کتاب درس ریاضی ۱

مخصوص مهندسان صنایع

براساس کتاب:ابراهیم احمدپور

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه

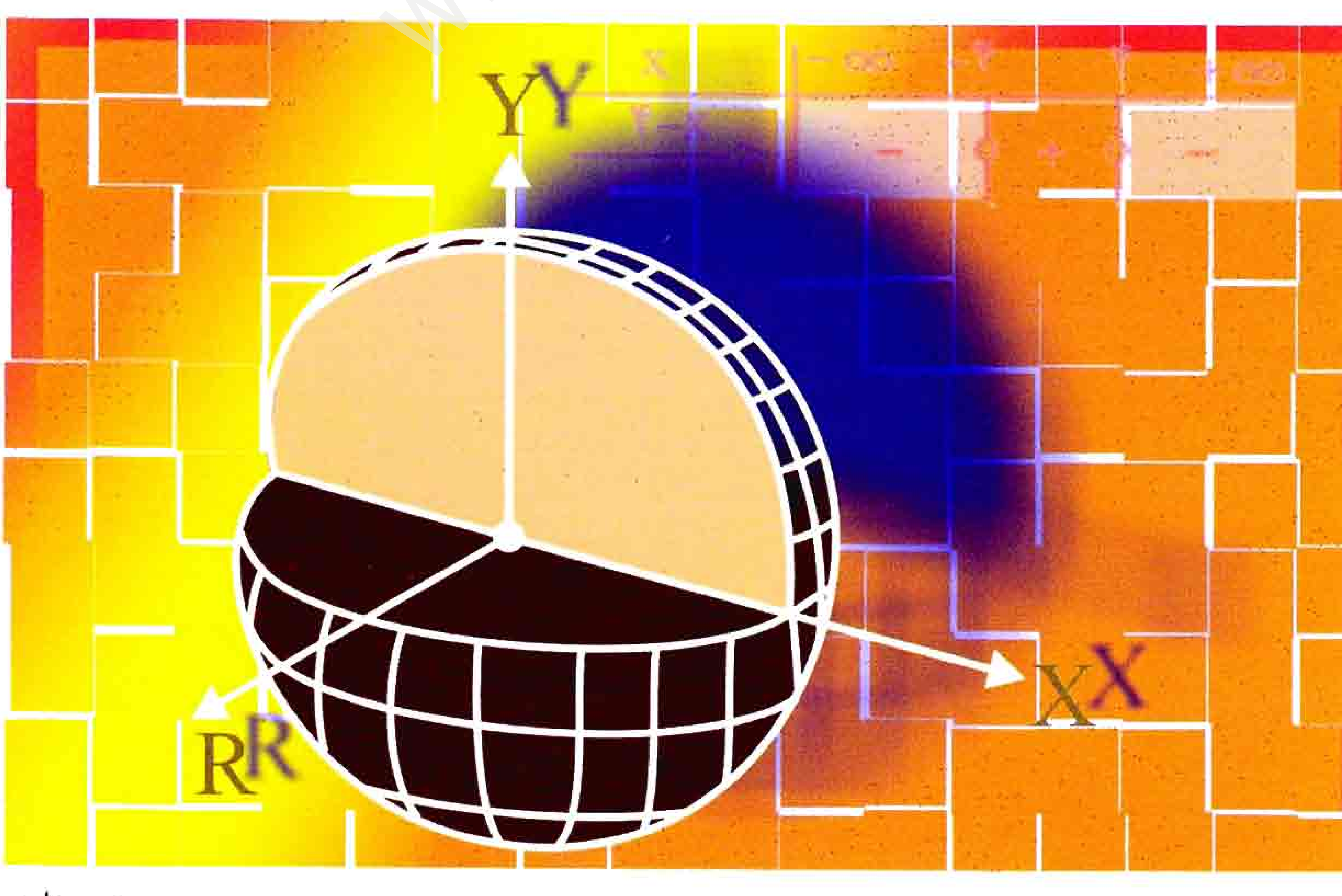
www.ieuni.ir

دانشگاه پیام نور

ریاضی عمومی ۱

(رشته ریاضی)

ابراهیم احمدپور آنه‌گلدی مهمیانی



درسنامه

دانشگاه پیام نور

ریاضی عمومی ۱

(رشتهٔ ریاضی)

ابراهیم احمدپور   آنه‌گلدی مهمیانی

گروه ریاضی
(۱۰۴/ د)

دانشگاه پیام‌نور
۱۱۹۴

سرشناسه	:	احمدپور، ابراهیم
عنوان و پدید آور	:	ریاضی عمومی (۱) (رشته ریاضی) / ابراهیم احمد پور؛ آنه گلدی مهمیانی – ویراستار علمی: دکتر حمیدرضا میمنی.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه پیام‌نور، ۱۳۸۵.
مشخصات ظاهری	:	۵۷۲ص. مصور.
فروست	:	دانشگاه پیام نور؛ ۱۱۹۴. گروه ریاضی؛ ۱۰۴/ د
شابک	:	978 - 964 - 387 - 227 - 4
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا .
موضوع	:	۱. آموزش از راه دور- ایران .
موضوع	:	۲. ریاضیات - آموزش برنامه ای .
شناسه افزوده	:	الف. مهمیانی، آنه گلدی. ب. دانشگاه پیام نور . ج. عنوان .
رده بندی کنگره	:	LC۵۸۰۸/الف ۹ الف۲۵۳
رده بندی دیویی	:	۳۷۸/۱۷۵۰۹۵۵
شمارهٔ کتابشناسی ملی	:	۴۵۲۱۹-۸۴م

دانشگاه پیام نور

ریاضی عمومی (۱)

مؤلفان: ابراهیم احمدپور، آنه گلدی مهمیانی

ویراستار علمی: دکتر حمیدرضا میمنی

طراح جلد: فرشته فلاحت دوست

حروفچینی و نمونه خوانی: مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام‌نور

شمارگان: ۵۰۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول بهمن۱۳۸۵، چاپ پنجم آبان ۱۳۸۷

شابک: ۴ - ۲۲۷ - ۳۸۷ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 387 - 227 - 4

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار ناشر

کتابهای دانشگاه پیام‌نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف به صورت درسنامه، آزمایشی، قطعی، متون آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شود. کتاب **درسنامه** (د) نخستین ثمرهٔ کوششهای علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای مصوب تهیه می‌شود و پس از داوری علمی در گروههای آموزشی، بدون طراحی آموزشی و ویرایش چاپ می‌شود. با تجدیدنظر صاحب اثر و دریافت بازخوردها و اصلاح نارساییها، درسنامه با طراحی آموزشی، ویرایش، و طراحی فنی ـ هنری به صورت **آزمایشی** (آ) چاپ می‌شود. با دریافت نظرهای اصلاحی، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و کتاب به صورت **قطعی** (ق) چاپ می‌شود. در صورت ضرورت، در کتابهای چاپ قطعی نیز تجدیدنظرهای اساسی به عمل می‌آید یا متناسب با پیشرفت علوم و فناوری بازنویسی می‌شوند. **متون آزمایشگاهی** (م) متونی است که دانشجویان با استفاده از آن و راهنمایی مربیان کارهای عملی آزمایشگاهی را انجام می‌دهند. کتابهای **فرادرسی** (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه می‌شوند. کتابهای فرادرسی با تأیید معاونت پژوهشی و کتابهای کمک‌درسی با تأیید شورای انتشارات تهیه می‌شوند.

مدیریت تدوین کتاب

فهرست

پیشگفتار مؤلفان

ریاضی عمومی به عنوان یکی از شاخص‌ترین دروس ریاضی در تمام علوم شناخته شده است. درک عمیق و صحیح مفاهیم این درس، تأثیری باورنکردنی در فراگیری دروس دیگر حتی در شاخه‌ای غیرمرتبط با ریاضیات دارد. به عقیده مؤلفان، کتاب حاضر در جهت ایجاد چنین درکی و همچنین نظام‌مند کردن ذهن دانشجویان گامی مؤثر برداشته است.

در این کتاب سعی شده که مفاهیم اساسی با آوردن مثالهای گوناگون سجرد و کاربردی تشریح گردد. پایان هر بخش شامل تمرینهای حل شده متنوعی است. وجود چنین تمرینهای حل‌شده‌ای دانشجویان را با تکنیکهای هر بخش آشنا می‌کند.

کتابی که در دست دارید نتیجه تلاش و تجربه چندین سالهٔ مؤلفین می‌باشد که سالها در دانشگاههای مختلف و در گرایشهای متفارت تدریس نموده و با درک و آشنایی از مشکلات و نقاط ضعف دانش‌پژوهان به رشتهٔ تحریر درآمده است.

در خاتمه لازم می‌دانیم از جناب آقای دکتر حمیدرضا میمنی که ویراستاری این کتاب را به عهده داشته‌اند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشیم امید است که در راه خدمت علمی و فرهنگی خود بیش از پیش موفق و کوشا باشند.

ابراهیم احمدپور: عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور ـ مرکز خوی
آنه گلدی مهمیانی: عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور ـ مرکز گنبد کاووس

فصل اول

تابع

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. مفهوم دوتایی مرتب را بازگو کند.

۲. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه را تعریف کند.

۳. رابطه و تابع را تعریف کند.

۴. فرق رابطه و تابع را بیان کند.

۵. تساوی دو تابع را بیان کند.

۶. تابع یک‌به‌یک، پوشا و دوسوئی را تعریف کند.

۷. ترکیب دو تابع را تعریف کند.

۸. وارون یک تابع را تعریف کند.

۹. شرایط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن تابع را بیان کند.

۱۰. اعمال جبری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع حقیقی را بیان کند.

۱۱. کرانداری تابع را تعریف کند.

۱۲. برای هر دو تابع داده شده ترکیب آنها را به دست آورد.

۱۳. در مورد یک‌به‌یک، پوشا بودن توابع داده شده تحقیق کند.

۱۴. در مورد کرانداری توابع داده شده تحقیق کند.

۱۵. صعودی یا نزولی بودن توابع داده شده را بررسی کند.

۱۶. وارون تابع داده شده را در صورت وجود بیابد.

۱-۱ زوج مرتب و حاصلضرب دکارتی

۱-۱-۱ تعریف. زوج مرتب یک دوتائی به صورت (a,b) می‌باشد که به a مؤلفه یا مختص اول و به b مؤلفه یا مختص دوم می‌گویند. اگر در یک زوج مرتب جای مؤلفه‌های اول و دوم را عوض کنیم آن زوج مرتب تغییر می‌کند.

در حالت کلی، $(a,b) \neq (b,a)$ است.

۱-۱-۲ تساوی دو زوج مرتب. دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم برابرند که داشته باشیم:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=c \\ b=d \end{array} \right.$$

۱-۱-۳ یک کاربرد زوج مرتب، استفاده از آن برای نمایش مختصات یک نقطه در صفحه است. نماد $A(x,y)$ را به معنای نقطه‌ای در صفحه در نظر می‌گیریم که طول آن برابر x و عرض آن برابر y است. x را مؤلفه اول و y را مؤلفه دوم و x و y را مختصات نقطه A می‌نامیم.

۱-۱-۴ مثال. ۱) مقدار x و y را چنان بیابید که دو نقطه $(2x+3y, 3x-2y)$ و $(8,-1)$ بر هم منطبق باشند.

حل. چون دو نقطه بر هم منطبق هستند، پس باید مؤلفه‌های اول و دوم آنها برابر باشند.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+6y=16 \\ 9x-6y=-3 \end{cases} \Rightarrow 13x=13 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array} \right.$$

۲) x و y را چنان بیابید که $(x^2-y^2, 2)=(16, x-y)$ باشد.

