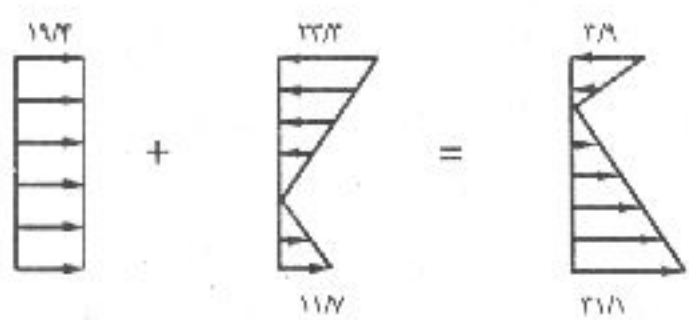
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۳۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۳۰)(۴۵)^۲ + \frac{۱}{۱۲}(۳۰)(۱۵۰)^۳ + (۳۰ \times ۱۵۰)(۱۰۵-۶۰)^۲$$

$$\Rightarrow I = ۲۷ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

$$M = P \times e = ۱۷۵۰۰۰ \times (۹۰ - ۶۰) = ۵/۲۵ \times ۱۰^۶\ N.mm$$

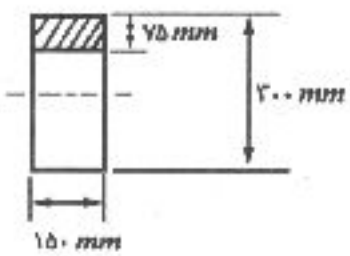
$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{۱۷۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۳۰} - \frac{(۵/۲۵ \times ۱۰^۶)(۱۲۰)}{۲۷ \times ۱۰^۶} = ۱۹/۴ - ۲۳/۳ = -۳/۹\ MPa$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{۱۷۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۳۰} + \frac{(۵/۲۵ \times ۱۰^۶)(۶۰)}{۲۷ \times ۱۰^۶} = ۱۹/۴ + ۱۱/۷ = ۳۱/۱\ MPa$$



www.Mohandesyar.com

۸-۵. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در یک مقطع مشخص، این تیر تحت تأثیر لنگر خمشی ۲۰ + کیلونیوتن‌متر، نیروی برشی قائم ۲۰ + کیلونیوتن و نیروی کششی ۳۰ کیلونیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین برآیند نیروهای قائم مؤثر بر قسمت سایه خورده مقطع.



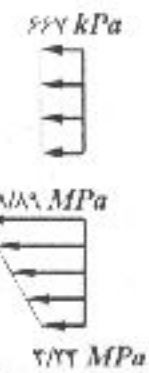
مسأله ۸-۵

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{۳۰}{(۰/۱۵)(۰/۳۰)} = ۶۶۷\ kN/m^۲$$

$$\sigma_{flex(max)} = \frac{Mc}{I} = \frac{۲۰ \times ۰/۱۵}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۳)^۳} = ۸۸۹۰\ kN/m^۲$$

حال تنش ناشی از خمش در پایین ناحیه سایه خورده را بدست می‌آوریم:

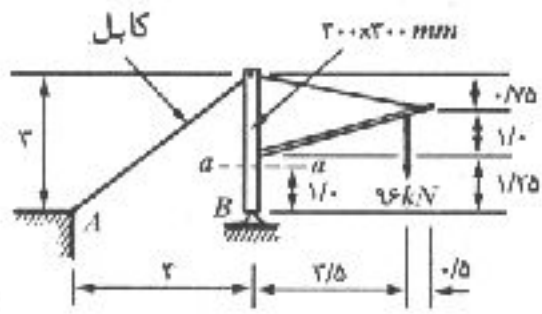
$$\sigma_{flex(low)} = \frac{My}{I} = \frac{۲۰ \times ۰/۰۷۵}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۳)^۳} = ۴۴۴۴/۵\ kN/m^۲$$



$$\sigma_{flex(ave)} = \frac{۸۸۹۰ + ۴۴۴۴/۵}{۲} = ۶۶۶۷/۲\ kN/m^۲$$

$$F = [\sigma_{axial} + \sigma_{flex(ave)}] \cdot A_c = [۶۶۷ + ۶۶۶۷/۲] \times (۰/۰۷۵ \times ۰/۱۵) = ۸۲/۵\ kN$$

۸-۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری که به طور قائم بر مقطع $a-a$ از دکل شکل زیر تأثیر می‌کند.



مسأله ۸-۶

$$\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ : ۹۶ \times ۳/۵ - \frac{۴}{۵} T \times ۳ = ۰ \rightarrow T = ۱۴۰\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : B_x - \frac{۴}{۵} \times ۱۴۰ = ۰ \rightarrow B_x = ۱۱۲\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : B_y - ۹۶ - \frac{۳}{۵} \times ۱۴۰ = ۰ \rightarrow B_y = ۱۸۰\ kN$$

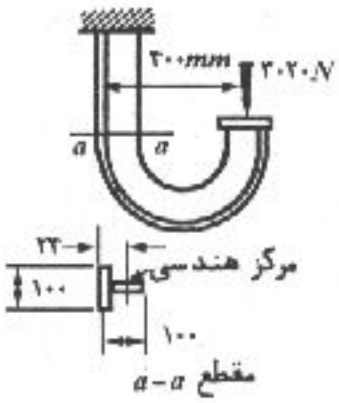
$P_{aa} = ۱۸۰\ kN$ فشاری $\quad M_{aa} = ۱۱۲ \times ۱ = ۱۱۲\ kN.m$

$$S = \frac{۱}{۶} bh^۲ = \frac{۱}{۶} \times (۳۰۰)(۳۰۰)^۲ = ۴/۵ \times ۱۰^۶\ mm^۳$$

$$\sigma_{max}(\text{فشاری}) = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{۱۸۰ \times ۱۰^۳}{۳۰۰^۲} - \frac{۱۱۲ \times ۱۰^۶}{۴/۵ \times ۱۰^۶} = -۲۶/۸۹\ MPa$$

www.Mohandesyar.com

۸-۷. یک قلاب بزرگ که از نیمرخ سپری ساخته شده، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین بزرگترین تنش قائمی که در انتهای گیردار به وجود می‌آید. برای نیمرخ به کار رفته در این مسأله، $A = ۹۵۵$ میلی‌مترمربع و $I_D = ۰/۸۹ \times ۱۰^{۶}$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



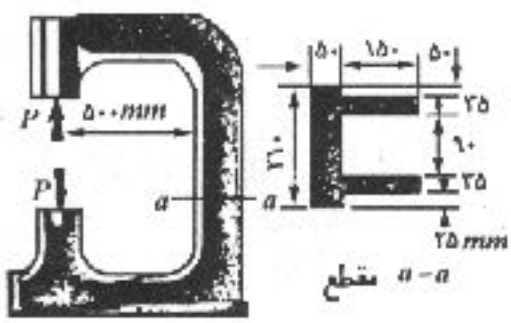
مسأله ۸-۷

$$P = ۳۰۲۰\,N$$

$$M = ۳۰۲۰(۰/۴ - ۰/۰۲۴) = ۱۱۳۵/۵\,N.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{۳۰۲۰}{۹۵۵} + \frac{(۱۱۳۵/۵ \times ۱۰^{۳})(۱۰۰ - ۲۴)}{۰/۸۹ \times ۱۰^{۶}} = ۱۰۰/۱\,N/mm^{۲}$$

۸-۸. قاب چدنی یک دستگاه پرس سوراخ کن، دارای مشخصات نشان داده شده در شکل می‌باشد. در صورتی که تنش مجاز کششی ۲۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار نیرویی مانند P که توسط مقطع $a - a$ کنترل می‌شود، چقدر است.



مسأله ۸-۸

$$\bar{y} = \frac{(۲۱۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۵۰ \times ۳۵)(۱۲۵) \times ۲}{(۲۱۰ \times ۵۰) + ۲(۱۵۰ \times ۳۵)} = ۷۵\,mm \text{ از چپ}$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۱۰)(۵۰)^{۳} + (۲۱۰ \times ۵۰)(۵۰)^{۲}$$

$$+ ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۳۵)(۱۵۰)^{۳} + (۳۵ \times ۱۵۰)(۵۰)^{۲}\right] = ۷۴/۳۶ \times ۱۰^{۶}\,mm^{۴}$$

$$M = (۵۰۰ + ۷۵)P = ۵۷۵P$$

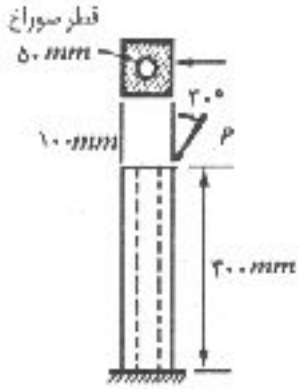
$$A = ۲۱۰ \times ۵۰ + ۲(۱۵۰ \times ۳۵) = ۲۱۰۰۰\,mm^{۲}$$

$$\sigma_t = ۲۸ = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{۲۱۰۰۰} + \frac{(۵۷۵P)(۷۵)}{(۷۴/۳۶ \times ۱۰^{۶})} = ۶/۲۷۶ \times ۱۰^{-۳}P \Rightarrow P = ۴۴۶۱۷\,N$$

$$\sigma_r = ۸۰ = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{۲۱۰۰۰} + \frac{(۵۷۵P)(۱۲۵)}{(۷۴/۳۶ \times ۱۰^{۶})} = ۱/۰۱۴ \times ۱۰^{-۳}P \Rightarrow P = ۷۸۸۸۰\,N$$

پس $P = ۴۴۶۱۷\,N$

www.Mohandesyar.com



مسأله ۸-۹

۸-۹. میلهٔ کوتاهی با مقطع مربع به ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر که داخل آن سوراخی به قطر ۵۰ میلی‌متر ایجاد شده، تحت تأثیر نیرویی همانند شکل می‌باشد. با صرف‌نظر کردن از وزن میله، مطلوب است تعیین نیروی P به نحوی که حداکثر تنش قائم در انتهای گیردار از ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند.

$$P_x = P\,Sin\,۳۰^\circ \qquad P_y = P\,Cos۳۰^\circ$$

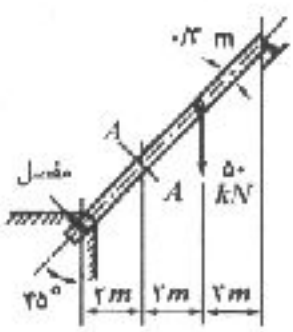
$$M = P\,Sin\,۳۰^\circ \times (۰/۴) - P\,Cos۳۰^\circ\,(۰/۰۵) = ۰/۱۵۷P \;\; N.m$$

$$A = (۰/۱)^۲ - \frac{\pi}{۴}(۰/۰۵)^۲ = ۸/۰۴ \times ۱۰^{-۳} \;\; m^۲$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)^۴ - \frac{\pi}{۴}(۰/۰۲۵)^۴ = ۸/۰۳ \times ۱۰^{-۶} \;\; m^۴$$

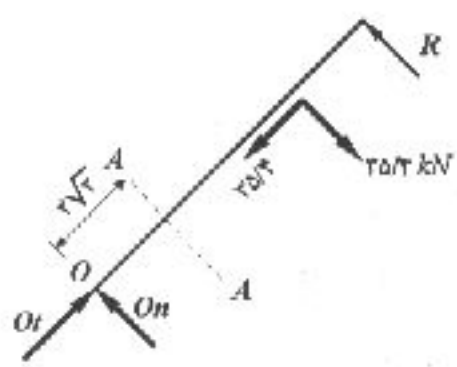
$$\sigma = ۱۴۰ \times ۱۰^۶ \;(N/m^۲) = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P\,Cos۳۰}{۸/۰۴ \times ۱۰^{-۳}} + \frac{۰/۱۵۷P\,(۰/۰۵)}{۸/۰۳ \times ۱۰^{-۶}}$$

$$۱۴۰ \times ۱۰^۶ = ۱۰۷/۷P + ۹۷۷/۶\,P \Rightarrow P = ۱۲۹\,kN$$



مسأله ۸-۱۰

۸-۱۰. یک تیر شیب‌دار با مقطع ۰/۳ × ۰/۲ متر، بار متمرکز به طرف پائینی همانند شکل تحمل می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A - A$ از وزن تیر صرف‌نظر کنید و فرض نمایید که بارها و واکنشهای وارده هیچ گونه خروج از مرکزیتی ندارند.



