

مسائل فصل پنجم

۱-۵. مطلوب است تعیین تنش برشی در تارهای خارجی یک میله استوانه‌ای توپر به قطر ۷۵ میلی‌متر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۵۰۰ نیوتن‌متر، با فرض اینکه لنگر پیچشی در امتداد نشان داده شده در شکل ۵-۵-الف، وارد گردد، جهت تنشهای برشی محاسبه شده را در روی یک طرح مناسب نشان دهید.

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (0.075)^4}{32} = 3.11 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad C = \frac{d}{2} = 0.0375 \text{ m}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{5500 \times 0.0375}{3.11 \times 10^{-6}} = 6.63 \times 10^8 \text{ Pa} = 663 \text{ MPa}$$



۲-۵. یک محور استوانه‌ای توخالی به قطر خارجی ۱۰۰ میلی‌متر و قطر داخلی ۸۰ میلی‌متر مفروض است. اگر تنش برشی مجاز مصالح استوانه ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، لنگر پیچشی قابل حمل توسط این محور را تعیین نمایید. در صورتی که این لنگر پیچشی بر محور وارد آید، تنش برشی موجود در سطح داخلی محور را تعیین نمایید.

$$J = \frac{\pi}{2} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{2} (100^4 - 80^4) = 5.8 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$T_{all} = \frac{\tau_{all} J}{c} = \frac{55 \times 5.8 \times 10^8}{50} = 6.37 \times 10^8 \text{ N.mm} = 637.5 \text{ N.m}$$

$$\tau_{inner} = \frac{\rho}{c} \tau = \frac{40}{50} \times 55 = 44 \text{ N/mm}^2$$

۳-۵. یک میله استوانه‌ای از چوب داگلاس‌فیر به قطر ۲۰۰ میلی‌متر که الیاف آن به موازات محور مرکزی آن می‌باشد، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز در امتداد الیاف این چوب ۸/۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر پیچشی مجاز قابل حمل توسط این میله استوانه‌ای.

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (0.1)^4}{2} = 1.57 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

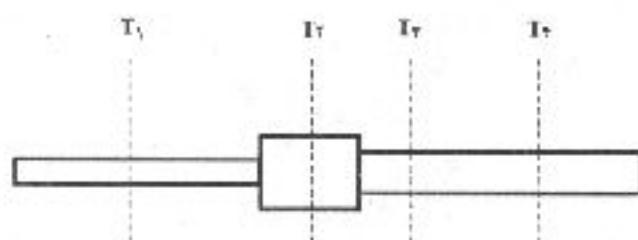
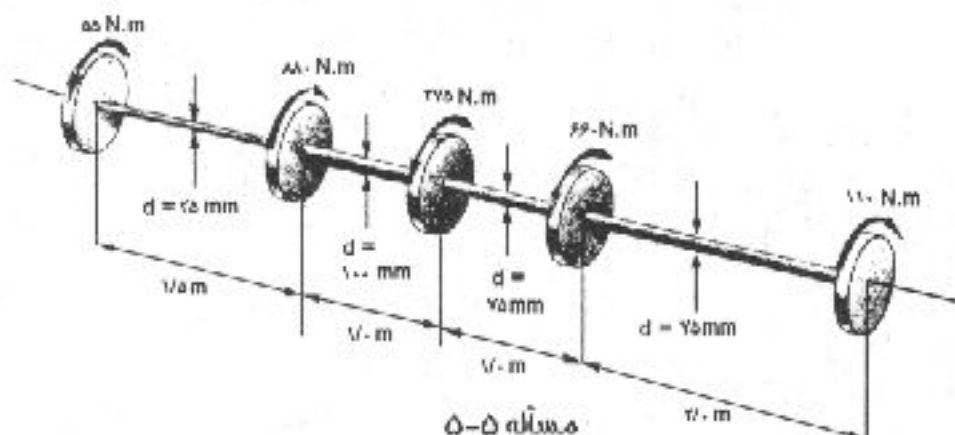
$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{8.4 \times 10^6 \times 1.57 \times 10^{-4}}{0.1} = 13188 \text{ N.m}$$

۴-۵. اگر از داخل یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۳۰۰ میلی‌متر، سوراخی استوانه‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر برداشته شود، چند درصد از مقاومت پیچشی این محور کم می‌شود.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{\pi}{2} (r^4 - h^4)}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{150^4 - 100^4}{150^4} = 0.802 = 80.2\%$$

$$100\% - 80.2\% = 19.8\%$$

۵-۵. محور استوانه‌ای نشان داده شده مفروض است. حداکثر تنش برشی پیچشی ایجاد شده در این محور چقدر است و بین کدام یک از چرخ‌دنده‌ها اتفاق می‌افتد.



با انتخاب مقاطعی در محل‌های مورد نیاز و بکارگیری معادله تعادل پیچشی کوپل پیچشی اعمال شده بر مقاطع بدست می‌آید:

$$T_1 = 55 \text{ N.m} \quad T_2 = 825 \text{ N.m} \quad T_3 = 550 \text{ N.m} \quad T_4 = 110 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{T_1 c_1}{J_1} = \frac{55000 \text{ (N.mm)} \times \frac{75}{2}}{\frac{\pi}{32} (75)^4} = 17/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{825000 \times 50}{\frac{\pi}{32} (100)^4} = 4/2 \text{ MPa}$$

بین مقاطع ۳ و ۴ به علت یکسان بودن سایر شرایط، مقطعی که کوپل بیشتری به آن اعمال می‌شود بحرانی‌تر است:

$$\tau_3 = \frac{T_3 c_3}{J_3} = \frac{550000 \times \frac{75}{2}}{\frac{\pi}{32} (75)^4} = 6/64 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \tau_1 = 17/9 \text{ MPa}$$

۶-۵. یک محور فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر توانی معادل ۴۵۰ کیلووات را با سرعتی معادل ۱/۵ هرتز منتقل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در محور. اگر سرعت به ۶ هرتز افزایش پیدا کند، چه تغییری در مقدار تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$T = 954 \frac{kW}{n} = 954 \times \frac{450}{1/5 \times 60} = 47700 \text{ N.m}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{47700 \times 10^3 \times 75}{\frac{\pi}{2} (75)^4} = 71/9 \text{ MPa}$$

$$\tau' = \frac{1/5}{6} \times 71/9 = 18 \text{ MPa} \quad \text{مقدار تغییر تنش} = 71/9 - 18 = 53/9 \text{ MPa}$$