حل.

$$\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=16 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array} \right.$$

۱-۱-۵ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را که با نماد $A \times B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \,,\, y \in B\}$$

به عبارت دیگر، $A \times B$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتبی است که مؤلفه اول آن در مجموعهٔ A و مؤلفه دوم آن در مجموعهٔ B قرار دارد.

مجموعه A را می‌توان در خودش ضرب نمود در این صورت داریم:

$$A \times A = A^{۲} = \{(x,y) | x, y \in A\}$$

۱-۱-۶ مثال. اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۴,۵\}$، آنگاه مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ و $A^{۲} = A \times A$ و $B^{۲} = B \times B$ را بیابید.

حل.

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \,,\, y \in B\}$$

$$A \times B = \{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۳,۵)\}$$

$$B \times A = \{(x,y) | x \in B \,,\, y \in A\}$$

$$B \times A = \{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)\}$$

$$A^{۲} = A \times A = \{(x,y) | x \in A \,,\, y \in A\}$$

$$A^{۲} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$$

$$B^{۲} = B \times B = \{(x,y) | x \in B \,,\, y \in B\}$$

$$B^{۲} = \{(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵)\}$$

۱-۱-۷ نکته. ۱. اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد، آنگاه $A \times B$ دارای mn عضو می‌باشد.

۲. چون در حالت کلی $(x,y) \neq (y,x)$، پس $A \times B \neq B \times A$ است ولی تعداد اعضای $A \times B$ با $B \times A$ برابر هستند.

۱-۱-۸ مثال. اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴\}$، آنگاه تعداد اعضای $A\times B$، $B\times A$، $A^۲$ و $B^۲$ را بیابید.

حل. تعداد اعضای متمایز A : $n(A)$

$$n(A)=۳\ ,\ n(B)=۲$$

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)=۳\times ۲=۶$$

$$n(B\times A)=n(B)\times n(A)=۲\times ۳=۶$$

$$n(A^۲)=n(A\times A)=n(A)\times n(A)=۳\times ۳=۹$$

$$n(B^۲)=n(B\times B)=n(B)\times n(B)=۲\times ۲=۴$$

۱-۲ رابطه

۱-۲-۱ **تعریف.** فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر زیرمجموعه از مجموعهٔ $A\times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم. اگر f یک رابطه از A به B باشد، آنگاه $f\subseteq A\times B$.

اگر $(x,y)\in f$ باشد، می‌گوییم f عنصر x را به عنصر y نسبت می‌دهد. و می‌نویسیم xfy.

به هر زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی $A\times A$ یک رابطه در مجموعه A می‌گویند.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که ϕ یک رابطه از A به B است.

۱-۲-۲ مثال. ۱) اگر $A=\{۱,۲\}$ باشد، آنگاه تمام رابطه‌های روی مجموعهٔ A را بنویسید.

حل. چون $A\times A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$ و هر رابطه روی A زیرمجموعه‌ای از $A\times A$ است پس تعداد رابطه‌ها در A برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A\times A$ یعنی $۱۶=۲^۴$ که عبارتند از:

$$\phi$$

$$\{(۱,۱)\}\ ,\ \{(۱,۲)\}\ ,\ \{(۲,۱)\}\ ,\ \{(۲,۲)\}$$

$\{(1,1),(1,2)\},\{(1,1),(2,1)\},\{(1,1),(2,2)\},\{(1,2),(2,1)\},\{(1,2),(2,2)\},\{(2,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\{(1,1),(1,2),(2,2)\},\{(1,2),(2,1),(2,2)\},\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

می‌دانیم: «اگر مجموعه A دارای m عضو باشد تعداد زیرمجموعه‌های A برابر است با: 2^m»

۲) رابطه‌ای بر روی مجموعه اعداد صحیح بنویسید به‌طوری که مؤلفه دوم تمام زوجهای مرتب آن، مربع مؤلفه‌های اول آنها باشند.

حل.
$$f=\{(x,y)\mid x,y\in Z\ ,\ y=x^2\}$$
$$f=\{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4),\ldots\}$$

۱-۲-۳ دامنه و برد یک رابطه. دامنه یک رابطه عبارت است از مجموعهٔ مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب متعلق به آن رابطه.

برد یک رابطه عبارت است از جمله مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتب متعلق به آن رابطه. به عبارت دیگر:

اگر $f=A\times B$ آنگاه:

$$\text{دامنه رابطه } f = D_f=\operatorname{dom} f=\{x\mid x\in A,\exists y\in B\ ,(x,y)\in f\}$$
$$\text{برد رابطه } f = R_f=\operatorname{codom} f=\{y\mid y\in B,\exists x\in A\ ,(x,y)\in f\}$$

۱-۲-۴ مثال. دامنه و برد هریک از رابطه‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $$f=\{(1,2),(3,4),(0,3),(4,-1),(2,7)\}$$

حل.
$$D_f=\{1,3,0,4,2\}$$
$$R_f=\{2,4,3,-1,7\}$$

۲) $$f=\{(x,y)\mid y=x^3+x+1\ ,\ x\in R\}$$

حل.
$$D_f=R$$
$$R_f=R$$

۱-۲-۵ نمودار رابطه. هر رابطه را می‌توان به صورت نمودارهای پیکانی و دکارتی نشان داد.

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی باشند و f یک رابطه از A به B

الف) نمودار دکارتی f مجموعه تمام نقاط (x,y) از صفحه است که: $(x,y)\in f$

ب) نمودار پیکانی f، اعضای دامنه و برد را در دو شکل بسته (مثل دایره) قرار می‌دهیم و سپس با فلش مؤلفه اول هر زوج را به مؤلفه دوم آن نسبت می‌دهیم.

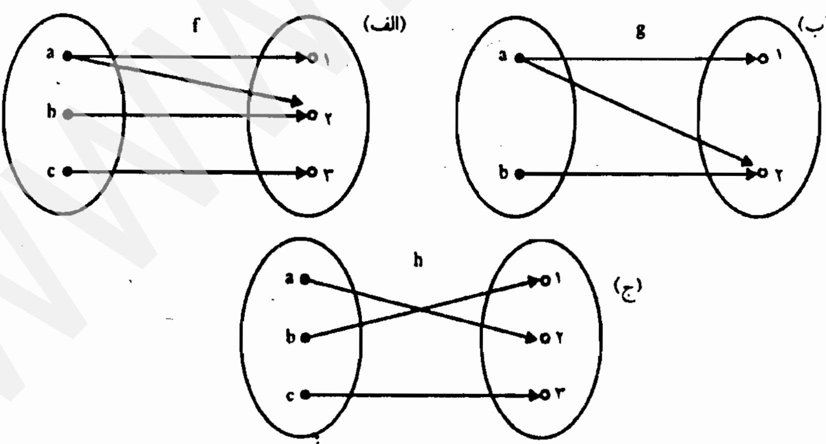
۱-۲-۶ مثال. ۱) نمودار پیکانی هر یک را نمایش دهید.

الف) $f=\{(a,۱),(a,۲),(b,۲),(b,۳)\}$

ب) $g=\{(a,۱),(b,۲),(a,۲)\}$

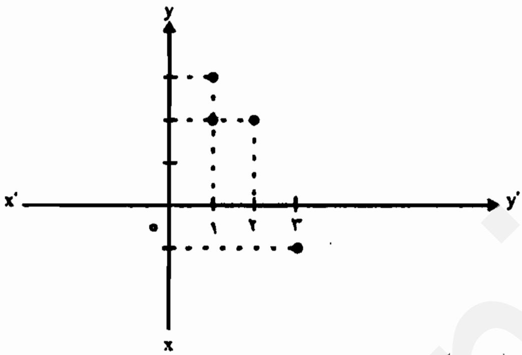
ج) $h=\{(a,۲),(b,۱),(c,۳)\}$

حل.



۲) فرض کنید: $f=\{(۱,۲),(۱,۳),(۳,-۱),(۲,۲)\}$. در این صورت نمودار دکارتی f را رسم کنید.

حل.

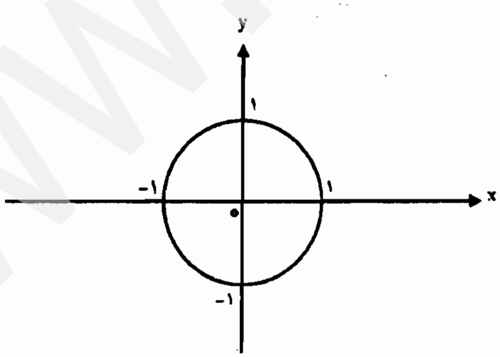


۳) فرض کنید: $f=\{(x,y)\big|x^2+y^2=1\}$

در این صورت نمودار f دایره‌ای است به مرکز $(0,0)$ و شعاع $r=1$ و:

$$D_f=R_f=[-1,1]$$

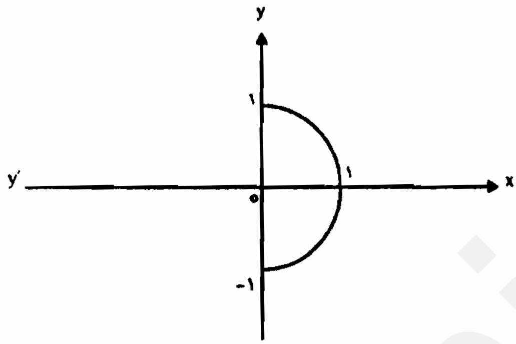
$$x^2+y^2=1\Rightarrow\left|\begin{matrix}x^2\le 1\\ y^2\le 1\end{matrix}\right.\Rightarrow\begin{cases}|x|\le 1\\ |y|\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$$



۴) فرض کنید $f=\{(x,y)\big|x^2+y^2=1,\ x\in R^+,y\in R\}$.

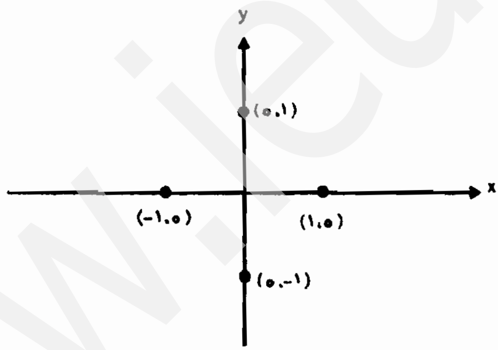
در این صورت نمودار f نیم‌دایره سمت راست از دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد و

$$D_f=[0,1]\ ,\ R_f=[-1,1]$$



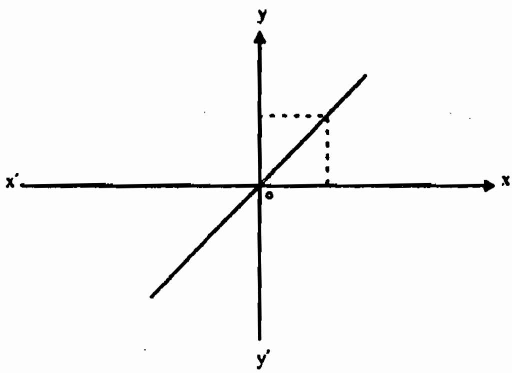
۵) نمودار $f=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\ ,\ x,y\in Z\}$.

عبارت است از چهار نقطه $(0,1)$ و $(1,0)$ و $(-1,0)$ و $(0,-1)$ و



۶) فرض کنید $f=\{(x,y)\,|\,y=x\ ,\ x\in R\}$.

