www.Mohandesyar.com

مسائل فصل ششم

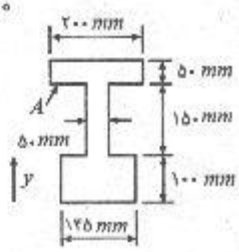
۶-۱ تا ۶-۵. مطلوب است تعیین لنگر ماند (ممان اینرسی) نیمرخهای نشان داده شده در شکل نسبت به محور افقی مار بر مرکز هندسی سطح (محور مرکزی افقی). برای تعیین مشخصات هندسی نیم‌رخهای نورد شده از جداول ضمیمه استفاده نمایید.

$$\sum Ay = ۵۰ \times ۲۰۰ \times ۲۷۵ + ۵۰ \times ۱۵۰ \times ۱۷۵ + ۱۴۵ \times ۱۰۰ \times ۵۰$$

$$\sum Ay = ۴۷۸۷۵۰۰\ mm^۳$$

$$\sum A = ۵۰ \times ۲۰۰ + ۵۰ \times ۱۵۰ + ۱۴۵ \times ۱۰۰ = ۳۲۰۰۰۰\ mm^۲$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = ۱۵۰\ mm$$



مسأله ۶-۱

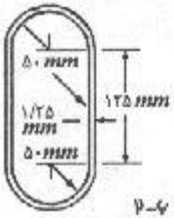
$$I = \sum (I_o + A d^۲) \quad , \quad I_o = \frac{۱}{۱۲} bh^۳$$

$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲} \times ۰/۲ \times (۰/۰۵)^۳ + (۰/۰۱)(۰/۱۲۵)^۲ = ۱/۵۸۳ \times ۱۰^{-۴}\ m^۴$$

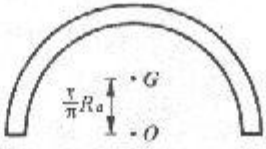
$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲} (۰/۰۵)(۰/۱۵)^۳ + (۷/۵ \times ۱۰^{-۴})(۰/۰۲۵)^۲ = ۱/۸۸ \times ۱۰^{-۵}\ m^۴$$

$$I_۳ = \frac{۱}{۱۲} (۰/۱۴۵)(۰/۱)^۳ + (۰/۰۱۴۵)(۰/۱)^۲ = ۱/۵۷۱ \times ۱۰^{-۴}\ m^۴$$

$$I = \sum I_i = ۳/۳۴ \times ۱۰^{-۴}\ m^۴$$



مسأله ۶-۲



$$I_O = \frac{۱}{۲} \pi R_a^۳ t \qquad I_O = I_G + A d^۲ \Rightarrow I_G = I_O - A d^۲$$

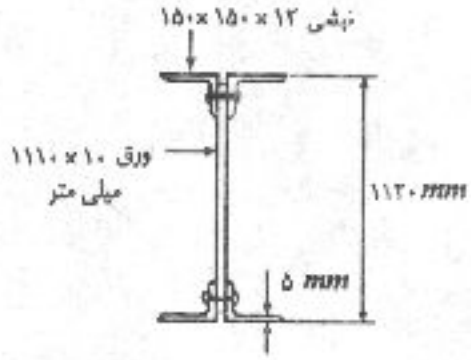
$$I_G = \frac{\pi}{۲} R_a^۳ t - (\pi R_a t) \left(\frac{۲}{\pi} R_a\right)^۲ = ۰/۰۹۵ \pi R_a^۳ t$$

$$R_a = \frac{۵۰ + ۵۱/۲۵}{۲} = ۵۰/۶۲۵\ mm$$

$$I = ۲ \times \left[\frac{۱}{۱۲} (۱/۲۵)(۱۲۵)^۳\right] + ۲ \left[(۰/۰۹۵)\pi (۵۰/۶۲۵)^۳ (۱/۲۵)\right]$$

$$+ ۲ \underbrace{\left[\pi (۵۰/۶۲۵)(۱/۲۵)\right]}_{A} \underbrace{\left[\frac{۱۲۵}{۲} + \frac{۲(۵۰/۶۲۵)}{\pi}\right]^۲}_{d} = ۴/۰۷ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

www.Mohandesyar.com

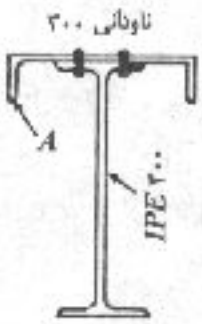


مسأله ۶-۳

از جدول ۱۰ ضمیمه مقدار ممان اینرسی نیمرخ نبشی ۱۲ × ۱۵۰ × ۱۵۰ برابر با $۷۳۷\,cm^۴$ و سطح مقطع آن $۳۴/۸\,cm^۲$ بدست می‌آید. بنابراین ممان اینرسی کل به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$e = ۴/۱۲\,cm \qquad d = \frac{۱۱۲۰}{۲} - ۴۱/۲ = ۵۱۸/۸$$

$$I = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۰(۱۱۱۰)^۳ + ۴ \times (۷۳۷ \times ۱۰^۴) + ۴(۳۴۸۰)(۵۱۸/۸)^۲ = ۴/۹۱۶ \times ۱۰^۹\,mm^۴$$



مسأله ۶-۴

مشخصات مربوط به IPE ۴۰۰ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب از جداول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌شود.

ناودانی ۳۰۰: $e = ۲/۷\,cm = ۲۷\,mm$

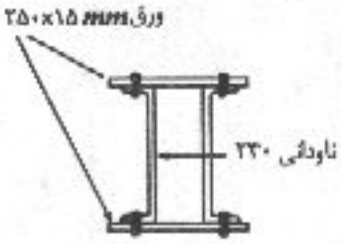
نیمرخ	$A\,(mm^۲)$	$y\,(mm)$	$Ay\,(mm^۳)$
IPE ۴۰۰	۸۴/۵ × ۱۰۰	۰	۰
ناودانی ۳۰۰	۵۸/۸ × ۱۰۰	۲۰۰ + ۱۰ − ۲۷ = ۱۸۳	۱۰/۷۶ × ۱۰^۵
$\sum$	۱۴۳۳۰	—	۱۰/۷۶ × ۱۰^۵

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{۱۰/۷۶ \times ۱۰^۵}{۱۴۳۳۰} = ۷۵/۱\,mm$$

نیمرخ	$A\,(mm^۲)$	$d\,(mm)$	$A\,d^۲\,(mm^۴)$	$I_۰\,(mm^۴)$
IPE ۴۰۰	۸۴/۵ × ۱۰۰	۷۵/۱	۴۷/۶۶ × ۱۰^۶	۲۳۱۳۰ × ۱۰^۴
ناودانی ۳۰۰	۵۸/۸ × ۱۰۰	۱۰۷/۹	۶۸/۴۶ × ۱۰^۶	۴۹۵ × ۱۰^۴
$\sum$	—	—	۱۱۶/۱۲ × ۱۰^۶	۲۳۶/۲۵ × ۱۰^۶

$$I = \sum (I_۰ + A\,d^۲) = ۳۵۸/۳۷ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

www.Mohandesyar.com



مسأله ۶-۵

مشخصات ناودانی ۲۴۰ (از جدول ۸ ضمیمه):

$A = ۴۲/۳\,cm^۲$ $\quad I = ۳۶۰۰\,cm^۴$ $\quad$ ارتفاع $= ۲۴۰\,mm$

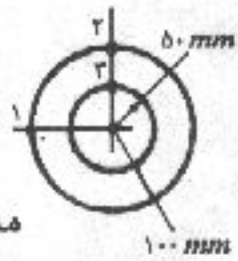
$$I = ۲(۳۶۰۰ \times ۱۰^۴) + ۲\left[\frac{۱}{۱۲} \times ۲۵۰(۱۵)^۳ + (۲۵۰ \times ۱۵) \times \left(\frac{۲۴۰}{۲} + ۷/۵\right)^۲\right]$$

$$= ۱/۹۴ \times ۱۰^۸\,mm^۴$$

۶-۶ تا ۶-۱۰. بر مقاطع و نیمرخهای نشان داده شده در شکل، لنگر خمشی مثبتی معادل ۵۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور خنثی اثر می‌کند. مطلوب است تعیین تنشهای خمشی در نقاط نشان داده شده که توسط یک نقطهٔ پررنگ مشخص شده‌اند.

$$I = \frac{\pi}{۴}(R^۴ - r^۴) = \frac{\pi}{۴}(۱۰۰^۴ - ۵۰^۴) = ۷۳/۶۳ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

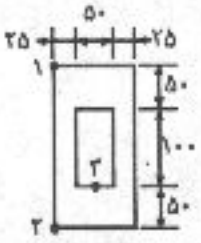
$$\sigma_۱ = -\frac{My_۱}{I} = ۰$$



مسأله ۶-۶

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶(N.mm) \times ۱۰۰(mm)}{۷۳/۶۳ \times ۱۰^۶(mm^۴)} = -۷۳/۳۴\,MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = \frac{۱}{۲}\sigma_۲ = -۳۶/۶۷\,MPa \quad \text{(فشاری)}$$



مسأله ۶-۷

(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

$$I = \frac{۱}{۱۲}BH^۳ - \frac{۱}{۱۲}bh^۳$$

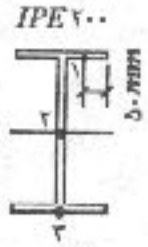
$$= \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۰۰)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۰۰)^۳ = ۶۲/۵ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

$$\sigma_۱ = \frac{My_۱}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۱۰۰}{۶۲/۵ \cdot ۱۰^۶} = -۸۶/۴\,MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = +۸۶/۴\,MPa \quad \text{(کششی)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = \frac{۱}{۲}\sigma_۲ = ۴۳/۲\,MPa \quad \text{(کششی)}$$

www.Mohandesyar.com



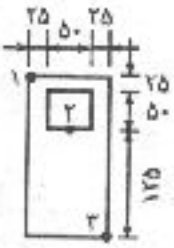
مسأله ۶-۸

از جدول ۴ ضمیمه: $I = ۱۹۴۰\ cm^۴$

$$\sigma_۱ = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (۱۰۰ - ۸/۵)}{۱۹۴۰ \times ۱۰^۴} = -۲۵۴/۷\ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = ۰ \qquad (y_۲ = ۰)$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (-۱۰۰)}{۱۹۴۰ \times ۱۰^۴} = +۲۷۸/۳\ MPa \quad \text{(کششی)}$$

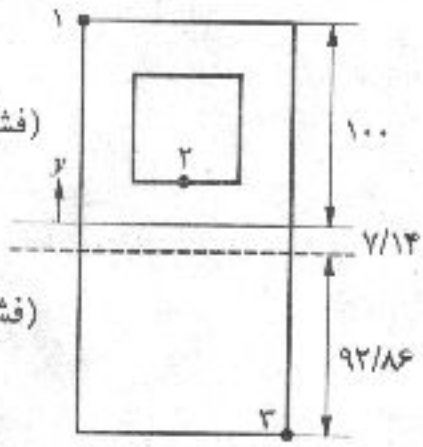


مسأله ۶-۹

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(۲۰۰ \times ۱۰۰) \times ۰ - (۵۰ \times ۵۰) \times ۵۰}{۲۰۰ \times ۱۰۰ - ۵۰ \times ۵۰} = -۷/۱۴\ mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۰۰)^۳ + (۱۰۰ \times ۲۰۰)(۷/۱۴)^۲ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰ \times ۵۰)^۳ - (۵۰ \times ۵۰)(۵۷/۱۴)^۲,$$