$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۵۰ = ۳۵/۴\,kN$$

$$\sum M_o = ۰ : R = \frac{۲}{۳} \times ۳۵/۴ = ۲۳/۶\,kN$$

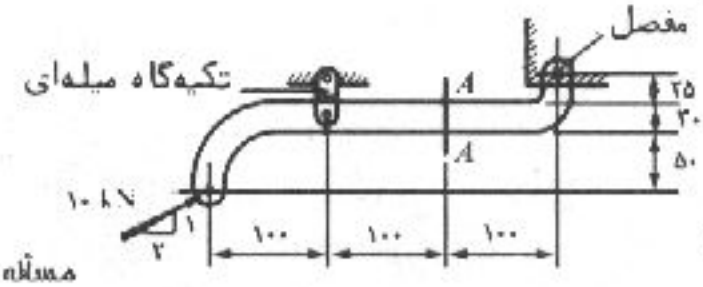
$$\sum F_t = ۰ : O_t = ۳۵/۴\,kN$$

$$\sum F_n = ۰ : O_n = ۱۱/۸\,kN$$

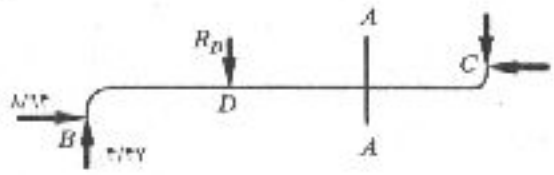
$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{۳۵/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۲ \times ۰/۳} - \frac{(۱۱/۸ \times ۲\sqrt{۲})(۰/۱۵)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^۳} = -۱۱/۷\,MN/m^۲ \;(MPa)$$

۸-۱۱. یک قطعه ماشین با مقطعی به ابعاد ۱۰ × ۳۰ میلی‌متر، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A - A$. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.

www.Mohandesyar.com



مسئله ۸-۱۱



$$\sum M_c = 0 : 4/47 \times 300 - 8/94 \times 105 = R_D \times 200 \rightarrow R_D = 2/01\, kN$$

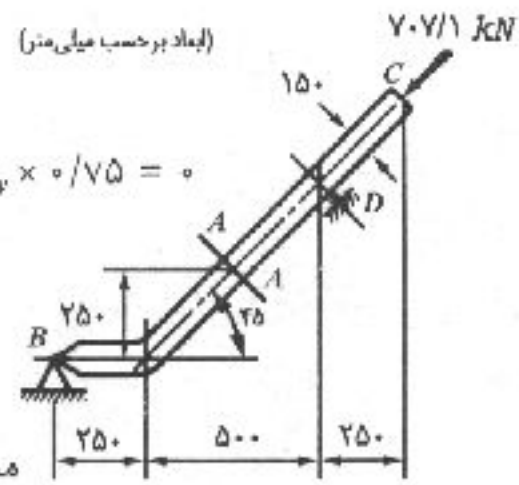
$$M_{AA} = 4/47 \times 0/2 - 8/94 \times 0/065 - 2/01 \times 0/1 = 0/112\, kN.m$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{8/94 \times 10^{-3}}{(0/03 \times 0/01)} - \frac{(0/112 \times 10^{-3})(0/015)}{\frac{1}{12}(0/01) \times (0/03)^3} = -29/8 - 74/7$$

$$= -104/5\, MPa \quad \text{فشاری}$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -29/8 + 74/7 = 44/9 \quad \text{کششی}$$

۸-۱۲. در شکل زیر، مطلوب تعیین حداکثر تنش قائم بر مقطع $A - A$. عضو BC از میلهٔ فولادی به ابعاد ۱۵۰ × ۱۵۰ میلی‌متر ساخته شده است. از وزن میله صرف‌نظر کنید.



مسئله ۸-۱۲

$$C_x = C_y = \frac{707/1}{\sqrt{2}} = 500\, kN$$

$$\sum M_B = 0 : 500 \times 1 - 500 \times 0/75 - D_x \times 0/5 - D_y \times 0/75 = 0$$

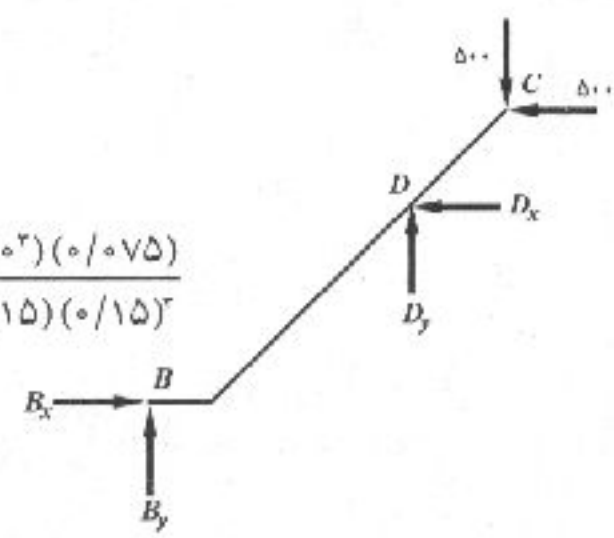
$$D_x = D_y$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود:

$$D_x = D_y = 100\, kN$$

$$\sum F_x = 0 : B_x = 600\, kN$$

$$\sum F_y = 0 : B_y = 400\, kN$$



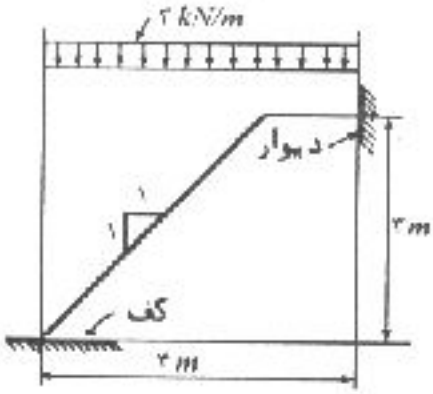
$$P = 600\frac{\sqrt{2}}{2} + 400\frac{\sqrt{2}}{2} = 707/1\, kN,$$

$$M = 400 \times 0/5 - 600 \times 0/25 = 50\, kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-707/1 \times 10^3}{(0/15 \times 0/15)} - \frac{(50 \times 10^3)(0/075)}{\frac{1}{12}(0/15)(0/15)^3}$$

$$= -120/3\, MPa$$

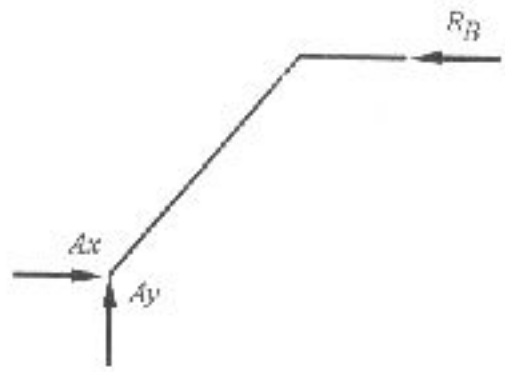
www.Mohandesyar.com



مسأله ۸-۱۳

۸-۱۳. ابعاد پلهٔ یک کارخانه، مطابق شکل می‌باشد. دو تیر کناری این پله از ناودانی ۲۴۰ می‌باشند. اگر بار وارد بر یک ناودانی مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم در مقطعی در ۱/۵ متری بالای کف. اتصال پله به کف را مفصلی فرض نمایید و هم چنین فرض کنید که دیوار فقط قادر است واکنش افقی ایجاد کند.

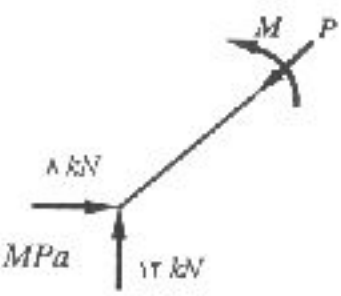
$$\sum M_A = 0 : R_B \times 3 - (3 \times 4)(2) = 0 \Rightarrow R_B = 8\,kN$$



$$\sum F_x = 0 : A_x = 8\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 3 \times 4 = 12\,kN$$

$$M_{aa} = \left(12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1/5\sqrt{2}) - (3 \times 1/5)\,\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1/5\sqrt{2})}{2} = 2/625\,kN.m$$



$$P = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times 1/5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 10/96\,kN$$

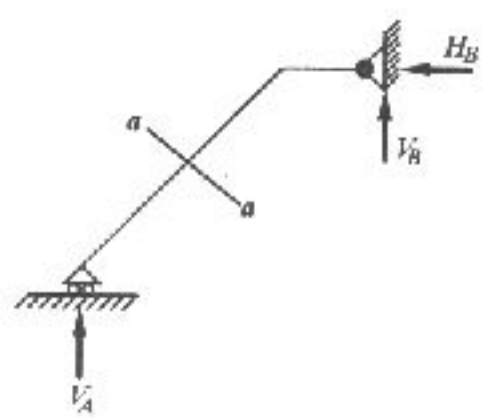
$$\sigma_m = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{10/96 \times 10^3}{4230} - \frac{2/625 \times 10^6}{300 \times 10^3} = -11/34\,MPa$$

۸-۱۴. مسأله ۸-۱۳ را با فرض اینکه تکیه‌گاه فوقانی مفصلی و تکیه‌گاه تحتانی فقط واکنش قائم می‌تواند انتقال دهد، مجدداً حل نمایید.

$$\sum M_B = 0 : 4V_A - (3 \times 4) \times 2 = 0 \Rightarrow V_A = 6\,kN \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 : V_B = 3 \times 4 - 6 = 6\,kN \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : H_B = 0$$



$$M_{aa} = 6 \times 1/5 - (3 \times 1/5) \times (0/75) = 5/63\,kN.m$$

$$P_{aa} = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 - 3 \times 1/5) = 1\,kN$$

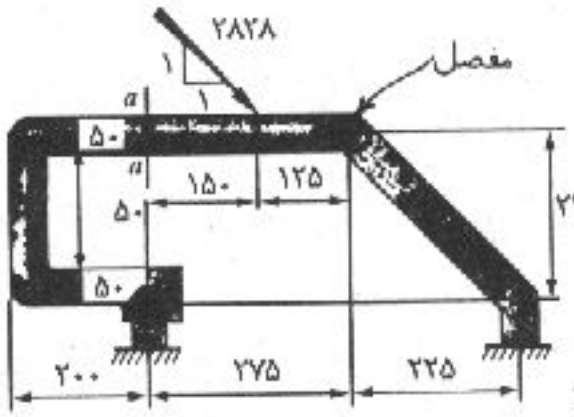
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S}$$

از جدول ۸ ضمیمه برای ناودانی ۲۴۰ : $A = 42/3\,cm^2$ و $S = 300\,cm^3$

$$\sigma_{max} = \frac{-1000}{4230} - \frac{5630 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -19\,MPa$$

www.Mohandesyar.com

۸-۱۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در مقطع $a-a$ از سازهٔ نشان داده شده در شکل زیر. مقطع $a-a$ به شکل دایره به قطر ۵۰ میلی‌متر می‌باشد.

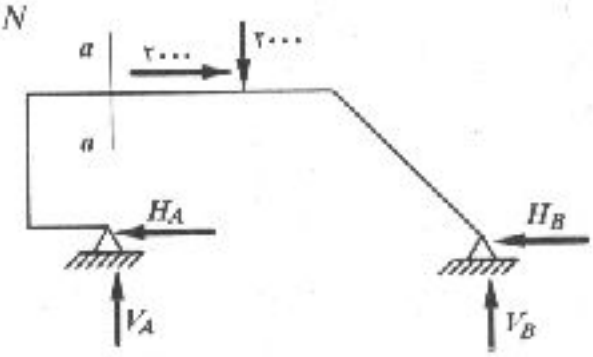


مسأله ۸-۱۵

$$F_x = F_y = \frac{۲۸۲۸}{\sqrt{۲}} = ۲۰۰۰\,N$$

$$\sum M_A = ۰ : V_B \times ۵۰۰ - ۲۰۰۰ \times ۱۵۰ - ۲۰۰۰ \times (۲۲۵ + ۲۵) = ۰$$

$$\rightarrow V_B = ۱۶۰۰\,N \qquad H_B = V_B = ۱۶۰۰\,N$$



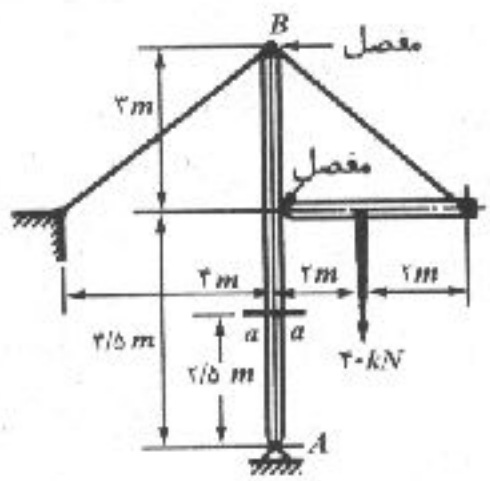
$$\sum F_x = ۰ : H_A = ۲۰۰۰ - ۱۶۰۰ = ۴۰۰\,N$$

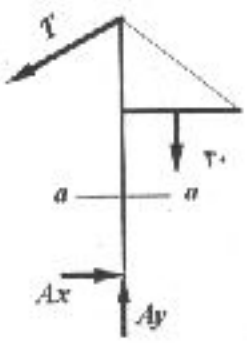
$$P_{a-a} = ۴۰۰\,N$$

$$M_{a-a} = ۴۰۰ \times ۰/۲۲۵ = ۹۰\,N.m$$

$$\sigma_{max}(\text{فشاری}) = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{۴۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۵)^۲} - \frac{(۹۰)\times(۰/۰۲۵)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۲۵)^۲} = -۷/۱\,MPa$$

۸-۱۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش کششی قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از شکل زیر. مقطع دکل به صورت دایره به قطر ۰/۳ متر می‌باشد.