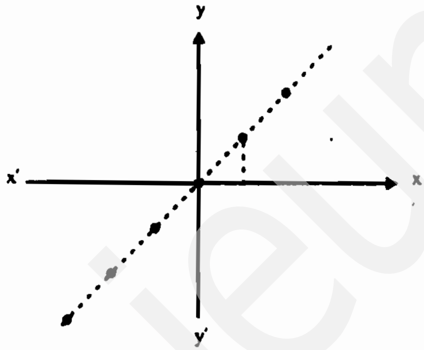
در این صورت نمودار f خط راست $y=x$ است و: $D_f=R_f=R$



۷) فرض کنید $f = \{(x,y) \mid y = x \ , \ x \in Z\}$.

قسمتی از نمودار f به صورت زیر است: $D_f = Z \ , \ R_f = Z$

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
y		−۲	−۱	۰	۱	۲	



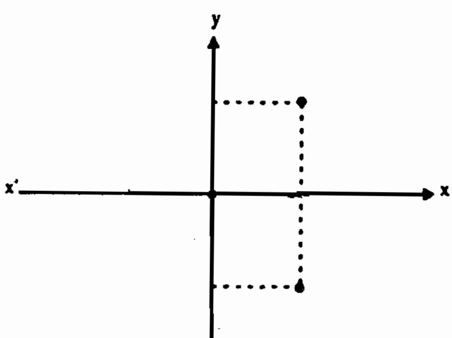
۸) بر مجموعه $A = \{۰,۱\}$ رابطه f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f = \{(x,y) \mid |y| = x\}$$

در این صورت نمودار f و دامنه و برد آن عبارتست از:

$D_f = \{۰,۱\} \ , \ R_f = \{۰,-۱,۱\}$

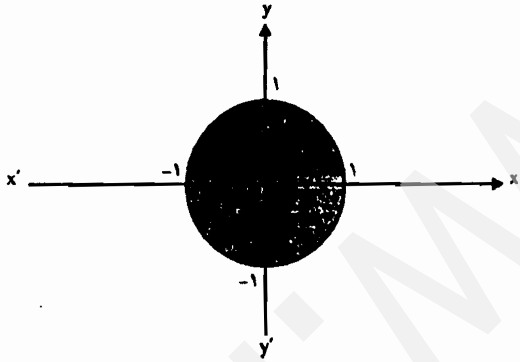
$f = \{(۰,۰),(۱,۱),(۱,-۱)\}$



۹) فرض کنید: $f = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ \le ۱\}$.

در این صورت دامنه و برد f بازه $D_f = R_f = [-۱,۱]$ است.

نمودار آن تمام نقاط واقع بر محیط و درون دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ می‌باشد.



۱-۲-۷ رابطه وارون یا رابطه معکوس. فرض کنید f یک رابطه از A و به B باشد، وارون (معکوس) f که با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم، رابطه‌ای است از B به A که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-۱} = \{(x,y) | (y,x) \in f\}$$

به عبارت دیگر: هرگاه در یک رابطه جای مؤلفه‌های اول و دوم یعنی x و y را عوض کنیم، رابطه وارون یا معکوس به دست می‌آید.

۱-۲-۸ مثال. وارون هر یک از رابطه‌های زیر را بنویسید.

الف) $f = \{(۱,۲),(۱,۳),(۳,-۱),(۲,۲)\}$

ب) $g = \{(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$

حل.

الف) $f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۱),(-۱,۳),(۲,۲)\}$

ب) $g^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۳,۱)\}$

۱-۳ تابع

۱-۳-۱ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. رابطهٔ f از A به B را یک تابع از A به B می‌نامیم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

الف) برای هر عنصر $x \in A$ عنصری مانند $y \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $(x,y) \in f$ باشد. به عبارت دیگر f باید هر یک از عناصر A را به عنصری از B نسبت دهد.

ب) اگر $(x,y_1) \in f$ و $(x,y_2) \in f$ باشد، آنگاه $y_1 = y_2$. به عبارت دیگر، f هریک از عناصر A را فقط به یک عنصر از B نسبت دهد.

تعریف دیگر:

یک تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.

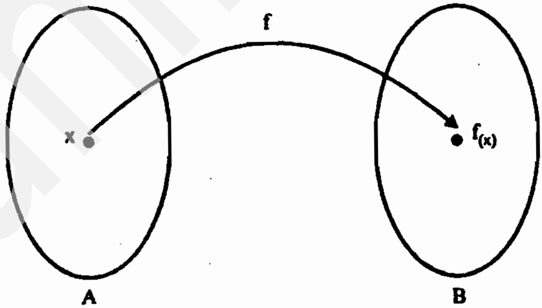
یعنی رابطهٔ f تابع است هرگاه درشرط زیر صدق کند:

$$(x,y_1),(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

به‌طور خلاصه، رابطهٔ f را یک تابع می‌نامیم در صورتی که f هر عنصر از دامنه f را فقط و فقط به یک عنصر از برد f نظیر کند (نسبت دهد).

معمولاً به‌جای $(x,y) \in f$ می‌نویسیم $y = f(x)$ و $f(x)$ را تصویر x به وسیلهٔ f می‌نامیم.

یک تابع به وسیلهٔ رابطهٔ f، دامنه و برد آن مشخص می‌شود. برای نمایش این موضوع نمادهای $f : A \to B$ یا $A \xrightarrow{f} B$ را به‌کار می‌بریم.



شکل ۱-۱

x را متغیر، و $f(x)$ را تصویر x به وسیلهٔ f یا به‌طور خلاصه تصویر x می‌نامیم. f را معمولاً به عنوان قانونی که به هر x یک y نسبت می‌دهد تعبیر می‌کنند. در این صورت $f(x)$ را تأثیر f بر x می‌نامیم. همچنین به منظور سادگی، f را با $f(x)$ یکی می‌گیریم. بنابراین هرجا بیم ابهام نرود می‌توانیم به‌جای مجموعهٔ زوجهای مرتبی که f را تشکیل می‌دهند، عبارت $y = f(x)$ را به‌کار ببریم.

۱-۳-۲ دامنه و برد یک تابع.

الف) مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب تابع f که با نماد D_f نشان می‌دهیم را دامنه تابع می‌نامیم. یا به عبارت دیگر حدود تغییرات x را دامنه تابع گویند.

$$D_f = \{x \mid (x,y) \in f\}$$

ب) مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتب تابع f که با نماد R_f (یا Δf) نشان می‌دهیم را برد تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر حدود تغییرات y را برد تابع می‌گویند.

$$R_f = \{y \mid (x,y) \in f\}$$

۱-۳-۳ مثال. دامنه و برد تابع $f = \{(۱,۲),(۳,۵),(۷,-۹)\}$ را تعیین کنید.

حل.

$$D_f = \{۱,۳,۷\}$$

$$R_f = \{۲,۵,-۹\}$$

۱-۳-۴ نمایش هندسی یک تابع. برای نمایش یک تابع از دو روش پیکانی و دکارتی استفاده می‌کنیم.

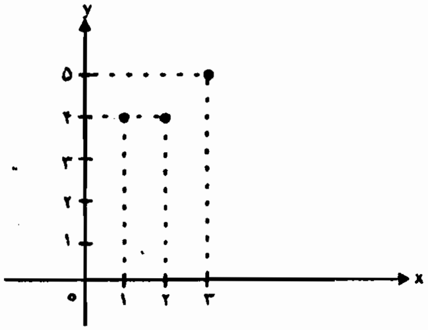
الف) در نمایش پیکانی، اعضای دامنه و برد را در دو شکل بسته (مثل بیضی) قرار داده و سپس با فلش مؤلفه اول هر زوج را به مؤلفه دوم آن نسبت می‌دهیم.

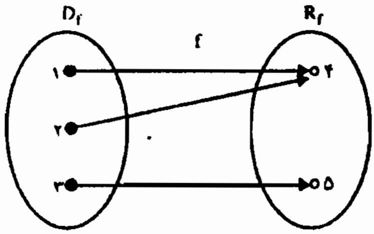
ب) در نمایش دکارتی، هر زوج مرتب تابع را به عنوان یک نقطه در صفحه در نظر می‌گیریم.

۱-۳-۵ مثال. نمودار پیکانی و دکارتی توابع زیر را رسم کنید و تحقیق کنید کدام‌یک از آنها تابع هستند؟

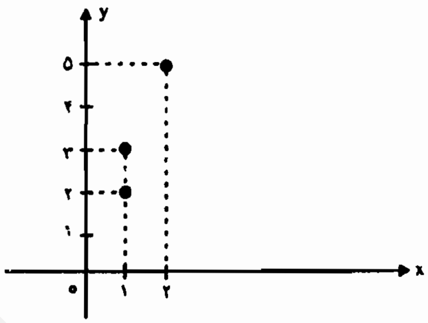
الف) $f = \{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$ ب) $g = \{(۱,۳),(۲,۵),(۱,۲)\}$

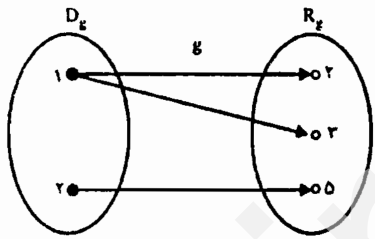
حل. **الف)** رابطه f تابع است زیرا هیچ دو مؤلفه اول برابر ندارد:





ب) رابطه g تابع نیست زیرا $(1,2),(1,3) \in g$ ولی $3 \neq 2$

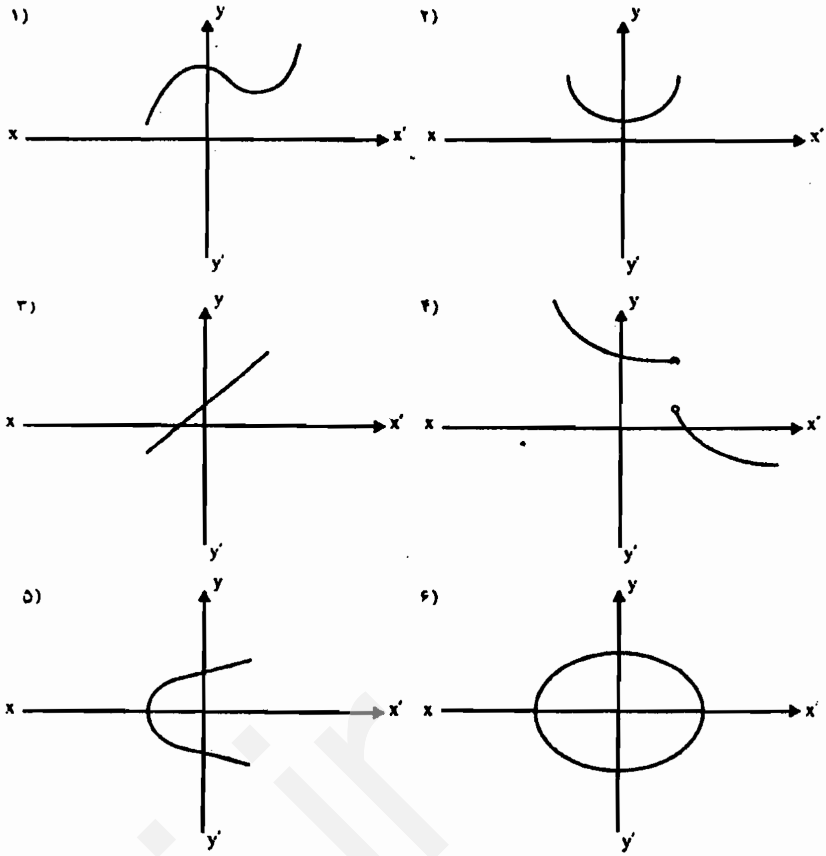




۱-۳-۶ تابع از نظر نمودار پیکانی. یک نمودار پیکانی وقتی تابع است که از هیچ عضو دامنه آن دو پیکان متمایز خارج نشده باشد. مثلاً در مثال بالا، f تابع است ولی g تابع نیست زیرا، از عنصر ۱ $(1 \in D_g)$ دو پیکان متمایز خارج شده است.