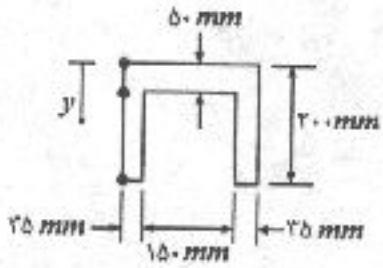
$$= ۵۹ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$



$$\sigma_۱ = -\frac{My_۱}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۱۰۷/۱۴}{۵۹ \times ۱۰^۶} = -۹۸\ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۳۲/۱۴}{۵۹ \times ۱۰^۶} = -۲۹/۴\ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (-۹۲/۸۶)}{۵۹ \times ۱۰^۶} = +۸۵\ MPa \quad \text{(کششی)}$$



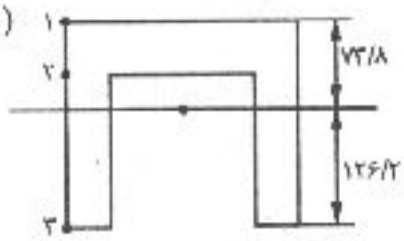
مسأله ۶-۱۰

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{۲ \times ۳۵ \times ۲۰۰ \times ۱۰۰ + ۱۵۰ \times ۵۰ \times ۲۵}{۲ \times ۳۵ \times ۲۰۰ + ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۳/۸\ mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۴۸/۸)^۲ + ۲ \times \frac{۱}{۱۲}(۳۵)(۲۰۰)^۳$$

www.Mohandesyar.com

$$+ ۲ \times (۳۵ \times ۲۰۰)(۲۶/۲)^۲ = ۷۵/۷ \times ۱۰^۶ \, mm^۴$$



$$\sigma_۱ = -\frac{My_۱}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ (۷۳/۸)}{۷۵/۷ \times ۱۰^۶} = -۵۲/۶ \, MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ (۲۳/۸)}{۷۵/۷ \times ۱۰^۶} = -۱۷ \, MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ (-۱۲۶/۲)}{۷۵/۷ \times ۱۰^۶} = +۹۰ \, MPa \quad \text{(کششی)}$$

۶-۱۱. مطلوب است تعیین اساس مقطع نیمرخهای $INP۲۶۰$ و $IPB۳۰۰$ و ناودانی ۲۰۰ براساس ابعاد آنها.

با استفاده از جداول ۳، ۶، ۸ ضمیمه مشخصات لازم استخراج می‌گردند.

$$INP۲۶۰ : I_{xx} = ۵۷۴۰ \, cm^۴ \quad , \quad I_{yy} = ۲۸۸ \, cm^۴ \quad , \quad h = ۲۶۰ \, mm \, , \quad b = ۱۱۳ \, mm$$

$$S_{xx} = \frac{I_{xx}}{c_۱} = \frac{۵۷۴۰}{\frac{۲۶}{۲}} = ۴۴۱/۵ \, cm^۳ \qquad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{C_۲} = \frac{۲۸۸}{\frac{۱۱/۳}{۲}} = ۵۰/۹۷ \, cm^۳$$

$$IPB۳۰۰ : I_{xx} = ۲۵۱۷۰ \, cm^۴ \, , \quad I_{yy} = ۸۵۶۰ \, cm^۴ \quad , \quad h = ۳۰۰ \, mm \, , \quad b = ۳۰۰ \, mm$$

$$S_{xx} = \frac{۲۵۱۷۰}{\frac{۳۰}{۲}} = ۱۶۷۸ \, cm^۳ \qquad S_{yy} = \frac{۸۵۶۰}{\frac{۳۰}{۲}} = ۵۷۰/۷ \, cm^۳$$

$$\text{ناودانی ۲۰۰} : I_{xx} = ۱۹۱۰ \, cm^۴ \quad , \quad I_{yy} = ۱۴۸ \, cm^۴ \qquad h = ۲۰۰ \, mm \, , \quad b = ۷۵ \, mm$$

$$S_{xx} = \frac{۱۹۱۰}{\frac{۲۰}{۲}} = ۱۹۱ \, cm^۳ \qquad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{b - e_y} = \frac{۱۴۸}{۷/۵ - ۲/۰۱} = ۲۷ \, cm^۳$$

۶-۱۲. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل ۱۰۰ × ۵۰ میلیمتر در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع ۵۰ میلی متر اتفاق می‌افتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع ۱۰۰ میلی متر اتفاق می‌افتد.

تنش مجاز چوب مساوی ۸/۴ نیوتن بر میلی متر مربع (مگاپاسگال) می‌باشد.

الف)

$$I = \frac{۱}{۱۲} bh^۳ = \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۰۰)^۳ = ۴/۱۷ \times ۱۰^۶ \, mm^۴ = ۴/۱۷ \times ۱۰^{-۶} \, m^۴$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۸/۴ \times ۱۰^۶)(۴/۱۷ \times ۱۰^{-۶})}{۵۰ \times ۱۰^{-۳}} = ۷۰۱ \, N.m$$

www.Mohandesyar.com

ب)
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۵۰)^۳ = ۱/۰۴ \times ۱۰^۶ mm^۴ = ۱/۰۴ \times ۱۰^{-۶} m^۴$$

$$M = \frac{(۸/۴ \times ۱۰^۶)(۱/۰۴ \times ۱۰^{-۶})}{۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۳۴۹ N.m$$

۶-۱۳. مطلوب است طراحی یک تیر از نیم‌رخ IPB که تحت لنگر خمشی ۳۰ کیلونیوتن‌متر قرار دارد، در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور $x - x$ اتفاق بیفتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور $y - y$ اتفاق بیفتد.

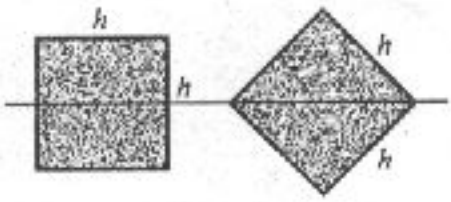
تنش خمشی مجاز را مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$S = \frac{M}{\sigma} = \frac{۳۰ \times ۱۰^۶}{۱۵۰} = ۲ \times ۱۰^۵ mm^۳ = ۲۰۰ cm^۳$$

الف) با توجه به ستون مربوط به S_x جدول ۶ ضمیمه IPB۱۴۰ مناسب می‌باشد.

ب) با توجه به ستون مربوط به S_y جدول ۶ ضمیمه IPB۲۰۰ را می‌توان انتخاب نمود گرچه برای داشتن ضریب اطمینان می‌توان از IPB۲۲۰ استفاده نمود.

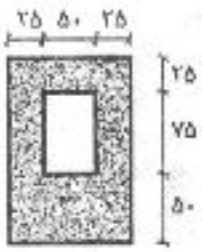
۶-۱۴. یک مقطع مربع در دو حالت نشان داده شده در حول محور $x - x$ تحت خمش قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین نسبت لنگر خمشی مجاز دو حالت در صورتی‌که تنش خمشی مجاز برای هر دو مقطع یکسان باشد.



مسأله ۶-۱۴

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_۱ c_۱}{I} \rightarrow M_۱ = \frac{\sigma I}{c_۱} = \frac{\sigma I}{\frac{h}{۲}} \\ \sigma &= \frac{M_۲ c_۲}{I} \rightarrow M_۲ = \frac{\sigma I}{c_۲} = \frac{\sigma I}{\frac{\sqrt{۲}}{۲} h} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{M_۱}{M_۲} = \sqrt{۲}$$

۶-۱۵. یک قطعه از ماشین چدنی، که دارای مقطعی مطابق شکل می‌باشد، به صورت تیری که تحت‌لنگر خمشی مثبت است، عمل می‌نماید. اگر تنش خمشی فشاری مجاز ۸۰ مگاپاسکال و تنش خمشی کششی مجاز ۲۰ مگاپاسکال باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجازی که می‌تواند بر تیر وارد شود. (ابعاد بر حسب میلی متر)



مسأله ۶-۱۵

$$\bar{y} = \frac{(۱۰۰ \times ۱۵۰)(۷۵) - (۵۰ \times ۷۵)(۸۷/۵)}{۱۰۰ \times ۱۵۰ - ۵۰ \times ۷۵} = ۷۰/۸۳ mm$$ بالای محور مرکزی

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ + (۱۰۰ \times ۱۵۰)(۷۵ - ۷۰/۸۳)^۲ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۷۵)^۳$$
$$- (۵۰ \times ۷۵)(۸۷/۵ - ۷۰/۸۳)^۲ = ۲۵/۵۹ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

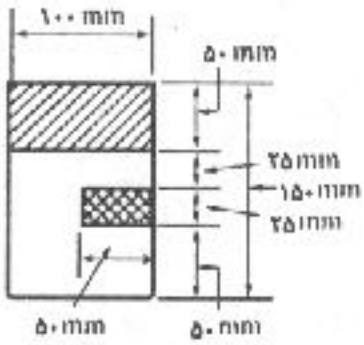
www.Mohandesyar.com

$$M = \frac{\sigma I}{c}$$

$$M_T = \frac{۲۰ \times ۲۵/۵۹ \times ۱۰^۶}{۷۰/۸۳} = ۷۲۲۵/۷\,N.m$$

$$M_C = \frac{۸۰ \times ۲۵/۵۹ \times ۱۰^۶}{۷۹/۱۷} = ۲۵۸۵۸/۳\,N.m$$

پس لنگر خمشی مجاز $۷۲۲۵/۷\,N.m$ می‌باشد.



مسأله ۶-۱۶

۶-۱۶. یک تیر که دارای مقطع مربع مستطیل توپری مطابق با ابعاد نشان داده شده در شکل می‌باشد، تحت لنگر خمشی مثبت ۱۶۰۰۰ نیوتن‌متر در حول محور افقی قرار دارد. (الف) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای فشاری وارد بر مقطع سایه زده شده که در اثر لنگر خمشی تولید می‌شود. (ب) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای کششی وارد بر سطح چهارخانه.

$$I = \frac{۱}{۱۲} bh^۳ = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ = ۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

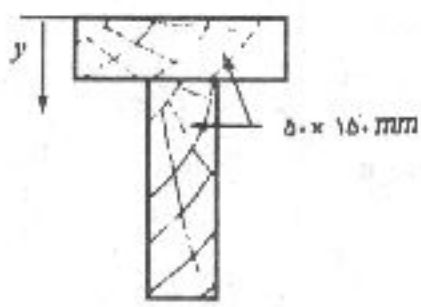
$$\sigma_{ave} = \frac{My_{ave}}{I} = \frac{۱۶ \times ۱۰^۶ \times ۵۰}{۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۲۸/۴\,MPa$$

$$C = \sigma_{ave} \times A = ۲۸/۴ \times (۵۰ \times ۱۰۰) = ۱۴۲/۲\,kN$$

$$\sigma_{ave} = \frac{۱۶ \times ۱۰^۶ \times ۱۲/۵}{۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۷/۱۱۱\,MPa$$

$$T = \sigma_{ave} \times A = ۷/۱۱ \times (۲۵ \times ۵۰) = ۸/۹\,kN$$

۶-۱۷. دو الوار چوبی به مقطع مستطیل ۱۵۰ × ۵۰ میلی‌متر، همانند شکل طوری به یکدیگر چسب شده‌اند، که تشکیل یک مقطع T بدهند. اگر به چنین مقطعی یک لنگر خمشی معادل ۳۱۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی تأثیر کند، مطلوب است تعیین، (الف) تنشهای موجود در تارهای خارجی (لنگر ماند مقطع مساوی $۵۳/۱ \times ۱۰^۶$ میلی‌متر به توان چهار می‌باشد). (ب) برآیند نیروهای فشاری ناشی از تنشهای فشاری خمشی در ناحیهٔ بالای محور خنثی (پ) برآیند نیروهای کششی ناشی از تنشهای کششی خمشی در ناحیهٔ پایین محور خنثی و مقایسهٔ آن با جواب حالت (ب)