مسأله ۸-۱۷

$$\sum M_A = ۰ : \frac{۴}{۵} \times ۷/۵ = ۴۰ \times ۲ \Rightarrow T = ۱۳/۳\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : A_y = \frac{۳}{۵} T + ۴۰ = ۴۸\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ \quad : A_x = \frac{۴}{۵} T = ۱۰/۶۷$$

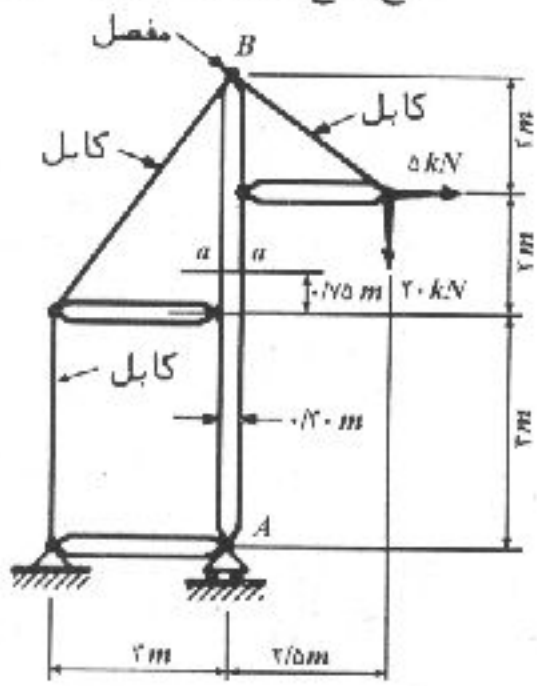
www.Mohandesyar.com

$P_{aa} = ۴۸ kN$ $\qquad$ $M_{aa} = ۱۰/۶۷ \times ۲/۵ = ۲۶/۷ \ kN.m$

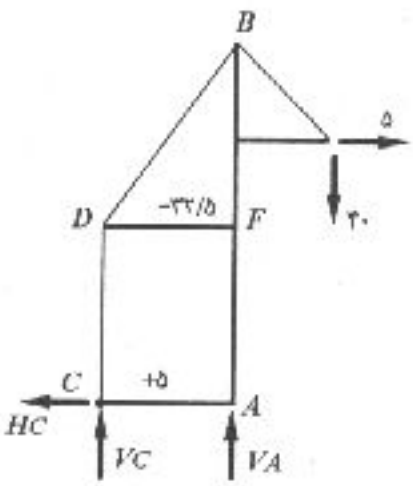
$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} \pm \frac{MC}{I} = -\frac{۴۸۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۰/۳)^۲} \pm \frac{۲۶۷۰۰ \times (۰/۱۵)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\text{کششی})\ \sigma_{max} = ۹/۴ \ MPa \\ (\text{فشاری})\ \sigma_{max} = -۱۰/۷۵ \ MPa \end{cases}$$

۸-۱۷. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری قائم مؤثر بر مقطع $a - a$ از سازهٔ زیر. دکل AB دارای مقطع مربع به ابعاد ۳۰۰ × ۳۰۰ میلی‌متر می‌باشد. از وزن سازه صرف‌نظر کنید.



مسئله ۸-۱۷



$$\sum M_c = ۰ : V_A \times ۳ = ۴۰ \times ۵/۵ + ۵ \times ۶$$

$$V_A = ۸۳/۳۳ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : V_c = ۸۳/۳۳ - ۴۰ = ۴۳/۳۳ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : H_c = ۵ kN$$

با بکارگیری معادلات تعادل برای نقاط C و D داریم:

$F_{CA} = ۵ \ kN$ $\qquad$ و $\qquad$ $F_{CD} = ۴۳/۳۳ kN$

$$\frac{۴}{۵} F_{DB} = ۴۳/۳۳ \Rightarrow F_{DB} = ۵۴/۱۶ kN$$

$$F_{DF} = \frac{۳}{۵} F_{DB} = ۳۲/۵ kN \ \text{فشاری}$$

$$\sum F_y = ۰ : P = ۸۳/۳۳ kN$$

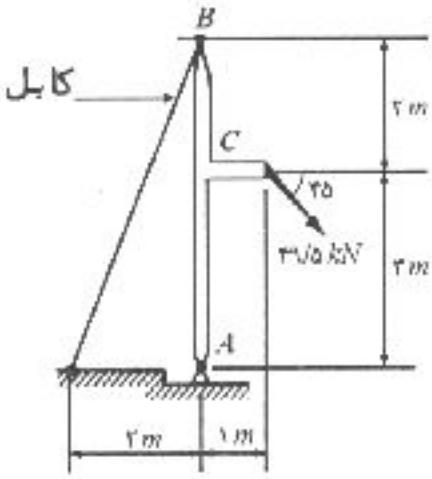
$$\sum F_x = ۰ : H = ۳۲/۵ - ۵ = ۲۷/۵ kN$$

$$M - ۳۲/۵ \times ۰/۷۵ + ۵ \times ۴/۷۵ = ۰ \Rightarrow M = ۰/۶۲۵ kNm$$

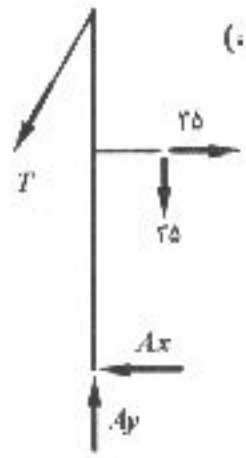
$$\sigma_{max}\ (\text{فشاری}) = \frac{-۸۸۳۳۰}{(۰/۳ \times ۰/۳)} - \frac{۶۲۵ \times ۰/۳}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۳)^۳} = -۱/۲۶ \ MPa$$

www.Mohandesyar.com

۸-۱۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع بحرانی عضو AB از سازهٔ زیر. عضو AB از نیمرخ IPE ۲۰۰ ساخته شده و گره C کاملاً گیردار است. (راهنمایی: برای تعیین مقطع بحرانی ابتدا لازم است که ترسیمهٔ تغییرات نیروی فشاری، و لنگر خمشی عضو AB رسم گردد.)



مسأله ۸-۱۸



$$۴۹/۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳۵\,kN$$

$$\sum M_A = ۰ : ۳۵ \times ۳ + ۳۵ \times ۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵^۲ + ۲^۲}} T \times ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \quad T = ۷۵/۴\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y = ۳۵ + \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \times ۷۵/۴ = ۱۰۵\,kN$$

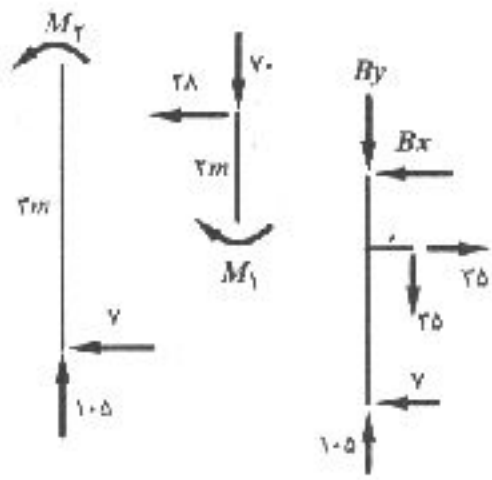
$$\sum F_x = ۰ : A_x + \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \times ۷۵/۴ - ۳۵ = ۰ \rightarrow A_x = ۷\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ : B_x = ۳۵ - ۷ = ۲۸\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ : B_y = ۱۰۵ - ۳۵ = ۷۰\,kN$$

$$P_۱ = -۷۰\,kN \text{ و } M_۱ = ۲۸ \times ۲ = ۵۶\,kN.m$$

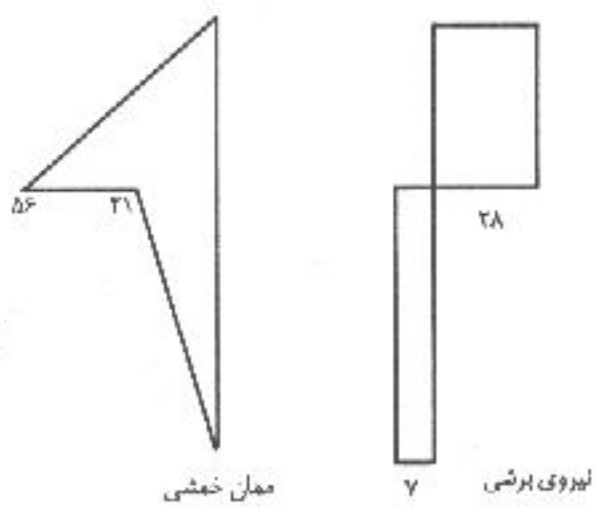
$$P_۲ = -۱۰۵\,kN \text{ و } M_۲ = ۷ \times ۳ = ۲۱\,kN.m$$



$$\sigma_{۱max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۷۰۰۰۰}{۲۸۵۰} - \frac{۵۶ \times ۱۰^۶}{۱۹۴ \times ۱۰^۳}$$

$$= -۳۱۳/۲\,MPa$$

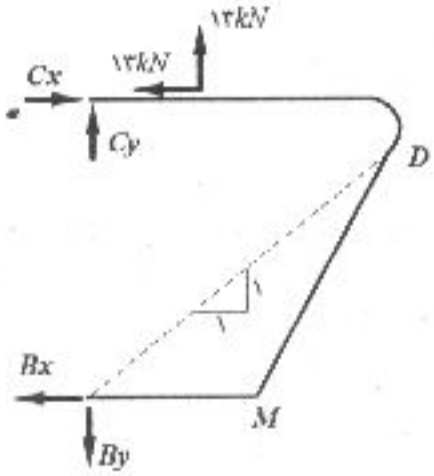
$$\sigma_{۲\,max} = \frac{-۱۰۵}{۲۸۵۰} - \frac{۲۱ \times ۱۰^۶}{۱۹۴ \times ۱۰^۳} = -۱۰۸/۳\,MPa$$

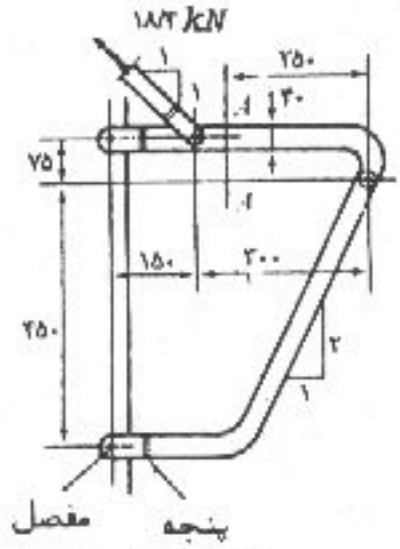


مقادیر A و S برای نیمرخ IPE ۲۰۰ از جدول ۴ استخراج شده‌اند.

