www.Mohandesyar.com

مسائل فصل چهارم

۴ـ۱. یک نمونهٔ آزمایشی استاندارد فولادی به قطر ۱۳ میلی‌متر، به اندازهٔ ۰/۲۲ میلی‌متر در طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، تحت اثر نیروی کششی ۲۹/۵ کیلو نیوتن، افزایش طول پیدا کرده است. در صورتی که در طی آزمایش، نمونه فولادی از حد ارتجاعی خارج نشده باشد، مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی فولاد.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\delta} \Rightarrow E = \frac{(۲۹/۵ \times ۱۰^{۳}) \times ۲۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۱۳)^{۲} \times ۰/۲۲} \Rightarrow \boxed{E = ۲/۰۲ \times ۱۰^{۵}\, MPa}$$

۴ـ۲. یک میلهٔ فولادی به طول ۱۰ متر در یک مکانیسم کنترل به کار رفته است. نیروی کششی وارد بر میله در مکانیسم مورد نظر، ۵ کیلو نیوتن می‌باشد. در صورتی که حداکثر تغییر شکل مجاز میله ۳ میلی‌متر و تنش مجاز آن ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین حداقل قطر لازم برای میله. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

سطح لازم از نظر تنش مجاز:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{۵ \times ۱۰^{۳}}{۱۵۰} = ۳۳/۳۳\, mm^{۲}$$

سطح لازم از نظر تغییر شکل مجاز:

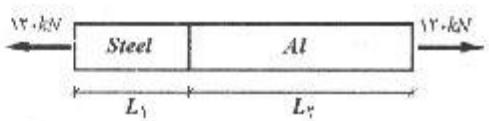
$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{۵ \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{۲}}{۳ \times ۲ \times ۱۰^{۵}} = ۸۳/۳۳\, mm^{۲}$$

از بین مقادیر بدست آمده برای سطح، مقدار بزرگتر را انتخاب می‌کنیم تا هم جوابگوی تنش مجاز باشد و هم تغییر شکل مجاز.

$$A = ۸۳/۳۳\, mm^{۲} \Rightarrow \frac{\pi d^{۲}}{۴} = ۸۳/۳۳ \Rightarrow d = ۱۰/۳\, mm$$

در عمل از میله‌ای با قطر $۱۱mm$ استفاده می‌کنیم.

۴ـ۳. یک استوانهٔ توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی کششی ۱۲۰ کیلونیوتن قرار دارد. قسمتی از این استوانه به طول $L_۱$ از جنس فولاد و قسمت دیگر که کاملاً به قسمت فولادی چسبیده است، از جنس آلمینیوم و به طول $L_۲$ می‌باشد. (الف) مطلوب است تعیین طولهای $L_۱$ و $L_۲$ به طوری که افزایش طول دو مصالح به یک اندازه باشد. (ب) اضافه طول کل استوانه چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلمینیوم $۰/۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



الف) $\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow L_۱ = ?$ و $L_۲ = ?$

$$\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow \frac{PL_۱}{AE_{steel}} = \frac{PL_۲}{AE_{Al}}$$

$$E_{steel} \cdot L_۲ = E_{Al} \cdot L_۱ \Rightarrow L_۱ = \frac{E_{steel}}{E_{Al}} \cdot L_۲ \Rightarrow L_۱ = ۲/۸۶\, L_۲$$

www.Mohandesyar.com

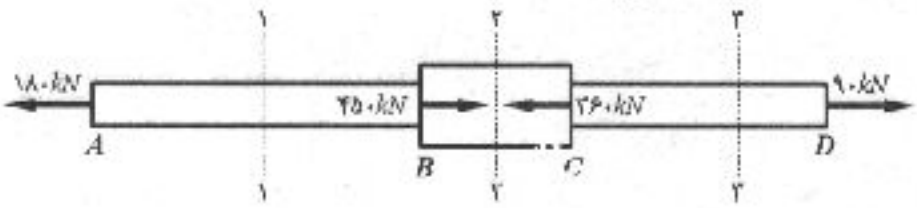
$$\begin{cases} L_۱ = ۲/۸۶\, L_۲ \\ L_۱ + L_۲ = ۹۰۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L_۱ = ۶۶۷\, mm \\ L_۲ = ۲۳۳\, mm \end{array}}$$

ب) $\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \Rightarrow \delta = ۱۲۰ \times ۱۰^۳ \times \left(\frac{۶۶۷}{\frac{\pi}{۴}(۵۰)^۲ \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۲۳۳}{\frac{\pi}{۴}(۵۰)^۲ \times ۰/۷ \times ۱۰^۵} \right)$

$\Rightarrow \boxed{\delta = ۰/۴۱\, mm}$

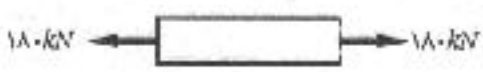
۴-۴. مثال ۴-۱ را با داده‌های جدید زیر مجدداً حل نمایید:

$P_۱ = ۱۸۰$ کیلونیوتن، $P_۲ = ۴۵۰$ کیلونیوتن، $P_۳ = ۳۶۰$ کیلونیوتن، $P_۴ = ۹۰$ کیلونیوتن، سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۰/۰۰۱۵ مترمربع و از B تا C مساوی ۰/۰۰۳ مترمربع و از C تا D مساوی ۰/۰۰۱۵ مترمربع می‌باشد.



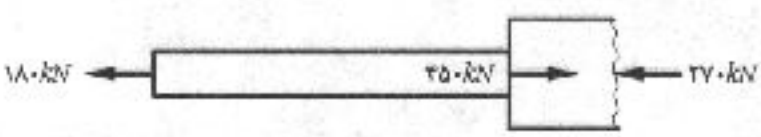
مقطع ۱-۱

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + P_۱ = ۰ \Rightarrow P_۱ = ۱۸۰\, kN$



$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{A_{AB} E} = \frac{(۱۸۰ \times ۱۰^۳) \times (۲ \times ۱۰^{-۳})}{(۰/۰۰۱۵ \times ۱۰^{-۶}) \times (۲ \times ۱۰^۵)} = +۱/۲\, mm$$

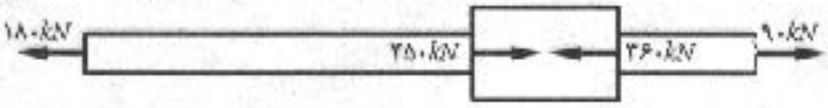
مقطع ۲-۲



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + ۴۵۰ + P_۲ = ۰ \Rightarrow P_۲ = -۲۷۰\, kN$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} = \frac{(-۲۷۰ \times ۱۰^۳) \times (۱ \times ۱۰^۳)}{(۰/۰۰۳ \times ۱۰^{-۶}) \times (۲ \times ۱۰^۵)} \Rightarrow \delta_{BC} = -۰/۴۵\, mm$$

مقطع ۳-۳



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + ۴۵۰ - ۳۶۰ + P_۳ = ۰ \Rightarrow P_۳ = ۹۰\, kN$

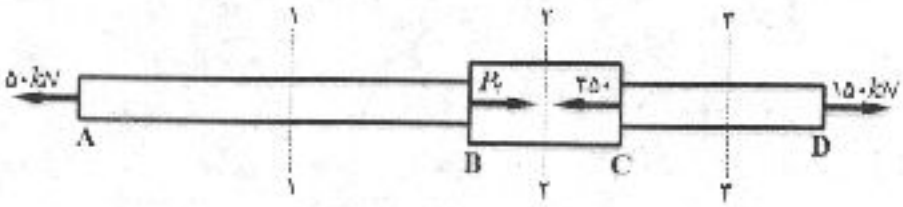
$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} = \frac{(۹۰ \times ۱۰^۳) \times (۱/۵ \times ۱۰^۳)}{(۰/۰۰۱۵ \times ۱۰^{-۶}) \times (۲ \times ۱۰^۵)} \Rightarrow \delta_{CD} = +۰/۴۵\, mm$$

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = ۱/۲ - ۰/۴۵ + ۰/۴۵ \Rightarrow \boxed{\delta = ۱/۲\, mm}$$

www.Mohandesyar.com

۴-۵. با تعویض داده‌های مثال ۴-۱ به‌صورت زیر:

$P_1 = ۵۰$ کیلونیوتن، $P_2 = ۴۵۰$ کیلونیوتن، $P_3 = ۱۵۰$ کیلونیوتن، مطلوب است تعیین، (الف) نیروی P که برای تعادل میله لازم است. (ب) تغییر طول کلی میلهٔ AD. سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۵۰۰ میلی‌مترمربع، از B تا C مساوی ۲۰۰۰ میلی‌مترمربع و از C تا D مساوی ۱۰۰۰ میلی‌مترمربع می‌باشد.