مسأله ۶-۱۷

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(۱۵۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۵۰ \times ۱۵۰)(۱۲۵)}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۵\,mm$$

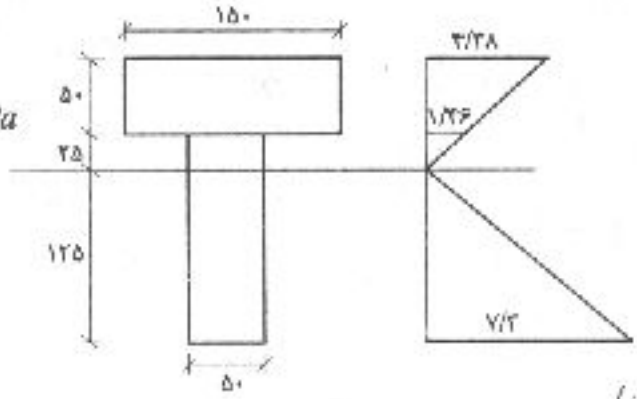
www.Mohandesyar.com

الف)

$$\sigma_C = \frac{Mc_C}{I} = \frac{۳۱۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۷۵}{۵۳/۱ \times ۱۰^۶} = ۴/۳۸\,MPa$$

$$\sigma_T = \frac{MC_T}{I} = \frac{۳۱۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۱۲۵}{۵۳/۱ \times ۱۰^۶} = ۷/۳\,MPa$$

$$\sigma_B = \frac{۲۵}{۷۵} \times ۴/۳۸ = ۱/۴۶\,MPa$$



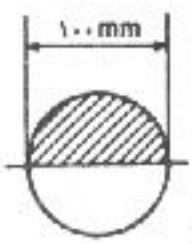
ب)

$$C = \sum \sigma_C \cdot A = \frac{۱}{۲}(۴/۳۸ + ۱/۴۶)(۵۰ \times ۱۵۰) + \frac{۱}{۲}(۱/۴۶)(۲۵ \times ۵۰) = ۲۲/۸\,kN$$

پ)

$$T = \frac{۱}{۲}(۷/۳)(۵۰ \times ۱۲۵) = ۲۲/۸\,kN$$

همانگونه که مشاهده می‌کنید برآیند نیروی فشاری با برآیند نیروی کششی در مقطع برابر است.



مسأله ۱۸-۶

۱۸-۶. اگر تیری با مقطع دایره (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۳۵۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، مطلوب است تعیین مقدار و برآیند نیروهای به وجود آمده در ناحیهٔ سایه خورده با استفاده از انتگرال‌گیری.

$$dT = \frac{\sigma}{۲}\,dA$$

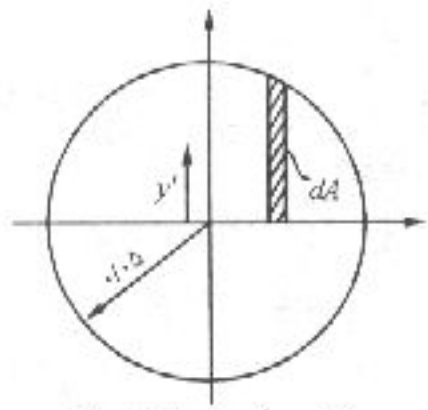
$$T = \int \frac{\sigma}{۲}\,dA = ۲\int_{۰}^{۰/۰۵} \frac{My}{۲I}\,y\,dx = \frac{M}{I}\int_{۰}^{۰/۰۵} (۰/۰۰۲۵ - x^۲)\,dx$$

$$= \frac{M}{I}\left(۰/۰۰۲۵x - \frac{x^۳}{۳}\right)\Bigg|_{۰}^{۰/۰۵} = \frac{۳۵۰۰}{\frac{\pi(۰/۰۵)^۴}{۴}}\left[۰/۰۰۲۵(۰/۰۵) - \frac{۰/۰۵^۳}{۳}\right]$$

$$\Rightarrow T = ۵۹/۴\,kN$$

$$M = T \times ۲y' \Rightarrow y' = \frac{M}{۲T}$$

$$= \frac{۳۵۰۰}{۲ \times ۵۹۴۰۰} = ۰/۰۲۹\,m = ۲۹\,mm$$

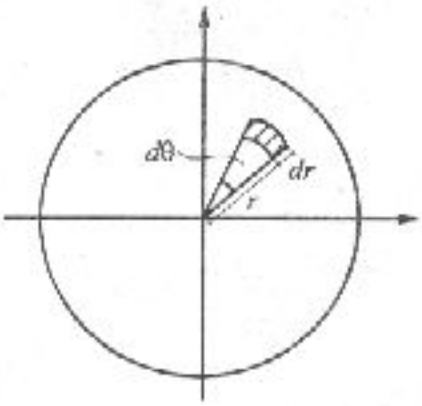


$$x^۲ + y^۲ = ۰/۰۰۲۵$$

روش قطبی:

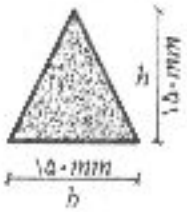
$$dT = \sigma dA = \frac{My}{I} r\,dr\,d\theta \quad , \quad y = r\,Sin\theta$$

www.Mohandesyar.com



$$T = \frac{M}{I}\int r\sin\theta\, r dr d\theta = \frac{M}{I}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{0/05} r^2 \sin\theta dr d\theta$$

$$\Rightarrow T = 5941.8\ J$$



مسأله ۶-۱۹

۶-۱۹. اگر تیری با مقطع مثلث (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، (الف) به وسیله انتگرال‌گیری نشان دهید که $I_0 = bh^3/36$ می‌باشد. (ب) مقدار و محل برآیند نیروهای فشاری و کششی ناشی از تنشهای فشاری و کششی خمشی را تعیین نمایید.

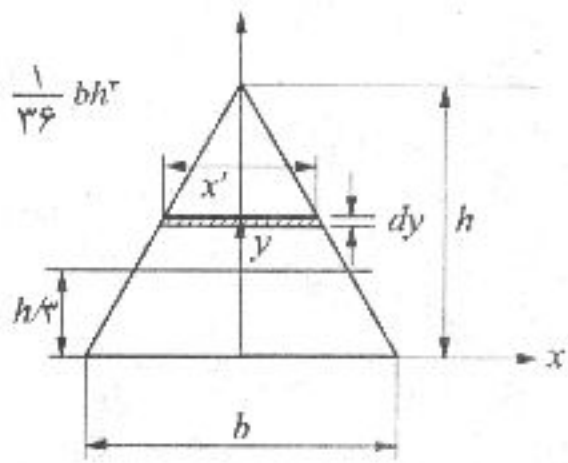
$$I_{xx} = \int y^2\, dA \qquad x' = \frac{h-y}{h}b$$

$$dA = x'dy = b\left(\frac{h-y}{h}\right)dy = b\left(1-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$I_{xx} = b\int_0^h y^2\left(1-\frac{y}{h}\right)dy = b\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4h}y^4\right)\Big|_0^h = b\left(\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^3\right) = \frac{1}{12}bh^3$$

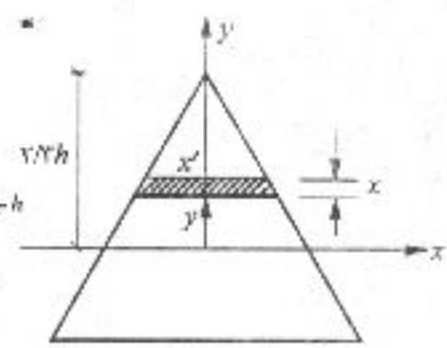
$$I_{xx} = I_0 + Ad^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = I_{xx} - Ad^2$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 - \left(\frac{1}{2}bh\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{18}bh^3 = \frac{1}{36}bh^3$$



$$T = \int \sigma dA \qquad dA = x'dy$$

$$\frac{x'}{\frac{2}{3}b} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{\frac{2}{3}h} \Rightarrow x' = b\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)dy$$



$$T = \int\left(\frac{My}{I}\right).\, b\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)dy$$

$$= \frac{36M}{h^3}\int_0^{\frac{2}{3}h} y\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)dy = \frac{36M}{h^3}\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}\frac{y^3}{h}\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}h}$$

$$= \frac{16M}{9h} = \frac{16\,(4000)}{9\times 0/15} = 47400\ N \qquad y_T = \frac{\int \sigma y dA}{\int \sigma dA}$$

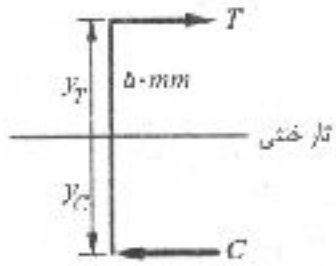
www.Mohandesyar.com

$$\int \sigma\, y dA = \frac{Mb}{I}\int_{۰}^{\frac{۲}{۳}h} y^{۲}\left(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{h}\right)dy = \frac{۳۶M}{h^{۳}}\left(\frac{۲}{۹}y^{۳}-\frac{۱}{۴}\frac{y^{۴}}{h}\right)\Bigg|_{۰}^{\frac{۲}{۳}h} = \frac{۱۶}{۲۷}M = ۲۳۷۰/۳۷$$

محل اثر برآیند نیروی کششی $۵۰\,mm$ بالای تار خنثی می‌باشد. $y_T = \frac{۲۳۷۰/۳۷}{۴۷۴۰۰} = ۰/۰۵m$

به‌خاطر وجود تعادل مقدار نیروی فشاری با نیروی کششی مساویست.

$C = T = ۴۷۴۰۰\,N$

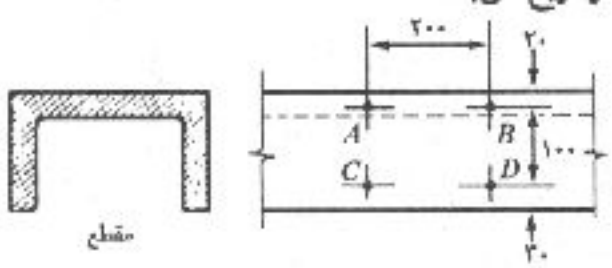


$$M = T(y_T + y_C) \quad \Rightarrow \quad y_T + y_C = \frac{M}{T} \quad \Rightarrow \quad y_C = \frac{M}{T} - y_T$$

$$y_C = \frac{۴۰۰۰}{۴۷۴۰۰} - ۰/۰۵ = ۰/۰۳۴۴$$

پس محل اثر برآیند نیروی فشاری $۳۴/۴\,mm$ زیر تار خنثی می‌باشد.