۱-۳-۷ تابع از نظر نمودار دکارتی. یک نمودار دکارتی وقتی نمودار یک تابع است که هر خط موازی با محور yها آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱-۳-۸ مثال. کدام‌یک نمودار یک تابع است؟



(۱) و (۲) و (۳) و (۴) تابع است.

(۵) و (۶) تابع نیست.

۱-۳-۹ تابع با ضابطه. اگر همهٔ مؤلفه دوم زوجهای مرتب تابع f طبق فرمول یا ضابطهٔ خاصی از روی مؤلفه اول زوجهای مرتب تابع f به دست آید آنگاه به جای استفاده از شکل زوج مرتبی تابع f می‌توان از شکل ساده‌تر $\begin{cases} f: A \hookrightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ برای نمایش تابع f استفاده کرد.

در این نمایش، مجموعه A و B به ترتیب دامنه و برد تابع f هستند و هر عنصر $x \in A$ تحت ضابطهٔ f به عنصر $y = f(x) \in B$ متناظر می‌شود. همچنین، x را متغیر و y را تابع x می‌نامیم.

۱-۳-۱۰ مثال. تعیین کنید کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است.

۱)
$$f : R - \{1\} \to R$$
$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

حل. باید شرط $[(x,y_1),(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$ را برای نمایش زوج مرتبی تابع یا شرط $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ را برای نمایش ضابطه‌ای تابع بررسی کنیم.

رابطه f تابع است زیرا:

$$(x,y_1),(x,y_2) \in f \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{2x+1}{x-1} \\ y_2 = \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array} \right. \Rightarrow y_1 = y_2$$

و یا:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ x_1 - 1 = x_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

۲)
$$f = \{(x,y) \mid x,y \in R \,,\, x^2 + y^2 = 10\}$$

حل. f تابع نیست زیرا:

$$n = 1 \Rightarrow 1 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

یعنی $(1,3) \in f$ و $(1,-3) \in f$ است در حالی که $3 \neq -3$.

۳)
$$f : R^+ \to R$$
$$f(x) = \pm\sqrt{x}$$

حل. f تابع نیست زیرا برای $x = ۱$ داریم:

$$f(۱) = y = \pm ۱$$

بنابراین $(۱,۱),(۱,-۱) \in f$ است، در حالی که $۱ \neq -۱$.

تذکر. یک ضابطه وقتی، ضابطه تابع است که برای هر x حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

۴) $$f = \{(x,y) \mid y^۲ = x \, , \, x \in R\}$$

حل. f تابع نیست زیرا به ازای یک مقدار x $(x = ۱)$ دو مقدار برای y به دست می‌آید.

$$x = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$$

۱-۳-۱۱ مقدار تابع در یک نقطه. اگر $(x,y) \in f$ باشد آنگاه مقدار تابع f در نقطهٔ x برابر y یا $f(x)$ است و مقدار $y = f(x)$ را تصویر x تحت تابع f می‌نامیم.

برای یافتن مقدار تابع $y = f(x)$ به ازای $x = a$ کافی است به‌جای مجهول x در ضابطهٔ $y = f(x)$ مقدار a قرار دهیم و آن را ساده کنیم.

۱-۳-۱۲ مثال. ۱) اگر $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۳x - ۲}{x + ۱}$ باشد آنگاه مقدار $f(۰)$ و $f(۱)$ و $f(-۱)$ را حساب کنید.

حل.

$$f(۰) = \frac{۰ + ۰ - ۲}{۰ + ۱} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

$$f(۱) = \frac{۱ + ۳ - ۲}{۱ + ۱} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$f(-۱) = \frac{۱ - ۳ - ۲}{۰} = \frac{-۴}{۰}$$

چون به ازاء $x = -۱$، مخرج کسر صفر می‌شود پس تابع در $x = -۱$ تعریف نشده است.

۲) اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، آنگاه $f(2)$، $f(\frac{1}{x})$، $f(2x+1)$ و $f(\sqrt{x})$ را حساب کنید.

حل.
$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f(2)=\frac{2+1}{2-1}=3$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(2x+1)=\frac{2x+1+1}{2x+1-1}=\frac{2x+2}{2x}=\frac{x+1}{x}$$

$$f(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

۱-۳-۱۳ تعیین دامنه تابع.

(۱) دامنه توابع چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$، برابر R است.

$$D_f=R$$

(۲) دامنه توابع کسری به شرط آن که صورت آن روی R تعریف شده باشد، برابر است با:

$$D_f=R-\{x|\ \text{به ازای آنها مخرج کسر صفر است}\}$$

(۳) دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج برابر مجموعه مقادیر حقیقی x است که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال نامنفی است.

$$f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}\ \Rightarrow\ D_f=\{x|g(x)\geq 0\}$$

(۴) دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد عبارت است از کلیه مقادیر حقیقی x که عبارت زیر رادیکال به ازای آنها تعریف شده باشد.

$$f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

(۵) دامنه توابع $f(x) = |g(x)|$ و $f(x) = [g(x)]$ برابر با دامنه g است یعنی:

$$D_f = D_g$$

(۶) دامنه تابع $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ برابر است با:

$$D_f = \{x | g(x) > 0 \ , \ h(x) > 0 \ , \ h(x) \neq 1\}$$

(۷) دامنه تابع $\begin{cases} f(x) = \mathrm{Arcsin}\, g(x) \\ f(x) = \mathrm{Arccos}\, g(x) \end{cases}$ برابر است با:

$$D_f = \{x | -1 \leq g(x) \leq 1\}$$

(۸) دامنه تابع $\begin{cases} f(x) = \mathrm{Arctan}\, g(x) \\ f(x) = \mathrm{Arccot}\, g(x) \end{cases}$ برابر است با:

$$D_f = D_g$$

(۹) دامنه تابعی که شامل چند کسر یا رادیکال باشد، برابر اشتراک دامنه آنها است.

توجه. در هنگام محاسبهٔ دامنه یک تابع نباید ضابطهٔ آن را ساده کرد، مگر آن که مطمئن شویم که عنصر اضافی وارد دامنه تابع نشده است.

۱-۳-۱۴ مثال. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

(۱) $$f(x) = \frac{x(x+1)}{x^3 + 2x}$$

حل. $$x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2+2) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس: $$D_f = R - \{0\}$$

۲) $$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$$

حل.
$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\leq 1\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ x\neq 0\end{cases}$$

پس:
$$D_f=[-1,1]-\{0\}$$

۳) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & x\neq 1\\ 5 & x=1\end{cases}$$

حل.
$$D_f=R$$

۴) $$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-7x+10}{1-x}}$$

حل.
$$\frac{x^2-7x+10}{1-x}\geq 0$$

$$x^2-7x+10=0\Rightarrow (x-2)(x-5)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=5$$

$$1-x=0\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	2	5	$+\infty$
$\frac{x^2-7x+10}{1-x}$	+			+	-

$$D_f=(-\infty,1)\cup[2,5]$$

۵) $$f(x)=\begin{cases}2-\sqrt{2-x} & -7<x<-2\\ \sqrt{4-x^2} & -2<x\leq 2\\ -\dfrac{1}{x} & 2<x\end{cases}$$

حل.
$$D_f=(-7,-2)\cup(-2,2]\cup(2,+\infty)=(-7,+\infty)-\{-2\}$$

۶) $$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$$

حل.

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 1-\sqrt{1-x^2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 1\\ 1\ge\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\le 1\\ 1\ge 1-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=[-1,1]$$

۷) $$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<1\\ 0 & x=1\\ x+1 & 1<x\end{cases}$$

حل. $$D_f=(-\infty,1)\cup\{1\}\cup(1,+\infty)=R$$

۸) $$f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

حل. $$4-x^2\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow D_f=[-2,2]$$

۹) $$f(x)=\log\sqrt[3]{x^2+7x+6}$$

حل.

$$\sqrt[3]{x^2+7x+6}>0\Rightarrow x^2+7x+6>0\Rightarrow x^2+7x+6=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+6)=0\Rightarrow x=-1,\ x=-6$$

x	$-\infty$	-6	-1	$+\infty$
$x^2+7x+6>0$	$+$			$+$

$$D_f=(-\infty,-6)\cup(-1,+\infty)$$

۱۰) $$f(x)=\sqrt{|x|-x^2}$$

حل.

$$|x|-x^{2}\geq 0 \Rightarrow |x|\geq x^{2} \Rightarrow |x|^{2}-|x|\leq 0 \Rightarrow |x|(|x|-1)\leq 0$$

$$|x|-1\leq 0 \Rightarrow |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

بنابراین:
$$D_f=[-1,1]$$

(۱۱)
$$f(x)=\sqrt{[x]-|x|}$$

حل.
$$[x]-|x|\geq 0 \Rightarrow [x]\geq |x|$$

می‌دانیم به ازای هر $x\in R$، $[x]\leq x\leq |x|$ است پس همواره $[x]\leq |x|$ و بنابراین، فقط وقتی $[x]=|x|$، که $x\in N\cup\{0\}$ باشد در نتیجه $D_f=N\cup\{0\}$.

۱-۳-۱۵ تعیین برد تابع. در حالت کلی تعیین برد تابع مشکل است. اگر ضابطهٔ تابع به صورت خاص باشد آنگاه ممکن است محاسبه برد آن ساده باشد. یک روش برای محاسبه برد تابع $y=f(x)$ یافتن دامنه تغییرات y با توجه به دامنه متغیر x و ضابطه f است. یعنی، همهٔ مقادیر کلی برای y را به دست می‌آوریم.

۱-۳-۱۶ مثال. برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

(۱)
$$f(x)=x^{2}+4x+1$$

حل.
$$y=(x+2)^{2}-4+1 \Rightarrow y=(x+2)^{2}-3\geq -3 \Rightarrow y\geq -3$$

$$R_f=[-3,+\infty)$$

(۲)
$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

حل.
$$y=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow xy-y=2x+1 \Rightarrow xy-2x=y+1$$

$$(y-2)x=y+1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{y-2} \qquad y-2=0 \Rightarrow y=2$$

در نتیجه:
$$R_f=R-\{2\}$$

۳) $$f(x)=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$$

حل. $$0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow R_f=\{0\}$$

۴) $$f(x)=\left||x-1|+5\right|-7$$

حل. چون $|x-1|+5>0 \Rightarrow f(x)=\left||x-1|+5\right|-7$

$$f(x)=|x-1|+5-7 \Rightarrow f(x)=|x-1|-2\ge -2 \Rightarrow f(x)\ge -2$$

$$R_f=[-2,+\infty)$$

۵) $$f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$$

حل.

$$\begin{cases}x^2\ge 0\\ 1+x^4>0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}\ge 0,\ \frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}<1$$

$$0\le\frac{x^2}{x^4+1}<1 \Rightarrow 0\le f(x)<1 \Rightarrow R_f=[0,1)$$

۶) $$y=\frac{2x}{x^2+1}$$

حل. $$yx^2+y=2x \Rightarrow yx^2-2x+y=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac\ge 0 \Rightarrow 1-y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 1 \Rightarrow -1\le y\le 1$$

$$R_f=[-1,1]$$

۷) $$y=1+\sqrt{-x^2+2x}$$

حل. پس: $\sqrt{-x^2+2x}\ge 0 \Rightarrow y\ge 1$

$$y-1=\sqrt{-x^2+2x} \Rightarrow (y-1)^2=-x^2+2x \Rightarrow x^2-2x+(y-1)^2=0$$

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow 1-(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$$