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۵۰ - ۴۵۰ + ۱۵۰ + P = ۰ \Rightarrow P = ۳۵۰\ kN$$

مقطع ۱-۱: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۵۰ + P_1 = ۰ \Rightarrow P_1 = ۵۰\ kN$

مقطع ۲-۲: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۵۰ + ۳۵۰ + P_2 = ۰ \Rightarrow P_2 = -۳۰۰\ kN$

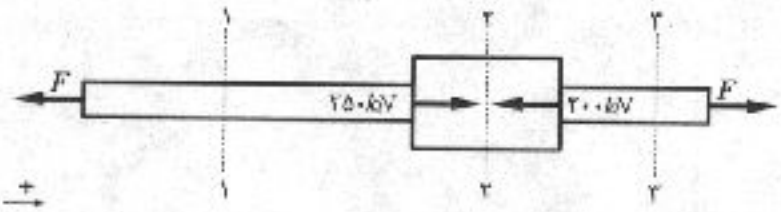
مقطع ۳-۳: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۵۰ + ۳۵۰ - ۴۵۰ + P_3 = ۰ \Rightarrow P_3 = ۱۵۰\ kN$

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$\delta = \frac{(۵۰ \times ۱۰^۳) \times (۲ \times ۱۰^۲)}{۵۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{(-۳۰۰ \times ۱۰^۳) \times (۱ \times ۱۰^۲)}{۲۰۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{(۱۵۰ \times ۱۰^۳) \times (۱/۵ \times ۱۰^۲)}{۱۰۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = ۱/۳۷۵\ mm}$$

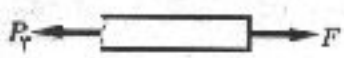
۴-۶. در مثال ۴-۱ مقدار دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را که بر دو انتهای میله تأثیر می‌کنند، طوری تعیین نمایید که تغییر شکل کل میله مساوی صفر گردد.



مقطع ۱-۱: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -F + P_1 = ۰ \Rightarrow P_1 = F$

مقطع ۲-۲: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -F + P_2 + ۲۵۰ = ۰ \Rightarrow P_2 = F - ۲۵۰$

مقطع ۳-۳: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -P_3 + F = ۰ \Rightarrow P_3 = F$



www.Mohandesyar.com

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$۰ = \frac{F \times ۲}{۰/۰۰۱ \times ۲ \times ۱۰^{۱۱}} + \frac{(F - ۲۵۰) \times ۱}{۰/۰۰۲ \times ۲ \times ۱۰^{۱۱}} + \frac{F \times ۱/۵}{۰/۰۰۱ \times ۲ \times ۱۰^{۱۱}}$$

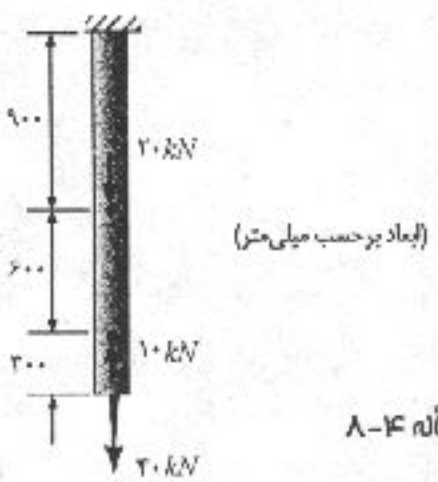
از حل معادله فوق مقدار F بدست می‌آید:

$$\boxed{F = ۳۱/۲۵ kN}$$

۴-۷. یک تسمه به مقطع ۵ × ۷۵ میلی‌متر که به طور قائم آویزان است، از دو قسمت، یکی آلمینیوم به طول ۲ متر و دیگری فولادی به طول ۲/۵ متر تشکیل شده است. این دو قسمت کاملاً به یکدیگر بسته شده‌اند. در انتهای پایین این تسمه، وزنه‌ای به وزن ۲۵ کیلونیوتن آویزان است. با صرفنظر کردن از وزن تسمه، تغییر شکل انتهای تحتانی آن را محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد، ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلمینیوم $۰/۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

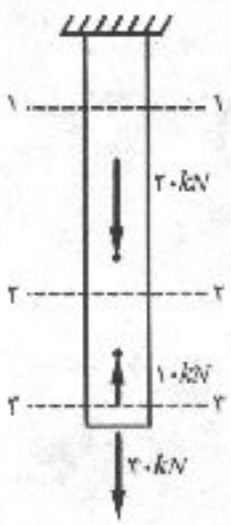
$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(۲۵ \times ۱۰^{۳}) \times ۲۰۰۰}{(۷۵ \times ۵) \times (۰/۷ \times ۱۰^{۵})} + \frac{(۲۵ \times ۱۰^{۳}) \times ۲۵۰۰}{(۷۵ \times ۵) \times (۲ \times ۱۰^{۵})} \Rightarrow \boxed{\delta = ۲/۷۴ mm}$$

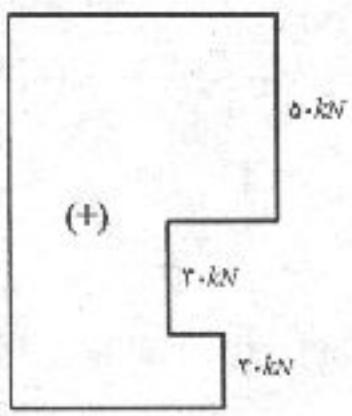
۴-۸. مطابق شکل یک میلگرد فولادی به سطح مقطع ۳۰۰ میلی‌مترمربع که از انتهای فوقانیش آویزان است، تحت تأثیر سه نیروی محوری قرار دارد. مطلوب است تعیین تغییر شکل انتهای آزاد این میله که در اثر این سه نیرو ایجاد می‌شود.



مسأله ۴-۸

$A = ۳۰۰ mm^{۲}$ $\qquad$ $E = ۲ \times ۱۰^{۵} N/mm^{۲}$





www.Mohandesyar.com

مقطع ۱-۱ : $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : F_1 - 20 + 10 - 40 = 0 \Rightarrow F_1 = +50\,kN$

مقطع ۲-۲ : $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : F_2 + 10 - 40 = 0 \Rightarrow F_2 = 30\,kN$

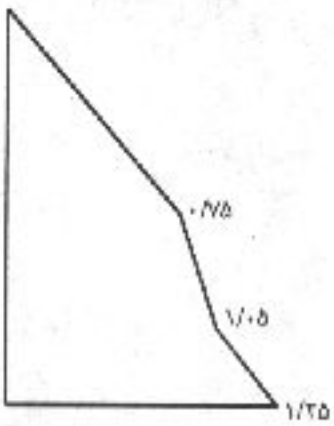
مقطع ۳-۳ : $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : F_3 - 40 = 0 \Rightarrow F_3 = 40\,kN$

$$\delta_1 = \frac{F_1 L}{AE} = \frac{50 \times 10^3 \times 900}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_1 = 0/75\,mm$$

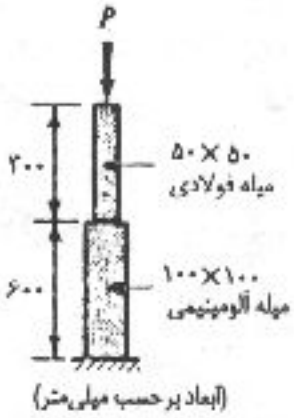
$$\delta_2 = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{30 \times 10^3 \times 600}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_2 = 0/3\,mm$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 L}{AE} = \frac{40 \times 10^3 \times 300}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_3 = 0/2\,mm$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0/75 + 0/3 + 0/2 \Rightarrow \boxed{\delta = 1/25\,mm}$$



۹-۴. یک میلهٔ فولادی و یک میلهٔ آلمینیومی با ابعاد نشان داده شده در شکل مفروض می‌باشند. مطلوب است محاسبهٔ بار P به‌طوری که باعث کاهش طول کل دو میله به اندازهٔ ۰/۲۵ میلی‌متر شود. فرض کنید توزیع تنش قائم روی تمام مقاطع عرضی دو میله یکنواخت می‌باشد و از کمانش دو میله جلوگیری شده است. ترسیمهٔ تغییر شکل محوری را رسم نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 و ضریب ارتجاعی آلمینیوم را $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید.



مسأله ۹-۴

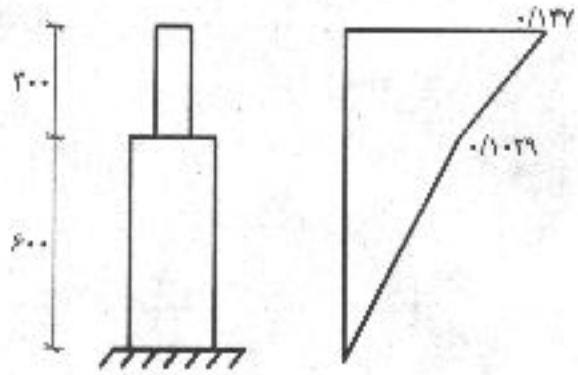
$\delta = 0/25\,mm \qquad E_{steel} = 2 \times 10^5\,N/mm^2 \quad E_{Al} = 0/7 \times 10^5\,N/mm^2$

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

$$0/25 = \frac{P \times 300}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} + \frac{P \times 600}{(100 \times 100) \times (0/7 \times 10^5)} \Rightarrow P = 171/57\,kN$$