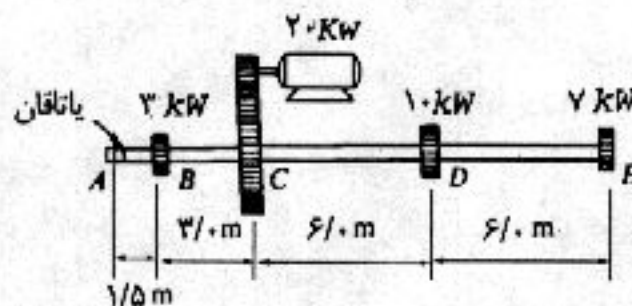
۷-۵. دو محور استوانه‌ای فولادی، یکی توخالی به قطر خارجی ۹۰ میلی‌متر و به قطر داخلی ۳۰ میلی‌متر و دیگری توپر به قطر ۹۰ میلی‌متر قرار است که هر کدام توانی معادل ۵۰ کیلووات با سرعت ۳ هرتز منتقل نمایند. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در هر کدام از محورها را تعیین نمایید.

$$T = 9540 \times \frac{50}{3 \times 60} = 2650 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{Tc_1}{J_1} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} (90^4 - 30^4)} = 18/75 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{Tc_2}{J_2} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} 90^4} = 18/51 \text{ MPa}$$

۸-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر حرکت یک موتور به توان ۲۰ کیلووات را به سه چرخ‌دنده با سرعت ۳ هرتز مطابق شکل انتقال می‌دهد. توان مصرفی هر کدام از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی پیچشی در مقاطعی بین AB، BC، CD، DE.



مسئله ۸-۵

با دقت به مجموعه نشان داده شده در شکل ملاحظه می‌گردد که بیشترین توان انتقالی ۱۷ kW بوده که توسط قسمت CD محور منتقل می‌گردد و با توجه به یکسان بودن مشخصات در طول محور، این قسمت بحرانی‌ترین قسمت محور می‌باشد.

$$T_{max} = 9540 \times \frac{17}{3 \times 60} = 901 \text{ N.m} \quad J = \frac{\pi}{2} \times 25^4 = 0/61 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{CD} = \frac{Tc}{J} = \frac{901 \times 10^3 \times 25}{0/61 \times 10^9} = 36/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{3}{17} \times 36/9 = 6/52 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{DE} = \frac{7}{17} \times 36/9 = 15/19 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{AB} = 0$$

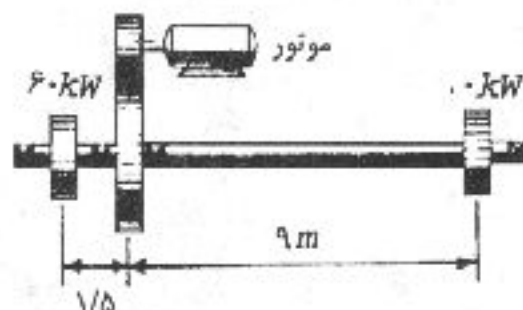
۹-۵. یک موتور توسط یک سری چرخ‌دنده محوری مطابق شکل را با سرعتی معادل ۶۳۰ دور در دقیقه می‌چرخاند. توان مصرفی هر یک از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. در صورتی که بخواهیم محور فوق استوانه‌ای توپر با قطر ثابت باشد، با توجه به اینکه تنش برشی مجاز ۳۷ نیوتن بر میلی‌متر مربع است، قطر محور را تعیین نمایید.

$$T = 9540 \times \frac{60}{630} = 908.57 \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^3 = \frac{T}{\tau} \Rightarrow \frac{\pi}{2} c^3 = \frac{908.57 \times 10^3}{37}$$

$$\Rightarrow c = 25 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 50 \text{ mm}$$



مسئله ۹-۵

۱۰-۵. مطلوب است طراحی یک محور استوانه‌ای توخالی برای انتقال ۲۰۰ کیلووات با سرعت ۷۵ دور در دقیقه بدون اینکه تنش برشی ایجاد شده در آن از ۴۳ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند. نسبت قطر خارجی به قطر داخلی را مساوی ۱/۲ در نظر بگیرید.

$$T = 9540 \times \frac{200}{75} = 25440 \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{25440 \times 10^3}{43} = 5/9 \times 10^5$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{32} \left[d^4 - \left(\frac{d}{1/2} \right)^4 \right]}{\frac{d}{2}} = 5/9 \times 10^5 \Rightarrow d_o = 180 \text{ mm}$$

$$d_i = \frac{d_o}{1/2} = 150 \text{ mm}$$

۱۱-۵. مطلوب است تعیین زاویه پیچش کل بین دو مقطع A و E از محور مسأله ۸-۵. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$T_{AB} = 0 \quad \text{و} \quad T_{CD} = 901 \text{ N.m}$$

$$T_{BC} = \frac{3}{15} \times 901 = 180 \text{ N.m} \quad T_{DE} = \frac{5}{15} \times 901 = 300 \text{ N.m}$$

$$\varphi_A = \sum \frac{TL}{JG} \quad J = \frac{\pi(25 \times 10^{-3})^4}{2} = 6/14 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\varphi_A = \frac{1}{6/14 \times 10^{-9} \times 0.84 \times 10^5} \left[-180 \times 3 + 901 \times 6 + 300 \times 6 \right] = 0.138 \text{ rad} = 8^\circ$$

۱۲-۵. طول یک میله استوانه‌ای توپر آلومینیومی به قطر ۵ میلی‌متر چقدر باید باشد تا بدون اینکه تنش برشی در آن از ۴۲ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند، بتواند یک دور کامل دوران کند. ضریب ارتجاعی برشی G مساوی $۰/۲۷ \times ۱۰^{۱۱}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau JL}{cJG} = \frac{\tau L}{cG}$$

$$L = \frac{\varphi cG}{\tau} = \frac{2\pi \cdot (2/5 \times 10^{-2})(0/27 \times 10^{11})}{42 \times 10^6} = 10/1 m$$

۱۳-۵. یک میله استوانه‌ای توخالی به طول ۱۵۰ میلی‌متر به عنوان یک فنر پیچشی به کار گرفته می‌شود. نسبت قطر داخلی به قطر خارجی این میله $\frac{1}{4}$ می‌باشد. سختی لازم برای این فنر، $\frac{1}{84}$ درجه برای هر نیوتن متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر خارجی این میله ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$J = \frac{TL}{\varphi G} = \frac{1000(N.mm) \times 150}{\left(\frac{1}{84} \times \frac{\pi}{180}\right) \times 0/84 \times 10^5} = 8594 mm^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} \left[c^4 - \left(\frac{c}{2} \right)^4 \right] = \frac{15\pi}{32} c^4 = 8594 \Rightarrow c = 8/74 mm$$

$$d = 2c = 17/5 mm$$

۱۴-۵. یک محور استوانه‌ای توپر آلومینیومی به طول ۱ متر و قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر قرار است با یک محور استوانه‌ای توخالی فولادی با همان طول و همان قطر خارجی تعویض شود، به طوری که هر دو محور بتوانند لنگر پیچشی یکسانی را حمل کنند و زاویه پیچش آنها در طول کل، مساوی باشد. شعاع داخلی محور استوانه‌ای توخالی فولادی چقدر باید باشد. ضریب ارتجاعی برشی فولاد مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم مساوی $۰/۲۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند.