۸-۱۹. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع $A-A$ از سازهٔ زیر. سطح مقطع $A-A$ به شکل مستطیل و به ابعاد ۳۰ × ۴۰ میلی‌متر می‌باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی‌متر می‌باشند.

www.Mohandesyar.com





مسأله ۸-۱۹

$$F_x = F_y = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۸/۴ = ۱۳\ kN$$

$$\sum M_c = ۰ : B_x \times (۴۵۰ + ۷۵) = ۱۳ \times ۱۵۰ \rightarrow B_x = ۳/۷۱\ kN$$

چون عضو BMD یک عضو دو نیرویی است، راستای نیروی وارد بر آن در امتداد BD می‌باشد که با توجه به هندسه شکل دارای شیب واحد است. بنابراین:

$$B_y = B_x = ۳/۷۱\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : C_x - ۱۳ - ۳/۷۱ = ۰ \rightarrow C_x = ۱۶/۷۱\ kN$$

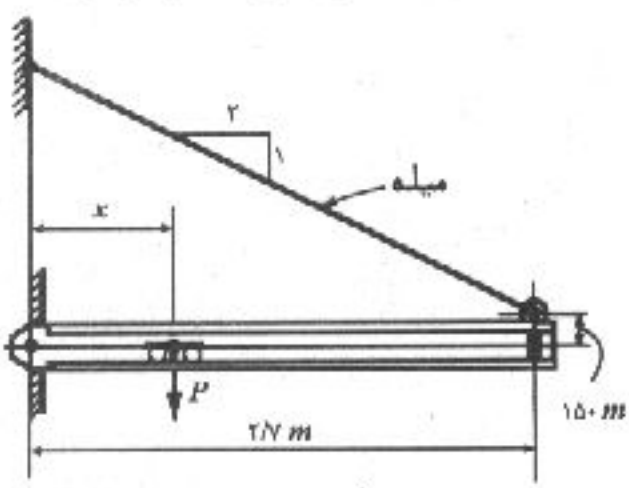
$$\sum F_y = ۰ : C_y + ۱۳ - ۳/۷۱ = ۰ \rightarrow C_y = ۹/۲۹\ kN$$

$$P_{AA} = -۱۶/۷۱ + ۱۳ = -۳/۷۱\ kN$$

$$M_{AA} = ۹/۲۹ \times (۰/۲) - ۱۳\,(۰/۰۵) = ۱/۲۱\ kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۳۷۱۰(N)}{(۰/۰۴ \times ۰/۰۳)\,(m^۲)} - \frac{(۱۲۱۰)(۰/۰۲)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۰۳)(۰/۴)^۳} = -۱۵۴\ MPa$$

۸-۲۰. جرثقیل نشان داده شده در شکل از نیمرخ معمولی I و میله‌ای از فولاد اعلا ساخته شده است. (الف) مطلوب است تعیین محل نیروی متحرک p به طوری که حداکثر لنگر خمشی در تیر ایجاد گردد. از وزن تیر صرف‌نظر کنید. (ب) با استفاده از محل به دست آمده از قسمت الف، مقدار P چقدر می‌تواند باشد. فرض کنید که اثر برش در روی تیر ناچیز است و تنش مجاز قائم در تیر را مساوی ۱۲۱ مگاپاسگال (نیوتن بر میلی‌متر مربع) در نظر بگیرید. در روی دقت معیار برقرار شده در قسمت الف، بحث کنید.



مسأله ۸-۲۰

www.Mohandesyar.com

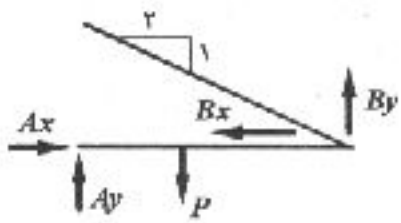
مشخصات نیمرخ I مصرفی بشرح زیر است:

$A = ۳۴۸۴\,mm^۲$ $\qquad I_x = ۲۴ \times ۱۰^۶\,mm^۴$ $\qquad I/c = ۲۳۶ \times ۱۰^۳\,mm^۳$

الف)

$$\sum M_A = ۰ : B_y \times ۲/۷ + B_x \times ۰/۱۵ - Px = ۰$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل $B_x = ۲B_y$ در نتیجه



$$P.x = ۲/۷B_y + ۰/۳B_y = ۳B_y \rightarrow B_y = \frac{۱}{۳}P.x$$

$$B_x = ۲B_y = \frac{۲}{۳}P.x$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y + B_y = P \rightarrow A_y = P - B_y = P\left(۱ - \frac{x}{۳}\right) \quad (۱)$$

$$M = A_y.x = P\left(۱ - \frac{x}{۳}\right).x = P.x - \frac{P}{۳}x^۲$$

$$dM/dx = ۰ \rightarrow P - \frac{۲}{۳}P.x = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵\,m$$

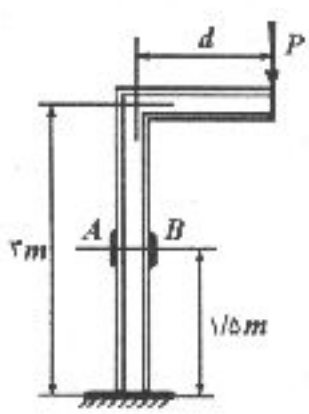
ب)

$$\sum F_x = ۰ : A_x = B_x = \frac{۲}{۳}P.x = \frac{۲}{۳}P \times \frac{۳}{۲} = P$$

$$(۱) \rightarrow A_y = P\left(۱ - \frac{۱/۵}{۳}\right) = \frac{P}{۲}$$

$$\sigma_{all} = -\frac{A_x}{A} - \frac{A_y.x}{S} = \frac{-P}{۳۴۸۴} - \frac{\frac{P}{۲} \times ۱۵۰۰}{۲۳۶ \times ۱۰^۳} = ۱۲۱ \rightarrow P = ۳۴/۹\,kN$$

۸-۲۱. قاب نشان داده شده در شکل از نیمرخ IPE ۲۲۰ ساخته شده است. در فاصلهٔ ۱/۵ متر از سطح زمین، مقدار کرنش در نقطهٔ A واقع در سطح خارجی بال مساوی ۲۰۰×۱۰^{-۶} میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطهٔ B واقع در سطح خارجی بال مساوی -۶۰۰×۱۰^{-۶} میلی‌متر بر میلی‌متر اندازه‌گیری شده است. مقدار نیروی P و فاصلهٔ d چقدر است؟ ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۸-۲۱

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} = \frac{۱}{E}\left(\frac{-P}{A} + \frac{Pd}{S}\right)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{۱}{E}\left(\frac{-P}{A} - \frac{Pd}{S}\right)$$

از جدول ۴ ضمیمه مقادیر A و S بدست می‌آیند: $\quad A = ۳۳/۴\,cm^۲$ و $S = ۲۵۲\,cm^۳$

www.Mohandesyar.com

$$۲۰۰ \times ۱۰^{-۶} = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^{۵}} \left(\frac{-P}{۳۳۴۰} + \frac{Pd}{۲۵۲۰۰۰} \right)$$

$$-۶۰۰ \times ۱۰^{-۶} = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^{۵}} \left(\frac{-P}{۳۳۴۰} - \frac{Pd}{۲۵۲۰۰۰} \right)$$

با جمع کردن طرفین در رابطه اخیر داریم:

$$-۴۰۰ \times ۱۰^{-۶} = \frac{-۲P}{(۲ \times ۱۰^{۵})(۳۳۴۰)} \Rightarrow P = ۱۳۳/۶ \times ۱۰^{۳} N$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده برای P در یکی از روابط مقدار d بدست می‌آید: $d = ۱۵۰/۹ mm$

۸-۲۲. مطابق شکل، میله‌ای به ابعاد ۰/۱ × ۰/۱ متر، تحت تأثیر نیروی F قرار دارد تنشهای طولی در دو مقطع به فاصلهٔ ۰/۲ متر از یکدیگر با استفاده از روشهای تجربی به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\sigma_A = ۰ \ MPa \ , \quad \sigma_B = -۳۰ \ MPa \ , \quad \sigma_C = -۲۴ MPa \ , \quad \sigma_D = -۶ MPa$$

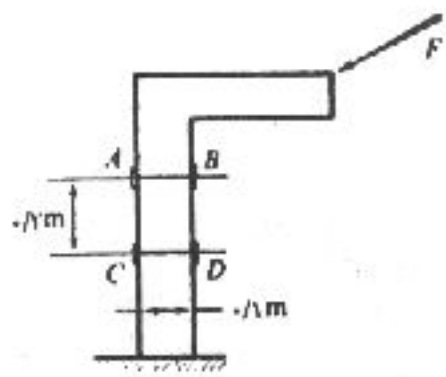
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی F.

$$\sigma_A = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{AB}}{S} = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sigma_B = -\frac{F_y}{A} - \frac{M_{AB}}{S} = -۳۰ \times ۱۰^{۶} \quad (۲)$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{۲M_{AB}}{S} = ۳۰ \times ۱۰^{۶} \qquad (۳)$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۱)^{۳}}{۰/۰۵} = ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۳} m^{۳}$$



مسئله ۸-۲۲

با قرار دادن مقدار S در رابطه (۳) مقدار M_{AB} بدست می‌آید:

$$M_{AB} = ۲۵۰۰ N.m$$

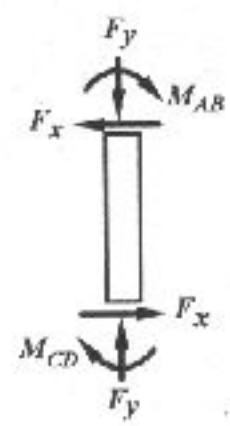
با استفاده از رابطه (۱) مقدار F_y حاصل می‌شود:

$$F_y = \frac{M_{AB}}{S} \times A = ۱۴۹/۷ kN$$

$$\sigma_c = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{CD}}{S} = -۲۴ \times ۱۰^{۶}$$

$$\sigma_D = \frac{-F_y}{A} - \frac{M_{CD}}{S} = -۶ \times ۱۰^{۶}$$

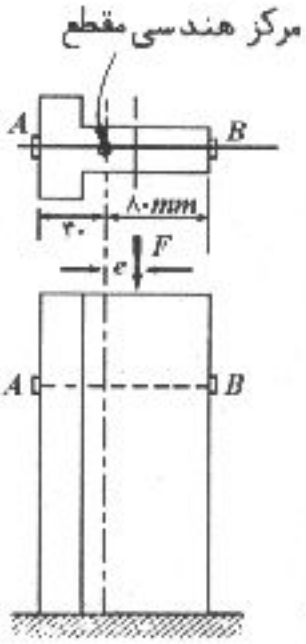
$$\sigma_C - \sigma_D = \frac{۲M_{CD}}{S} = -۱۸ \times ۱۰^{۶} \Rightarrow M_{CD} = -۱۵۰۳ N.m$$



$$M_{AB} - F_x \times ۰/۲ + M_{CD} = ۰ \Rightarrow ۲۵۰۰ - ۰/۲ F_x - ۱۵۰۳ = ۰ \Rightarrow F_x = ۵ kN$$

www.Mohandesyar.com

۸-۲۳. برای تعیین مقدار نیروی قائم خارج از مرکز F که بر روی یک ستون فولادی با مقطع سپری تأثیر می‌کند، کرنش سنجهایی در نقاط A و B نصب شدند. مطلوب است تعیین نیروی F در صورتی که کرنش طولی در A مساوی -۱۰۰×۱۰^{-۶} میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطهٔ B مساوی -۸۰۰×۱۰^{-۶} میلی‌متر بر میلی‌متر باشد. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی ۲×۱۰^{۵} و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مساحت مقطع ستون نیز مساوی ۴۰۰۰ میلی‌مترمربع است.



مسأله ۸-۲۳

$$P = -F \quad و \quad M = F.e \;\}+$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} + \frac{(F.e)(۴۰)}{I}$$

$$\sigma_A = E\varepsilon = (۲ \times ۱۰^{۵})(-۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}) = -۲۰\,MPa$$

از ترکیب دو رابطه فوق داریم:

$$F = A\left(۲۰ + ۴۰\frac{F.e}{I}\right) \qquad (۱)$$

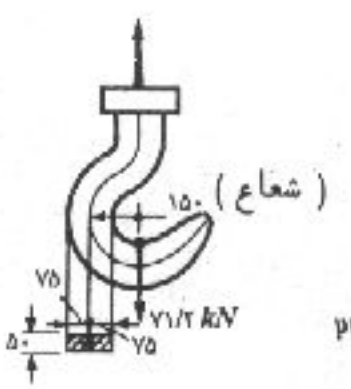
$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} - \frac{(F.e)(۸۰)}{I}$$

$$\sigma_B = E\varepsilon = (۲ \times ۱۰^{۵})(-۸۰۰ \times ۱۰^{-۶}) = -۱۶۰\,MPa$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{۱۲۰\,F.e}{I} = ۱۴۰\,MPa \Rightarrow \frac{F.e}{I} = ۱/۱۷$$

$$(۱) \Rightarrow F = ۴۰۰۰\,[۲۰ + ۴۰(۱/۱۷)] = ۲۶۶/۷\,kN$$

۸-۲۴. مطابق شکل، یک قلاب فولادی تحت تأثیر نیروی به طرف پایین ۷۱/۲ کیلونیوتن قرار دارد. شعاع محور منحنی شکل تیر مساوی ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش تولید شده در قلاب. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.