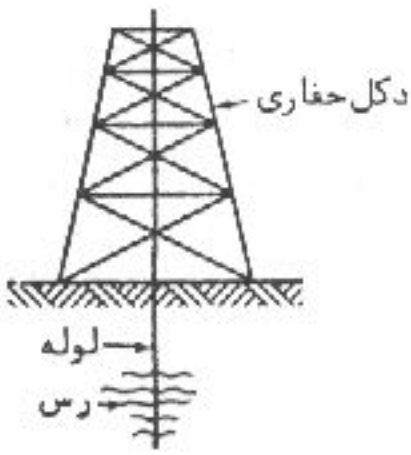
$$\delta_1 = \frac{(171/57 \times 10^3) \times 300}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} = 0/1029\,mm$$

$$\delta_2 = \frac{(171/57 \times 10^3) \times 600}{(100 \times 100) \times (0/7 \times 10^5)} = 0/147\,mm$$



www.Mohandesyar.com

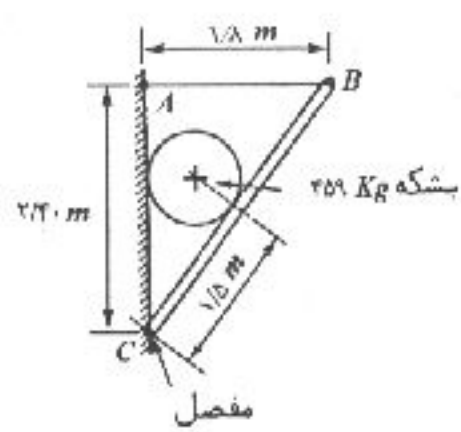
۴-۱۰. در یکی از میدانهای نفتی جنوب کشور، لولهٔ بسیار بلند متهٔ حفاری در داخل رس سخت گیر کرده است (به شکل مسأله مراجعه کنید). لازم است تعیین گردد که این مسأله در چه عمقی اتفاق افتاده است. مهندس مسئول دستور می‌دهد که به این لوله نیروی کششی به طرف بالایی وارد گردد. در نتیجه این عمل لوله به صورت ارتجاعی، ۶۰۰ میلی‌متر بالا می‌آید. در همان لحظه افزایش طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، مساوی ۰/۰۳۵ میلی‌متر اندازه‌گیری می‌شود. محل گیر کردن لوله را به طور تقریبی تعیین نمایید. فرض کنید که سطح مقطع لوله ثابت است و محیطی که اطراف لوله را احاطه کرده است، اثر ناچیزی در تغییر شکل ارتجاعی لوله دارد.



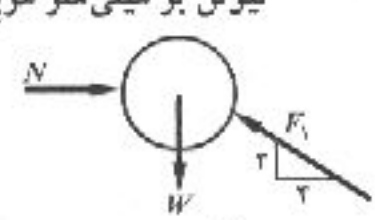
مسأله ۴-۱۰

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{۰/۰۳۵}{۲۰۰} = \frac{۶۰۰}{L} \Rightarrow \boxed{L = ۳۴۲۸/۵۷\,m}$$

۴-۱۱. یک لچکی (طاقچه) دیواری مطابق شکل ساخته شده است. تمام اتصالات این لچکی مفصلی می‌باشند. سطح مقطع میلهٔ فولادی AB مساوی ۵ میلی‌مترمربع و عضو BC تیر صلبی می‌باشند. (منظور از صلب بودن تیر BC این است که تغییر شکل آن بسیار کوچک است به طوری که می‌توان از آن چشم‌پوشی نمود). اگر یک بشکه به قطر ۱ متر و به جرم ۴۵۹ کیلوگرم در وضعیت نشان داده شده قرار گیرد، افزایش طول میلهٔ AB را محاسبه نمایید. از اصطکاک جدار بشکه صرفنظر نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

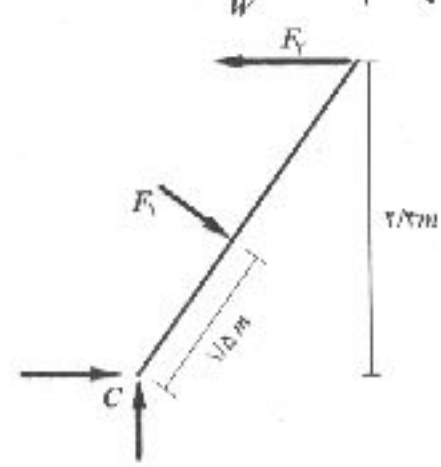


مسأله ۴-۱۱



$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : F_۱ \times \frac{۳}{۵} = W \Rightarrow F_۱ = \frac{۵}{۳} \times ۴۵۹ \times ۹/۸۱$$

$$\Rightarrow F_۱ = ۷۵۰۴/۶۵\,N$$

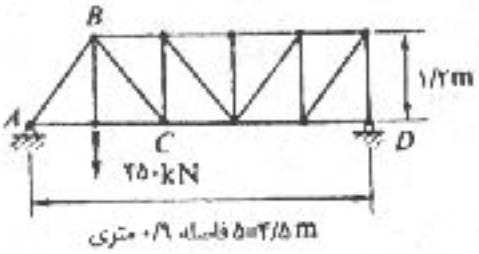


$$\sum M_c = ۰ \circlearrowleft + : F_۱ \times ۲/۴ - F_۲ \times ۱/۵ = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۴/۶۹\,kN$$

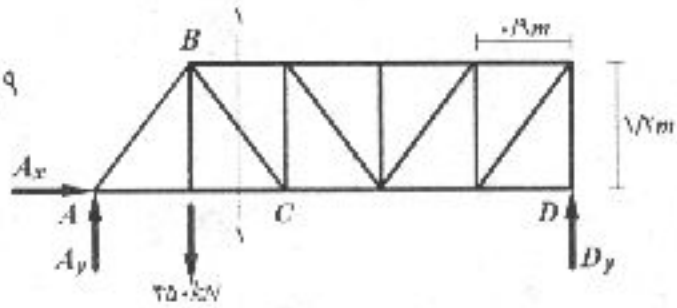
$$\delta = \frac{F_۲ L}{AE} = \frac{۴/۶۹ \times ۱۰^۳ \times ۱/۸ \times ۱۰^۳}{۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\delta = ۸/۴۴\,mm}$$

www.Mohandesyar.com

۴-۱۲. برای خرپای نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین افزایش طول میلهٔ BC تحت تأثیر نیروی $P = ۴۵۰$ کیلونیوتن. میلهٔ BC از فولاد ساخته شده و سطح مقطع آن ۶۰ میلی‌مترمربع می‌باشد. ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۴-۱۲

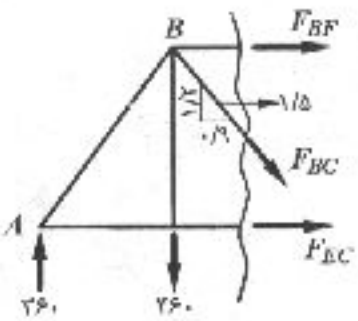


$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : D_y \times (۵ \times ۰/۹) - ۴۵۰ \times ۰/۹$$

$$\Rightarrow D_y = ۹۰\, kN$$

$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : A_y - ۴۵۰ + D_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۳۶۰\, kN$$

با استفاده از روش مقطع نیروی BC به‌راحتی محاسبه می‌شود:

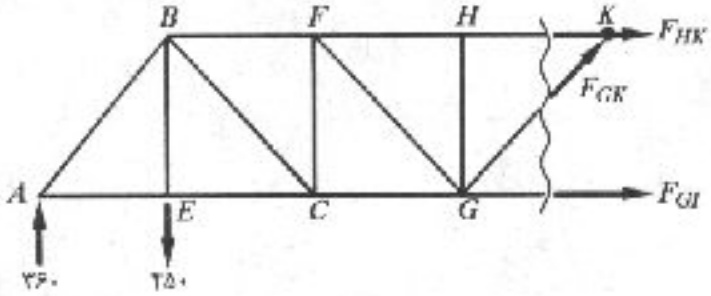


$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : -F_{BC} \times \frac{۱/۲}{\sqrt{۱/۲^۲ + ۰/۹^۲}} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰$$

$$\Rightarrow -F_{BC} = ۹۰ \times \frac{۱/۵}{۱/۲} \Rightarrow F_{BC} = -۱۱۲/۵\, kN \text{ فشاری}$$

$$\delta = \frac{P.L}{AE} = \frac{(-۱۱۲/۵ \times ۱۰^۲) \times (۱/۵ \times ۱۰^۲)}{۶۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\delta = -۱۴/۰۶\, mm}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_G = ۰ : -F_{HK} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۳ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۲ \times ۰/۹) = ۰$$

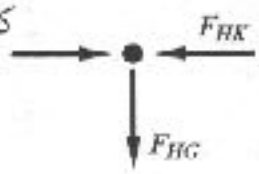


$$\Rightarrow F_{HK} = -۱۳۵\, kN \text{ فشاری}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_K = ۰ : F_{GI} \times ۱/۲ + ۴۵۰ \times (۳ \times ۰/۹) - ۳۶۰ \times (۴ \times ۰/۹) = ۰$$

$$\Rightarrow F_{GI} = ۶۷/۵\, kN \text{ کششی}$$

$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : F_{GK} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{GK} = ۱۱۲/۵ \text{ کششی}$$

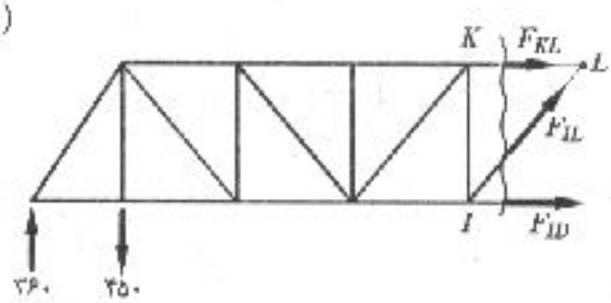


$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : F_{HG} = ۰$$

www.Mohandesyar.com

$$\circlearrowleft + \sum M_I = ۰ : \ -F_{KL} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۴ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۳ \times ۰/۹) = ۰$$