$$\frac{\varphi_{st}}{\varphi_{Al}} = 1 \Rightarrow \frac{J_{Al} G_{Al}}{J_{st} G_{st}} = 1 \Rightarrow J_{st} = \frac{G_{Al}}{G_{st}} J_{Al}$$

$$\frac{\pi}{32} (50^4 - d_i^4) = \frac{0/28}{0/84} \times \frac{\pi}{32} 50^4$$

$$d_i^4 = 50^4 - \frac{28}{84} 50^4 \Rightarrow d_i = 45/2 mm \quad r_i = \frac{d_i}{2} = 22/6 mm$$

۱۵-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد است. قرار است یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۳۵ میلی‌متر، هم محور با استوانه اصلی، در داخل آن از انتهای آزاد ایجاد گردد. مطلوب است تعیین طول سوراخ فوق به طوری که

زاویه پیچشی کل محور در اثر لنگر پیچشی 100 نیوتن متر، مساوی $0/12$ درجه گردد. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$J_1 = \frac{\pi}{32} \times 50^4 = 613592/3 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{32} \times (50^4 - 35^4) = 466268/8 \text{ mm}^4$$

$$\varphi = \sum \frac{Tl}{JG} = \frac{T}{G} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{900 - l_1}{J_2} \right) \quad (1)$$

با قرار دادن مقادیر زیر و نیز مقادیر J_1 و J_2 محاسبه شده در بالا مقدار l_1 از معادله اخیر بدست می آید:

$$\varphi = \frac{0/12\pi}{180} \quad \text{و} \quad T = 100 \times 10^3 \text{ N.m} \quad \text{و} \quad G = 0/84 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$(1) \Rightarrow l_1 = 568 \text{ mm} \Rightarrow l_2 = 900 - 568 = 332 \text{ mm}$$

۱۶-۵. یک موتور به قدرت 75 کیلووات توسط چرخ دنده A محوری را با سرعت $26/5$ دور در دقیقه می چرخاند. چرخ دنده های مورب B و C همزن یک مخلوط کننده سیمان لاستیکی را به دوران در می آورند. اگر توان مصرفی همزن متصل به چرخ دنده B مساوی 25 کیلووات و چرخ دنده C مساوی 50 کیلووات باشد، قطر لازم برای محور را تعیین کنید. تنش برشی مجاز محور جلوگیری شده است. اگر ضریب ارتجاعی برشی مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، زاویه پیچش قسمت چپ محور را تعیین نمایید.

$$T_B = 9540 \times \frac{25}{26/5} = 9000 \text{ N.m}$$

$$T_A = 9540 \times \frac{50}{26/5} = 18000 \text{ N.m}$$

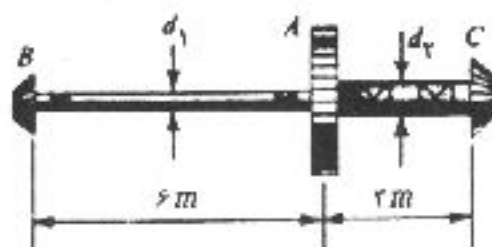
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} \quad \left(\frac{J}{c} \right)_{\text{left}} = \frac{9 \times 10^3 (\text{N.m})}{40} = 225 \times 10^3$$

$$\frac{\pi}{2} c_1^3 = 225 \times 10^3 \Rightarrow c_1 = 52 \Rightarrow d_1 = 104 \text{ mm}$$

$$\left(\frac{J}{c} \right)_{\text{right}} = \frac{18 \times 10^3}{40} = 450 \times 10^3$$

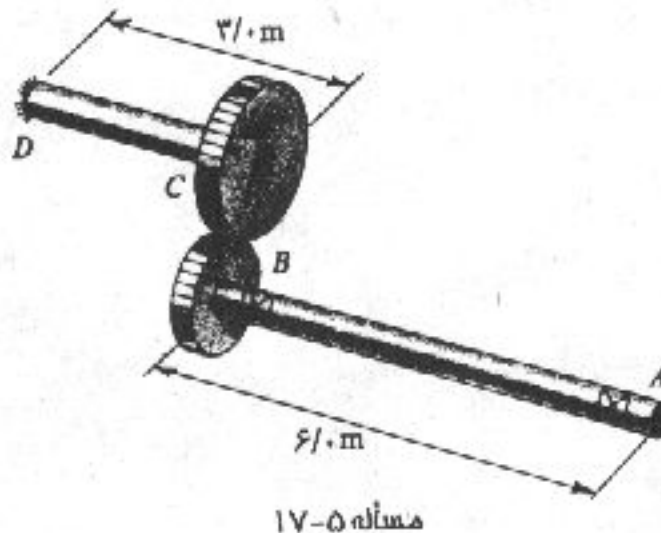
$$\frac{\pi}{2} c_2^3 = 450 \times 10^3 \Rightarrow c_2 = 65/9 \text{ mm} \Rightarrow d_2 = 131/8 \text{ mm}$$

$$\varphi = \frac{TL}{Jc} = 0/056 (\text{rad}) = 3/2^\circ$$



مسئله ۵-۱۶

۵-۱۷. دو محور فولادی به قطر ۵۰ میلی متر، توسط یک چرخ دنده به یکدیگر متصل شده اند، چرخ دنده B دارای قطر ۲۰۰ میلی متر و چرخ دنده C دارای قطر ۴۰۰ میلی متر می باشد. اگر انتهای D گیردار باشد، تحت اثر یک لنگر پیچشی مساوی ۵۶۰ نیوتن متر در A، میزان دوران انتهای A چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۵-۱۷

زاویه پیچش محور AB برابر است با:

$$\varphi_{A1} = \frac{TL}{JG} = \frac{560 \times 10^3 \times 6000}{\frac{\pi}{2} (25)^4 \times 0.84 \times 10^5} = 0.064 \text{ rad}$$

اعمال لنگر ۵۶۰ kN.m به قسمت AB باعث ایجاد لنگر ۱۱۲۰ kN.m در CD خواهد شد.