مسأله ۸-۲۴

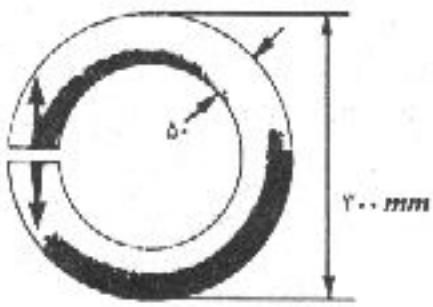
$$R = \frac{h}{\ln\frac{r_o}{r_i}} = \frac{۱۵۰}{\ln\frac{۲۲۵}{۷۵}} = ۱۳۶/۵$$

www.Mohandesyar.com

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{۷۱۲۰۰}{۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۷۱۲۰۰ \times ۱۵۰)(۱۳۶/۵ - ۷۵)}{۷۵ \times (۱۵۰ \times ۵۰)(۱۵۰ - ۱۳۶/۵)} = ۸۶/۵ MPa$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۷۱۲۰۰}{۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۷۱۲۰۰ \times ۱۵۰)(۱۳۶/۵ - ۲۲۵)}{۲۲۵(۱۵۰ \times ۵۰)(۱۵۰ - ۱۳۶/۵)} = -۴۱/۵$$

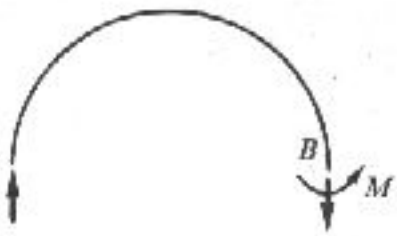
۸-۲۵. یک میلهٔ فولادی با مقطع دایره به قطر ۵۰ میلی‌متر، به صورت حلقه‌ای دایره به قطر خارجی ۳۰۰ میلی‌متر در آمده. مطلوب است: (الف) تعیین حداکثر تنش ایجاد شده در حلقه در اثر نیروی ۱۰ کیلونیوتنی که مطابق شکل بر دو انتهای باز آن وارد می‌شود. (ب) مطلوب است تعیین نسبت تنش حداکثر به دست آمده در قسمت الف به بزرگترین تنش فشاری که به طور قائم بر همان مقطع تأثیر می‌کند.



مسأله ۸-۲۵

$$M = ۱۰ \times (۳ - ۰/۵) = ۲/۵ kN.m$$

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲}}{۲} = \frac{۱۲۵ + \sqrt{۱۲۵^۲ - ۲۵^۲}}{۲} = ۱۲۴ mm$$



ماکزیمم تنش در نقطه B رخ می‌دهد زیرا ممان در این نقطه ماکزیمم می‌باشد.

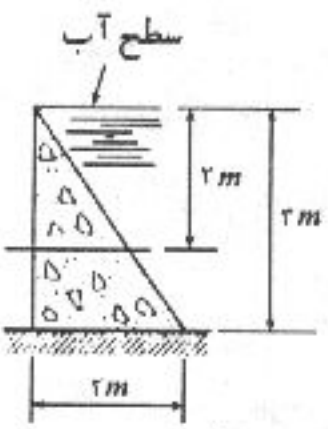
$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{۱۰۰۰۰}{\pi(۲۵)^۲} + \frac{۲/۵ \times ۱۰^۶ (N.mm)(۱۲۴ - ۱۰۰)}{۱۰۰ \times \pi(۲۵)^۲(۱۲۵ - ۱۲۴)} = ۳۱۰/۷ MPa$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۱۰۰۰۰}{\pi(۲۵)^۲} + \frac{۲/۵ \times ۱۰^۶ (۱۲۴ - ۱۵۰)}{۱۵۰ \times \pi(۲۵)^۲(۱۲۵ - ۱۲۴)} = -۲۱۵/۶ MPa$$

ب)

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{comp}} = \frac{۳۱۰/۷}{-۲۱۵/۶} = ۱/۴۴$$

۸-۲۶. ابعاد و مشخصات هندسی یک سد بتنی کوچک، همراه با ارتفاع آب در دریاچهٔ پشت آن، در شکل نشان داده شده است. با فرض اینکه بتن بتواند مقداری کشش تحمل نماید، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر یک مقطع افقی به فاصلهٔ ۲ متر از بالای آن. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.



مسأله ۸-۲۶

www.Mohandesyar.com

وزن واحد طول : $\text{وزن} = \text{حجم} \times \text{وزن حجمی} = (A \times ۱) \times \gamma = A\rho g$

وزن یک متر سد : $W = \left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱/۳۳\right) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۳۰۵۹۰\ N/m = ۳۰/۵۹\ kN/m$

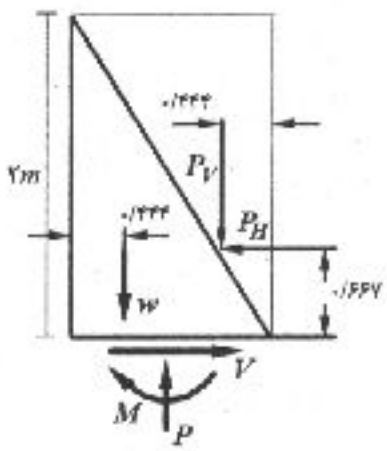
$$P_V = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱/۳۳ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰ = ۱۳/۳\ kN/m$$

$$P_H = ۲ \times ۱ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰ = ۲۰\ kN/m$$

$$P = -P - W = -۱۳/۳ - ۳۰/۵۹ = ۴۳/۹\ kN/m$$

$$M = ۲۰\,(۰/۶۶۷) + ۳۰/۵۹\,(۰/۶۶۷ - ۰/۴۴۴) - ۱۳/۳\,(۰/۶۶۷ - ۰/۴۴۴)$$

$$M = ۱۷/۲\ kNm/m$$



$$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{MI}{c} = \frac{-۴۳/۹}{۱/۳۳} + \frac{۱۷/۲\left(\frac{۱/۳۳}{۲}\right)}{\frac{۱}{۱۲}(۱)(۱/۳۳)^۲} = ۲۵/۱۳\ kN/m$$

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{MI}{c} = \frac{-۴۳/۹}{۱/۳۳} + \frac{۱۷/۲\left(\frac{۱/۳۳}{۲}\right)}{\frac{۱}{۱۲}(۱)(۱/۳۳)^۲} = -۹۱/۳\ kN/m$$

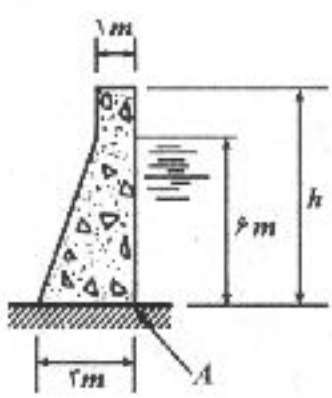
۸-۲۷. درُ سد زیر ارتفاع h چقدر باشد تا تنش در نقطهٔ A مساوی صفر شود. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

وزن واحد طول : $w = A \times ۱ \times \gamma = A\rho g$

$$w_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۱۳۸\ kN/m$$

$$w_۲ = (۱ \times h) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۲۳h\ kN/m$$

$$H = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times (۱۰۰۰ \times ۱۰) \times ۶ = ۱۸۰\ kN/m$$



مسأله ۸-۲۷

نیروی عمودی = وزن واحد طول سد :

$$P = -(w_۱ + w_۲) = -۱۶۱\ kN/m$$

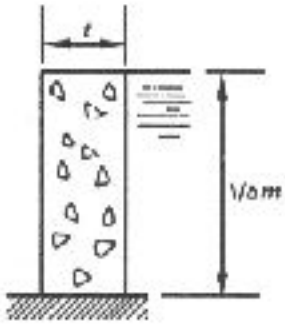
$$M = ۱۳۸ \times \left(۱/۵ - \frac{۴}{۳}\right) + ۲۳h \times ۱ - ۱۸۰ \times \frac{۶}{۳} = ۲۳h - ۳۳۷$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۱۳۸ + ۲۳h}{۳ \times ۱} + \frac{۲۳h - ۳۳۷}{\frac{۱}{۶}(۱)(۳)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۳۸ + ۲۳h + ۶۴h - ۶۷۴ = ۰ \Rightarrow h = ۶/۱۶\ m$$

۸-۲۸. ضخامت t در سد نشان داده شده چقدر باشد تا در سطح تماس شالوده سد با زمین ایجاد کشش نگردد. وزن مخصوص آب و بتن را مثل مسأله ۸-۲۷ فرض نمایید.

www.Mohandesyar.com



مسأله ۸-۲۸

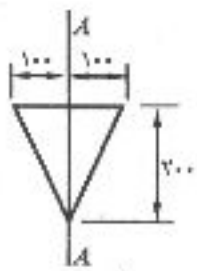
$$w = (۱/۵ \times t) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۳۴/۵t\ kN/m$$

$$H = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱۰۰۰۰ = ۱۱/۳ kN/m$$

$$P = -w = -۳۴/۵t\ kN/m$$

$$M = H \times \frac{۱/۵}{۳} = ۵/۶۵ kN.m/m$$

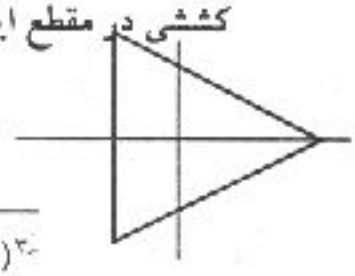
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = ۰ \Rightarrow -\frac{۳۴/۵t}{t \times ۱} + \frac{۵/۶۵}{\frac{۱}{۶}(۱)t^۲} = ۰ \rightarrow t = ۱m$$



مسأله ۸-۲۹

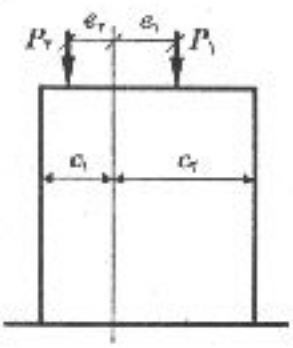
۸-۲۹. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می‌باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر). در روی خط $A - A$ محدوده‌ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچ گونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

(ابعاد برحسب میلی‌متر)



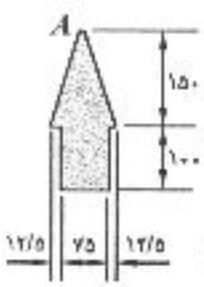
$$\sigma = \frac{-P_۱}{A} + \frac{M_۱c_۱}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P_۱}{\frac{۱}{۲}(۲۰۰)(۲۰۰)} + \frac{(P_۱e_۱)\left(\frac{۲۰۰}{۳}\right)}{\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)(۲۰۰)^۳}$$

$$\longrightarrow e_۱ = ۳۳/۳ mm$$



$$\frac{-P_۲}{A} + \frac{M_۲c_۲}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P_۲}{\frac{۱}{۲}(۲۰۰)^۲} + \frac{(P_۲e_۲)\left(۲۰۰ - \frac{۲۰۰}{۳}\right)}{\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)^۳}$$

$$\longrightarrow e_۲ = ۱۶/۷ mm$$



مسأله ۸-۳۰

۸-۳۰. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می‌باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر). در روی محور تقارن مقطع فوق، محدوده‌ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچگونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

$$\bar{y} = \frac{(۷۵ \times ۱۰۰)(۵۰) + \frac{۱}{۲}(۱۵۰ \times ۱۰۰)(۱۵۰)}{۷۵ \times ۱۰۰ + \frac{۱}{۲} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰} = ۱۰۰\ mm$$ از پایین

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^۳ + (۷۵ \times ۱۰۰)(۵۰)^۲ + \frac{۱}{۳۶}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ + \left(\frac{۱}{۲} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰\right)(۵۰)^۲$$

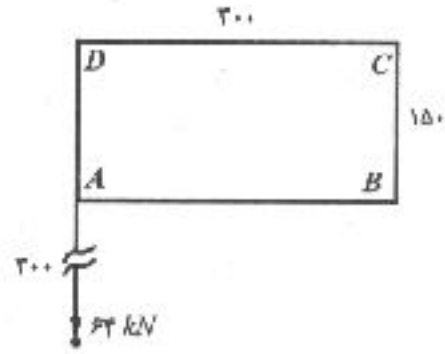
$$\longrightarrow I = ۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

$$\sigma_A = ۰ = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-P}{۱۵۰۰۰} + \frac{(Pe)(۱۵۰)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۰ \rightarrow e = ۲۳/۶ mm$$

یعنی محدوده مورد نظر زیر محور خنثی و تا فاصله $۲۳/۶\ mm$ از آن می‌باشد.

www.Mohandesyar.com

۸-۳۱. مثال ۸-۵ را با قرار دادن نیروی P در روی ضلع AD به فاصلهٔ ۳۷۵ میلی‌متر از محور تقارن، مجدداً حل نمایید.



$$M_{yy} = ۶۴ \times ۰/۱۵ = ۹/۶\ kN.m$$

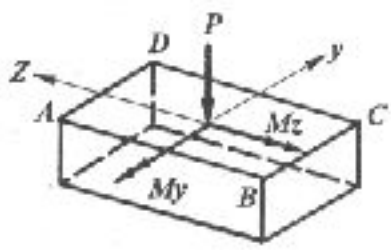
$$M_{zz} = ۶۴ \times ۰/۳۷۵ = ۲۴\ kN.m$$

$$S_{yy} = ۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}\ m^۳,\ S_{zz} = ۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}\ m^۳$$

$$\frac{P}{A} = \frac{۶۴}{۰/۳ \times ۰/۱۵} = ۱۴۲۲\ kN/m^۲$$

$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۹/۶}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۴۲۶۷\ kN/m^۲$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{۲۴}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۲۱۳۳۳\ kN/m^۲$$