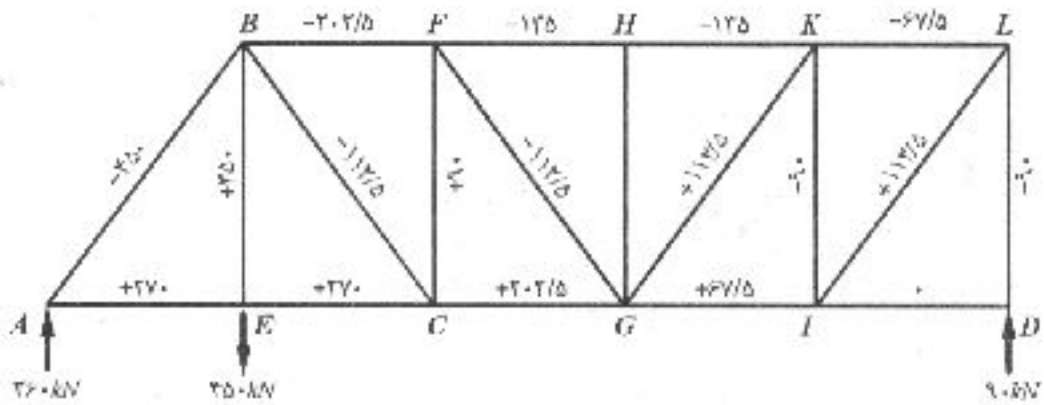
$$\Rightarrow F_{KL} = -۶۷/۵ kN \ \text{فشاری}$$



$$\circlearrowleft + \sum M_L = ۰ : \ F_{ID} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۵ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۴ \times ۰/۹) = ۰ \Rightarrow F_{ID} = ۰$$

$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : \ F_{IL} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{IL} = ۱۱۲/۵ \ \text{کششی}$$

$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : \ D_y + F_{DL} = ۰ \Rightarrow F_{DL} = -۹۰ kN \ \text{فشاری}$$



نیروهای وارده بر اعضاء در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. با توجه به مقدار نیروها و طول اعضاء و رابطه $A = \frac{PL}{\delta E}$ کاملاً مشهود است که عضو AB بیشترین سطح را لازم دارد.

$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{۴۵۰ \times ۱۰^۳ \times \cancel{L}}{(۰/۰۰۱ \times \cancel{L}) \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{A = ۲۲۵۰ \ mm}$$

۴-۱۳. اگر تغییر شکل هر یک از اعضای مسأله ۴-۱۲ به ۰/۱ درصد طولش محدود شده باشد، کدامیک از اعضا بزرگترین سطح مقطع را لازم دارد و سطح مقطع لازم چقدر می‌باشد.

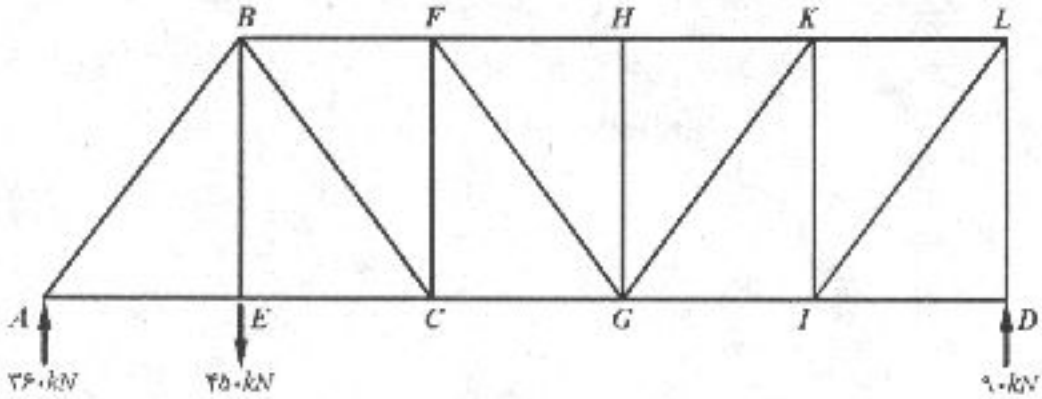
از حل مسأله قبل نیروهای تکیه‌گاهی را داریم:

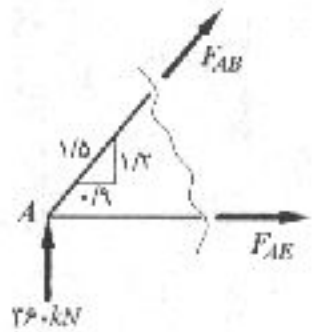
$$A_x = ۰$$

$$A_y = ۳۶۰ kN \ \text{و} \ D_y = ۹۰ kN$$

حال با استفاده از برشهایی در مقاطع مختلف سازه، نیروهای وارده بر اعضاء را محاسبه می‌کنیم. ابتدا همه نیروها را کششی فرض می‌کنیم، بدست آمدن علامت منفی در جواب نشان‌دهنده فشاری بودن نیرو می‌باشد.

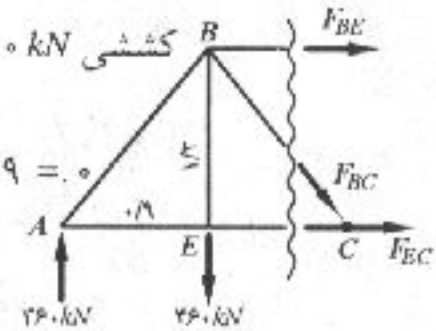
www.Mohandesyar.com





$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : F_{AB} \times \frac{1/2}{1/5} + 360 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -450\ kN$ فشاری

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 : F_{AE} - F_{AB} \times \frac{0/9}{1/5} = 0 \Rightarrow F_{AE} = 270\ kN$ کششی



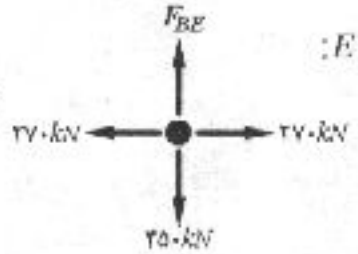
$\circlearrowleft + \sum M_B = 0 : F_{EC} \times 1/2 - 360 \times 0/9 = 0 \Rightarrow F_{EC} = 270\ kN$ کششی

$\circlearrowleft + \sum M_c = 0 : -F_{BF} \times 1/2 - 360 \times (2 \times 0/9) + 450 \times 0/9 = 0$

$\Rightarrow F_{BF} = -202/5\ kN$ فشاری

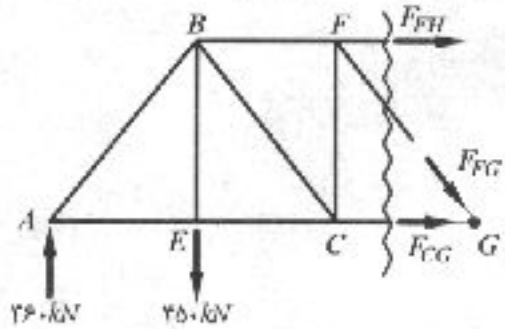
$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : -F_{BC} \times \frac{1/2}{1/5} + 360 - 450 = 0 \Rightarrow F_{BC} = -112/5$ فشاری

مفصل E:



$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : F_{BE} - 450 = 0 \Rightarrow F_{BE} = 450\ kN$ کششی

$\circlearrowleft + \sum M_F = 0 :$



$F_{CG} \times 1/2 + 450 \times 0/9 - 360 \times (2 \times 0/9) = 0$

$\Rightarrow F_{CG} = 202/5\ kN$ کششی

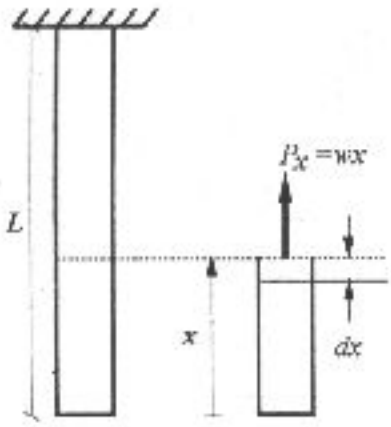
$\circlearrowleft + \sum M_G = 0 : -F_{FH} \times 1/2 - 360 \times (3 \times 0/9) + 450 \times (2 \times 0/9) = 0$

$\Rightarrow F_{FH} = -135\ kN$ فشاری

$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : -F_{FG} \times \frac{1/2}{1/5} - 450 + 360 = 0 \Rightarrow F_{FG} = -112/5$ فشاری

www.Mohandesyar.com

۴-۱۴. اگر در مثال ۴-۲ جنس میله آلمینیوم با مقطع مربع شکل به ضلع ۲۵ میلی‌متر و به وزن واحد طول ۱۷/۳ نیوتن بر متر باشد، طول میله چقدر باید باشد تا انتهای آزاد میله تحت اثر وزن خود ۶ میلی‌متر افزایش طول پیدا کند. ضریب ارتجاعی آلمینیوم $۰/۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



به‌فاصله x از پایین میله، المانی از میله را در نظر بگیرید.