۶-۲۰. یک تیر چدنی با مقطع ناودانی شکل (مطابق شکل)، به عنوان یک تیر افقی یک ماشین عمل می‌کند. وقتی که نیروهای قائم بر این عضو وارد می‌شوند، طول AB به اندازهٔ ۰/۰۲ میلی‌متر افزایش و طول CD به اندازهٔ ۰/۱۸ میلی‌متر کاهش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین، (الف) جهت لنگر وارده، (ب) تنشهای قائم به وجود آمده در تارهای خارجی. ضریب ارتجاعی مساوی ۱×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

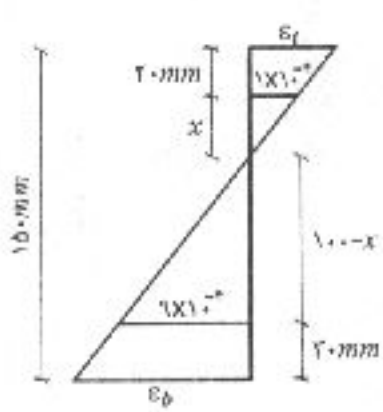


مسأله ۶-۲۰ (ابعاد بر حسب میلی متر)

چون در قسمت بالا کشش و قسمت پایین فشار ایجاد شده ممان اعمال شده منفی می‌باشد.

$$\varepsilon_{AB} = +\frac{۰/۰۲}{۲۰۰} = ۱\times۱۰^{-۴} \qquad \varepsilon_{CD} = -\frac{۰/۱۸}{۲۰۰} = -۹\times۱۰^{-۴}$$

$$\frac{۱\times۱۰^{-۴}}{۹\times۱۰^{-۴}} = \frac{x}{۱۰۰-x} \Rightarrow x = ۱۰\,mm$$



$$\frac{\varepsilon_t}{۳۰} = \frac{۱\times۱۰^{-۴}}{۱۰} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t = ۳\times۱۰^{-۴}$$

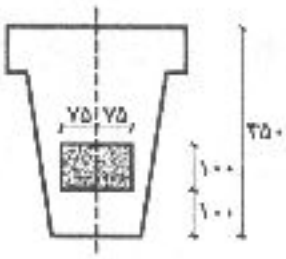
$$\sigma_t = E\varepsilon_t = ۱\times۱۰^{۵}\times۳\times۱۰^{-۴} = ۳۰\,MPa$$

$$\frac{\varepsilon_b}{۱۲۰} = \frac{۹\times۱۰^{-۴}}{۹۰} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_b = ۱/۲\times۱۰^{-۳}$$

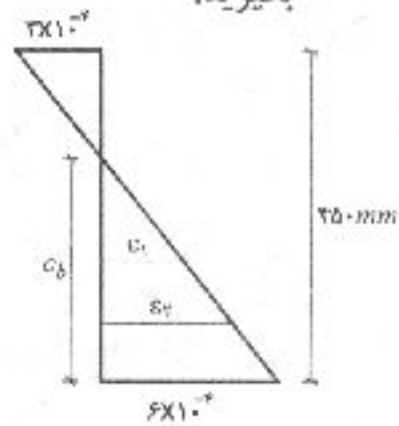
$$\sigma_b = E\varepsilon_b = ۱\times۱۰^{۵}\times۱/۲\times۱۰^{-۳} = ۱۲۰\,MPa$$

www.Mohandesyar.com

۶-۲۱. یک تیر فولادی توپر که مقطع آن مطابق شکل می‌باشد، در آزمایشگاه تحت تأثیر لنگر خمشی خالص قرار داده می‌شود. خمش در حول یک محور افقی اتفاق می‌افتد. وسایل اندازه‌گیری کرنش نشان می‌دهند که تارهای انتهایی فوقانی به اندازهٔ ۰/۰۰۰۳ میلی‌متر بر میلی‌متر کاهش و تارهای انتهایی تحتانی به اندازهٔ ۰/۰۰۰۶ میلی‌متر بر میلی‌متر افزایش طول پیدا می‌کنند. مطلوب است تعیین برآیند نیروهای وارد بر سطح سایه خورده در لحظه‌ای که کرنشها اندازه‌گیری شده‌اند. تمام ابعاد شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند و ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۲۱



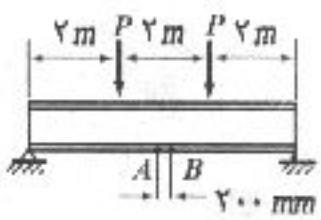
$$C_b = \frac{۶}{۹} \times ۴۵۰ = ۳۰۰\ mm$$

$$\sigma_۱ = E\varepsilon_۱ = (۲ \times ۱۰^۵)\left(\frac{۱۰۰}{۳۰۰} \times ۶ \times ۱۰^{-۴}\right) = ۴۰ N/mm^۲$$

$$\sigma_۲ = E\varepsilon_۲ = (۲ \times ۱۰^۵)\left(\frac{۲۰۰}{۳۰۰} \times ۶ \times ۱۰^{-۴}\right) = ۸۰ N/mm^۲$$

$$\sigma_{ave} = \frac{۸۰ + ۴۰}{۲} = ۶۰ N/mm^۲ \qquad P = \sigma_{ave} \cdot A = ۶۰ \times (۱۰۰ \times ۱۵۰) = ۹۰۰ kN$$

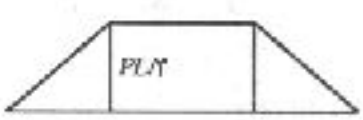
۶-۲۲. وقتی دو بار متمرکز مطابق شکل به یک تیر با نیمرخ فولادی $IPE۴۵۰$ وارد می‌شوند، فاصله‌سنجی که بین دو نقطهٔ A و B نصب شده است، افزایش طولی به میزان ۰/۱۲ میلی‌متر نشان می‌دهد. مقدار نیروی وارده چقدر است. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۲۲

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

S مدول مقطع می‌باشد و از مشخصات نیمرخ بوده و در جداول موجود است. برای نیمرخ $IPE۴۵۰$ با استفاده از جدول ۴ ضمیمه: $S = ۱۵۰۰\ Cm^۳$

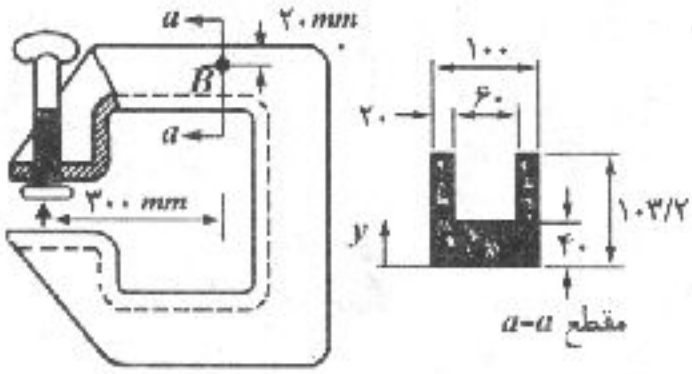


$$M = \sigma S \rightarrow P \cdot \frac{L}{۳} = E\varepsilon S \quad \Rightarrow \quad P \times ۲۰۰۰ = ۲ \times ۱۰^۵ \times \frac{۰/۱۲}{۲۰۰} \times ۱۵۰۰ \times ۱۰^۳$$

$$\Rightarrow P = ۹۰ kN$$

۶-۲۳. در گیرهٔ نشان داده شده، در اثر سفت کردن پیچ، کرنشی معادل ۹۰۰×۱۰^{-۶} میلیمتر بر میلیمتر در نقطهٔ B اندازه‌گیری شده است. به ازای این کرنش چه نیرویی در پیچ موجود است. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

www.Mohandesyar.com



مسأله ۶-۲۳

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(۴۰ \times ۱۰۰)(۲۰) + ۲(۶۳/۲ \times ۲۰)(۷۱/۶)}{۴۰ \times ۱۰۰ + ۲ \times ۶۳/۲ \times ۲۰} \approx ۴۰\, mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۴۰)^۳ + (۱۰۰ \times ۴۰)(۲۰)^۲ + ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۲۰)(۶۳/۲)^۳ + (۲۰ \times ۶۳/۲)(۳۱/۶)^۲\right]$$

$$I = ۵/۵ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

$$\sigma = E\varepsilon = ۲ \times ۱۰^۵ \times ۹۰۰ \times ۱۰^{-۶} = ۱۸۰\, MPa$$

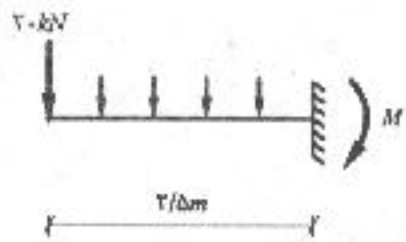
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{P.Ly}{I} \Rightarrow P = \frac{\sigma I}{Ly} = \frac{۱۸۰ \times ۵/۵ \times ۱۰^۶}{۳۰۰ \times (۶۳/۲ - ۲۰)} = ۷۶/۳۹\, kN$$

۶-۲۴. در مثال ۶-۴، جهت نیروی متمرکز را عکس کنید و حداکثر تنشهای خمشی را در انتهای گیردار تیر به ازای $L = ۲/۵$ متر بدست آورید.

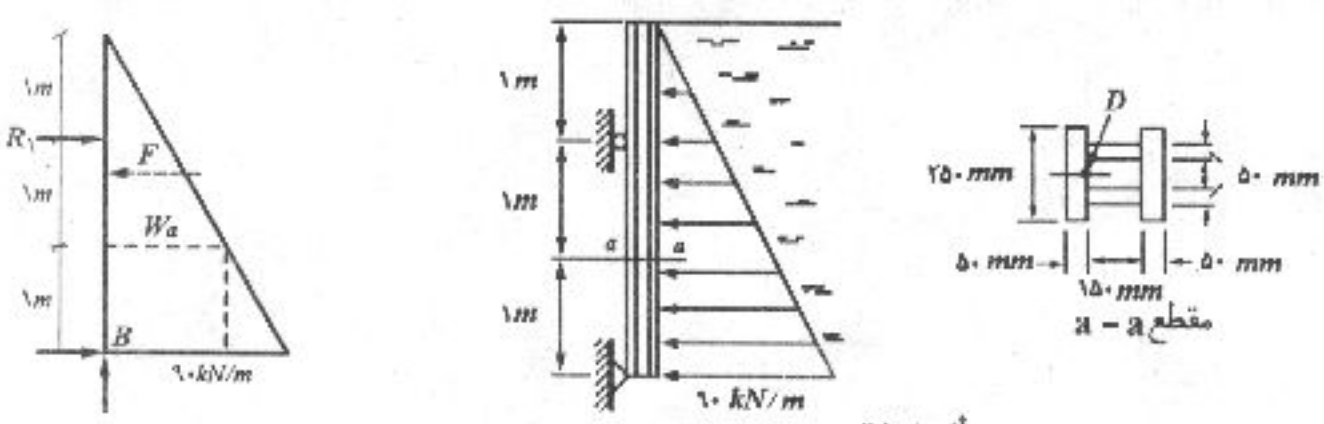
$$M = -۲۰(۲/۵) - (۰/۷۵ \times ۲/۵)(۱/۲۵) = ۵۲/۳\, kN.m$$

$$I_{zz} = ۱۶ \times ۱۰^{-۲}\, m^۴$$

$$\sigma_{max} = \frac{۵۲۳۰۰ \times ۰/۲}{۱۶ \times ۱۰^{-۲}} = ۶۵۳۷/۵\, N/m^۲$$



۶-۲۵. یکی از تیرهای تیپ یک سد کوچک، تحت تأثیر فشار ایستایی مایعات، مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش تاشی از خمش در نقطهٔ D از مقطع $a - a$



مسأله ۶-۲۵

www.Mohandesyar.com

$$\sum M_B = ۰ : R_۱ \times ۲ = \frac{۱}{۲}(۹۰)(۳)(۱) \rightarrow R_۱ = ۶۷/۵ kN$$

$$W_a = \frac{۲}{۳}(۹۰) = ۶۰ kN/m$$

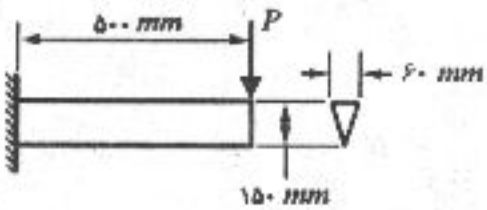
$$F = \frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۲ = ۶۰ kN$$

$$M_{aa} = ۶۷/۵ \times ۱ - (\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۲) \times \frac{۲}{۳} = ۲۷/۵ kN.m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲۵)(۰/۲۵)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۱۵)^۳ = ۲/۸۳ \times ۱۰^{-۲} m^۴$$

$$\sigma_D = \frac{My}{I} = \frac{۲۷/۵ \times ۰/۰۷۵}{۲/۸۳ \times ۱۰^{-۲}} = ۷۲۸۸ kN/m^۲$$

۶-۲۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی در مقطعی به فاصلهٔ ۲۵۰ میلیمتر از تکیه‌گاه یک تیر طره‌ای که مطابق شکل بارگذاری شده است. نتایج را در روی یک جزء کوچک در امتداد تیر نشان دهید. وزن تیر تقریباً ۳۵۰ نیوتن بر متر و P مساوی ۴۵۰ نیوتن می‌باشد.