$$T_c = \frac{400}{200} T_B = 1120$$

بنابراین زاویه پیچش محور CD عبارتست از:

$$\varphi_c = \frac{1120 \times 10^3 \times 3000}{\frac{\pi}{2} (25)^4 \times 0.84 \times 10^5} = 0.064 \text{ rad}$$

به علت وجود سیستم چرخ دنده بین دو شفت، دوران φ_c موجب می شود که شفت AB به مانند یک جسم صلب دوران کند. این دوران به نسبت قطر چرخ دنده ها می باشد:

$$\varphi_{A2} = 2\varphi_c = 0.128 \text{ rad}$$

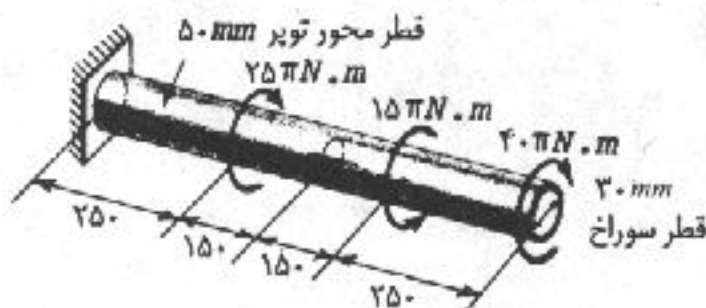
$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = 0.193 \text{ rad} \rightarrow \varphi_A = 11^\circ$$

۵-۱۸. در مثال ۵-۱۷ چه لنگری باید به تنهایی بر نقطه A اثر کند تا همان زاویه پیچشی را در A تولید کند که لنگرهای پیچشی مؤثر بر نقاط B و D ایجاد می کردند.

$$T = \text{Const} \quad \varphi = \sum \frac{TL}{JG}$$

$$0.0233 = \frac{T}{G} \left[\left(\frac{0.5 + 0.3}{0.575 \times 10^{-4}} \right) + \left(\frac{0.2}{3.83 \times 10^{-4}} \right) \right] \Rightarrow T = 281/86 \text{ N.m}$$

۵-۱۹. (الف) مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در محور نشان داده شده در شکل. (ب) مطلوب است تعیین زاویه پیچش دو انتهای میله نسبت به یکدیگر. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۵-۱۹

مقاطع ۱ و ۲ دارای شرایط هندسی یکسانی هستند، بنابراین مقطع ۱ که کوپل بیشتری را حمل می‌کند بحرانی است. همچنین بین مقاطع ۳ و ۴ نیز مقطع ۴ بحرانی است.

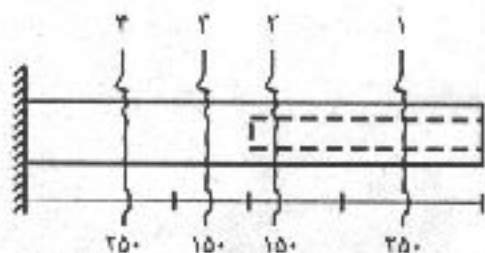
$$T_1 = 40\pi \quad T_2 = 25\pi \quad T_3 = 25\pi \quad T_4 = 50\pi$$

(الف)

$$\tau_1 = \frac{T_1 c}{J} = \frac{40\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} = 5.88 \text{ MPa}$$

$$\tau_4 = \frac{T_4 c}{J} = \frac{50\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} \times 50^4} = 6.4 \text{ MPa}$$

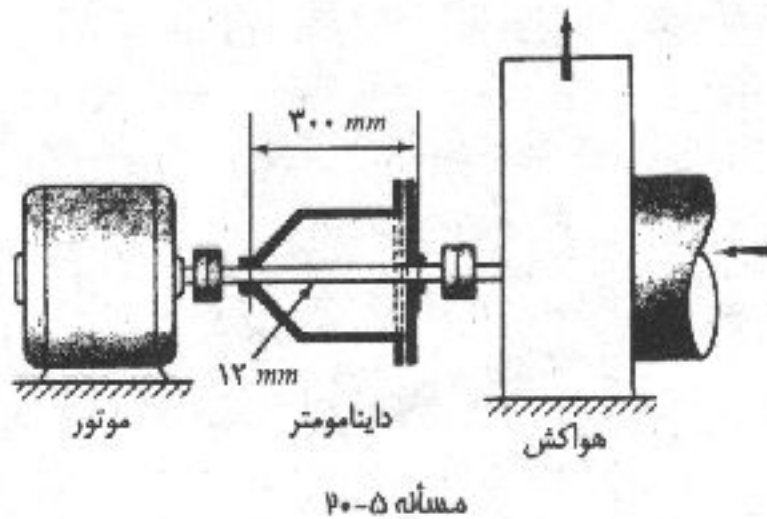
$$\tau_{\max} = \tau_4 = 6.4 \text{ MPa}$$



(ب)

$$\varphi = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{1}{0.84 \times 10^5} \left[\frac{40\pi \times 10^3 \times 250}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 150}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 150}{\frac{\pi}{32} 50^4} + \frac{50\pi \times 10^3 \times 250}{\frac{\pi}{32} 50^4} \right] \Rightarrow \varphi = 1.95 \times 10^{-2} \text{ rad} = 0.11^\circ$$

۵-۲۰. برای تعیین توان لازم برای دوران پره‌های یک هواکش با سرعت ۲۰ هرتز از یک داینامومتر استفاده می‌کنیم. داینامومتر از یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۲ میلی متر که دو دیسک به فاصله ۳۰۰ میلی متر از یکدیگر روی آن نصب شده‌اند، تشکیل یافته است. یکی از این دیسک‌ها به صورت یک شیبوره می‌باشد که یک انتهایش به میله بسته شده است و انتهای دیگر آن در مقابل دیسک دوم قرار دارد. در حین دوران، زاویه چرخش نسبی این دو دیسک مساوی ۶ درجه اندازه‌گیری شده است. توان داده شده به پره‌های هواکش را بر حسب کیلووات تعیین کنید. ضریب ارتجاعی برشی محور را 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



$$T = 9540 \cdot \frac{P}{20 \times 60} \text{ N.m}$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} \Rightarrow 6 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9540 \cdot \frac{P}{1200} \times 0.3}{\frac{\pi}{32} (0.012)^4 \times 0.84 \times 10^{11}} \Rightarrow P = 7.5 \text{ kW}$$

۲۱-۵. یک محور فولادی توپر به شکل مخروط ناقص در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد و تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد (به شکل مراجعه کنید). مطلوب است تعیین زاویه پیچش انتهای آزاد اگر $d_1 = 150$ میلی متر، $d_2 = 50$ میلی متر، $L = 500$ میلی متر و $T = 3000$ نیوتن متر می باشد. فرض کنید که فرضیات مربوط به