نیروی وارد بر این المان، وزن آن قسمت از میله می‌باشد که زیر آن قرار دارد: $P_x = w \times x$

که در آن w وزن واحد طول میله است.

$$\delta = \int_{۰}^{L} \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_{۰}^{L} \frac{W.x.dx}{EA} = \frac{w}{EA} \int_{۰}^{L} x.dx \Rightarrow \delta = \frac{wL^{۲}}{۲EA}$$

$$۶ = \frac{(۱۷/۳ \times ۱۰^{-۳}) \times L^{۲}}{۲ \times (۰/۷ \times ۱۰^{۵}) \times (۲۵)^{۲}} \Rightarrow \boxed{L = ۱۷۴/۲\, mm}$$

۴-۱۵. در مثال ۴-۲ اگر به عوض استفاده از قانون هوک، رابطهٔ تنش - کرنش به‌صورت $\sigma = E\varepsilon^{n}$ (n عدد صحیحی است که بستگی به خواص مصالح دارد) بیان شود، تغییر مکان انتهای آزاد چقدر خواهد بود.

$$\sigma = E\varepsilon^{n} \Rightarrow \varepsilon^{n} = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\frac{۱}{n}} \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{P}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$\delta = \int_{۰}^{L} \varepsilon dx = \int_{۰}^{L} \left(\frac{wx}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} dx = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \int_{۰}^{L} x^{\frac{۱}{n}} dx$$

$$= \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) \left[x^{\frac{n+۱}{n}}\right]_{۰}^{L} = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L^{\frac{n+۱}{n}}$$

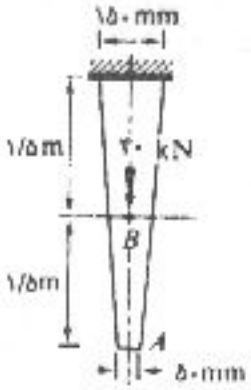
$L^{\frac{n+۱}{n}}$ را به‌صورت $L^{۱} . L^{\frac{۱}{n}}$ نوشته و $L^{\frac{۱}{n}}$ را در پرانتز اوّل وارد می‌کنیم:

$$\delta = \left(\frac{wL}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L \qquad wL = W$$

نتیجتاً:

$$\boxed{\delta = \left(\frac{W}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L}$$

www.Mohandesyar.com

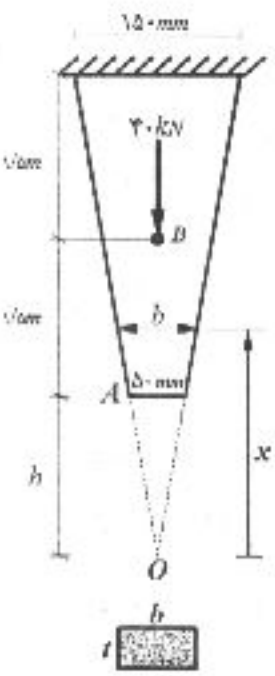


مسأله ۴-۱۶

۴-۱۶. میلهٔ ماهیچه‌ای نشان داده شده در شکل از یک ورق فولادی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده و در انتهای فوقانی به یک سازهٔ صلب جوش شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای A که در اثر تأثیر نیروی ۴۰ کیلونیوتن در نقطهٔ B به دست می‌آید: ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مرکز مختصات را در محل تقاطع دو ضلع جانبی در نظر بگیرید.

$$t = ۲۵\,mm \qquad F = ۴۰\,kN \qquad E = ۲ \times ۱۰^۵\ N/mm^۲$$

$$\frac{h}{۵۰} = \frac{h + ۳}{۱۵۰} \Rightarrow h = ۱/۵\,m = ۱۵۰۰\,mm$$



$$\frac{x}{۱۵۰۰} = \frac{b}{۵۰} \Rightarrow b = \frac{x}{۳۰}$$

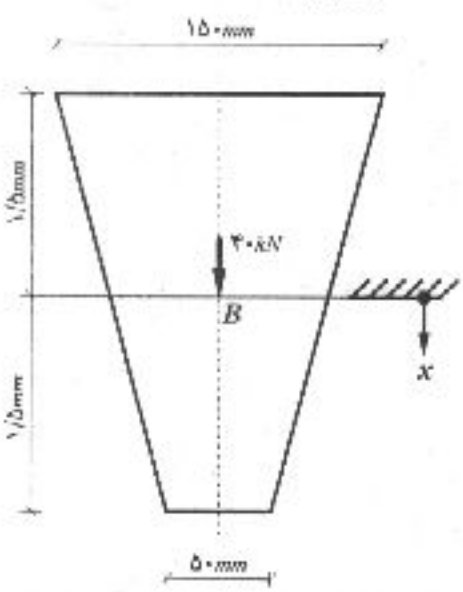
$$A = b.t = \frac{x}{۳۰} \times ۲۵$$

$$\delta = \int_{۱۵۰۰}^{۲۰۰۰} \frac{Pdx}{A_x E} + \int_{۲۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{Pdx}{A_x E}$$

امّا در انتگرال اوّل مقدار P صفر است (بین A تا B نیرو وجود ندارد) بنابراین:

$$\delta = \int_{۲۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{۴۰ \times ۱۰^۳\, dx}{\frac{x}{۳۰} \times ۲۵ \times E} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{۳۰ \times ۴۰ \times ۱۰^۳}{۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} \int_{۲۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{dx}{x} = ۰/۲۴\,\left[ln x\right]_{۲۰۰۰}^{۴۵۰۰} = ۰/۲۴ \times \left(ln \frac{۴۵۰۰}{۲۰۰۰}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = ۰/۰۹۷۳\,mm}$$



۴-۱۷. مسأله ۴-۱۶ را با در نظر گرفتن مرکز مختصات در نقطهٔ B مجدداً حل نمایید.

$$ds = \frac{Pdx}{A_x E}$$

$$\delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۱۵۰۰} d\delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۰} d\delta + \int_{۰}^{۱۵۰۰} d\delta$$

www.Mohandesyar.com

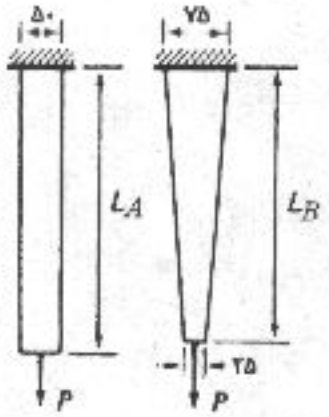
اما در فاصله صفر تا $۱۵۰۰\,mm$ نیرویی وجود ندارد یعنی $P = ۰$ نتیجتاً:

$$\int_{۰}^{۱۵۰۰} d\delta = ۰ \Rightarrow \delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۰} \frac{Pdx}{A_x E}$$

$$A = ۲۵\left(۱۰۰ - \frac{x}{۳۰}\right)$$

$$\delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۰} \frac{۴۰ \times ۱۰^{۳}\, dx}{۲ \times ۱۰^{۵} \times ۲۵\left(۱۰۰ - \frac{x}{۳۰}\right)} = \frac{۴}{۵۰۰}\int_{-۱۵۰۰}^{۰} \frac{dx}{۱۰۰ - \frac{x}{۳۰}} \Rightarrow \delta = ۰/۰۹۷۳$$

۴-۱۸. دو میلهٔ نشان داده شده در شکل از ورقی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده‌اند. میلهٔ A دارای پهنای ثابت ۵۰ میلی‌متر و میلهٔ B دارای پهنای متغیر مطابق شکل می‌باشد. هر دو میله‌ها تحت تأثیر نیروی یکسان P قرار دارند. نسبت L_A/L_B را طوری تعیین کنید که تغییر شکل هر دو میله یکسان باشد. از وزن دو میله صرف‌نظر نمایید.



(ابعاد برحسب میلی‌متر)

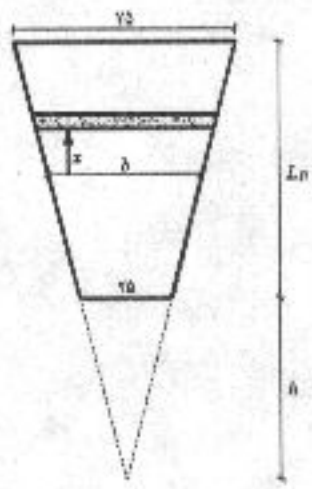
مسأله ۴-۱۸

$$\frac{h}{۲۵} = \frac{h + L_B}{۷۵} \Rightarrow h = \frac{L_B}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{x}{h} = \frac{b}{۲۵} \Rightarrow b = \frac{۲۵x}{h} = \frac{۵۰x}{L_B}$$

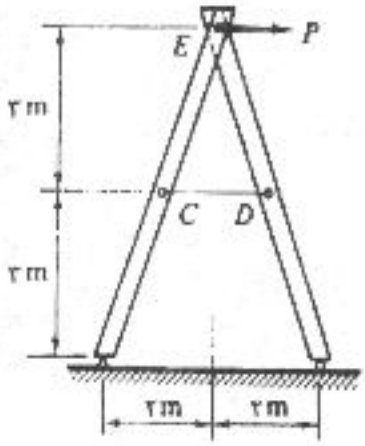
$$\delta_B = \int_{h}^{h + L_B} \frac{Pdx}{AE} = \int_{\frac{L_B}{۲}}^{\frac{۳L_B}{۲}} \frac{Pdx}{\frac{۵۰x}{L_B} \cdot t \cdot E} = \frac{L_B P}{۵۰t}\int_{\frac{L_B}{۲}}^{\frac{۳L_B}{۲}} \frac{dx}{x} \Rightarrow \delta_B = \frac{PL_B}{۱۲۵۰E}\ln ۳$$

$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{PL_A}{۱۲۵۰E}$$

$$\delta A = \delta B \Rightarrow L_B \ln ۳ = L_A \Rightarrow \boxed{\frac{L_A}{L_B} = \ln ۳ = ۱/۰۹۸}$$



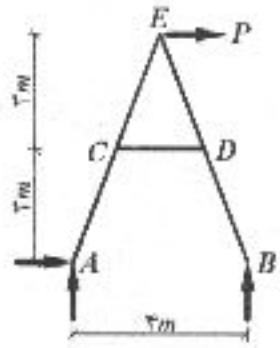
www.Mohandesyar.com



مسأله ۴-۱۹

۴-۱۹. نیروی P که به گرهٔ E از قاب مفصلی نشان داده شده تأثیر می‌کند، باعث افزایش طول کابل CD به میزان ۲/۵ میلی‌متر می‌شود. سطح مقطع کابل ۱۵۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین نیروی P

ابتدا کل جسم را به‌عنوان پیکر آزاد در نظر می‌گیریم.