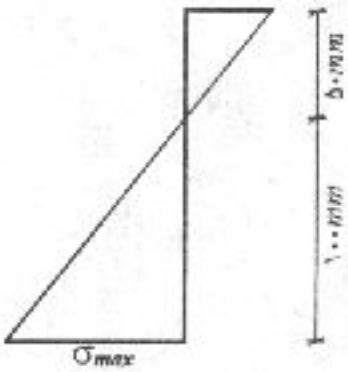


مسأله ۶-۲۶

$$M = -(۴۵۰)(۰/۲۵) - (۳۵۰)(۰/۱۲۵)(۰/۲۵) = -۱۲۳ N.m$$

$$I = \frac{۱}{۳۶}(۰/۶)(۰/۱۵)^۳ = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶} m^۴$$

$$\sigma_{max} = \frac{۱۲۳(۰/۱)(۱۰^{-۶})}{۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶}} = ۲/۱۸ MN/m^۲ \ (MPa)$$

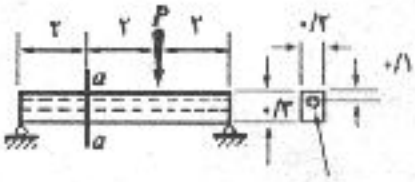


۶-۲۷. در مقطع $a - a$ از تیر نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین، (الف) حداکثر تنش قائم. (ب) تنش قائم در وسط ارتفاع. وزن تیر ۳ کیلو نیوتن بر متر و P مساوی ۱۰ کیلو نیوتن می‌باشد.

محل محور خنثی را نسبت به محور مرکزی بدست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{۰ - \frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۲(۰/۰۵)}{۰/۲ \times ۰/۳ - \frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۲} = -۰/۰۲۱ m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^۳ + (۰/۲ \times ۰/۳)(۰/۰۲۱)^۲$$



سوراخی به قطر ۰/۱۵ متر

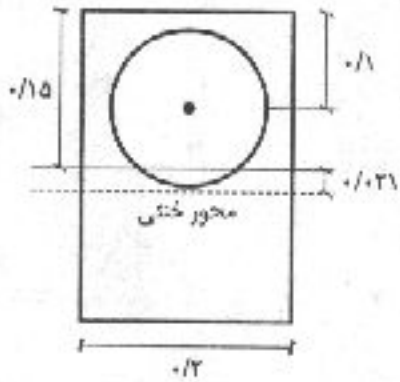
مسأله ۶-۲۷

www.Mohandesyar.com

$$-\frac{\pi}{۴}\left(\frac{۰/۱۵}{۲}\right)^۲-\frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۲(۰/۰۷۱)^۲=۳/۶۳\times۱۰^{-۴}m^۲$$

$$\sum M_B=۰\quad:\quad R_A\times۶-P\times۲-(۳\times۶)\times۳=۰$$

$$\Rightarrow R_A=۱۲/۳kN$$



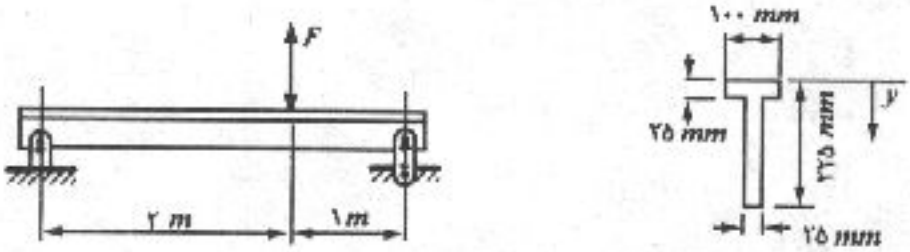
$$M_{aa}=۱۲/۳\times۲-(۳\times۲)\times۱=۱۸/۶\,kN.m$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{aa}c}{I}=\frac{۱۸/۶\times(۰/۱۵+۰/۰۲۱)}{۳/۶۳\times۱۰^{-۲}}=۸۷۶۲\,kN/m^۲$$

$$=۸/۷۶۲\,MPa$$

$$\sigma_m=\frac{۱۸/۶\times۰/۰۲۱}{۳/۶۳\times۱۰^{-۲}}=۱۰۷۶\,kN/m^۲$$

۶-۲۸. مطابق شکل، یک تیر با مقطع سپری از مصالحی ساخته شده است که حد تناسب کششی آن ۲۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و حد تناسب فشاری آن مساوی ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. با ضریب اطمینان ۱/۵ در مقابل جاری شدن، مطلوب است تعیین حداکثر نیروی متمرکز F (جهت F می‌تواند هم به سمت بالا و هم به سمت پایین باشد) که می‌تواند بر تیر وارد شود. مسأله را فقط بر مبنای حداکثر تنشهای خمشی ناشی از F حل نمایید.

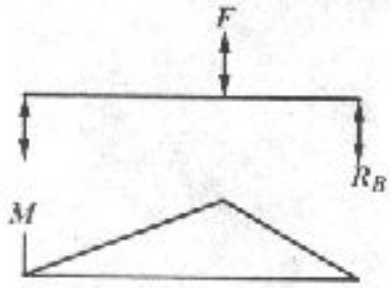


مسأله ۶-۲۸

$$\bar{y}=\frac{(۱۰۰\times۲۵)(۱۲/۵)+(۲۰۰\times۲۵)(۱۲۵)}{۱۰۰\times۲۵+۲۰۰\times۲۵}=۸۷/۵\,mm\qquad\text{از بالا}$$

$$I=\frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۵)^۳+(۱۰۰\times۲۵)(۷۵)^۲+\frac{۱}{۱۲}(۲۵)(۲۰۰)^۳+(۲۵\times۲۰۰)(۳۷/۵)^۲$$

$$=۳۷/۹\times۱۰^۶\,mm^۴$$



$$R_B=\frac{۲}{۳}F\qquad M_{max}=\frac{۲}{۳}F\times۱=\frac{۲}{۳}F\,kN.m$$

مسأله را برای دو حالت حل می‌کنیم:

۱- وقتی جهت F رو به بالاست:

$$\sigma_t=\frac{Mc}{I}=\frac{\left(\frac{۲}{۳}F\times۱۰^۳\right)(۸۷/۵)}{۳۷/۹\times۱۰^۶}=\frac{۲۰}{۱/۵}\quad\Rightarrow\quad F=۸/۶۶\,kN$$

www.Mohandesyar.com

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F \times ۱۰^۳\right)(۱۳۷/۵)}{۳۷/۹ \times ۱۰^۶} = \frac{۴۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۱۱\,kN$$

پس حداکثر نیروی وارده در این حالت ۸/۶۶ kN است.

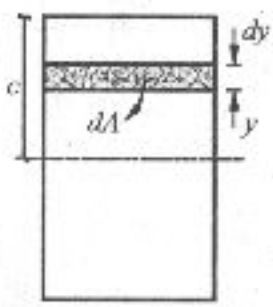
۲- وقتی جهت F رو به پایین است:

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F \times ۱۰^۳\right)(۸۷/۵)}{۳۷/۹ \times ۱۰^۶} = \frac{۴۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۱۷/۳\,kN$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F \times ۱۰^۳\right)(۱۳۷/۵)}{۳۷/۹ \times ۱۰^۶} = \frac{۲۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۵/۵۱\,kN$$

نتیجتاً در این حالت حداکثر نیروی وارده ۵/۵۱ kN می‌باشد.

۶-۲۹. اگر به عوض قانون هوک، رابطهٔ تنش-کرنش به صورت $\sigma^n = E\varepsilon$ بیان شود، نشان دهید که حداکثر تنش خمشی در یک تیر با مقطع مربع مستطیل مساوی: $\sigma_{max} = \left(\frac{MC}{I}\right)\left[\frac{(۲n+۱)}{(۳n)}\right]$ می‌باشد.



$$dM = \sigma dA.y = (E\varepsilon)^{\frac{1}{n}} ybdy \qquad M = ۲\int_0^c (E\varepsilon)^{\frac{1}{n}} ybdy$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{y}{c}$$

$$M = ۲\int_0^c \left[\frac{E\,\sigma_{max}}{Ec}y\right]^{\frac{1}{n}} ybdy = ۲c^{-\frac{1}{n}}\,\sigma_{max}\,b\left(\frac{y^{۲+\frac{1}{n}}}{۲+\frac{1}{n}}\right)\Bigg|_0^c$$

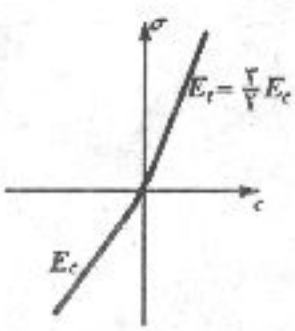
$$= ۲c^{-\frac{1}{n}}\sigma_m\,b\left(\frac{n}{۲n+۱}\right)\left(c^{۲+\frac{1}{n}}\right) \Rightarrow M = \sigma_m\,b\,۲c^۲\,\frac{n}{۲n+۱} \Rightarrow \sigma_m = \frac{۲n+۱}{n}\,\frac{M}{۲bc^۲} \quad (۱)$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}b\,(۲c)^۳ \Rightarrow ۲bc^۲ = \frac{۳I}{c} \qquad (۲)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sigma_m = \frac{۲n+۱}{۳n}\cdot\frac{Mc}{I}$$

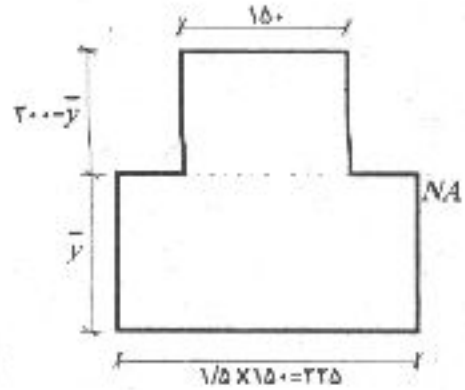
۶-۳۰. یک مقطع مربع مستطیل به ابعاد ۳۰۰ × ۱۵۰ میلی‌متر، تحت تأثیر لنگر خمشی ۲۴۰ کیلونیوتن‌متر در حول محور قوی‌اش می‌باشد. مصالح تیر غیر ایزوتروپیک می‌باشد، به نحوی که ضریب ارتجاعی در کشش، ۱/۵ برابر ضریب ارتجاعی در فشار است (به شکل مراجعه کنید) اگر تنشها از حد تناسب خارج نشوند، مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای کششی و فشاری در تیر.