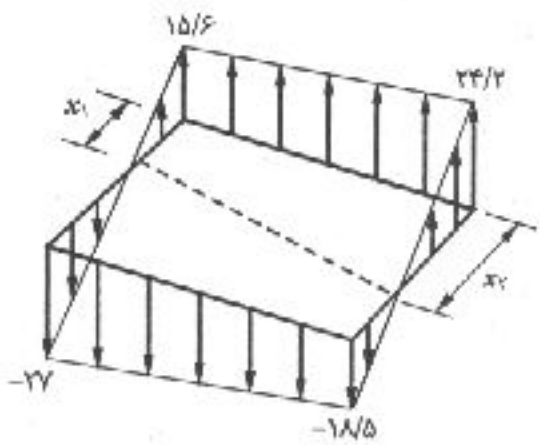


$$\sigma_A = -۱/۴۲ - ۴/۲۷ - ۲۱/۳۳ = -۲۷\ MPa$$

$$\sigma_B = -۱/۴۲ + ۴/۲۷ - ۲۱/۳۳ = -۱۸/۵\ MPa$$

$$\sigma_C = -۱/۴۲ + ۴/۲۷ + ۲۱/۳۳ = ۲۴/۲\ MPa$$

$$\sigma_D = -۱/۴۲ - ۴/۲۷ + ۲۱/۳۳ = ۱۵/۶\ MPa$$



$$\frac{x_1}{۱۵/۶} = \frac{۱۵۰}{۱۵/۶ + ۲۷} \Rightarrow x_1 = ۵۴/۹\ mm$$

$$\frac{x_2}{۲۴/۲} = \frac{۱۵۰}{۲۴/۲ + ۱۸/۵} \Rightarrow x_2 = ۸۵\ mm$$

۸-۳۲. اگر ستون کوتاه نشان داده شده در شکل ۸-۱۲- الف از فولاد با وزن مخصوص ۷۵ کیلونیوتن بر مترمکعب ساخته شده باشد، مطلوب است تعیین نیروی P به طوری که تنش در نقطهٔ D مساوی صفر گردد. از وزن لچکی کوچکی که بار روی آن وارد می‌شود، صرف‌نظر کنید. برای همین شرایط، خط تنش صفر در روی مقطع $ABCD$ را تعیین نمایید.

$$\sigma_D = ۰ = \frac{-P'}{A} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{P + ۷۵ \times ۰/۳ \times ۰/۱۵ \times ۰/۵}{۰/۳ \times ۰/۱۵}$$

$$- \frac{P \times ۰/۱۵}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} + \frac{P \times ۰/۱۵}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow ۴۴/۴P = ۳۷/۵ \longrightarrow P = ۰/۸۸۴\ kN = ۸۸۴\ N$$

www.Mohandesyar.com

$$-\frac{P'}{A} = -\frac{۰/۸۴۴ + ۱/۶۸۸}{۰/۳ \times ۰/۱۵} = -۵۶/۳\,kN/m^۲$$

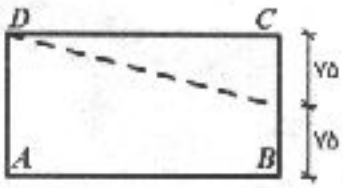
$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۰/۸۴۴ \times ۰/۱۵}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = -۵۶/۳\,kN/m^۲$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{۰/۸۴۴ \times ۰/۱۵}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = -۱۱۲/۵\,kN/m^۲$$

$$\sigma_A = -۵۶/۳ - ۵۶/۳ - ۱۱۲/۵ = -۲۲۵\,kN/m^۲$$

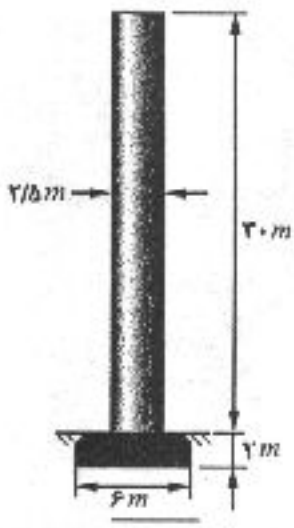
$$\sigma_B = -۵۶/۳ + ۵۶/۳ - ۱۱۲/۵ = -۱۱۲/۵\,kN/m^۲$$

$$\sigma_C = -۵۶/۳ + ۵۶/۳ + ۱۱۲/۵ = ۱۱۲/۵\,kN/m^۲$$



چون $\sigma_B = -\sigma_C$ بنابراین خط تنش صفر از وسط فاصله BC عبور می‌کند.

۸-۳۳. یک دودکش فولادی به قطر ۲/۵ متر که از داخل توسط آجر روکش شده است، در روی شالوده‌ای به ابعاد ۶ × ۶ متر قرار دارد. وزن دودکش با شالودهٔ آن مساوی ۷۶/۵ کیلونیوتن می‌باشد. در صورتی که بر این دودکش بادی به موازات یکی از اضلاع شالودهٔ آن و با فشار ۱ کیلونیوتن بر مترمربع تصویر دودکش بر روی صفحهٔ قائم بوزد، حداکثر فشار تولید شده در روی شالوده چقدر خواهد بود.



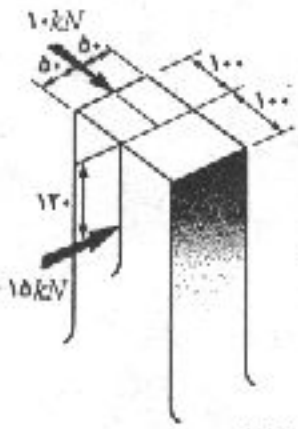
مسأله ۸-۳۳

$$P = (۳۰ \times ۲/۵)(۱) = ۷۵\,kN \qquad M = ۷۵ \times (۱۵ + ۲) = ۱۲۷۵\,kN.m$$

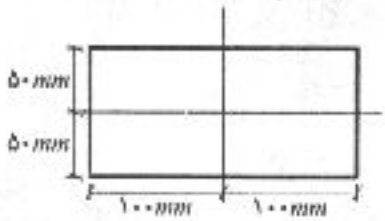
$$S = \frac{۱}{۶}(۶)(۶)^۲ = ۳۶\,m^۳$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{S} = -\frac{۷۵}{۳۶} \pm \frac{۱۲۷۵}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۳۳/۳\,kPa & \text{کششی} \\ \sigma_۲ = -۳۷/۵\,kPa & \text{فشاری} \end{cases}$$

۸-۳۴. یک قطعهٔ چدنی همانند شکل بارگذاری شده است. با صرف‌نظر کردن از وزن قطعه، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر مقطعی که در فاصلهٔ ۰/۵ متری از بالای قطعه قرار دارد. هم چنین خط تنشهای صفر را نیز تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.



مسأله ۸-۳۴



www.Mohandesyar.com

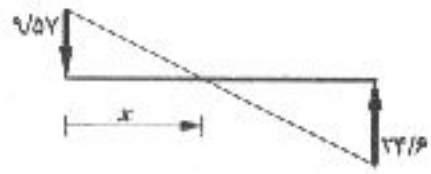
$$M_{xx} = ۱۵(۰/۵ - ۰/۱۲) = ۵/۷\,kN.m$$

$$M_{yy} = ۱۰ \times ۰/۵ = ۵\,kN.m$$

$$I_{xx} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۱)^۳ = ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۵} m^۴$$

$$I_{yy} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۲)^۳ = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۵}\, m^۴$$

$$\sigma_A = \frac{۵/۷ \times ۱۰^{-۳}(MN.m)(۰/۰۵)}{۱/۶۷ \times ۱۰^{-۵}} + \frac{۵ \times ۱۰^{-۳}\,(MN.m)(۰/۱)}{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۵}} = ۱۷/۰۷ + ۷/۵ = ۲۴/۶۱\,MPa$$

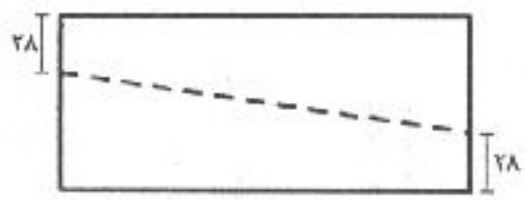


$$\sigma_B = ۱۷/۰۷ - ۷/۵ = +۹/۵۷\,MPa$$

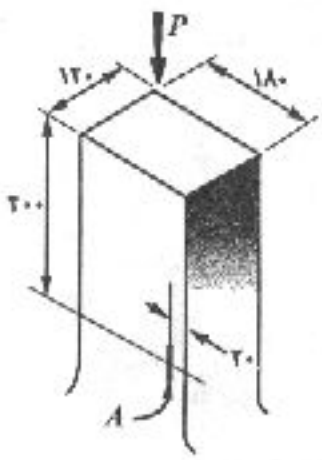
$$\sigma_C = -۱۷/۰۷ - ۷/۵ = -۲۴/۶\,MPa$$

$$\sigma_D = -۱۷/۰۷ + ۷/۵ = -۹/۵۷\,MPa$$

$$x = \frac{۹/۵۷}{۹/۵۷ + ۲۴/۶} \times ۱۰۰ = ۲۸\,mm$$



۸-۳۵. یک قطعهٔ آلومینیومی همانند شکل بارگذاری شده است. در اثر این بار، در نقطه A کرنشی معادلی ۵۰۰×۱۰^{-۶} میلی‌متر بر میلی‌متر ایجاد می‌شود. مطلوب است تعیین مقدار نیروی واردهٔ P. ضریب ارتجاعی آلومینیوم مساوی $۰/۱ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد و تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی‌متر هستند.



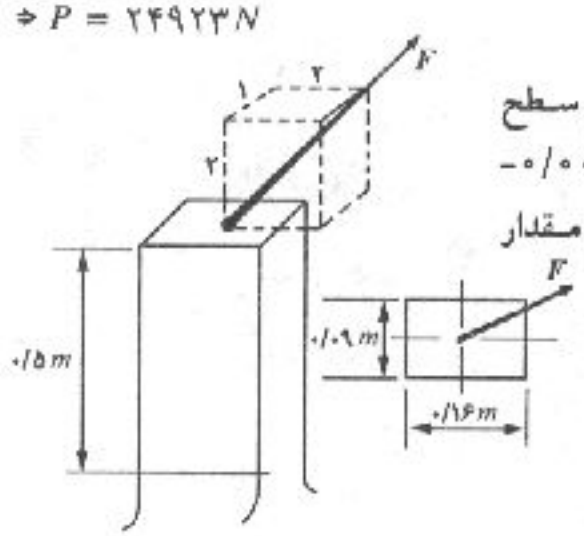
مسأله ۸-۳۵

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{-P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}\,c}{I_{yy}}$$

$$۰/۱ \times ۱۰^۵ \times ۵۰۰ \times ۱۰^{-۶} = \frac{-P}{(۱۲۰ \times ۱۸۰)} + \frac{۶۰P}{\frac{۱}{۶}(۱۸۰)(۱۲۰)^۲} + \frac{۹۰P \times ۷۰}{\frac{۱}{۲}(۱۲۰)(۱۸۰)^۳}$$

$$\Rightarrow P = ۲۴۹۲۳\,N$$

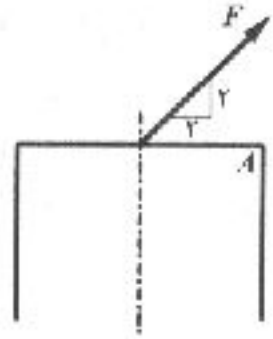
۸-۳۶. اگر در اثر اعمال نیروی مایل F بر مرکز هندسی سطح مقطع عضو نشان داده شده، کرنشی معادل $-۰/۰۰۰۱$ میلی‌متر بر میلی‌متر در نقطهٔ A ایجاد می‌شود. مقدار نیروی F چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۸-۳۶

www.Mohandesyar.com

$$\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۲} = ۳$$

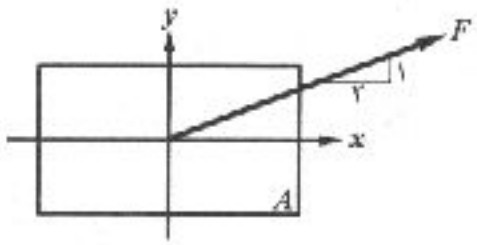


$$F_x = \frac{۲}{۳}F \ , \ F_y = \frac{۱}{۳}F \ , \ F_z = \frac{۲}{۳}F$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{F_y}{A} + \frac{۰/۵ \times F_y}{S_{xx}} - \frac{۰/۵ \times F_x}{S_{yy}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳}F}{۰/۰۹ \times ۰/۱۶} + \frac{۰/۵ \times \left(\frac{۱}{۳}F\right)}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۶)(۰/۰۹)^۲} - \frac{۰/۵ \times \left(\frac{۲}{۳}F\right)}{\frac{۱}{۶}(۰/۰۹)(۰/۱۶)^۲} = ۴۶/۳F + ۷۷۱/۶F - ۸۶۸F$$