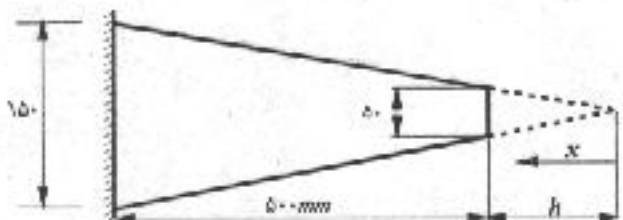


مسئله ۲۱-۵

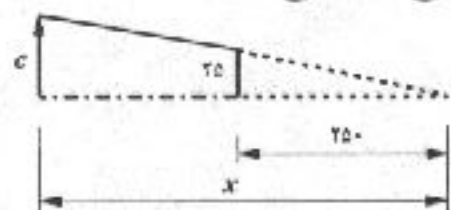
پیچش میله های استوانه ای در این حالت نیز صادق است. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^{11} نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

$$\frac{h + 500}{150} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 250 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{25} = \frac{x}{250} \Rightarrow c = \frac{x}{10}$$



اگر شعاع هر مقطع دلخواه باشد:

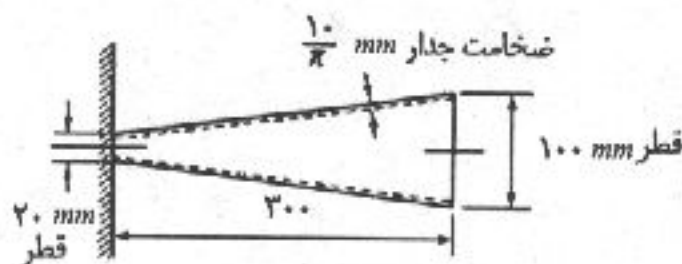


$$J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{10} \right)^4 = \frac{\pi x^4}{2 \times 10^4}$$

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{3000}{0.84 \times 10^{11}} \times \frac{2 \times 10^4}{\pi} \int_{0.025}^{0.5} \frac{dx}{x^4} \Rightarrow \varphi = 4.6 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$\varphi = 0.267^\circ$$

۲۲-۵. یک مخروط ناقص جدار نازک دارای ابعاد نشان داده شده در شکل می باشد. مطلوب است تعیین سختی پیچشی این عضو (سختی پیچشی عبارت است از مقدار لنگر پیچشی لازم برای دوران واحد) ضریب ارتجاعی برشی مساوی G می باشد.

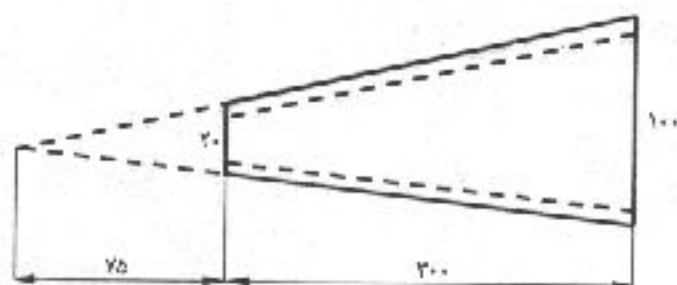


مسئله ۲۲-۵

ابعاد نامعلوم مشابه مسأله قبل محاسبه شده اند.

$$c = \frac{x}{\lambda}$$

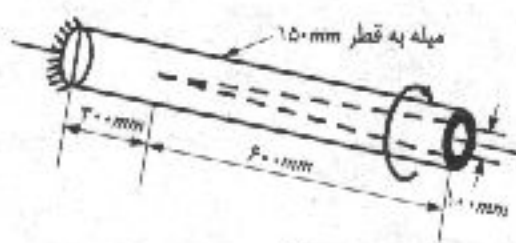
$$J = 2\pi c^3 l = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 \left(\frac{10}{\pi}\right) = \frac{5x^3}{128}$$



$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T}{G} \int_{75}^{300} \frac{dx}{\frac{5}{128} x^3} = \frac{T}{\left(\frac{5}{128}\right)G} (8/333 \times 10^{-3})$$

$$\varphi = 1 \text{ rad} \Rightarrow T = 4680.75G$$

۲۳-۵. یک محور استوانه‌ای به قطر ۱۵۰ میلی متر که از مصالح ارتجاعی - خطی می باشد، دارای یک سوراخ به شکل مخروط و به طول ۶۰۰ میلی می باشد (مطابق شکل). این محور در یک انتها گیردار و در انتهای آزادش تحت اثر لنگر پیچشی T می باشد. مطلوب است تعیین حداکثر زاویه پیچش محور.

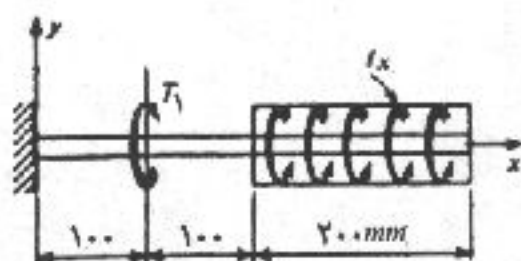


مسئله ۲۳-۵

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T \times 0.3}{\frac{\pi (0.15)^4}{32} \cdot G} + \int_0^{0.6} \frac{T dx}{\frac{\pi}{32} \left[(0.15)^4 - \left(\frac{x}{6}\right)^4 \right] G}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1/9 \times 10^7 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^7 T}{\pi G} \int_0^{10} \frac{dx}{(0/9)^2 - x^2} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^7 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^7 T}{\pi G} \left(\frac{1}{2 \times (0/9)^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{0/9 + x}{0/9 - x} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{0/9} \right) \right]_{0,10}^{10} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^7 T}{\pi G} + \frac{3/96 \times 10^7 T}{\pi G} = \frac{5/86 \times 10^7 T}{\pi G}
 \end{aligned}$$

۲۴-۵. محور مت‌ای به شکل استوانه با سختی پیچشی ثابت JG ، در حین عمل سوراخ‌کاری، تحت اثر



مسئله ۲۴-۵

لنگر پیچشی متمرکز $T_1 = -100$ نیوتن متر و
لنگر پیچشی گسترده یکنواخت $T_x = 500$ نیوتن
متر بر متر مطابق شکل قرار گیرد. مطلوب است
تعیین زاویه پیچش انتهای آزاد مت. همچنین
ترسیم تغییرات لنگر پیچشی $T(x)$ و ترسیم
تغییرات زاویه پیچش $\phi(x)$ را رسم نمایید.