مسأله ۶-۳۰

www.Mohandesyar.com

$$n = \frac{E_t}{E_c} = ۱/۵$$



$$\sum M_{NA} = ۰ \;:\; ۲۲۵\,\bar{y}\left(\frac{\bar{y}}{۲}\right) = ۱۵۰(۳۰۰ - \bar{y})\left(\frac{۳۰۰ - \bar{y}}{۲}\right)$$

$$\rightarrow \bar{y} = ۱۳۵\,mm \;,\quad ۳۰۰ - \bar{y} = ۱۶۵\,mm$$

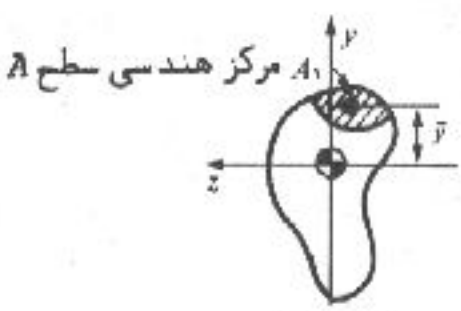
$$I = \frac{۱}{۳}(۱۵۰)(۱۶۵)^۳ + \frac{۱}{۳}(۲۲۵)(۱۳۵)^۳ = ۴/۰۹ \times ۱۰^۸\,mm^۴$$

$$\sigma_c = \frac{(۲۴۰ \times ۱۰^۶(N.mm))(۱۶۵)}{۴/۰۹ \times ۱۰^۸} = ۹۶/۸\,MPa$$

$$\sigma_t = \frac{۱/۵(۲۴۰ \times ۱۰^۶)(۱۳۵)}{۴/۰۹ \times ۱۰^۸} = ۱۱۸/۸\,MPa$$

۶-۳۱. یک تیر ارتجاعی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر لنگر خمشی M در حول یکی از محورهای اصلی‌اش که لنگر ماند مقطع نسبت به آن مساوی I می‌باشد، قرار دارد. نشان دهید که برای چنین تیری نیروی قائم F که در روی هر سطح دلخواه $A_۱$ اثر می‌کند، برابر است با:

$$F = \frac{MQ}{I}$$



مسأله ۶-۳۱

که در آن: $Q = \int_{A_۱} y\,dA = \bar{y}A_۱$ می‌باشد.

مطابق شکل $\bar{y}$ فاصلهٔ مرکز هندسی سطح $A_۱$ تا مرکز هندسی سطح مقطع کل می‌باشد.

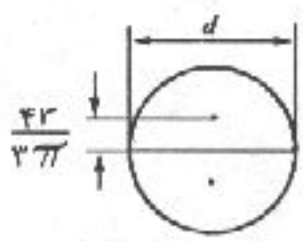
$$F = \int_{A_۱} \sigma\,dA = \int_{A_۱} \frac{My}{I}\,dA = \frac{M}{I}\int_{A} y\,dA = \frac{MQ}{I}$$

۶-۳۲ تا ۶-۳۶. مطلوب است تعیین نسبت M_{ult}/M_{yp} برای نیمرخهای نشان داده شده در شکل که در حول محور مرکزی افقی‌شان تحت تأثیر لنگر خمشی قرار دارند. از ترسیمهٔ تنش - کرنش ایده‌آل مثال ۶-۶ استفاده نمائید.

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \frac{\pi r^۴}{۴}}{r} = \frac{\pi r^۳}{۴}\sigma_y$$

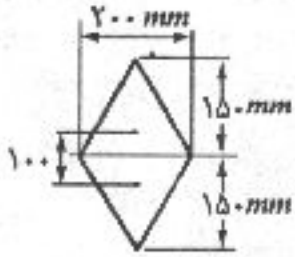
$$M_u = \underbrace{\sigma_y\left(\frac{۱}{۲}\pi r^۲\right)}_{F}\left(۲ \times \frac{۴r}{۳\pi}\right) = \frac{۴r^۳}{۳\pi}\sigma_y$$

$$M_u/M_y = \frac{۱۶}{۳\pi} = ۱/۷$$



مسأله ۶-۳۲

www.Mohandesyar.com

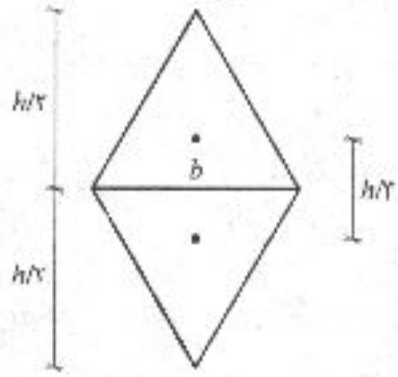


مسأله ۶-۳۳

مسأله را در حالت کلی حل می‌کنیم:

با در نظر گرفتن این نکته که ممان اینرسی مثلث نسبت به قاعده برابر است با $I = \frac{۱}{۱۲}bh^۳$ که در آن b قاعده و h ارتفاع مثلث می‌باشند داریم:

$$M_y = \frac{\sigma I}{c} = \frac{\sigma_y \times ۲ \times \frac{۱}{۱۲} b \left(\frac{h}{۲}\right)^۳}{\frac{h}{۲}} = \frac{bh^۲}{۲۴}\sigma_y$$



$$M_u = T \times d = (\sigma_y A) \,.\, d = \left[\sigma_y \frac{۱}{۲}(b)\left(\frac{h}{۲}\right)\right] \times \frac{h}{۳} = \frac{bh^۲}{۱۲}\sigma_y$$

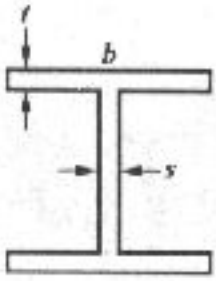
$$M_u / M_y = ۲$$

مسأله ۶-۳۴

$$\sigma_y = \frac{M_y c}{I} \quad \Rightarrow M_y = \sigma_y S$$

از جدول ۴ ضمیمه:

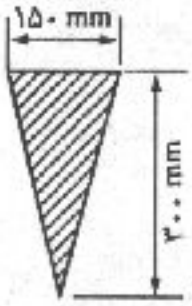
$$S = ۱۹۴\, cm^۳ = ۱۹۴ \times ۱۰^۳\, mm^۳$$



$b = ۱۰۰ mm$
$s = ۵/۶ mm$
$t = ۸/۵ mm$

$$M_u = \sigma_y(۱۰۰ \times ۸/۵) \times ۱۹۱/۵ + \sigma_y(۹۱/۵ \times ۵/۶) \times ۹۱/۵ = ۲۰۹۶۵۹/۶\,\sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = ۱/۱$$



مسأله ۶-۳۵

$$M_y = \frac{\sigma_y}{c} I = \frac{\sigma_y}{۰/۲} \times \frac{۱}{۳۶}(۰/۱۵)(۰/۳)^۳ = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۲}\,\sigma_y$$

$$C = T \Rightarrow \sigma_t A_۱ = \sigma_c A_۲$$

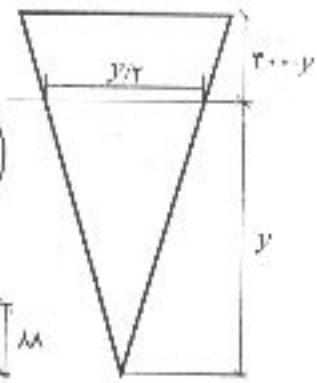
www.Mohandesyar.com

در M_u تنش ثابت و در تمام مقطع اندازه یکسانی دارد. در نتیجه:

$A_1 = A_2$

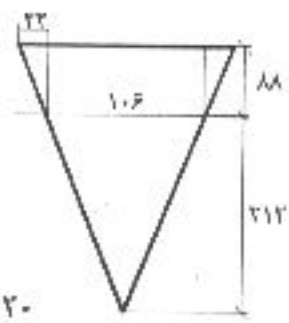
یعنی مساحت بالای محور خنثی و زیر آن باید مساوی باشند:

$$\frac{1}{2}y\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2} + 150\right)(300 - y) \quad \rightarrow y = 212\,mm$$

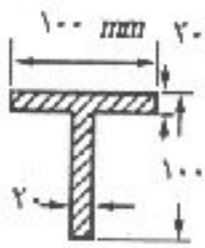


$$M_u = \sigma_y\left[\frac{1}{2}(0/212)(0/106)\left(\frac{0/212}{3}\right) + (0/106)(0/088)\left(\frac{0/088}{2}\right)\right.$$

$$\left. + (0/022)(0/088)\left(\frac{0/088}{2}\right)\right] = 1/29\times10^{-2}\,\sigma_y$$



$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{1/29\times10^{-2}\sigma_y}{5/63\times10^{-2}\sigma_y} = 2/29$$



مسأله ۶-۳۶

$$\bar{y} = \frac{(100\times20)(10) + (80\times20)(60)}{100\times20 + 80\times20} = 32/2\,mm$$ از بالا

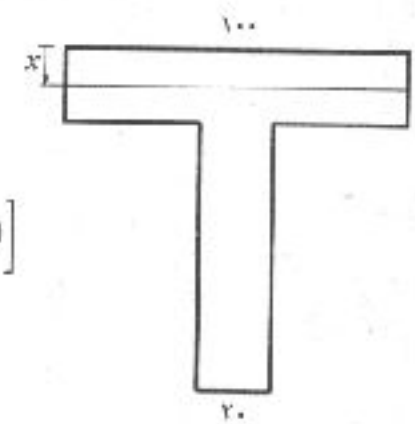
$$I = \frac{1}{12}(100)(20)^3 + (100\times20)(32/2 - 10)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(20)(80)^3 + (20\times80)(60 - 32/2)^2 \quad \Rightarrow I = 3/14\times10^6\,mm^4$$

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y\times3/14\times10^6}{(100 - 32/2)} = 4/63\times10^2\sigma_y$$

در حالتی‌که $M = M_u$ سطوح بالا و پایین محور خنثی باید برابر باشند زیرا:

$$C = T \rightarrow \sigma A_1 = \sigma A_2 \rightarrow A_1 = A_2$$



$$100x = 100(20 - x) + 20\times80 \Rightarrow x = 18\,mm$$

$$M_u = \sigma_y\left[(100\times18)\left(\frac{18}{2}\right) + (100\times2)(1) + (20\times80)(42)\right]$$

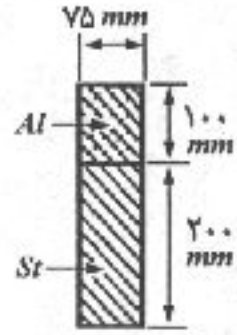
$$M_u = 83600\,(mm^3)\,\sigma_y = 8/35\times10^{-5}\sigma_y$$

$$M_u/M_y = \frac{8/36\times10^2\sigma_y}{4/63\times10^2\sigma_y} = 1/8$$

www.Mohandesyar.com

۶-۳۷ تا ۶-۳۹. هر کدام از مقاطع مرکب نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر خمشی ۸۰ کیلونیوتن‌متر قرار دارند. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به‌صورت یکپارچه عمل می‌کند. مطلوب است تعیین تنش حداکثر در هر کدام از مصالح.