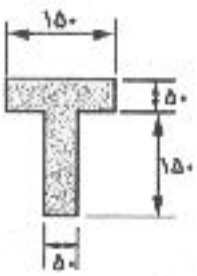
$$\rightarrow \sigma_A = -۵۰/۲F$$



$$\sigma_A = E\varepsilon = (۲ \times ۱۰^۵)(-۱۰^{-۳}) = -۲۰ \ MPa$$

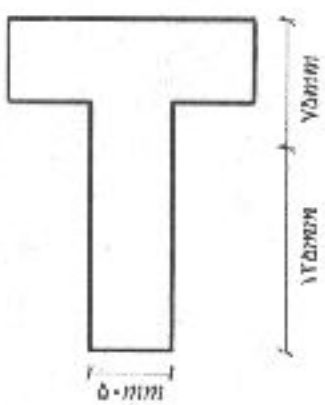
$$-۲۰ \times ۱۰^۶ = -۵۰/۲F \Rightarrow F = ۳۹۸ \ kN$$

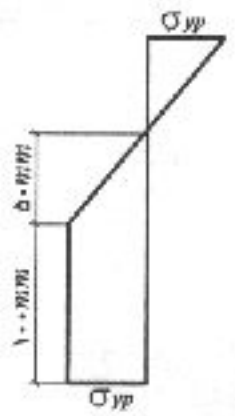
۸-۳۷. یک تیر T از مصالحی ارتجاعی - خمیری، دارای ابعادی مطابق شکل می‌باشد. (الف) اگر کرنش در بالای بال مساوی $-\varepsilon_{yp}$ و در محل برخورد بال با جان صفر باشد، نیروی محوری P و لنگر خمشی M مؤثر بر مقطع را تعیین نمایید. تنش جاری شدن را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. (ب) اگر نیروهای به دست آمده در قسمت (الف) حذف شوند، چه تنشهای پس‌ماندی در مقطع به وجود می‌آید.



مسأله ۸-۳۷

(ابعاد بر حسب میلی‌متر)





(الف)

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۵۰ \times ۵۰)(۱۲۵)}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۵$$

$$P = -\frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۱۵۰ + \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۵۰ + \sigma_{yp} \times ۱۰۰ \times ۵۰$$

$$\Rightarrow P = ۲۵۰۰\sigma_{yp} \quad \Rightarrow P = ۶۲۵ \ kN$$

$$M = \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۱۵۰ \times ۵۰ \times ۷۵ + \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۸/۳۳ + \sigma_{yp} \times ۱۰۰ \times ۵۰ \times ۷۵$$

$$= ۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶ \ N.mm \quad \Rightarrow M = ۱۶۶/۷ \times ۱۰^۳ \ N.m$$

www.Mohandesyar.com

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۵۰)^۲ + \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۵۰)^۲$$

$$= ۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

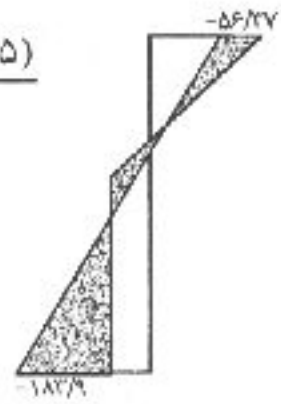
$$\sigma_{t_۱, elas} = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-۶۲۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶)(۷۵)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۱۹۳/۶۳ MPa$$

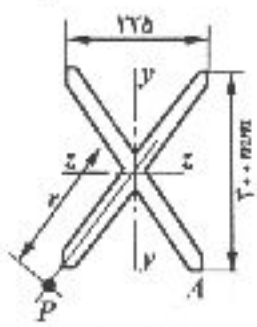
$$\sigma_{b_۱, elas} = \frac{-P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۶۲۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} - \frac{(۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶)(۱۲۵)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶}$$

$$= -۴۳۳/۹ MPa$$

$$\sigma_{t_۱, res} = -۲۵۰ + ۱۹۳/۶۳ = -۵۶/۳۷ MPa$$

$$\sigma_{b_۱, res} = ۲۵۰ - ۴۳۳/۹ = -۱۸۳/۹ MPa$$





مسأله ۸-۳۸

۸-۳۸. یک عضو فشاری کوتاه دارای مقطعی مطابق شکل می‌باشد. مشخصات هندسی این مقطع بدین قرار است: $I_{yy} = ۲۴۷ \times ۱۰^۶ mm^۴$ و $I_{zz} = ۴۶۸ \times ۱۰^۶ mm^۴$ و $A = ۴۶۰۰۰ mm^۲$ مطلوب است تعیین فاصلهٔ r در امتداد قطر، به نحوی که اگر یک نیروی محوری P بر آن وارد شود، نقطهٔ A در روی خط تنشهای صفر قرار گیرد. از وزن عضو صرف‌نظر نمایید.

$$\sigma_A = ۰ = \frac{-P}{A} - \frac{M_{zz} \times ۱۵۰}{I_{zz}} + \frac{M_{yy} \times ۱۱۲/۵}{I_{yy}}$$

$$y = \frac{۳۰۰}{۲۲۵} z = ۱/۳۳ z \qquad M_{zz} = Py = ۱/۳۳ Pz$$

$$M_{yy} = Pz$$

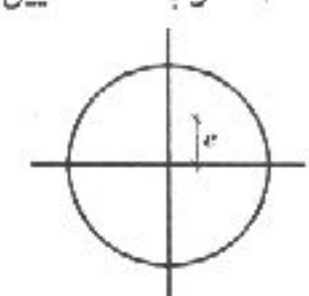
$$\sigma_A = \frac{-P}{۴۶۰۰۰} - \frac{(۱/۳۳ Pz)(۱۵۰)}{۴۶۸ \times ۱۰^۶} + \frac{(Pz)(۱۱۲/۵)}{۲۴۷ \times ۱۰^۶} = ۰ \Rightarrow z = ۷۴۵ mm$$

$$y = ۱/۳۳ z = ۹۹۱ mm$$

$$r = \sqrt{z^۲ + y^۲} = ۱۲۴۰ mm$$

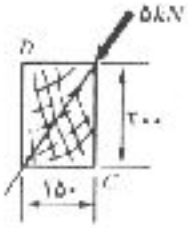
۸-۳۹. مطلوب است تعیین هستهٔ مرکزی مقطعی به شکل دایره.

$$\sigma_B = ۰ \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P}{\pi r^۲} + \frac{(Pe)r}{\frac{\pi r^۴}{۴}} = ۰ \rightarrow e = \frac{r}{۴}$$



پس هستهٔ مرکزی دایره‌ای به شعاع $\frac{r}{۴}$ می‌باشد.

www.Mohandesyar.com

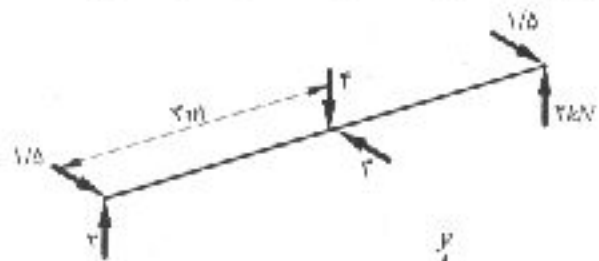


مسأله ۸-۴۰

۸-۴۰. مطابق شکل، یک تیر به دهانهٔ ۶ متر و مقطع ۲۰۰ × ۱۵۰ میلی‌متر، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایلی به مقدار ۵ کیلونیوتن بارگذاری شده است. با صرف‌نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین تنش حداکثر خمشی و محل محور خنثی. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}}$$

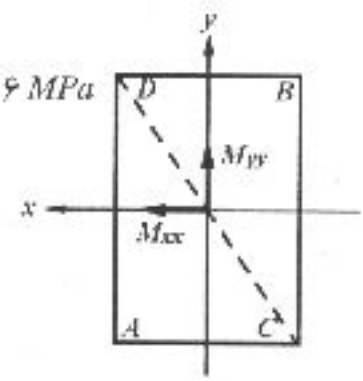
نیروی $۵kN$ با توجه به هندسه شکل به دو نیروی $۴kN$ و $۳kN$ در جهت محورها تجزیه می‌شود و با توجه به این که نیرو در وسط دهانه تیر وارد می‌شود، نیروهای تکیه‌گاهی در هر طرف، نصف این نیروها یعنی $۲kN$ و $۱/۵kN$ خواهد بود.



$$M_{xx} = ۲ \times ۳ = ۶\,kN.m$$

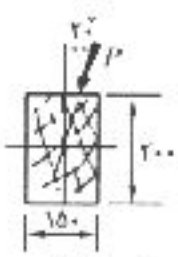
$$M_{yy} = ۱/۵ \times ۳ = ۴/۵\,kN.m$$

$$\sigma = \pm \frac{۶۰۰۰}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۵)(۰/۲)^۲} \pm \frac{۴۵۰۰}{\frac{۱}{۶}(۰/۲)(۰/۱۵)^۲} = \pm ۶\,MPa \pm ۶\,MPa$$



$$\sigma_A = ۶ + ۶ = ۱۲\,MPa \qquad \sigma_B = -۶ - ۶ = -۱۲\,MPa$$

$$\sigma_C = ۶ - ۶ = ۰ \qquad \sigma_D = -۶ + ۶ = ۰$$



مسأله ۸-۴۱

۸-۴۱. مطابق شکل، تیری به دهانه ۶ متر و به مقطع ۲۰۰ × ۱۵۰، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایل P بارگذاری شده است. اگر حداکثر تنش خمشی مساوی ۸/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، با صرف‌نظر کردن از وزن تیر، مقدار نیرویی P چقدر است. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.

$$R = \frac{P}{۲} \text{ و } M = \frac{P}{۲}x \Rightarrow M_{max} = \frac{P}{۲} \cdot \frac{L}{۲} = \frac{PL}{۴} = ۱/۵P\ N.m$$

$$M_{xx} = M\cos ۲۰^\circ \quad \text{و} \quad M_{yy} = M\sin ۲۰^\circ$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{۱/۵P\cos ۲۰^\circ}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۵)(۰/۲)^۲} + \frac{۱/۵P\sin ۲۰^\circ}{\frac{۱}{۶}(۰/۲)(۰/۱۵)^۲}$$

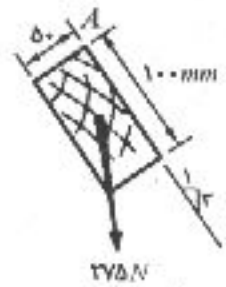
$$\sigma_{max} = ۸/۵ \times ۱۰^۶\ N/m^۲$$

با مساوی قرار دادن σ_{max} در روابط فوق داریم:

$$P = ۴۰۶۰\,N$$

www.Mohandesyar.com

۸-۴۲. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲ متر و مقطع مربع مستطیل مایل به ابعاد ۱۰۰ × ۵۰ میلی‌متر مفروض می‌باشد. در انتهای آزاد این تیر، نیروی قائمی مساوی ۲۷۵ نیوتن بر مرکز هندسی مقطع تیر وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین تنشهای حداکثر خمشی و محور خنثی در مقطعی در انتهای گیردار تیر. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.