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} 1 \leq y \leq 2 \Rightarrow R_f = [1,2]$$

۸) $$y = x + \sqrt{4-x^2}$$

حل.

$$\sqrt{4-x^2} \geq 0 \Rightarrow y \geq x$$

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2,2]$$

شرط اولیه (۱) $$\begin{cases} y \geq x \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow y \geq -2$$

$$y-x = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 - 2yx + x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2yx + y^2 - 4 = 0$$

۲) $$\Delta' \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y^2 + 8 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$$

از ۱ و ۲ $$\Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2} \\ -2 \leq y \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} -2 \leq y \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow R_f = [-2, 2\sqrt{2}]$$

۹) $$y = [x] + [-x] + \sqrt{\cos 2\pi x - 1}$$

حل.

$$\cos 2\pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos 2\pi x \geq 1 \Rightarrow \cos 2\pi x = 1 \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = k \in Z \Rightarrow D_f = Z$$

$$y = [x] + [-x] + \sqrt{0}\ ,\ x \in Z \Rightarrow y = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

۱۰) $$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \quad x \geq 0 \\ \dfrac{x-4}{x+4} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

حل. اگر تابع چندضابطه‌ای باشد برد هر قسمت را محاسبه کرده، برد تابع اجتماع بردهاست.

$$y_1 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 1 + y_1 \Rightarrow x = \sqrt{1+y_1} \Rightarrow 1 + y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq -1$$

$$y_2 = \frac{x-4}{x+4} \Rightarrow y_2 x + 4y_2 = x - 4 \Rightarrow 4y_2 + 4 = (1 - y_2)x$$

$$x = \frac{4y_2 + 4}{1 - y_2} < 0$$

$$4y_2 + 4 = 0 \Rightarrow y_2 = -1 \,,\; 1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 1$$

y	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\frac{4y_2+4}{1-y_2} < 0$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

$$R_{y_2} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$R_f = R_{y_1} \cup R_{y_2} = [-1, +\infty) \cup (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) = R \Rightarrow R_f = R$$

۱-۳-۱۷ تساوی دو تابع. دو تابع f و g را مساوی می‌نامیم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) $D_f = D_g$ یعنی دامنه دو تابع با هم برابر باشند.

ب) تساوی $f(x) = g(x)$ برای تمام xها، $x \in D_f = D_g$ برقرار باشد. یعنی:

$$\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۱-۳-۱۸ مثال. در هر یک از تمرینات زیر ضابطهٔ دو تابع داده شده است. تعیین کنید آیا این توابع مساوی هستند یا نه؟

۱) $$f(x) = \log x^2 \;,\; g(x) = 2\log x$$

حل. $$x^2 > 0 \Rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$x > 0 \Rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

چون $D_f \neq D_g$ در نتیجه $f \neq g$.

۲) $$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}\ ,\ g(x)=x+۱$$

حل. $$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_f=R-\{۱\}$$

$$D_g=R$$

دو تابع نامساویند $$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

۳) $$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ -۱ & x=۱ \end{cases} \quad f:R\to R$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x\neq ۱ \\ ۰ & x=۱ \end{cases} \quad g:R\to R$$

$$D_f=D_g=R$$

حل. دو تابع f و g برابر نیستند زیرا:

$$f(۱)=-۱\neq g(۱)=۰$$

۱-۴ تابع یک به یک و پوشا

۱-۴-۱ تابع یک به یک. تعریف تابع $f:A\to B$ را یک به یک گوییم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall x_{۱},x_{۲}\in D_f\ ,\ f(x_{۱})=f(x_{۲}) \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}$$

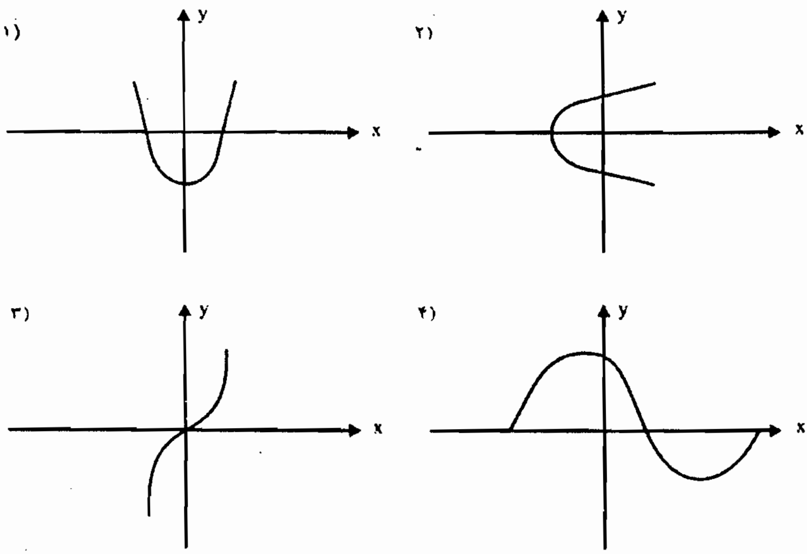
و یا

$$\forall x_{۱},x_{۲}\in D_f\ ,\ x_{۱}\neq x_{۲} \Rightarrow f(x_{۱})\neq f(x_{۲})$$

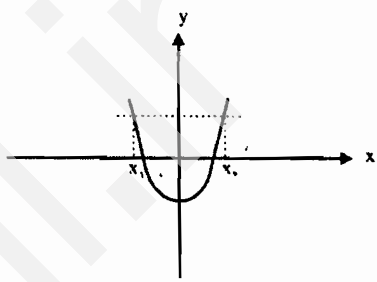
بنابراین، تابعی یک به یک است که هیچ دو عضو متمایز دامنهٔ آن، به یک عنصر برد آن متناظر نشده باشند.

از لحاظ هندسی، نموداری تابع یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱-۴-۲ مثال. ۱) تحقیق کنید کدام‌یک از شکل‌های زیر نمودار تابع یک به یک است؟

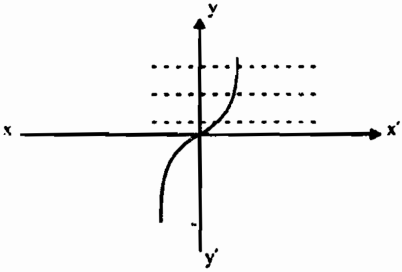


حل. ۱) یک به یک نیست زیرا خط موازی محور xها آن را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. یعنی $f(x_1) = f(x_2)$ است ولی $x_1 \neq x_2$.



۲) این تابع نیست زیرا خط موازی yها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع‌می‌کند.

۳) تابع یک به یک است زیرا هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



۴) تابع یک به یک نیست زیرا خط موازی محور xها نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

۲) کدام‌یک از توابع زیر یک به یک است؟

۱) $$f(x)=\frac{۱-x}{۱+x} \quad , \quad f:R-\{-۱\}\to R-\{-۱\}$$

حل.

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f = R-\{-۱\}: f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow \frac{۱-x_۱}{۱+x_۱}=\frac{۱-x_۲}{۱+x_۲}$$

$$(۱-x_۱)(۱+x_۲)=(۱-x_۲)(۱+x_۱) \Rightarrow ۱+x_۲-x_۱-x_۱x_۲=۱+x_۱-x_۲-x_۱x_۲$$

$$\Rightarrow ۲x_۲=۲x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱ \Rightarrow$$ f یک به یک است

۲) $$f(x)=\sqrt{x+۳}$$

حل.

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f \ , \ f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow \sqrt{x_۱+۳}=\sqrt{x_۲+۳}$$

$$\Rightarrow x_۱+۳=x_۲+۳ \Rightarrow x_۱=x_۲ \Rightarrow$$ f یک به یک است

۳) $$f(x)=۲^x-۱$$

حل. $$\forall x_۱ x_۲ \in D_f : f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow ۲^{x_۱}-۱=۲^{x_۲}-۱$$

$$\Rightarrow ۲^{x_۱}=۲^{x_۲} \Rightarrow x_۱=x_۲ \Rightarrow$$ f یک به یک است

۴) $f(x) = x^{2}$

حل. f یک به یک نیست زیرا:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = f(1) = 1 \\ f(x_2) = f(-1) = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

۵) $f:[0,1] \to R \;,\; f(x) = x^{2}$

حل. $\forall x_1, x_2 \in [0,1] \;,\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2} = x_2^{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \to$ f یک‌به‌یک است

۱-۴-۳ تعریف. فرض کنید $f: A \to B$ یک تابع باشد.

تصویر A تحت f را با $f(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

۱-۴-۴ تمرین. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. آنگاه:

الف) $f(\phi) = \phi$

ب) اگر $A \subseteq X$، آنگاه $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

ج) اگر $A \subseteq B \in\subseteq X$، آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$

د) اگر $A, B \subseteq X$ آنگاه داریم:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

۱-۴-۵ مثال. تصویر دامنه هریک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f:[-1,1] \to R \;,\; f(x) = x^{2} + 1$

حل. $f([-1,1]) = \{f(x) \mid x \in [-1,1]\}$

$$x \in [-1,1] \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x^2 + 1 \le 2 \Rightarrow 1 \le f(x) \le 2$$

$$f([-1,1]) = \{f(x) | 1 \le f(x) \le 2\} = [1,2]$$

۲) $$f: R \to R\ ,\ f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

حل. $$f(R) = \{f(x) | x \in R\} = \{-1, 2, 0\}$$

۱-۴-۶ تعریف تابع پوشا. تابع $f: A \to B$ را پوشا گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$$

به عبارت دیگر f پوشا است اگر $R_f = B$ یعنی $f(A) = B$.

۱-۴-۷ تعریف تابع دوسوئی. تابع $f: A \to B$ را دوسوئی گوییم اگر f یک به یک و پوشا باشد.

۱-۴-۸ مثال. کدام‌یک از توابع زیر پوشا است؟

۱) $$f(x) = \sin x\ ,\ f: [0, \pi] \to [-1,1]$$

حل. $$0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow R_f = [0,1] \ne [-1,1] = B$$

پس f پوشا نیست.

۲) $$f(x) = \cos x\ ,\ f: [0, \pi] \to [-1,1]$$

حل. $$0 \le x \le \pi \Rightarrow -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow R_f = [-1,1] = B$$

پس f پوشا است.

۳) $$f(x) = \frac{x-1}{x}\ ,\ f: R - \{0\} \to R - \{1\}$$

حل.

$$y=\frac{x-۱}{x}\Rightarrow xy=x-۱\Rightarrow ۱=(۱-y)x\Rightarrow x=\frac{۱}{۱-y}\Rightarrow ۱-y=\circ\Rightarrow y=۱$$

$$R_f=R-\{۱\}=B$$

پس f پوشا است.

۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{|x|} & x\neq\circ\\ ۲ & x=\circ\end{cases}\qquad f:R\to R$

حل. $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x)>\circ$

پس تابع پوشا نیست زیرا $f(x)$ نمی‌تواند مقادیر منفی را اختیار کند. یعنی به ازای هر $y<\circ$، xی وجود ندارد که $f(x)=y$ باشد.

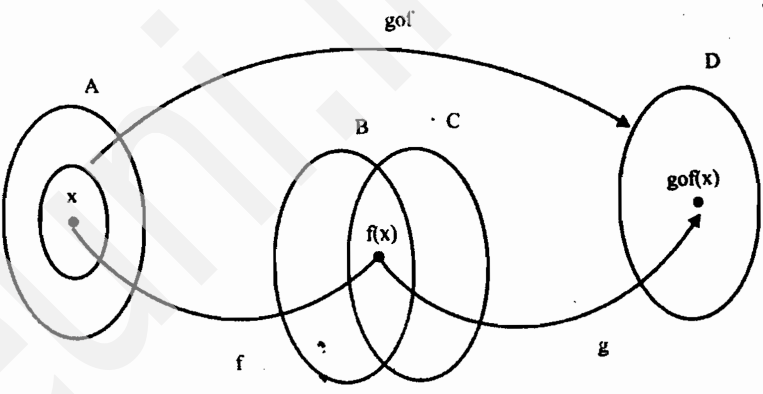
۱-۴-۹ ترکیب دو تابع. ترکیب دو تابع f و g را که با نماد gof نشان داده و ضابطه و دامنه آن چنین تعریف می‌شود.