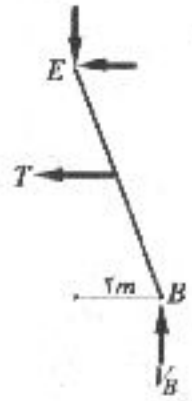


$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : V_B \times ۴ - P \times ۶ = ۰ \Rightarrow V_B = \frac{۳}{۲} P$$

$$\delta_{CD} = \frac{TL}{AE} \Rightarrow T = \frac{\delta_{CD} AE}{L}$$

$$T = \frac{۲/۵ \times ۱۵۰ \times ۲ \times ۱۰^۵}{۲ \times ۱۰^۳} \Rightarrow T = ۳۷/۵ kN$$

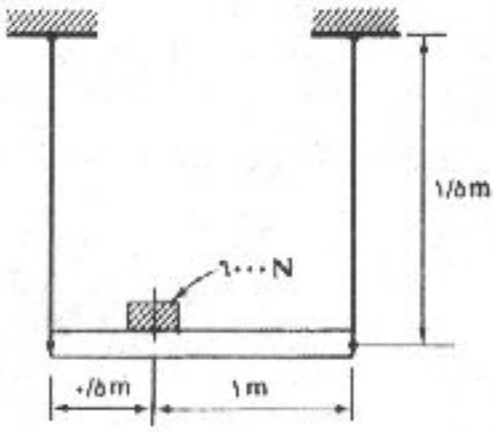
$$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ : ۲ \times V_B - T \times ۳ = ۰$$



با توجه به رابطه (۱):

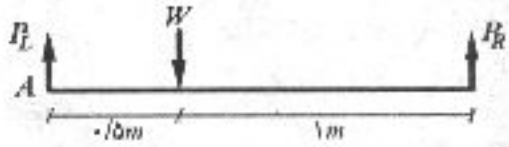
$$۲ \times \frac{۳}{۲} P - ۳۷/۵ \times ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{P = ۳۷/۵ kN}$$

۴-۲۰. مطابق شکل، یک میلهٔ صلب که جرم ۹۰۰ کیلوگرمی روی آن قرار دارد، توسط دو سیم آویزان است. سیم سمت چپ دارای سطح مقطع ۶۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و سیم سمت راست دارای سطح مقطع ۱۲۰ میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ تغییر شکل قائم جرم ۹۰۰ کیلوگرمی.



مسأله ۴-۲۰

www.Mohandesyar.com



$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : P_R \times ۱/۵ = ۹۰۰ \times ۹/۸۱ \times ۰/۵$$

$$\Rightarrow P_R = ۲۹۴۳N$$

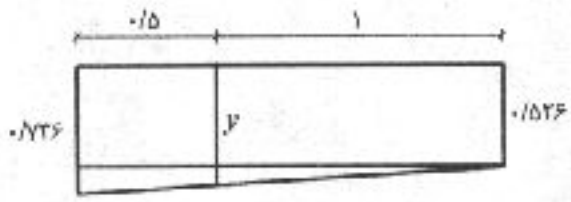
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : P_L + P_R - w = ۰ \Rightarrow P_L = ۵۸۸۶\,N$$

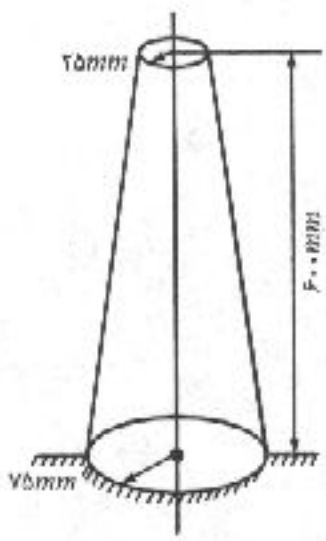
$$\delta_L = \frac{P_L L}{A_L E_L} = \frac{۵۸۸۶ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۶۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_L = ۰/۷۳۶\,mm$$

$$\delta_R = \frac{P_R L}{A_R E_R} = \frac{۲۹۴۳ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲۰ \times ۰/۷ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_R = ۰/۵۲۶\,mm$$

$$y = ۰/۵۲۶ + \frac{۱}{۱/۵}(۰/۷۳۶ - ۰/۵۲۶)$$

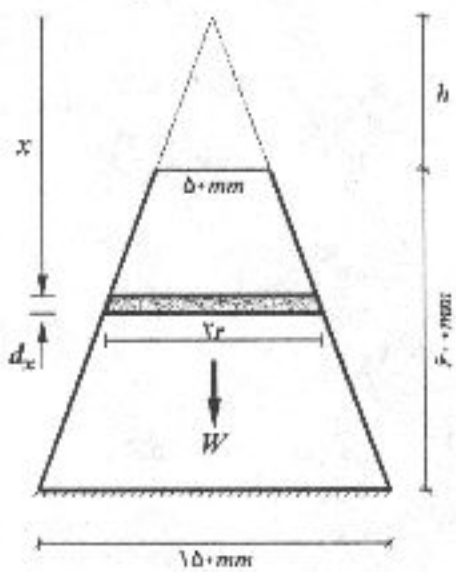
$$\boxed{y = ۰/۶۶۶\,mm}$$





۴-۲۱. مخروط ناقصی با ابعاد نشان داده شده، در قاعدهٔ بزرگش تکیه داده شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای فوقانی آن در اثر وزن مخروط. جرم مخصوص مصالح مخروط مساوی γ و ضریب ارتجاعی مصالح آن مساوی E می‌باشد (راهنمایی: مبداء مختصات را در رأس مخروط کاملی که از امتداد این مخروط ناقص به دست می‌آید، در نظر بگیرید).

مسأله ۴-۲۱



$$\frac{h}{۵۰} = \frac{h + ۶۰۰}{۱۵۰} \Rightarrow h = ۳۰۰\,mm$$

$$\frac{x}{h} = \frac{۲r}{۵۰} \Rightarrow r = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow A = \pi\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲$$

نیروی وارد بر المان dx وزن قسمتی از مخروط است که روی آن قرار دارد که برابر است با حجم آن قسمت ضرب در γg و یا:

$$P_x = V\gamma g$$

قسمتی از مخروط که روی المان قرار دارد بشکل مخروط ناقص می‌باشد و حجم آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{۱}{۳}Ax - \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۵^۲ \times h = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲ x - \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۵^۲ \times ۳۰۰$$

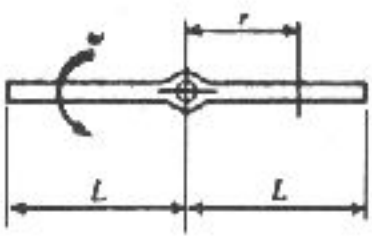
www.Mohandesyar.com

$$P_x = \frac{\pi}{۳}\left[\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲ x - ۲۵^۲ \times ۳۰۰\right]\gamma g$$

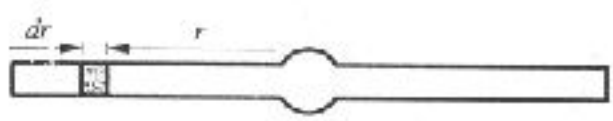
$$\delta = \int_۰^L \frac{P_x L}{A_x E} \Rightarrow \delta = \int_{۲۰۰}^{۹۰۰} \frac{\frac{\pi}{۳}\left(\frac{x^۳}{۱۴۴} - ۱۸/۷۵ \times ۱۰^۲\right)\gamma g}{\pi\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲ \times E}\, dx$$

$$\delta = \int_{۲۰۰}^{۹۰۰} \frac{\gamma g}{۳E} \times \left(x - ۱۴۴ \times ۱۸/۷۵ \times ۱۰^۲ / x^۲\right) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = ۱ \times ۱۰^۵\ \gamma g/E\ mm}$$

۴-۲۲. مطلوب است تعیین افزایش طول کل یک میلهٔ ارتجاعی با سطح مقطع ثابت A (مطابق شکل) که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه در صفحهٔ افقی دوران می‌کند. جرم مخصوص مصالح میله مساوی γ و ضریب ارتجاعی آن مساوی E می‌باشد. از مقدار ناچیز اضافه مصالح در محل مفصل صرف‌نظر نمایید. (راهنمایی: ابتدا تنش را در مقطعی به فاصلهٔ r از مفصل با انتگرال‌گیری از اثر نیروهای ماند (اینرسی) بین r و L تعیین نمایید. به مثال ۳-۷ نیز مراجعه نمایید).



مسأله ۴-۲۲



$$dP = dm \,.\, r\omega^۲$$

$$dm = \gamma . dV = \gamma . A dr \qquad \Rightarrow dP = \gamma A \omega^۲ r dr$$

$$P = \int_r^L \gamma A \omega^۲ r\, dr \qquad \Rightarrow P = \frac{\gamma A \omega^۲}{۲}\left(L^۲ - r^۲\right)$$

نیرویی برابر با همین مقدار هم در طرف دیگر میله بوجود می‌آید (در خلاف جهت) بنابراین:

$$\delta = ۲ \times \int_۰^L \frac{P dr}{AE} = ۲ \int_۰^L \frac{\gamma A \omega^۲}{۲} \times \frac{(L^۲ - r^۲)}{AE}\, dr = \frac{\gamma \omega^۲}{E}\left[L^۲ r - \frac{r^۳}{۳}\right]_۰^L$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{۲\gamma\omega^۲ L^۳}{۳E}}$$

۴-۲۳ یک میلهٔ برنجی به قطر ۶۰ میلی‌متر و طول ۱۵۰ میلی‌متر توسط نیروی محوری گستردهٔ یکنواختی معادل ۲۰۰ کیلونیوتن تحت فشار قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین افزایش قطر ناشی از این نیروی محوری. ضریب ارتجاعی مساوی $۰/۸۵ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۳ می‌باشد.