$E_{st} = ۲/۱ \times ۱۰^۵ N/mm^۲ \qquad E_{AL} = ۰/۷ \times ۱۰^۵ N/mm^۲$



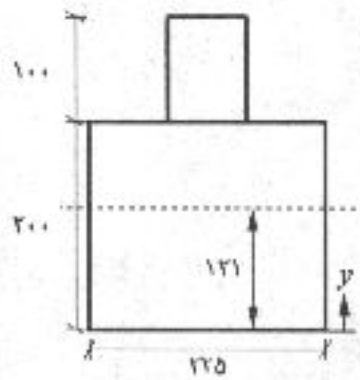
مسأله ۶-۳۷

$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = \frac{۲/۱}{۰/۷} = ۳ \qquad w_{Al} = ۳ \times ۷۵ = ۲۲۵\,mm$$

$$\bar{y} = \frac{(۲۲۵ \times ۲۰۰)(۱۰۰) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{۲۲۵ \times ۲۰۰ + ۱۰۰ \times ۷۵} = ۱۲۱\,mm$$

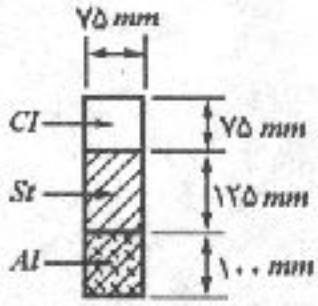
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۲۵)(۲۰۰)^۳ + (۲۲۵ \times ۲۰۰)(۲۱)^۲ +$$

$$\frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^۳ + (۷۵ \times ۱۰۰)(۲۵۰ - ۱۲۱)^۲ \Rightarrow I = ۳۰۱ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$



$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۳۰۰ - ۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۴۷/۶\,MPa$$

$$\sigma_{st} = n\frac{Mc}{I} = ۳ \times \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۹۶/۵\,MPa$$



مسأله ۶-۳۸

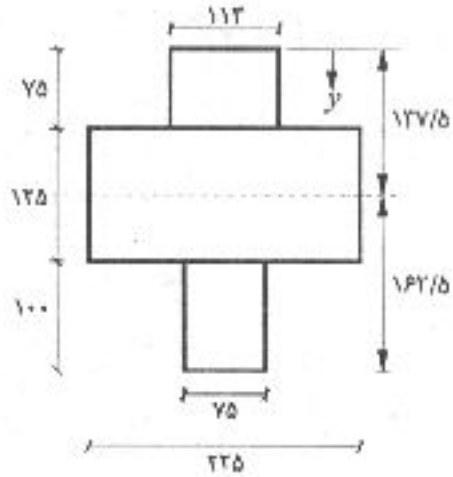
$$\frac{E_{CI}}{E_{Al}} = ۱/۵ \qquad \frac{E_{st}}{E_{Al}} = ۳$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۱۳ \times ۷۵)\left(\frac{۷۵}{۲}\right) + (۱۲۵ \times ۲۲۵)\left(۷۵ + \frac{۱۲۵}{۲}\right) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{(۱۱۳ \times ۷۵) + (۱۲۵ \times ۲۲۵) + (۱۰۰ \times ۷۵)} = ۱۳۷/۵\,mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۱۳)(۷۵)^۳ + (۱۱۳ \times ۷۵)\left(۱۳۷/۵ - \frac{۷۵}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۱۲}(۲۲۵)(۱۲۵)^۳$$

$$+ \frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^۳ + (۷۵ \times ۱۰۰)(۱۱۲/۵) = ۲۲۷ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

www.Mohandesyar.com

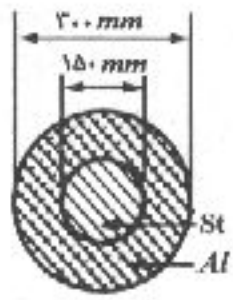


$$\sigma_{CI} = ۱/۵\,\frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۱۳۷/۵)}{۲۲۷ \times ۱۰^۶} = ۷۲/۶۸\,MPa$$

$$\sigma_{st} = ۳\,\frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۶۲/۵)}{۲۲۷ \times ۱۰^۶} = ۶۶/۱\,MPa$$

$$\sigma_{Al} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)\,(۱۶۲/۵)}{۲۴۷ \times ۱۰^۶} = ۵۷/۳\,MPa$$

(راهنمایی برای مسأله ۶-۳۹: لنگر ماند یک بیضی به قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$، در حول قطر بزرگتر مساوی $\frac{۱}{۴}\pi ab^۳$ می‌باشد.)



مسأله ۶-۳۹

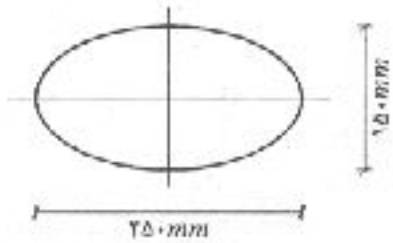
$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = ۳$$

$$I = \frac{۱}{۴}\pi(۲۲۵)(۷۵)^۳ + \frac{\pi}{۴}(۱۵۰^۴ - ۷۵^۴)$$

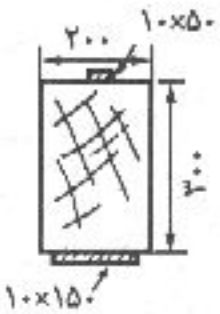
$$I = ۴۴۷ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۱۵۰)}{۴۴۷ \times ۱۰^۶} = ۲۶/۸\,MPa$$

$$\sigma_{st} = n\frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۷۵)}{۴۴۷ \times ۱۰^۶} = ۴۰/۳\,MPa$$



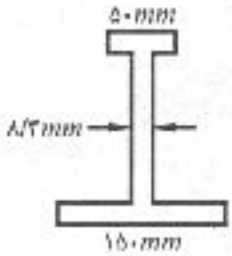
۶-۴۰ و ۶-۴۱. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز در حول محور خنثای افقی مقاطع مرکب چوب و فولاد نشان داده شده در شکل. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به‌صورت یکپارچه عمل می‌کند. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی ۲×۱۰^۵ و ضریب ارتجاعی چوب مساوی $۰/۰۸۳ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب ۱۴۰ و ۸/۳ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۶-۴۰

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۰/۰۸۳ \times ۱۰^۵} = ۲۴/۱$$

$$b = \frac{۲۰۰}{۲۴/۱} = ۸/۳$$



$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۱۰)(۵) + (۳۰۰ \times ۸/۳)(۱۶۰) + (۵۰ \times ۱۰)(۳۱۵)}{۱۵۰ \times ۱۰ + ۳۰۰ \times ۸/۳ + ۵۰ \times ۱۰} = ۱۲۵/۵\,mm$$ از پایین

www.Mohandesyar.com

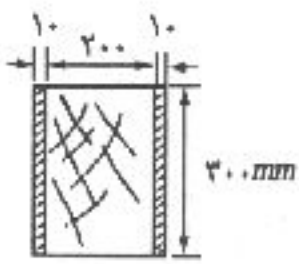
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۱۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۱۰)(۱۲۵/۵ - ۵)^۲$$

$$+ \frac{۱}{۱۲}(۸/۳)(۳۰۰)^۳ + (۸/۳ \times ۳۰۰)(۱۶۰ - ۱۲۵/۵)^۲$$

$$+ \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۰)^۳ + (۵۰ \times ۱۰)(۳۱۵ - ۱۲۵/۵)^۲ = ۶۱/۴ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

$$M_{st} = \frac{\sigma_{st} I}{c} = \frac{۱۴۰ \times ۶۱/۴ \times ۱۰^۶}{(۳۲۰ - ۱۲۵/۵)} = ۴۶/۶ \times ۱۰^۶ N.mm = ۴۴/۲ kN.m$$

$$\sigma_w = \frac{۱}{n}\frac{M.c}{I} \Rightarrow M_w = \frac{۲۴/۱ \times ۸/۳ \times ۶۱/۴ \times ۱۰^۶}{(۳۱۰ - ۱۲۵/۵)} = ۶۶/۶ \times ۱۰^۶ N.mm = ۶۶/۶ kN.m$$



مسأله ۶-۴۱

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = ۲۴/۱$$

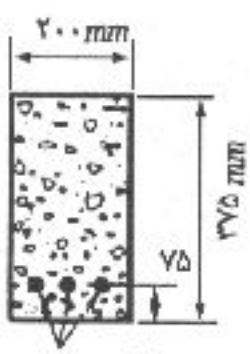
$$۱۰ \times ۲۴/۱ = ۲۴۱$$

$$b = ۲۰۰ + ۲ \times ۲۴۱ = ۶۸۲ mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۶۸۲)(۰/۳)^۳ = ۱/۵۴ \times ۱۰^{-۲} m^۴$$

$$M_w = \frac{\sigma I}{c} = \frac{۸/۳ \times ۱۰^۶ \times ۱/۵۴ \times ۱۰^{-۲}}{۰/۱۵} = ۸۵/۲ kN.m$$

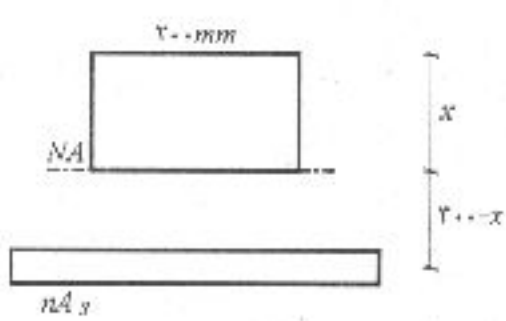
$$M_{st} = \frac{\sigma I}{n\,c} = \frac{۱۴۰ \times ۱۰^۶ \times ۱/۵۴ \times ۱۰^{-۲}}{۲۴/۱ \times ۰/۱۵} = ۵۹/۶ kN.m$$



۳ میلگرد ۲۲

مسأله ۶-۴۲

۶-۴۲. یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت ۱۱ کیلونیوتن‌متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در بتن و حداکثر تنش کششی در فولاد. n را مساوی ۱۵ فرض کنید.



$$A_s = ۳\frac{\pi}{۴}(۲۲)^۲ = ۱۱۴۰/۴ mm^۲$$

$$nA_s = ۱۵ \times ۱۱۴۰/۴ = ۱۷۱۰۶ mm^۲$$

www.Mohandesyar.com

$$\sum M_{NA} = ۰ \quad : \quad ۲۰۰ \times x \cdot \frac{x}{۲} = nA_s\,(۳۰۰ - x)$$

از حل معادله فوق مقدار x بدست می‌آید:

$$x = ۱۵۶/۶$$

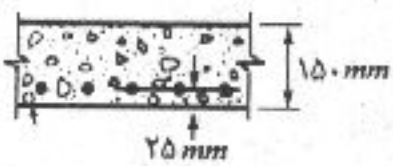
$$۳۰۰ - x = ۱۴۳/۴$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۰۰)(۱۵۶/۶)^۳ + (۲۰۰ \times ۱۵۶/۶)\left(\frac{۱۵۶/۶}{۲}\right)^۲ + ۱۷۱۰۶(۱۴۳/۴)^۲$$

$$= ۶۰۷/۸ \times ۱۰^۷\ mm^۴$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{۱۱ \times ۱۰^۶ \times ۱۵۶/۶}{۶۰۷/۸ \times ۱۰^۶} = ۲/۸۳\ MPa$$

$$\sigma_{st} = n\,\frac{Mc}{I} = ۱۵\,\frac{۱۱ \times ۱۰^۶ \times ۱۴۳/۴}{۶۰۷/۸ \times ۱۰^۶} = ۳۸/۹\ MPa$$