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gof"] & \\ f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

هرگاه در $f:A\to B$ و $g:C\to D$ آنگاه شکل زیر، تابع gof را مجسم می‌کند



شکل ۱-۲

ملاحظه می‌شود هرگاه $B \subseteq C$ آنگاه $gof : A \to D$ و $D_{gof} = A$.

۱-۴-۱۰ تذکر. (۱) در حالت کلی $fog \neq gof$ ولی $(fog)oh = fo(goh)$ است. یعنی ترکیب توابع در حالت کلی، خاصیت جابجایی ندارد اما خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

(۲) در حالت کلی ممکن است دامنه تابع g و برد تابع f برابر نباشند. تابع $gof(x)$ وقتی قابل تعریف است که $R_f \cap D_g \neq \phi$.

۱-۴-۱۱ مثال. ۱) توابع $f(x) = \dfrac{۱}{x^۲ - ۴}$ و $g(x) = \sqrt{x + ۴}$ مفروضند.

الف) D_f و D_g را بیابید. ب) D_{fog} و ضابطه fog را بنویسید.

حل. الف)

$$f : x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow D_f = R - \{-۲, ۲\}$$

$$g : x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴ \Rightarrow D_g = [-۴, +\infty)$$

ب)

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x+۴} \in R - \{-۲, ۲\} \Rightarrow \sqrt{x+۴} \neq \pm ۲$$

چون $\sqrt{x+۴} \geq ۰$ پس فقط باید $\sqrt{x+۴} \neq ۲$ یا $x + ۴ \neq ۴$ یا $x \neq ۰$ باشد و بنابراین:

$$\begin{cases} x \in [-۴, +\infty) \\ x \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_{fog} = [-۴, \infty) - \{۰\} = [-۴, ۰) \cup (۰, +\infty)$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+۴}) = \frac{۱}{(\sqrt{x+۴})^۲ - ۴} = \frac{۱}{x + ۴ - ۴} = \frac{۱}{x}$$

۲) اگر $f(x) = \dfrac{x}{x+۱}$ و $g(x) = \sqrt{x+۱}$ باشد $(fog)(۳)$ و دامنه و ضابطه gof را حساب کنید.

حل.

$$g(۳)=\sqrt{۳+۱}=\sqrt{۴}=۲$$

$$fog(۳)=f\big(g(۳)\big)=f(۲)=\frac{۲}{۳}$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow D_f=R-\{-۱\}$$

$$x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱ \Rightarrow D_g=[-۱,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}$$

$$f(x)\in D_g \Rightarrow \frac{x}{x+۱}\in[-۱,+\infty) \Rightarrow \frac{x}{x+۱}\geq -۱ \Rightarrow \frac{x}{x+۱}+۱\geq ۰$$

$$\frac{x+x+۱}{x+۱}=\frac{۲x+۱}{x+۱}\geq ۰$$

$$۲x+۱=۰ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

x	$-\infty$		-۱		$-۱/۲$		$+\infty$
$\frac{۲x+۱}{x+۱}>۰$		+		−		+	

$$D_{gof}=(-\infty,-۱)\cup[-\frac{۱}{۲},+\infty)$$

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)=g\left(\frac{x}{x+۱}\right)=\sqrt{\frac{x}{x+۱}+۱}=\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}}$$

۱-۴-۱۲ وارون (معکوس) یک تابع. تعریف فرض کنید $f:A\to B$ تابعی یک به یک باشد، در این صورت وارون (معکوس) f یعنی $f^{-۱}$ وجود دارد و چنین تعریف می‌شود:

$$f^{-۱}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)$$

و با تبدیل x به y داریم:

$$y=f^{-۱}(x) \Leftrightarrow f(y)=x$$

توجه. هرگاه معکوس f موجود باشد آنگاه:

$$\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{cases}$$

و برای هر $x \in D_f$ و $y \in D_{f^{-1}}$ داریم:

$$f^{-1}of(x) = x$$

$$fof^{-1}(y) = y$$

۱-۴-۱۳ قضیه. هرگاه تابع $f : A \to B$ یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز یک به یک است.

اثبات. فرض کنید f یک به یک باشد، در این صورت f^{-1} موجود است.

فرض کنید y_1 و y_2 دو عضو دلخواه از $R_f = D_{f^{-1}}$ باشند و $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$،

همچنین اگر $f^{-1}(y_1) = x_1$ و $f^{-1}(y_2) = x_2$ آنگاه چون $x_1 = x_2$ بنابراین $f(x_1) = f(x_2)$ و لذا:

$$f\left(f^{-1}(y_1)\right) = f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 = y_2$$

۱-۴-۱۴ قضیه. هرگاه $f : A \to B$ یک به یک بوده و f^{-1} معکوس آن باشد در این صورت f معکوس تابع f^{-1} است، به عبارت دیگر $(f^{-1})^{-1} = f$.

اثبات. طبق تعریف تابع معکوس داریم: $(f^{-1})^{-1}(x) = y$ اگر و فقط اگر $f^{-1}(y) = x$ اگر و فقط اگر $y = f(x)$ پس $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

۱-۴-۱۵ اگر $f : X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ باشد، آنگاه تصویر معکوس B تحت f که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

۱-۴-۱۶ قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد آنگاه:

الف) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$ آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

ب) اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$ باشد، آنگاه:

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \ , \ f\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq B$$

ج) اگر $A, B \subseteq Y$ باشند، در این صورت:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

۱-۴-۱۷ مثال. ۱) تحقیق کنید کدام‌یک از توابع زیر روی دامنه تعریفشان دارای وارون (معکوس) است و ضابطه معکوس آن را (در صورت وجود) بیابید.

۱) $$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

حل. با اضافه و کم کردن عدد یک (۱) به ضابطه داریم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \qquad f(x) = (x+1)^3 - 1$$

تابع f یک به یک است زیرا:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^3 - 1 = (x_2+1)^3 - 1 \Rightarrow (x_1+1)^3 = (x_2+1)^3$$

$$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع f دارای وارون می‌باشد.

برای تعیین ضابطه معکوس تابع $y = f(x)$ کافی است با توجه به ضابطه $y = f(x)$ مقدار x را برحسب y به دست آوریم و بعد جای متغیر x و y را عوض کنیم:

$$y = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y + 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt[3]{y+1}$$

ضابطه تابع معکوس $\Rightarrow x = -1 + \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x+1}$

۲) $$f(x)=\frac{7+3x}{x-2}$$

حل. $$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$\forall x_1,x_2\in D_f: f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{7+3x_1}{x_1-2}=\frac{7+3x_2}{x_2-2}$$

$$\Rightarrow (7+3x_1)(x_2-2)=7+3x_2)(x_1-2)$$

$$\Rightarrow 7x_2-14+3x_1x_2-6x_1=7x_1-14+3x_1x_2-6x_2$$

$\Rightarrow 13x_2=13x_1 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ f یک‌به‌یک است $\overset{\text{پس}}{\Rightarrow}$ f معکوس‌پذیر است

$$y=\frac{7+3x}{x-2} \Rightarrow yx-2y=7+3x \Rightarrow yx-3x=2y+7$$

$$\Rightarrow (y-3)x=2y+7 \Rightarrow x=\frac{2y+7}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+7}{x-3}$$

۲) معکوس توابع زیر را بیابید.

الف) $$g(x)=f(x)+2$$

حل. برای یافتن معکوس تابع $y=f(x)$ کافی است از طرفین ضابطهٔ داده شده، f^{-1} بگیریم و با توجه به $f^{-1}of=I$ (I تابع همانی) مقدار x را برحسب $f^{-1}(y)$ به دست آوریم و در آخر جای x و y را عوض کنیم.

فرض کنید $g(x)=y$، پس $x=g^{-1}(y)$.

$$y=f(x)+2 \Rightarrow f(x)=y-2 \Rightarrow x=f^{-1}(y-2) \Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(x-2)$$

ب) $$g(x)=f(-3x)$$

حل. $$g(x)=y \Rightarrow x=g^{-1}(y)$$

$$y=f(-3x) \Rightarrow f^{-1}(y)=-3x \Rightarrow x=-\frac{1}{3}f^{-1}(y) \Rightarrow g^{-1}(x)=-\frac{1}{3}f^{-1}(x)$$

ج) $g(x) = ۳f(x+۱) - ۲$

حل. $g(x) = y \Rightarrow x = g^{-۱}(y)$

$$y = ۳f(x+۱) - ۲ \Rightarrow f(x+۱) = \frac{y+۲}{۳} \Rightarrow x+۱ = f^{-۱}(\frac{y+۲}{۳})$$

$$\Rightarrow x = -۱ + f^{-۱}(\frac{y+۲}{۳}) \Rightarrow g^{-۱}(x) = -۱ + f^{-۱}(\frac{x+۲}{۳})$$

د) $g(x) = f(۲x - ۳)$

حل. $g(x) = y \Rightarrow x = g^{-۱}(y)$

$$y = f(۲x-۳) \Rightarrow f^{-۱}(y) = ۲x - ۳ \Rightarrow ۲x = ۳ + f^{-۱}(y) \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}f^{-۱}(y)$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)$$

هـ) $g(x) = \frac{۱ - ۲f(x)}{۲ + f(x)}$

حل. $g(x) = y \Rightarrow x = g^{-۱}(y)$

$$y = \frac{۱-۲f(x)}{۲+f(x)} \Rightarrow ۲y + yf(x) = ۱ - ۲f(x) \Rightarrow (y+۲)f(x) = ۱ - ۲y$$

$$f(x) = \frac{۱-۲y}{y+۲} \Rightarrow x = f^{-۱}(\frac{۱-۲y}{y+۲}) \Rightarrow g^{-۱}(x) = f^{-۱}(\frac{۱-۲x}{x+۲})$$

۱-۴-۱۸ تابع صعودی و نزولی. فرض کنید $f: R \to R$ با ضابطه $y = f(x)$ یک تابع حقیقی و $x_۱, x_۲ \in D_f$ باشند:

۱) تابع f را صعودی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \geq f(x_۱)$$

۲) تابع f را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)$$

۳) تابع f را نزولی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

۴) تابع f را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

۱-۴-۱۹ تابع یکنوا. هر تابع صعودی یا نزولی را یکنوا گویند.

هر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را اکیداً یکنوا گویند.

۱-۴-۲۰ مثال. ثابت کنید هر تابعی که در دامنه‌اش اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، یک به یک است.

حل. فرض کنید تابع f اکیداً صعودی و $x_1, x_2 \in D_f$ باشند:

$$[x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)] \Rightarrow [x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)]$$

با توجه به تعریف تابع یک به یک، f یک به یک است.

۱-۴-۲۱ نکته. سه گزاره زیر معادل هستند یعنی هر کدام که برقرار باشند، آنگاه دوتای دیگر نیز برقرار هستند.

۱) تابع f معکوس‌پذیر است.

۲) تابع f یک به یک است.

۳) تابع f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

بنابراین، اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آنگاه معکوس‌پذیر نیز هست.

۱-۴-۲۲ تعریف.