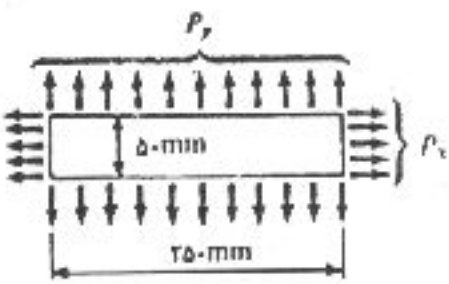
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{-۲۰۰ \times ۱۰^۳}{\frac{\pi}{۴}(۶۰)^۲ \times ۰/۸۵ \times ۱۰^۵} = -۸/۳۲ \times ۱۰^{-۲}$$

www.Mohandesyar.com

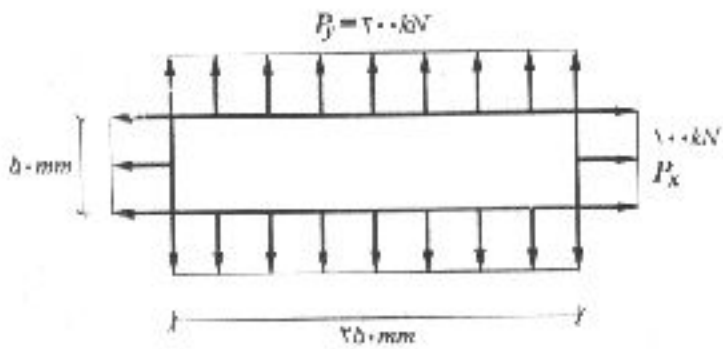
$$\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon d = -V\varepsilon_z \Rightarrow \Delta d = -d\nu\varepsilon_z = -۶۰ \times ۰/۳ \times (-۸/۳۲ \times ۱۰^{-۴})$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_d = ۰/۰۱۵ mm}$$

۲۴-۴ یک ورق فولادی به ابعاد ۲۵۰ × ۵۰ میلی‌متر و به قطر ۱۰ میلی‌متر تحت تأثیر تنشهای گستردهٔ یکنواخت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (الف) اگر $P_x = ۱۰۰$ کیلونیوتن و $P_y = ۲۰۰$ کیلونیوتن باشد، چه تغییری در ضخامت ورق در اثر تأثیر این نیروها به وجود می‌آید. (ب) در صورتی که همین تغییر در ضخامت را بخواهیم توسط نیروی P_x به تنهایی به وجود آوریم، مقدار لازم P_x چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی مساوی ۲×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۲۵ می‌باشد.



مسأله ۲۴-۴



الف)

$$\sigma_x = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^{۳}}{۵۰ \times ۱۰} \Rightarrow \sigma_x = ۲۰۰ N/mm^{۲}$$

$$\sigma_y = \frac{۲۰۰ \times ۱۰^{۳}}{۲۵۰ \times ۱۰} \Rightarrow \sigma_y = ۸۰ N/mm^{۲}$$

$$\sigma_z = ۰$$

$$\varepsilon_z = \frac{۱}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^{۵}}\left[۰ - ۰/۲۵ \times (۲۰۰ + ۸۰)\right] = -۳/۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Delta L_z = \varepsilon_z t = -۳/۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰ \Rightarrow \Delta L_z = -۳/۵ \times ۱۰^{-۳} mm$$

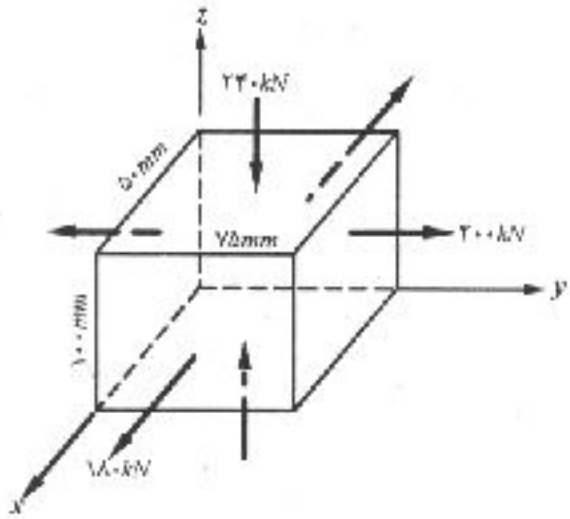
ب)

$$-۳/۵ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{E}(-۰/۲۵\sigma_x) \Rightarrow \sigma_x = ۳/۵ \times ۱۰^{-۴} \times \frac{۲ \times ۱۰^{۵}}{۰/۲۵} = ۲۸۰ N/mm^{۲}$$

$$P_x = A\sigma_x = (۵۰ \times ۱۰) \times ۲۸۰ \Rightarrow \boxed{P_x = ۱۴۰ kN}$$

۲۵-۴. یک قطعهٔ مکعب مستطیل فولادی (نظیر چیزی که در شکل ۴-۲۰-الف نشان داده شده است) دارای ابعاد $a = ۵۰$ و $b = ۷۵$ و $c = ۱۰۰$ میلی‌متر می‌باشد. وجوه این نقطه تحت تأثیر نیروهای گستردهٔ یکنواخت ۱۸۰ کیلونیوتن (کششی) در امتداد x ۲۰۰ کیلونیوتن (کششی) در امتداد y و ۲۴۰ کیلونیوتن (فشاری) در امتداد z قرار دارند. مطلوب است تعیین مقدار سیستم تنهایی از نیرو که فقط در امتداد y تأثیر می‌کند و همان تغییر شکلی را در امتداد y به‌وجود می‌آورد که سیستم نیروی اولیه به‌وجود می‌آورد. ν را مساوی ۰/۲۵ در نظر بگیرید.

www.Mohandesyar.com



$a = ۵۰\ mm \qquad P_x = ۱۸۰\ kN$

$b = ۷۵\ mm \qquad P_y = ۲۰۰\ kN \qquad \nu = ۰/۲۵$

$c = ۱۰۰\ mm \qquad P_z = ۲۴۰\ kN$

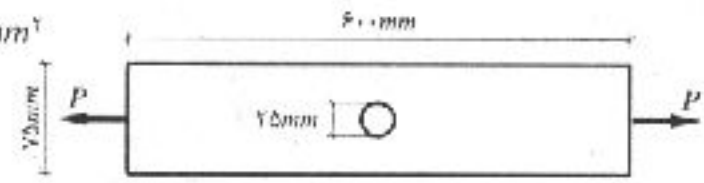
$$\varepsilon_y = \frac{۱}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

علامت σ_z بعلت فشاری بودن آن منفی می‌باشد:

$$\varepsilon_y = \frac{۱}{E}\left[\frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۱۰۰} - ۰/۲۵\left(\frac{۱۸۰ \times ۱۰^۳}{۷۵ \times ۱۰۰} - \frac{۲۴۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۷۵}\right)\right] \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{۵۰}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma'_y}{E} = \frac{P'_y}{AE} \Rightarrow ۵۰ = \frac{P'_y}{(۵۰ \times ۱۰۰)} \Rightarrow \boxed{P'_y = ۲۵۰\ kN}$$

۴-۲۶. یک تسمه فولادی با سطح مقطع ۷۵ × ۶ میلی‌متر و طول ۶۰۰ میلی‌متر دارای یک سوراخ دایره شکل به قطر ۲۵ میلی‌متر در مرکزش می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر نیروی کششی محوری را که می‌توان در امتداد طولی بر این تسمه وارد نمود، بدون اینکه تنش حداکثر از مقدار مجاز ۲۲۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند. (اثر تمرکز تنش را در نظر بگیرید)



تسمه $۶۰۰ \times ۷۵ \times ۶\ mm \quad \sigma_{\text{مجاز}} = ۲۲۰ N/mm^۲$

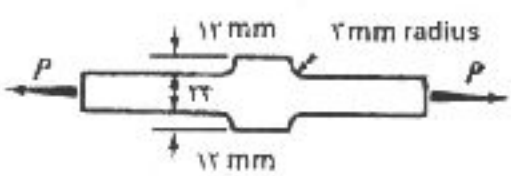
$۲r = ۲۵\ mm$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵\ mm \\ d &= ۷۵ - ۲۵ = ۵۰\ mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r}{d} = ۰/۲۵$$

از نمودار شکل (۴-۷) مقدار K برابر ۲/۲۵ بدست می‌آید. $\qquad K = ۲/۲۵$

$$\sigma = K\frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{\sigma A}{K} = \frac{۲۲۰ \times (۷۵ - ۲۵) \times ۶}{۲/۲۵} \Rightarrow P = ۲۹/۳۳\ kN$$

۴-۲۷. تسمه‌ای مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی کششی P قرار دارد، مفروض است. تعیین نمایید که این میله در اثر وجود زائده میانی چند درصد ضعیف شده است. اگر تمرکز تنش را در نظر بگیرید.