مسأله ۶-۴۳

۶-۴۳. مقطع یک دال بتن مسلح به ضخامت ۱۵۰ میلی‌متر مطابق شکل می‌باشد. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز برای یک متر پهنای دال. n را مساوی ۱۲ و تنش کششی مجاز فولاد و تنش فشاری مجاز بتن را به‌ترتیب مساوی ۱۵۰ و ۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

تعداد میلگرد در یک متر:

$$N = \frac{۱}{۸۰} \times ۱۰۰۰ = ۱۲/۵$$

$$A_s = ۱۲/۵ \times \frac{\pi}{۴}(۱۰)^۲ = ۹۸۱/۷۵\ mm^۲$$

$$nA_s = ۱۱۷۸۱\ mm^۲$$

$$۱۰۰۰ \times x \cdot \frac{x}{۲} = ۱۱۷۸۱ \times (۱۲۵ - x) \rightarrow x = ۴۳/۷۵\ mm \qquad ۱۲۵ - x = ۸۱/۳$$

$$I = \frac{۱}{۳} \times ۱۰۰۰ \times (۴۳/۷)^۳ + ۱۱۷۸۱(۱۲۵ - ۴۳/۷)^۲ = ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

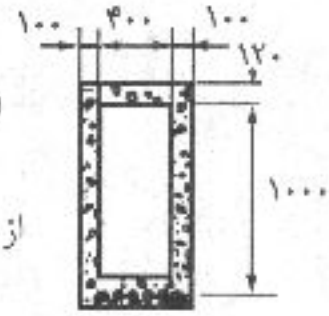
$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow M = \frac{\sigma_c I}{c} = \frac{۸ \times ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶}{۴۳/۷} = ۱۹/۳۴ \times ۱۰^۶\ N.mm = ۱۹/۳۴\ kN.m$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_s I}{nc} = \frac{۱۵۰ \times ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶}{۱۲ \times ۸۱/۳} = ۱۶/۲\ kN.m$$

۶-۴۴. مقطع یک تیر بتن مسلح همانند شکل به‌صورت جعبه‌ای می‌باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی مساوی ۳۶۰۰ میلی‌مترمربع و $n = ۱۰$ می‌باشد. اگر حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی ۷ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع چقدر می‌باشد.

$$A_s = ۳۶۰۰\ mm^۲ \qquad nA_s = ۳۶۰۰۰\ mm^۲$$

www.Mohandesyar.com



مسأله ۶-۴۴

(ابعاد برحسب میلی‌متر)

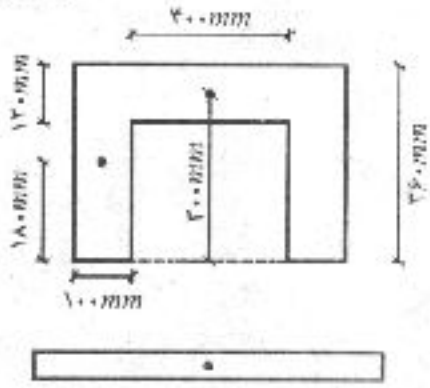
$$(۴۰۰ \times ۱۲۰)(x - ۶۰) + ۲ \times (۱۰۰ \times x)\frac{x}{۲} = ۳۶۰۰۰ \times (۱۱۲۰ - x)$$

از حل معادله فوق خواهیم داشت: $x = ۳۶۰\,mm\,,\ ۱۱۲۰ - x = ۷۶۰$

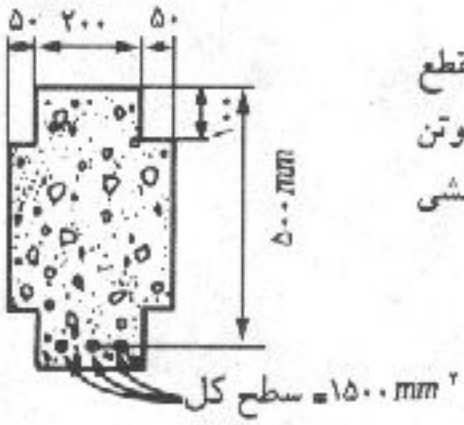
$$\sigma_{st} = ۱۰\left(\frac{۷۶۰}{۳۶۰}\right) \times ۷ = ۱۴۷/۸\,N/mm^۲$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۴۰۰)(۱۲۰)^۳ + (۴۰۰ \times ۱۲۰)(۳۰۰)^۲ + ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۳۶۰)^۳\right]$$

$$+ ۲(۱۰۰ \times ۳۶۰)(۱۸۰)^۲ + ۳۶۰۰۰(۱۱۲۰ - ۳۶۰)^۲ = ۲/۸۳ \times ۱۰^{۱۰}$$

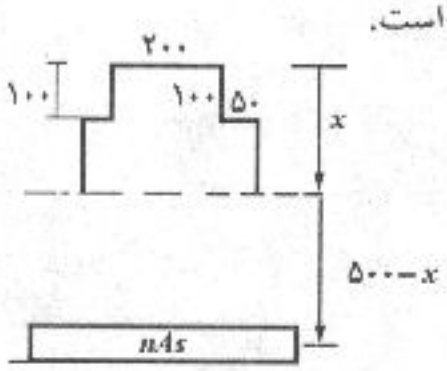


$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{۷ \times ۲/۸۳ \times ۱۰^{۱۰}}{۳۶۰} = ۵۴۹/۹۲\,kN.m$$



مسأله ۶-۴۵

۶-۴۵. تنش موجود در میلگردهای کششی یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده، در اثر لنگر خمشی مثبت، مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. اگر $n = ۱۲$ باشد، مقدار لنگر خمشی چقدر است.



$$nA_s = ۱۲ \times ۱۵۰۰ = ۱۸۰۰۰\,mm^۲$$

$$\left[۳۰۰(x - ۱۰۰)\right]\frac{(x - ۱۰۰)}{۲} + (۲۰۰ \times ۱۰۰)(x - ۵۰) = ۱۸۰۰۰(۵۰۰ - x)$$

پس از حل معادله فوق: $x = ۲۱۲/۸۷\,mm$,

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۳۰۰)(۱۱۲/۸۷)^۳ + (۳۰۰ \times ۱۱۲/۸۷)\left(\frac{۱۱۲/۸۷}{۲}\right) + \frac{۱}{۱۲}(۲۰۰)(۱۰۰)^۳$$

$$+ (۲۰۰ \times ۱۰۰)(۱۶۲/۸۷)^۲ + (۱۸۰۰۰)(۲۸۷/۱۳)^۲ \Rightarrow I = ۲۱/۷۵ \times ۱۰^۸\,mm^۴$$

$$\sigma = n\frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma I}{nc} = \frac{۱۴۰ \times ۲۱/۷۵ \times ۱۰^۸}{۱۲ \times ۲۸۷/۱۳} = ۸۸/۴ \times ۱۰^۶\,N.mm = ۸۸/۴\,kN.m$$

www.Mohandesyar.com

۶-۴۶. مثال ۶-۱۲ را با تغییر h به ۱۰۰ میلی‌متر، مجدداً حل نمایید.

الف)

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{(0/05)(0/1)^2}{6} = 8/33 \times 10^{-5} m^3$$

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{2083 \times 10^{-6}}{8/33 \times 10^{-5}} = 25 MPa$$

ب)

$$\bar{r} = 0/25 m \quad , \quad r_o = 0/25 + 0/05 = 0/3 m \quad , \quad r_i = 0/2 m$$

$$R = \frac{h}{ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} = \frac{1}{ln\left(\frac{0/3}{0/2}\right)} = 0/24663 m$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^{-6}(0/24663 - 0/2)}{(0/2)(0/005)(0/25 - 0/24663)} = 28/8 MPa$$

$$\sigma_o = \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^{-6}(0/24663 - 0/3)}{(0/3)(0/05)(0/25 - 0/24663)} = -22 MPa$$

پ)

$$\bar{r} = 0/075 m \qquad r_o = 0/125 m \qquad r_i = 0/025 m$$

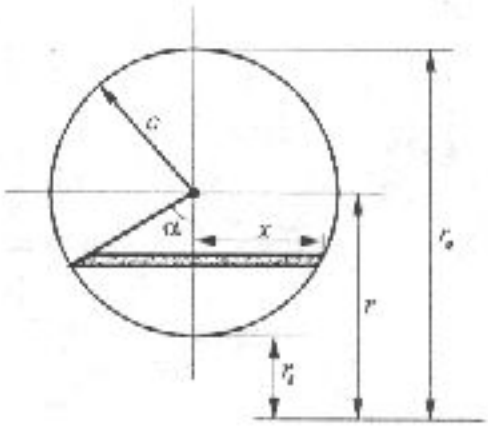
$$R = \frac{0/1}{ln\left(\frac{0/125}{0/025}\right)} = 0/06213 m$$

$$\sigma_i = \frac{2083 \times 10^{-6} \times (0/06213 - 0/025)}{(0/025)(0/005)(0/01287)} = 48/1 MPa$$

$$\sigma_o = \frac{2083 \times 10^{-6} \times (0/06213 - 0/125)}{(0/125)(0/005)(0/01287)} = -16/28 MPa$$

۶-۴۷. معادلهٔ ۶-۲۳ را به‌دست آورید.

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \qquad A = \pi c^2$$



$$\int_A \frac{dA}{r} = \int \frac{2 \times dr}{r} = \int_0^{\pi} \frac{2c\, Sin\alpha}{\bar{r} + c\, Cos\alpha} c\, Sin\alpha\, d\alpha$$

www.Mohandesyar.com

$$= \int_{۰}^{\pi} \frac{۲c^{۲}(۱ - Cos^{۲}\alpha)}{\bar{r} + c\ Cos\alpha}\, d\alpha = ۲\int_{۰}^{\pi} \frac{c^{۲} - c^{۲}Cos^{۲}\alpha + \bar{r}^{۲} - \bar{r}^{۲}}{\bar{r} + c\ Cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= ۲\int_{۰}^{\pi} \left(\frac{c^{۲} - \bar{r}^{۲}}{\bar{r} + c\ Cos\alpha} + \bar{r} - c\ Cos\alpha\right) d\alpha = ۲\pi\ (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^{۲} - c^{۲}})$$

$$R = \frac{\pi\, c^{۲}}{۲\pi\ (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^{۲} - c^{۲}}\ )} = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^{۲} - c^{۲}}}{۲}$$

۶-۴۸. مطلوب است تعیین بزرگترین لنگر خمشی که می‌تواند بر یک تیر منحنی، نظیر چیزی که در شکل ۶-۲۵ -الف نشان داده شده است، با $\bar{r}$ = ۱۰۰ میلی‌متر وارد گردد. سطح مقطع تیر، دایره شکل با قطر ۶۰ میلی‌متر و تنش مجاز مساوی ۷۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^{۲} - c^{۲}}}{۲} = \frac{۱۰۰ + \sqrt{۱۰۰^{۲} - ۳۰^{۲}}}{۲} = ۹۷/۷\, mm$$

$$\sigma = \frac{M\,(R - r)}{rA\,(\bar{r} - R)} \Rightarrow M = \frac{\sigma rA\,(\bar{r} - R)}{R - r}$$

$$M_{۰} = \frac{۷۰ \times ۱۳۰ \times \pi(۳۰)^{۲} \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۱۳۰} = -\ ۱۸۳۲\, N.m$$

$$M_{i} = \frac{۷۰ \times ۷۰ \times \pi(۳۰)^{۲}\ (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۷۰} = ۱۱۵۰\, N.m$$