الف) تابع f را زوج گویند، هرگاه داشته باشیم:

اولاً: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ثانیاً: $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

ب) تابع f را فرد گویند، هرگاه داشته باشیم:

اولاً: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ثانیاً: $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

۱-۴-۲۳ مثال.

۱) تابع $f(x) = \dfrac{x^{2}}{x^{2}+4}$ تابعی زوج است زیرا:

$$D_f = R$$

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^{2}}{(-x)^{2}+4} = \frac{x^{2}}{x^{2}+4} = f(x)$$

۲) تابع $f(x) = \dfrac{x}{x^{2}+3}$ فرد است، زیرا:

$$f(-x) = \frac{-x}{x^{2}+3} = -f(x)$$

$$D_f = R : \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

۱-۵ توابع حقیقی

۱-۵-۱ تعریف. اگر عناصر دامنه و برد تابع f، اعداد حقیقی باشند، f را یک تابع حقیقی می‌نامیم. به عبارت دیگر تابع f را حقیقی خواهیم نامید اگر $D_f \subseteq R$ و $R_f \subseteq R$ باشد.

اعمال جبری روی توابع حقیقی.

۱-۵-۲ تعریف. فرض کنید f و g دو تابع حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند، داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ g(x)\neq 0$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

۱-۵-۳ مثال. ۱) فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x-2}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

دامنه تابع‌های f و g و $f\pm g$ و fg و $\frac{f}{g}$ را تعیین و ضابطه هریک را بنویسید.

حل.

$$f: x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f=R-\{2\}$$

$$g: x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_g=(1,+\infty)$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=D_f\cap D_g=(1,+\infty)-\{2\}=(1,2)\cup(2,+\infty)$$

چون همواره $g(x)\neq 0$، پس:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=(1,2)\cup(2,+\infty)$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

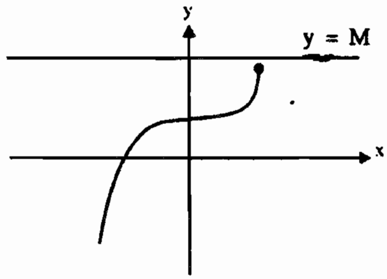
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

۱-۶ کرانداری یک تابع

۱-۶-۱ تعریف. تابع حقیقی f مفروض است.

الف) تابع f را از بالا کراندار گوییم هرگاه داشته باشیم:

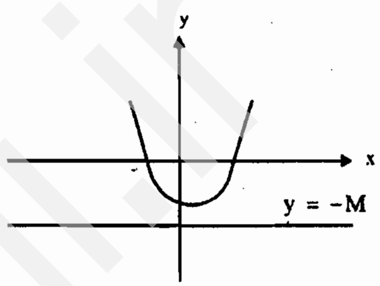
$$\exists M \in R \ \forall x \in D_f : f(x) \le M$$



شکل ۱-۳

ب) تابع f را از پائین کراندار گوییم هرگاه داشته باشیم:

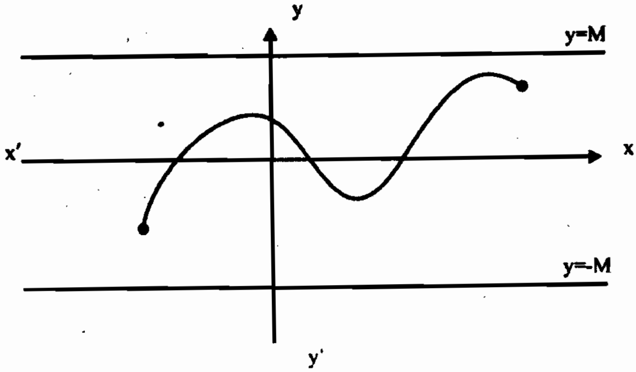
$$\exists M \in R \ \forall x \in D_f : f(x) \ge M$$



شکل ۱-۴

ج) تابع f را کراندار گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\exists 0 < M \in R \ \forall x \in D_f : |f(x)| \le M$$



شکل ۱-۵

۱-۶-۲ مثال. کدام‌یک از توابع زیر کراندار، کراندار از بالا و یا کراندار از پایین است؟

۱) $f(x)=x^{۲}+۱\ ,\ x\leq ۰$

حل. $x\leq ۰ \Rightarrow x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}+۱\geq ۱ \Rightarrow f(x)\geq ۱$

از پایین کراندار است.

۲) $f(x)=x^{۲}+۱\ ,\ ۰\leq x\leq ۱$

حل. $۰\leq x\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq x^{۲}\leq ۱ \Rightarrow ۱\leq x^{۲}+۱\leq ۲ \Rightarrow ۱\leq f(x)\leq ۲$

f کراندار است.

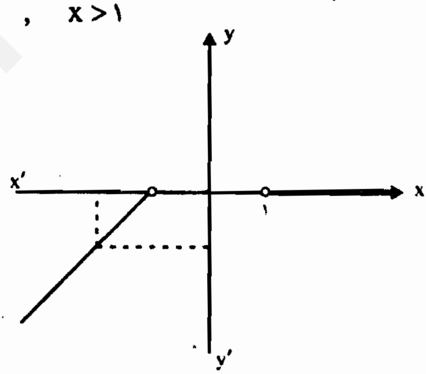
۳) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & ,\ x<-۱ \\ ۰ & ,\ x>۱ \end{cases}$

$y=x+۱$

	-۱	-۲
	۰	-۱

$y=۰$

x	۱	۲
y	۰	۰



با توجه به نمودار تابع: $\forall x\in D_f : f(x)\geq ۰$

پس تابع از بالا کراندار است.

۱-۶-۳ تمرین. (۱) دامنه هریک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^{2}+1}$

۲) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-5x+21}}$

۳) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

۴) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-7x+12}}$

۵) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-x+2}}$

۶) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x}$

۷) $f(x)=\sqrt{x}$

۸) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^{2}+2x+1)(-x^{2}+x-1)}{x^{2}-5x+6}}$

۹) $f(x)=\sqrt[4]{x^{2}-5x+6}$

۱۰) $f(x)=\dfrac{x^{2}+2x+1}{x+1}$

۱۱) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$

۱۲) $f(x)=\sqrt{1-x^{2}}$

(۲) دامنه و برد هریک از توابع را تعیین کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$

۲) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x}$

۳) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$

۴) $f(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ -x+3 & x>1\end{cases}$

۵) $f(x)=\begin{cases}x & x<1\\ x+1 & x>1\end{cases}$

۶) $f(x)=\dfrac{x^{2}-4}{x-2}$

۷) $f(x)=\begin{cases}-x+5 & x>4\\ -\sqrt{16-x^{2}} & -4<x<4\\ x+y & x\le -4\end{cases}$

۸) $f(x)=\sqrt{x-|x|}$

(۳) از جفت توابع زیر کدام‌ها مساوی هستند؟

۱) $f(x)=\frac{x}{x} \quad , \quad g(x)=1$

۲) $f(x)=(\sqrt{x})^2 \quad , \quad g(x)=x$

۳) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \quad , \quad g(x)=x+2$

(۴) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-1}$. مطلوبست $f(1)$، $f(x+1)$، $f(x^2-1)$، $f(\frac{1}{x})$ و $f(f(2))$.

(۵) فرض کنید f تابعی است که به ازای هر x و y، $f(x+y)=f(x)+f(y)$. اگر n عددی طبیعی باشد و $f(1)\neq 0$ باشد، مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را بیابید.

(۶) در هر یک از تمرینات زیر $f+g$، $\frac{f}{g}$، fog، gof، fof و gog را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=x^2+1$

ب) $f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=4-x^2$

ج) $f(x)=\frac{x+1}{x-1} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{x}$

د) $f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

(۷) در هر مورد fg و $f-g$ را بیابید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & 0\leq x<1 \\ 4x & 1<x \end{cases}$

ج) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-1 \\ x^2+1 & -1\le x<2 \\ \sqrt{x+2} & 2<x \end{cases}$ ، $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 4 & x\ge 1 \end{cases}$

(۸) توابع f و g به صورت زیر داده شده است.

$$g:R-\{1\}\to R \qquad f:R-\{3\}\to R$$

$$g(x)=\frac{3-8x^3}{1-x^3} \qquad f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

ثانیاً: آیا f و g وارون یکدیگرند؟

(۹) کدام‌یک از توابع زیر یک به یک و پوشا است؟

۱) $f(x)=\frac{|x|+1}{x}$ ۲) $f:R^+\to R\ ,\ f(x)=|x|+1$

۳) $f:R\to R\ ,\ f(x)=\sqrt[3]{x}+2$ ۴) $f:R-\{1\}\to R\ ,\ f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

(۱۰) تابع $f:R-\{1\}\to R-\{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است.

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

ثانیاً: a را چنان بیابید که f پوشا باشد.

(۱۱) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ ب) $f(x)=\sqrt{x-4}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x & , & 1>x \\ x^2 & , & 1\le x\le 9 \\ 27\sqrt{x} & , & 9<x \end{cases}$

فصل دوم

حد و پیوستگی توابع

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

۱. همسایگی یک نقطه را تعریف کند.

۲. همسایگی بدون مرکز (محذوف) یک نقطه را تعریف کند.

۳. مفهوم حد، حد چپ و حد راست تابع در یک نقطه را بیان کرده و مقدار هریک را در صورت وجود محاسبه کند.

۴. رابطه بین حد چپ و حد راست و حد تابع در یک نقطه را بیان کرده و به‌کار برد.

۵. قضایای مربوط به حد تابع در یک نقطه را بیان کرده و به‌کار برد.

۶. حد توابع مثلثاتی داده شده را در یک نقطه محاسبه کند.

۷. حد توابع در بی‌نهایت را تعریف کرده و در صورت وجود حد، آن را محاسبه کند.

۸. صور مبهم یا نامعین را تشخیص دهد.

۹. قضایای مربوط به حد توابع در بی‌نهایت و حدهایی را که بی‌نهایت می‌شوند را بیان کرده و به‌کار برد.

۱۰. پیوستگی تابع را در یک نقطه و بر یک بازه تعریف کند و در مورد پیوستگی توابع داده شده تحقیق کند.

۱۱. قضایای پیوستگی را بیان کرده و به‌کار برد.

۲-۱ بازه‌های حقیقی و همسایگی‌ها

بازه‌ها یا فاصله‌های حقیقی زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی R می‌باشند که اهمیت خاصی دارند. آنها را به دو دستهٔ بازه‌های کراندار و بازه‌های بیکران تقسیم می‌کنیم.

۲-۱-۱ بازه‌های کراندار (محدود)

الف) بازهٔ باز

اگر $a,b \in R$ و $a \le b$، مجموعهٔ $\{x \in R | a < x < b\}$ را بازه باز یا فاصلهٔ باز دو عدد a و b می‌نامیم و با نماد (a,b) یا $]a,b[$ نمایش می‌دهیم.