$$JG \frac{d\phi}{dx} = -T_x = 100 \langle x - 0/1 \rangle^0 - 500 \langle x - 0/2 \rangle^0$$

$$T = JG \frac{d\phi}{dx} = 100 \langle x - 0/1 \rangle^0 - 500 \langle x - 0/2 \rangle^0 + c_1$$

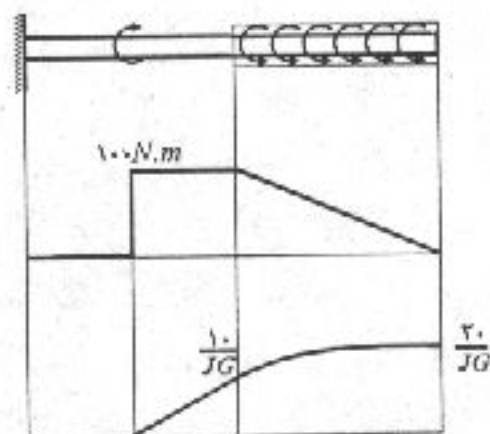
$$T(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$JG \phi = 100 \langle x - 0/1 \rangle^1 - 250 \langle x - 0/2 \rangle^1 + c_2$$

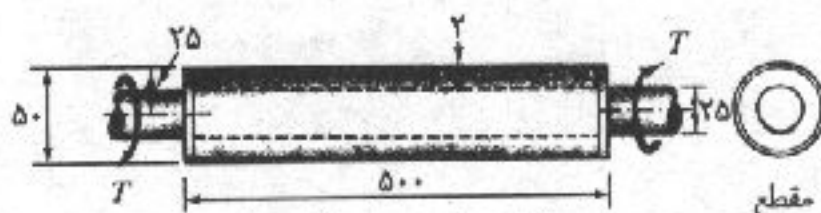
$$\phi(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{JG} [100 \langle x - 0/1 \rangle^1 - 250 \langle x - 0/2 \rangle^1]$$

$$\phi(0/2) = \frac{20}{JG}$$



۲۵-۵. یک لوله استوانه‌ای به قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر و ضخامت جداره ۲ میلی‌متر در دو انتهای خود توسط فلانجهای صلب به یک محور استوانه‌ای توپر معتمد به قطر ۲۵ میلی‌متر متصل شده است. (به شکل مسأله مراجعه کنید). اگر لوله و محور استوانه‌ای توپر هر دو از مصالح ارتجاعی - خطی یکسانی ساخته شده باشند، چه قسمت از لنگر پیچشی وارده T توسط لوله حمل می‌شود



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۲۵-۵

$$\varphi_s = \varphi_t \quad \frac{T_s L}{J_s G} = \frac{T_t L}{J_t G}$$

$$\frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s}{J_t} = \frac{\frac{\pi(0.025)^4}{32}}{2\pi\left(\frac{0.05}{2}\right)^2(0.002)} = 0.195 \Rightarrow T_s = 0.195 T_t$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.195 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.837 T$$

۵-۲۶. اگر لوله خارجی مثال قبل از آلومینیوم و محور استوانه‌ای توپر از فولاد ساخته شده باشد، چه لنگر پیچشی می‌تواند به این مجموعه وارد گردد به طوری که تنش برشی در لوله آلومینیومی از 100 نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. ضریب ارتجاعی برشی فولاد را 100×84 و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم را 100×28 نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید. زاویه پیچش لوله آلومینیومی در طول 500 میلی‌متری آن تحت اثر لنگر پیچشی فوق چقدر است.

$$\varphi_s = \varphi_t \Rightarrow \frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s G_s}{J_t G_t} = 0.195 \left(\frac{84}{28} \right) = 0.586$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.586 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.631 T$$

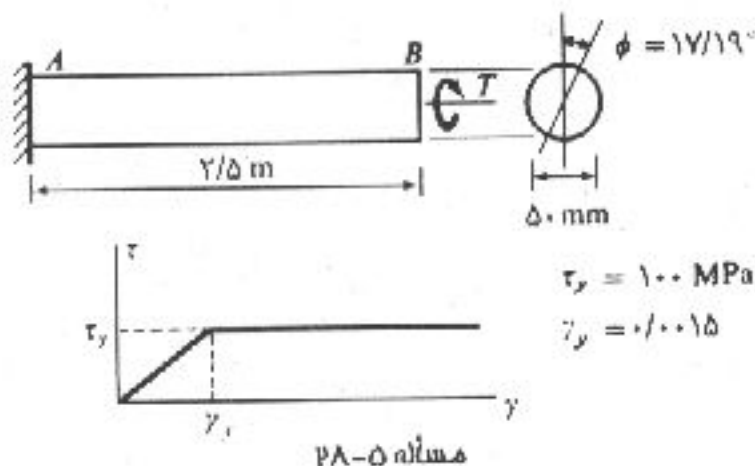
$$\tau_{max} = \frac{T_t c_t}{J_t} \Rightarrow 100 \times 10^6 = \frac{(0.631)T \times 0.025}{1/96 \times 10^{-7}} \Rightarrow T = 1/25 \text{ kN.m}$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau_{max}}{c_t} \left(\frac{L}{G} \right) = \frac{100 \times 10^6}{0.025} \left(\frac{0.5}{28 \times 10^9} \right) = 0.0714 \text{ (rad)} = 4.09^\circ$$

۵-۲۷. یک نمونه فولادی به شکل استوانه توپر به قطر 20 میلی‌متر و طول 450 میلی‌متر در لنگر پیچشی 900 نیوتن متر گسیخته می‌شود. اساس گسیختگی فولاد فوق در پیچش چقدر است.

$$\tau = \frac{TC}{J} = \frac{900(10 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2} (10 \times 10^{-3})^4} = 5.73 \times 10^8 \text{ Pa} = 573 \text{ MPa}$$

۵-۲۸. یک محور استوانه‌ای به قطر 50 میلی‌متر و طول $2/5$ متر مفروض است. یک انتهای این محور گیردار و انتهای آزاد آن به اندازه $17/19$ درجه دوران نموده است. چه لنگر پیچشی T در انتهای آزاد این محور تأثیر کرده که این زاویه پیچش تولید شده است. مشخصات مکانیکی ایده‌ال مصالح در شکل نشان داده شده است.