مسأله ۴-۲۷

www.Mohandesyar.com

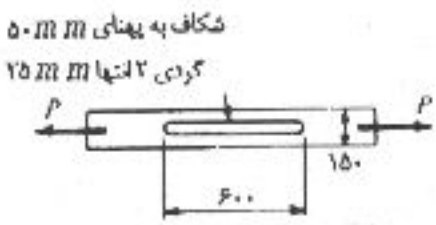
$$\frac{r}{d} = \frac{۳}{۲۴} = ۰/۱۲۵$$

$$\frac{D}{d} = \frac{۴۸}{۲۴} = ۲$$

از نمودار شکل (۴-۷) $K = ۲/۰۵$

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{\frac{P}{A}}{K\frac{P}{A}} = \frac{۱}{K} = \frac{۱}{۲/۰۵} = ۰/۴۹$$

۴-۲۸. یک شکاف طولانی در تسمه‌ای فولادی به ضخامت ۲۵ و پهنای ۱۵۰ میلی‌متر و طول ۳ متر مطابق شکل ایجاد شده است. (الف) مطلوب است تعیین تنش حداکثری را که در اثر تأثیر نیروی محوری $P = ۲۰۰$ کیلونیوتن در آن ایجاد می‌شود. فرض کنید که منحنی فوقانی شکل ۴-۳۱ در این مورد صادق است. (ب) برای همان حالت، تغییر طول کل میله را تعیین نمایید. از اثر موضعی تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید و طول شکاف را مساوی ۶۰۰ میلی‌متر فرض کنید. (پ) افزایش طول همان میله را وقتی که $P = ۷۰۰$ کیلونیوتن می‌باشد، تخمین بزنید. فرض کنید که فولاد تا کرنش ۰/۰۲ متر بر متر در تنشی معادل ۲۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع جاری می‌شود. (ت) با حذف نیروی حالت پ، چه تغییر شکلهای پس‌ماندی در میله به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید.



مسأله ۴-۲۸

الف)

$$\frac{r}{d} = \frac{۲۵}{۱۵۰} = ۰/۱۶۷$$

از روی شکل (۴-۷) مقدار $K = ۲/۳$ بدست می‌آید

$$\sigma_{max} = K\frac{P}{A} = ۲/۳ \times \frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳}{(۱۵۰ - ۵۰) \times ۲۵} \Rightarrow \sigma_{max} = ۱۸۴\,MPa$$

ب)

$$\delta = \delta_۱ + \delta_۲ = \frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳ \times (۳۰۰۰ - ۶۰۰)}{۱۵۰ \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۶۰۰}{(۱۵۰ - ۵۰) \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} = ۰/۶۴ + ۰/۲۴$$

$$\Rightarrow \delta = ۰/۸۸\,mm$$

پ)

تنش در قسمت شکافدار: $\sigma_۱ = \frac{P}{A} = \frac{۷۰۰ \times ۱۰^۳}{۲۵ \times ۱۰۰} = ۲۸۰\,MPa$

تنش در قسمت بدون شکاف $\sigma_۲ = \frac{P}{A} = \frac{۷۰۰ \times ۱۰^۳}{۲۵ \times ۱۵۰} = ۱۸۷\,MPa$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در قسمت شکاف‌دار جسم به تنش تسلیم رسیده. بنابراین با کرنش ۰/۰۲ جاری می‌شود.

$$\delta_۱ = ۰/۰۲ \times ۶۰۰ = ۱۲\,mm$$

$$\varepsilon_۲ = \frac{\sigma_۲}{E} = \frac{۱۸۷}{۲ \times ۱۰^۵} = ۹/۳۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\delta_۲ = ۹/۳۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۲۴۰۰ = ۲/۲۴\,mm \qquad \delta = \delta_۱ + \delta_۲ = ۱۴/۲۴\,mm$$

www.Mohandesyar.com

ت) با برداشتن بار قسمت بدون شکاف میله به‌شکل کاملاً ارتجاعی طول اولیه را بدست می‌آورد ولی قسمت شکاف‌دار چون تغییر طول پلاستیک داده بود یک کرنش پس ماند در آن ایجاد می‌شود و به طول اولیه خود بر نمی‌گردد:

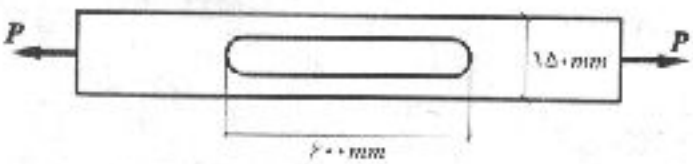
$$\delta_R = \delta_1 - \delta_e$$

δ_R: کرنش پس ماند

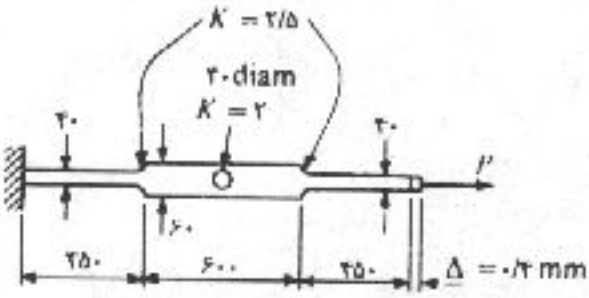
δ_e: کرنش الاستیک

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{۲۸۰}{۲ \times ۱۰^۵} = ۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\delta_R = ۱۲ - ۱/۴ \times ۱۰^{-۳} \times ۶۰۰ \Rightarrow \delta_R = ۱۱/۱۶\, mm$$



۴-۲۹. ضخامت تسمهٔ نشان داده شده در شکل مساوی ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. در محلهای تغییر مقطع مقادیر تقریبی ضرایب تمرکز تنش نشان داده شده است. تحت تأثیر نیروی P تسمه به اندازهٔ ۰/۴ میلی‌متر افزایش طول پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنشی که در اثر این نیرو در تسمه به‌وجود می‌آید. در محاسبات مربوط به تغییر شکل میله از اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲ × ۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.



مسأله ۴-۲۹

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{۴۵۰ \times P}{(۴۰ \times ۲۵) \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۶۰۰P}{۶۰ \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۴۵۰ \times P}{۴۰ \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵}$$

$$\Rightarrow ۰/۴ = (۰/۲۲۵P + ۰/۲P + ۰/۲۲۵P) \times ۱۰^{-۵} \Rightarrow P = ۶۱/۵۴\, kN$$

بدیهی است مقدار تنش در جایی که سوراخ وجود دارد یا نواحی که جسم تغییر ضخامت می‌دهد بعلت پدیده تمرکز تنش بیشتر از سایر نواحی خواهد بود.

تنش در محلی که ضخامت جسم تغییر می‌کند:

$$\sigma_1 = K_1 \frac{P}{A} = \frac{۲/۵ \times ۶۱/۵۴ \times ۱۰^۳}{۴۰ \times ۲۵} \Rightarrow \sigma_1 = ۱۵۳/۸۵\, N/mm^۲$$

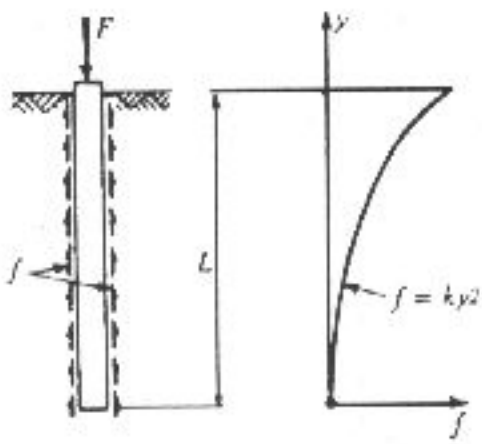
تنش در محل سوراخ:

$$\sigma_2 = K_2 \frac{P}{A} = ۲ \times \frac{۶۱/۵۴ \times ۱۰^۳}{(۶۰ - ۴۰) \times ۲۵} \Rightarrow \sigma_2 = ۲۴۶/۱۵\, N/mm^۲$$

با مقایسه دو مقدار مشخص می‌شود که مقدار ماکزیمم تنش در محل سوراخ می‌باشد.

www.Mohandesyar.com

۴-۳۰. یک شمع چوبی با مقطع ثابت که به طول L در داخل زمین رسی کوبیده شده است، نیروی F را در انتهای خود حمل می‌کند. این نیرو تماماً توسط اصطکاک f که تغییرات آن مطابق شکل است، حمل می‌شود. (الف) مطلوب است کاهش طول کل شمع به ازای مقادیر F، A، L و E (ب)، اگر $P = ۴۲۰$ کیلونیوتن، $L = ۱۲$ متر و $A = ۶۴۰۰۰$ میلی‌مترمربع و $E = ۱۰۰۰۰$ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار کاهش طول چقدر خواهد بود. (راهنمایی: ابتدا با استفاده از تعادل نیروها، مقدار k را تعیین نمایید).



مسأله ۴-۳۰

الف)

$$F = \int_0^L f dA = \int_0^L ky^2(2\pi r\, dy) = \int_0^L ky^2\left(2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}\, dy\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{2}{3} kL^3\sqrt{\pi A} \Rightarrow k = \frac{3}{2}\frac{F}{L^3\sqrt{\pi A}}$$

$$F = \int_0^y f dA = \int_0^y ky^2(2\pi r\, dy) = \int_0^y k\left(2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)y^2 dy \Rightarrow F = \frac{2}{3} k\sqrt{A\pi}\; y^3$$

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \int_0^L \frac{F dy}{EA} = \int_0^L \frac{2k\sqrt{A\pi}\, y^3}{3EA}\, dy$$

$$= \frac{2k}{3E}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\int_0^L y^3\, dy = \frac{kL^4}{6E}\sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{3F}{2L^3\sqrt{\pi A}}\cdot\frac{L^4}{6E}\sqrt{\frac{\pi}{A}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{FL}{4EA}}$$

ب)

$$\Delta L = \frac{420\times10^3\times12\times10^3}{4\times1\times10^4\times64\times10^3} \Rightarrow \Delta L = 1/97\, mm$$