مسأله ۸-۴۲

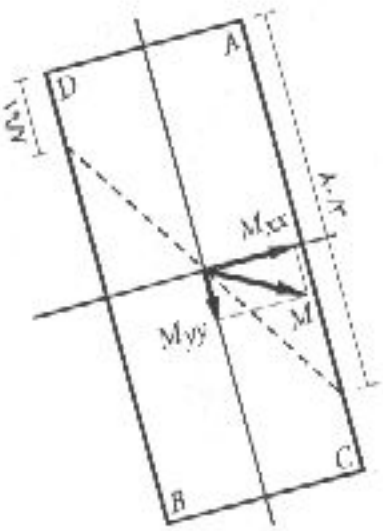
$$M = PL = ۲۷۵ \times ۲ = ۵۵۰\, N.m$$

$$M_{xx} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \times ۵۵۰ = ۵۲۱/۸\, N.m$$

$$M_{yy} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \times ۵۵۰ = ۱۵۸\, N.m$$

$$S_{xx} = \frac{۱}{۶}(۰/۰۵)(۰/۱)^۲ = ۸/۳۳ \times ۱۰^{-۵}\, m^۳$$

$$S_{yy} = \frac{۱}{۶}(۰/۱)(۰/۰۵)^۲ = ۴/۱۷ \times ۱۰^{-۵}\, m^۳$$



$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \pm \frac{۵۲۱/۸}{۸/۳۳ \times ۱۰^{-۵}} \pm \frac{۱۵۸}{۴/۱۷ \times ۱۰^{-۵}}$$

$$= \pm ۶/۲۶ \pm ۳/۷۹\, MPa$$

$$\sigma_A = ۶/۲۵ + ۳/۷۹ = ۱۰/۰۴\, MPa$$

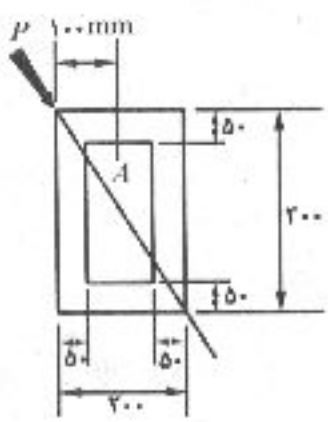
$$\sigma_B = -۶/۲۵ - ۳/۷۹ = -۱۰/۰۴\, MPa$$

$$\sigma_c = -۶/۲۵ + ۳/۷۹ = -۲/۴۶\, MPa$$

$$\sigma_D = ۶/۲۵ - ۳/۷۹ = ۲/۴۶\, MPa$$

$$d_L = \frac{۱۰/۰۴}{۱۰/۰۴ + ۲/۴۶} \times ۱۰۰ = ۸۰/۳\, mm \qquad d_R = \frac{۲/۴۶}{۱۰/۰۴ + ۲/۴۶} \times ۱۰۰ = ۱۹/۷\, mm$$

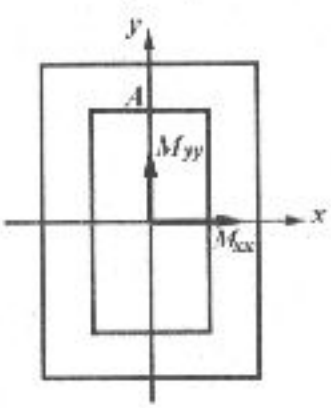
۸-۴۳. مطابق شکل، نیروی مایل P بر یک تیره طره‌ای عمل می‌کند. در مقطع مورد نظر، لنگر خمشی داخلی کل در صفحه نیرو مساوی $۱۰\, kN.m$ می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش خمشی در نقطهٔ A.



مسأله ۸-۴۳

$$I_{xx} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۲)^۳ = ۳/۸۳ \times ۱۰^{-۴}\, m^۴$$

$$M_{xx} = \frac{۰/۳}{\sqrt{۰/۳^۲ + ۰/۲^۲}} \times ۱۰۰۰۰ = ۸۳۲۰/۵\, N.m$$

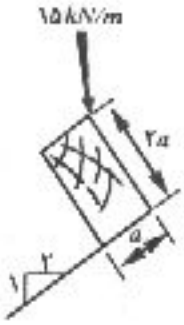


www.Mohandesyar.com

با توجه به مکان نقطه A مؤلفه M_{yy} از ممان خمشی روی نقطه A تنشی ایجاد نمی‌کند.

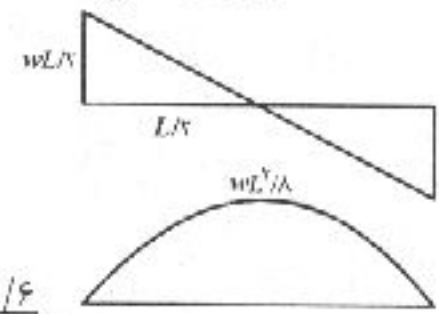
$$\sigma_A = \frac{M_{xx}c}{I_{xx}} = \frac{۸۳۲۰/۵ \times (۰/۱)}{۳/۸۳ \times ۱۰^{-۲}} = ۲/۱۵ MPa$$

۸-۴۴. تیر ساده‌ای به دهانهٔ ۴ متر و مقطع مربع مستطیل که نسبت اضلاع آن مساوی ۲ می‌باشد، بار گستردهٔ یکنواختی را در وضعیت نشان داده شده در شکل حمل می‌نماید. این بار گسترده وزن تیر را نیز شامل می‌شود. (الف) ابعاد تیر را به نحوی تعیین نمایید که حداکثر تنش از ۱۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. (ب) محل محور خنثای تیر را تعیین نمایید و آن را روی شکل نشان دهید.



مسأله ۸-۴۴

(الف)



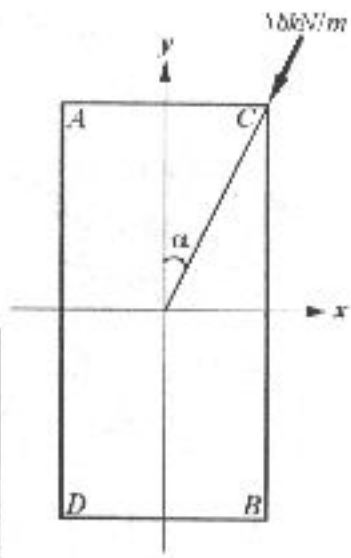
$$M_{max} = \frac{۱}{۲}\frac{wL}{۲} \times \frac{L}{۲} = \frac{wL^۲}{۸} = \frac{۱۵ \times ۴^۲}{۸} = ۳۰\ kN.m$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{۲} \rightarrow \alpha = ۲۶/۶^\circ$$

$$\sigma_D = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \cos ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}(a)(۲a)^۲} + \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \sin ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}(۲a)(a)^۲}$$

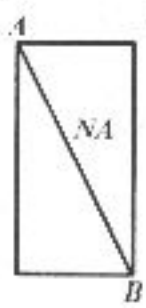
$$= \frac{۸۰۵۰۰}{a^۳} = ۱۰ \times ۱۰^۶\ (N/m^۲) \rightarrow a = ۰/۲\ m = ۲۰۰\ mm$$

(ب)



$$\sigma_A = \frac{-۳۰ \times ۱۰^۳ \cos ۲۶/۶\ (N.mm)}{\frac{۱}{۶}(۲۰۰)(۴۰۰)^۲} + \frac{۳۰ \times ۱۰^۶ \sin ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}(۴۰۰)(۲۰۰)^۲}$$

$$= -۵/۰۳ + ۵/۰۳ = ۰$$



$$\sigma_B = ۵/۰۳ - ۵/۰۳ = ۰$$

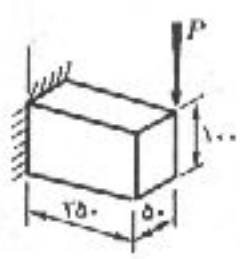
$$\sigma_C = -۵/۰۳ - ۵/۰۳ = -۱۰/۰۶\ MPa$$

$$\sigma_D = ۵/۰۳ + ۵/۰۳ = ۱۰/۰۶\ MPa$$

۸-۴۵. یک تیره طره‌ای به دهانهٔ ۲۵۰ میلی‌متر، مطابق شکل بار P را در انتهای آزاد خود حمل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در انتهای گیردار تیر در اثر برش مستقیم و لنگر پیچشی، نتایج را در روی طرحی مشابه شکل ۸-۱۵-ث نشان دهید. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.

$$P = ۵۰\ kN \qquad M = ۵۰ \times ۰/۲۵ = ۱/۲۵\ kN.m$$

$$\tau_{max۱} = \frac{T}{\alpha bc^۲} = \frac{۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}\ MN.m}{(۰/۲۴۶)(۰/۱)(۰/۰۵)^۲} = ۲۰/۳\ MPa$$



مسأله ۸-۴۵

www.Mohandesyar.com

$$\tau_{max_{۲}} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۵۰ \times ۱۰^{-۳}}{(۰/۱ \times ۰/۰۵)} = ۱۵\ MPa$$

$$\tau_{max} = ۲۰/۳ + ۱۵ = ۳۵/۳ MPa$$

۸-۴۶. یک فنر مارپیچ فشاری از مفتول برنز فسفری به قطر ۳ میلی‌متر ساخته شده و قطر خارجی آن ۳۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر تنش برشی مجاز ۲۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، چه نیرویی می‌تواند بر این فنر وارد گردد؟ جواب را برای تمرکز تنش تصحیح کنید.

$$m = \frac{۲\bar{r}}{d} = \frac{۲\left[\frac{۱}{۲}(۳۰) - \frac{۱}{۲}(۳)\right]}{۳} = ۹ \longrightarrow K = ۱/۱۶$$

$$F = \frac{\tau_{max}\,\pi d^{۲}}{۱۶\,K\bar{r}} = \frac{۲۰۰ \times \pi(۳)^{۳}}{۱۶ \times ۱/۱۶ \times ۱۳/۳} = ۶۸/۷N$$

۸-۴۷. فنر مارپیچ شیری به قطر خارجی ۴۸ میلی‌متر، از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر ساخته شده است. نیروی فشاری که در حین عمل به این فنر وارد می‌شود، بین حداقل ۹۰ نیوتن و حداکثر ۳۰۰ نیوتن قرار دارد. اگر ۸ مارپیچ فعال در این فنر وجود داشته باشد، میزان بازشدگی شیر و حداکثر تنش برشی فنر را در حین عمل به دست آورید. ضریب ارتجاعی برشی را $۰/۸ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌متر فرض نمایید.

$$\bar{r} = \frac{۴۸ - ۶}{۲} = ۲۱$$

$$m = \frac{۲\bar{r}}{d} = \frac{۲ \times ۲۱}{۶} = ۷ \longrightarrow K = ۱/۲$$

$$\Delta = \frac{۶۴ F \bar{r}^{۳} N}{G d^{۴}} = \frac{۶۴ \times (۳۰۰ - ۹۰) \times (۲۱)^{۳} \times ۸}{(۰/۸۲ \times ۱۰^{۵})(۶)^{۴}} = ۹/۳۷ mm$$

$$\tau_{max} = K\frac{۱۶ F \bar{r}}{\pi d^{۳}} = ۱/۲ \times \frac{۱۶ \times ۳۰۰ \times ۲۱}{\pi (۶)^{۳}} = ۱۷۸/۲۵ MPa$$

۸-۴۸. یک فنر مارپیچی از پیچاندن مفتول فولادی به قطر ۱۲ میلی‌متر در حول میله‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر ساخته شده است. اگر ۱۰ مارپیچ فعال وجود داشته باشد، ثابت فنر چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی برشی را $۰/۸۲ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. چه نیرویی لازم است بر فنر وارد گردد تا طول آن ۴۰ میلی‌متر کاهش پیدا کند.

$$\Delta = ۱ \quad و \quad K = F$$

$$k = \frac{G d^{۴}}{۶۴ \bar{r}^{۳} N} = \frac{۰/۸۲ \times ۱۰^{۵} \times ۱۲^{۴}}{۶۴ (۶۶)^{۳} (۱۰)} = ۹/۲۴\ N/mm \quad (kN/m)$$

$$F = k\Delta = ۹/۲۴ \times ۴۰ = ۳۶۹/۶ N$$

www.Mohandesyar.com

۸-۴۹. اگر یک فنر مارپیچ کششی، ساخته شده از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر که دارای ۱۲ مارپیچ فعال به قطر خارجی ۳۰ میلی‌متر باشد، به انتهای فنر مارپیچ کششی دیگری وصل شود که از مفتول فولادی به قطر ۸ میلی‌متر ساخته شده و دارای ۱۸ مارپیچ فعال به قطر خارجی ۴۰ میلی‌متر می‌باشد، ثابت این مجموعه فنر چقدر خواهد بود؟ حداکثر نیرویی که می‌توان بر فنر وارد آورد بدون اینکه تنش برشی از ۴۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند، چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۲ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$\Delta = \frac{F}{k} = \frac{F}{k_۱} + \frac{F}{k_۲} \Rightarrow \frac{۱}{k} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲}$$

$$k = \frac{Gd^۴}{۶۴\bar{r}^۳ N}$$

$$\frac{۱}{k} = \frac{۶۴}{G}\left[\frac{\bar{r}_۱^۳ N_۱}{d_۱^۴} + \frac{\bar{r}_۲^۳ N_۲}{d_۲^۴}\right] = \frac{۶۴}{۰/۸۲ \times ۱۰^۵}\left[\frac{۱۲^۳ \times ۲}{۶^۴} + \frac{۱۶^۳ \times ۱۸}{۸^۴}\right]$$

$$\Rightarrow k = ۳۷/۶۸ N/mm$$

$$m_۱ = \frac{۲\bar{r}_۱}{d_۱} = \frac{۲ \times ۱۲}{۶} = ۴ \longrightarrow K = ۱/۳۷$$

$$m_۲ = \frac{۲\bar{r}_۲}{d_۲} = \frac{۲ \times ۱۶}{۸} = ۴ \longrightarrow K = ۱/۳۷$$

$$F_۱ = \frac{\tau_{max}\pi d_۱^۳}{۱۶ K \bar{r}_۱} = \frac{۴۸۰ \times \pi \times ۶^۳}{۱۶ \times ۱/۳۷ \times ۱۲} = ۱۲۳۸ N$$

$$F_۲ = \frac{۴۸۰ \times \pi \times ۸^۳}{۱۶ \times ۱/۳۷ \times ۱۶} = ۲۲۰۱ N$$