$$0 \leq \rho \leq \rho_e : \tau = \frac{\rho}{\rho_e} \tau_y$$

$$\rho \geq \rho_e : \tau = \tau_y$$

$$\rho_e \varphi = \gamma_y L \Rightarrow \rho_e = \frac{\gamma_y L}{\varphi} = \frac{0/0015 \times 2500}{17/19 \frac{\pi}{180}} = 12/5 \text{ mm}$$



$$T = \int \tau \rho dA = \int \tau \rho (2\pi \rho) d\rho = \int_0^{\rho_e} 2\pi \left(\frac{\tau_y}{\rho_e}\right) \rho^2 d\rho + \int_{\rho_e}^{10} \tau_y \times 2\pi \rho d\rho$$

$$= 16\pi \int_0^{\rho_e} \rho^2 d\rho + 200\pi \int_{\rho_e}^{10} \rho d\rho = 3170 \text{ N.m}$$

۲۹-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر در قسمتی از طولش توسط ماشین تراش داده شده به طوری که قطر آن به ۷۵ میلی‌متر رسیده است. اگر در نقطه انتقال دو قطر، ماهیچه‌ای به شعاع ۱۲ میلی‌متر تعبیه شود، حداکثر تنش برشی به وجود آمده در محور استوانه‌ای در اثر لنگر پیچشی ۲۷۰۰ نیوتن متر چقدر است؟ اگر شعاع ماهیچه به ۳ میلی‌متر کاهش یابد، حداکثر تنش برشی چقدر خواهد بود.

ضریب تمرکز تنش پیچشی را از روی شکل (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$r = 12 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{12}{75} = 0/16$$

$$\frac{D}{d} = \frac{150}{75} = 2$$

با استفاده از شکل (۳-۵): $K = 1/3$

$$\tau = K \frac{Tc}{J} = 1/3 \times \frac{27 \times 10^3 \times 37/5}{\frac{\pi}{2} (37/5)^4} = 42/37 \text{ MPa}$$

$$r = 3 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{3}{75} = 0/04 \text{ و } \frac{D}{d} = 2 \xrightarrow{\text{شکل (۳-۵)}} K = 1/85$$

$$\tau = \frac{1/85}{1/3} \times 42/37 = 60/3 \text{ MPa}$$

۳۰-۵. مطلوب است تعیین شعاع ماهیچه‌ای که لازم است در محل اتصال دو محور استوانه‌ای توپر به قطرهای ۱۵۰ و ۱۰۰ میلی‌متر ایجاد گردد تا این محور بتواند با تنش برشی مجاز ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع، توانی معادل ۸۰ کیلووات را با سرعت ۱۰۰ دور در دقیقه انتقال دهد.

$$T = 9540 \times \frac{\Lambda^\circ}{100} = 7632 \text{ N.m}$$

$$K = \frac{\tau J}{Tc} = \frac{55 \times \frac{\pi}{2} (50)^3}{7632 \times 10^3 \times 50} = 1/42 \quad \frac{D}{d} = \frac{150}{100} = 1/5$$

با استفاده از شکل (۳-۵) و نیز مقادیر محاسبه شده K و $\frac{D}{d}$ داریم:

$$\frac{r}{d} = 0/12 \Rightarrow r = 12 \text{ mm}$$

۳۱-۵. تنش برشی حداکثر و زاویه پیچش سه میله با طول مساوی و مقطع مربع، مربع مستطیل و دایره با مساحت مساوی را مقایسه کنید. تمام میله‌ها تحت اثر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. قطر مقطع دایره‌ای، ۱۰۰ میلی‌متر و پهنای مقطع مستطیل ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. برای مقطع مربع، $\alpha = 0/208$ و $\beta = 0/141$ و برای مقطع مربع مستطیل $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}$ می‌باشد.

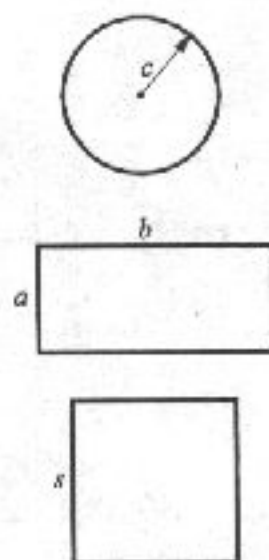
$$A_c = \pi c^2 = \pi (50)^2 = 7854 \text{ mm}^2$$

$$A_R = ab = 25 \times b = 7854 \rightarrow b = 314/2 \text{ mm}$$

$$A_s = s^2 = 7854 \rightarrow s = 88/6$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_s} = \frac{\frac{Tc}{J}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2 c}{J} = \frac{0/208 \times (88/6)^2 \times 50}{\frac{\pi}{2} 50^3} = 0/74$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_s} = \frac{\frac{T}{\alpha_R b a^3}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2}{\alpha_R b a^3} = \frac{0/208 \times (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times 314/2 \times 25^3} = 2/21$$



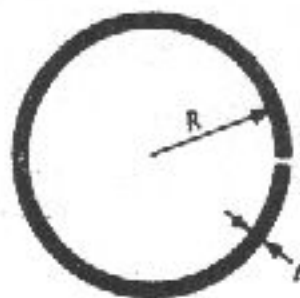
پس بین تنشهای برشی حداکثر نسبت زیر برقرار است:

$$\tau_s : \tau_c : \tau_R = 1 : 0/74 : 2/21$$

$$\frac{\varphi_c}{\varphi_s} = \frac{\frac{TL}{JG}}{\frac{TL}{\beta_s s^2 G}} = \frac{0/141 (88/6)^2}{\frac{\pi}{2} (50)^3} = 0/886$$

$$\frac{\varphi_R}{\varphi_s} = \frac{\beta_s s^2}{\beta_R a^3 b} = \frac{0/141 (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times (25)^3 (314/2)} = 5/32$$

$$\varphi_s : \varphi_c : \varphi_R = 1 : 0/886 : 5/32$$



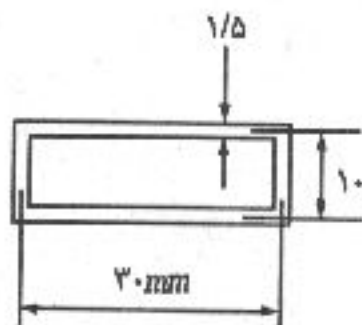
مسئله ۵-۳۳

۳۲-۵. مطلوب است مقایسه مقاومت و سختی پیچشی یک لوله جدار نازک استوانه‌ای از مصالح ارتجاعی خطی در دو حالت یکی وقتی که لوله دارای یک درز طولی می‌باشد و دیگر وقتی که این درز توسط جوش پر شده است.

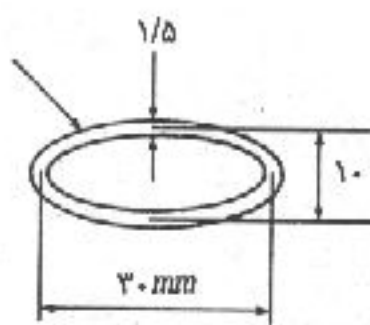
$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{\frac{T}{\alpha_s b c^3}}{\frac{TR}{J}} = \frac{J}{R \alpha_s b c^3} = \frac{\pi R^3 t}{R (\pi/32) (\pi R)^3} = \frac{3R}{t}$$

$$\frac{T_s}{T} = \frac{\frac{\varphi G \beta b c^3}{L}}{\frac{\varphi G J}{L}} = \frac{\beta b c^3}{J} = \frac{0.32 \times (\pi R) \times R^3}{\pi R^3 t} = \frac{t}{3R}$$

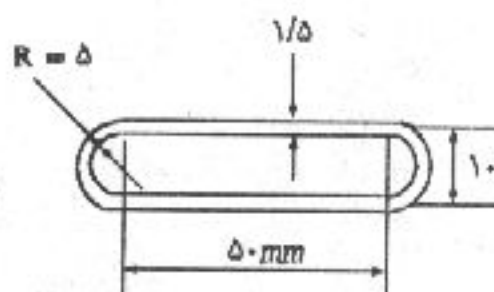
۳۳-۵ تا ۳۵-۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در اعضای با مقطع نشان داده شده در اشکال زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید.



مسئله ۵-۳۳



مسئله ۵-۳۴

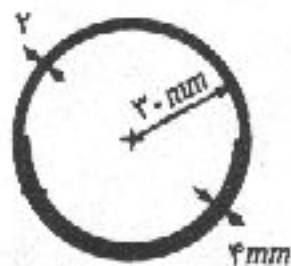


مسئله ۵-۳۵

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times (30 \times 10) \times 1/5} = 55/55 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times (\pi \times 15 \times 5) \times 1/5} = 70/74 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times [50 \times 10 + \pi (4/25)^2]} = 30 \text{ MPa}$$



مسئله ۵-۳۶

۳۶-۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول در عضوی با مقطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۱۰۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید. در مورد مزیت به دست آمده در اثر افزایش ضخامت جداره در قسمتی از مقطع، بحث کنید.

$$A = \pi (30)^2 = 2827/4 \text{ mm}^2$$

$$q = \frac{T}{\tau A} = \frac{100 \times 10^3}{2 \times 2827/4} = 17/68 \text{ N/mm} \quad \tau_{max} = \frac{q}{t_{min}} = \frac{17/68}{2} = 8/84 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{T}{\tau A G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{100 \times 10^3}{4 \times (2827/4)^2 G} \left(\frac{30\pi}{2} + \frac{30\pi}{4} \right) = \frac{2/21 \times 10^{-9}}{G} \text{ rad/mm}$$

$$\theta = \frac{2/21 \times 10^{-9}}{G} \text{ rad/m}$$

۳۷-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ به قطر ۲۵ میلی متر که در محیط دایره ای به قطر ۲۰۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر این اتصال تحت اثر لنگر پیچشی ۲۰ کیلونیوتن متر قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین تنش پیچشی تولید شده در پیچها.

$$F = \frac{T}{r.n} = \frac{20}{0/1 \times 6} = 33/33 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{33330}{\frac{\pi}{4} (0/25)^2} = 67/91 \text{ MPa}$$

۳۸-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۸ پیچ اعلا به قطر ۲۰ میلی متر که در محیط دایره ای به قطر ۲۴۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. (الف) مطلوب است محاسبه لنگر پیچشی قابل انتقال توسط این اتصال در صورتی که تنش مجاز برشی پیچها ۷۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد (ب)، در صورتی که محور و اتصال مزبور با سرعت ۲۵۰ دور در دقیقه دوران داشته باشند، مطلوب است تعیین توان انتقال یافته توسط اتصال بر حسب کیلووات.

$$T = \sum F.r = \sum (\tau A) . r = 8 [750 \times 10^6 \times \pi (0/01)^2] \times 0/12 = 226/2 \text{ kN.m}$$

$$T = \frac{9540P}{n} \Rightarrow P = \frac{226/2 \times 10^3 \times 250}{9540} = 5927/5 \text{ kW}$$

۳۹-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ با سطح مقطع ۱۳۰ میلی متر مربع که در محیط دایره ای به قطر ۲۰۰ میلی متر و ۶ پیچ با مقطع ۳۲۰ میلی متر مربع که در روی دایره ای به قطر ۱۲۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر تنش برشی مجاز در پیچ ۱۱۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، ظرفیت لنگر پیچشی مقطع چقدر می باشد.

ابتدا نیروی مجاز هر پیچ را برای هر دو نوع پیچ محاسبه می کنیم:

$$F = A \times \tau_{all}$$

$$F_1 = 130 \times 110 = 14300 \text{ N} \quad F_2 = \frac{60}{100} 320 \times 110 = 21120 \text{ N}$$

$$T = \sum F.r = 6 \times (14300 \times 0/1) + 6 \times (21120 \times 0/06) = 16/18 \text{ kN.m}$$

۴۰-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ آلومینیومی به قطر ۲۰ میلی متر که در محیط دایره ای به شعاع ۱۷۵ میلی متر و ۶ پیچ فولادی به قطر ۲۰ میلی متر که در محیط دایره ای به شعاع ۱۲۵ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. ظرفیت لنگر پیچشی این اتصال چقدر می باشد. تنش برشی مجاز برای هر دو مصالح ۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم $0/۲۸ \times ۱۰^۵$ و ضریب ارتجاعی برشی فولاد $0/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشند.

گرنش متناسب با فاصله از محور مرکزی می باشد $\gamma \propto r$

$$\frac{\tau_{st}}{\tau_{Al}} = \frac{G_{st} \cdot \gamma_{st}}{G_{Al} \cdot \gamma_{Al}} = \frac{0/۸۴ \times ۱۰^۵ \times ۱۲۵}{0/۲۸ \times ۱۰^۵ \times ۱۷۵} = ۲/۱۴$$

$$F_{st} > F_{Al}$$

$$F = \tau A$$

$$F_{st} = ۴۰ \times \pi (۱۰)^2 = ۱۲/۵۷ \text{ kN}$$

$$F_{Al} = \frac{1}{2/۱۴} \times ۴۰ \times \pi (۱۰)^2 = ۵/۸۷ \text{ kN}$$

$$T = \sum F.r = ۶ \times (۱۲۵۷۰ \times 0/۱۲۵ + ۵۸۷۰ \times 0/۱۷۵) = ۱۵/۵۹ \text{ kN/m}$$