یعنی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین a و b به‌جز a و b و نمودار هندسی یا نمایش آن روی محور به صورت زیر است:

شکل ۲-۱

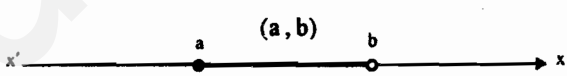
ب) بازهٔ بسته

اگر $a,b \in R$ و $a \le b$ مجموعه $\{x \in R | a \le x \le b\}$ را بازهٔ بسته $[a,b]$ می‌نامند.
یعنی تمام اعداد حقیقی بین a و b و خود a و b نمایش هندسی آن به صورت زیر است:

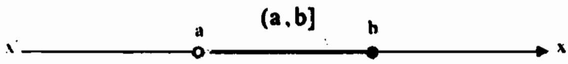
شکل ۲-۲

ج) بازه‌های نیم‌باز

اگر $a,b \in R$ و $a \le b$ مجموعه‌های $[a,b) = \{x \in R | a \le x < b\}$ و $(a,b] = \{x \in R | a < x \le b\}$ را بازه‌های نیم‌باز می‌نامند. و نمایش هندسی آنها به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۲-۳

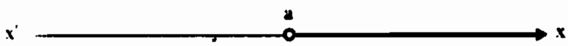


شکل ۲-۴

د) بازه‌های بیکران (نامحدود)

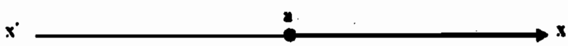
اگر $a \in R$ باشد، بازه‌هایی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱) مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگتر از a $\quad (a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$



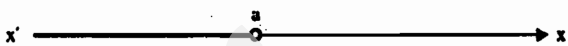
شکل ۲-۵

(۲) مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی a $\quad [a,+\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$



شکل ۲-۶

(۳) مجموعه تمام اعداد حقیقی کوچکتر از a $\quad (-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}$

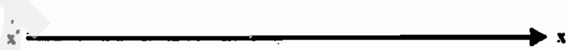


شکل ۲-۷

(۴) مجموعه تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی a $\quad (-\infty,a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$

شکل ۲-۸

(۵) مجموعه اعداد حقیقی $\quad (-\infty,+\infty) = \{x \in R\} = R$



شکل ۲-۹

۲-۱-۲ مثال. هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازهٔ (فاصله) بنویسید.

الف) $A=\{x|1<x<3\}$ ب) $B=\{x|2\le x<7\}$

ج) $C=\{x|1\le x\le 2\}$ د) $D=\{x|3<x\le 4\}$

هـ) $E=\{x|x>2\}$ و) $F=\{x|x\ge 1\}$

ط) $G=\{x|x<1\}$ ی) $I=\{x|x\le 4\}$

حل.

الف) $A=(1,3)$ ب) $B=[2,7)$

ج) $C=[1,2]$ د) $D=(3,4]$

هـ) $E=(2,+\infty)$ و) $F=[1,+\infty)$

ط) $G=(-\infty,1)$ ی) $I=(-\infty,4]$

۲-۱-۳ مثال. هریک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید.

۱) $A=(2,3)$ ۲) $B=[1,5)$

۳) $C=(2,4]$ ۴) $D=[1,6]$

۵) $E=(2,+\infty)$ ۶) $F=[1,+\infty)$

۷) $G=(-\infty,2)$ ۸) $I=(-\infty,4]$

حل.

۱) $A=\{x\in R|2<x<3\}$ ۲) $B=\{x\in R|1\le x<5\}$

۳) $C=\{x\in R|2<x\le 4\}$ ۴) $D=\{x|1\le x\le 6\}$

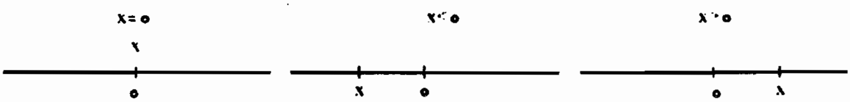
۵) $E=\{x|x>2\}$ ٦) $F=\{x\in R|x\ge 1\}$

۷) $G=\{x\in R|x<2\}$ ۸) $I=\{x|x\le 4\}$

۲-۱-۴ یادآوری. می‌دانیم قدرمطلق عدد حقیقی a را با $|a|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$|a|=\begin{cases} a & , \quad a\ge 0 \\ -a & , \quad a<0 \end{cases}$$

۲-۱-۵ تعبیر هندسی قدرمطلق. فرض کنید $x \in R$، به شکل‌های زیر توجه کنید.



فاصله x از o، برحسب تعریف نامنفی است، بنابراین با توجه به شکل بالا به ترتیب داریم:

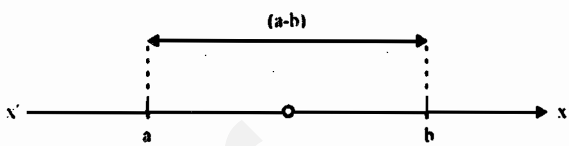
۱) $x < 0$ $\qquad$ $-x =$ فاصله x از o

۲) $x = 0$ $\qquad$ $0 =$ فاصله x از o

۳) $x > 0$ $\qquad$ $x =$ فاصله x از o

پس برای هر $x \in R$، $|x| = |0 - x|$ مساوی فاصله نقطهٔ x از صفر است.

به همین ترتیب اگر $a, b \in R$، آنگاه $|a - b|$ مساوی فاصله دو نقطه عدد حقیقی a و b است.



۲-۱-۶ مثال. مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را به صورت فاصله بنویسید.

۱) $2x - 3 < 1$

حل.

$2x < 4 \rightarrow x < 2 \Rightarrow \{x \mid x < 2\} = (-\infty, 2)$ = مجموعه جواب

۲) $|2x - 1| \leq 3$

حل. می‌دانیم $|x| \leq k \ , \ k > 0 \Rightarrow -k \leq x \leq k$

$\Rightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \longrightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -1 \leq x \leq 2$

$[-1, 2]$ = مجموعه جواب

۳) $|۴x+۱|<۲$

حل.

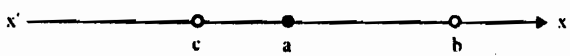
$$-۲<۴x+۱<۲ \xrightarrow{+(-۱)} -۳<۴x<۱ \rightarrow -\frac{۳}{۴}<x<\frac{۱}{۴}$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left(-\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴}\right)$$

۲-۱-۷ همسایگی

الف) همسایگی باز عدد حقیقی a :

عبارت از بازهٔ بازی است که شامل عدد a باشد؛ یعنی بازهٔ (c,d) را یک همسایگی a گوییم، اگر $a\in(c,d)$، مانند شکل زیر:



ب) همسایگی باز متقارن عدد حقیقی a :

اگر a نقطه وسط بازه باشد، بازه متقارن است. بازه $(a-\delta,a+\delta)$ یک همسایگی متقارن a به شعاع δ است $(\delta>۰)$.

به عبارت دیگر مجموعه جوابهای نامعادله $|x-a|<\delta$ را همسایگی به مرکز a و به شعاع δ گویند.

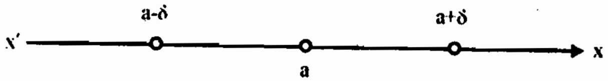
این همسایگی را با نماد $N(a,\delta)$ نمایش می‌دهیم، پس:

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid -\delta<x-a<\delta\}$$
$$=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

ج) همسایگی محذوف و متقارن a

اگر عدد a را از همسایگی $N(a,\delta)$ حذف کنیم، همسایگی را بدون مرکز a یا همسایگی محذوف و متقارن a می‌نامند. یعنی:

$$N'(a,\delta) = N(a,\delta) - \{a\} = (a-\delta, a+\delta) - \{a\} = \{x \mid ۰ < |x-a| < \delta\}$$
$$= \{x \mid |x-a| < \delta \,,\, x \neq a\}$$



۲-۱-۸ نکته. هر بازه باز (a,b) یک همسایگی متقارن به مرکز $\frac{a+b}{۲}$ و به شعاع $\frac{b-a}{۲}$ است.

۲-۱-۹ مثال. الف) بازه $(۰,۳)$ یک همسایگی باز عدد ۱ است. زیرا $۱ \in (۰,۳)$.

ب) بازه $(۰,۴)$ یک همسایگی متقارن عدد ۲ و به شعاع ۲ است.

ج) بازه $(-۱,۳)$ یک همسایگی متقارن عدد ۱ به شعاع ۲ است.

د) مجموعه $\{x \in R \mid ۰ < |x-۲| < \frac{۱}{۱۰۰}\}$ یک همسایگی متقارن و بدون مرکز (محذوف) عدد ۲ و به شعاع $\delta = \frac{۱}{۱۰۰}$ است.

۲-۱-۱۰ مثال. مجموعه $A = \{x \in R \mid |۲x+۱| < ۵\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل. $|۲x+۱| < ۵ \Rightarrow -۵ < ۲x+۱ < ۵ \Rightarrow -۶ < ۲x < ۴$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳ < x < ۲ \\ a-r < x < a+r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-r = -۳ \\ a+r = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a = -۱ \\ ۲r = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱}{۲} \\ r = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۲-۱-۱۱ مثال.

الف) کدام‌یک از بازه‌های زیر همسایگی ۱ است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $(۰,۲)$

حل. ۲ درست است زیرا همسایگی عدد ۱ بازه بازی است که ۱ عضو آن باشد.

ب) کدام‌یک از همسایگی‌های زیر همسایگی متقارن ۳ است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $(۰,۵)$

حل. ۱ درست است زیرا وسط (مرکز) بازه برابر عدد ۳ است.

$$\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

ج) اگر I همسایگی محذوفی از ۲ باشد.

۱) $۲\in I$ ۲) $۲\notin I$

حل. ۲ درست است زیرا همسایگی محذوف ۲ یک همسایگی است که ۲ عضو آن نیست.

۲-۱-۱۲ مثال. ۱) کدام گزاره به عنوان تعریف همسایگی محذوف متقارن a نادرست است؟

الف) $\{x\in R|\ |x-a|<\varepsilon\}$ ب) $\{x\in R|\ ۰<|x-a|<\varepsilon\}$

ج) $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$ د) $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$

حل. (الف) درست است زیرا گزینه (الف) تعریف همسایگی متقارن a است.

۲) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی متقارن ۲ است؟

الف) $(-۱,۰)\cup(۲,۴)$ ب) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$

ج) $(۰,۳)\cap(۱,۴)$ د) $(۱,۳)\cap(۲,۴)$

حل. (ج) درست است زیرا:

$$(۰,۳)\cap(۱,۴)=(۱,۳)\Rightarrow \text{مرکز}=a=\frac{۱+۳}{۲}=۲$$

۳) همسایگی به مرکز $\frac{۳}{۲}$ و شعاع δ یک زیرمجموعه همسایگی $\{x|\ ۰<|x-۱|<۲\}$ است. ماکزیمم δ کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) ۱ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) ۲

حل. (ج) درست است.

$$۰<|x-۱|<۲\Rightarrow\begin{cases}-۲<x-۱<۲\\x\neq ۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱<x<۳\\x\neq ۱\end{cases}$$

چون (۱) در همسایگی قرار ندارد پس $\text{Max}(\delta)=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$.

۲-۱-۱۳ تمرین.

۱. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید، سپس آنها را روی یک خط نشان دهید.

الف) $N(1,\frac{1}{2})$ ب) $N(0,3)$

ج) $N'(1,3)$ د) $N'(1,5)$

۲. مجموعهٔ $A=\{x\in R \mid |2x+3|<1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

۳. مجموعهٔ $A=\{x\in R \mid |3x-1|<|x+1|\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

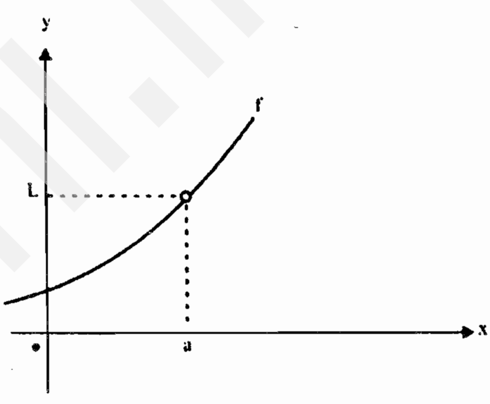
۴. اگر $(2a-4,a+2)$ یک همسایگی متقارن ۵ باشد، شعاع همسایگی را تعیین کنید.

۵. مجموعه $A=\{x\in R \mid |2x+3|<6\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع δ باشد. a و δ را تعیین کنید.

مفهوم حد

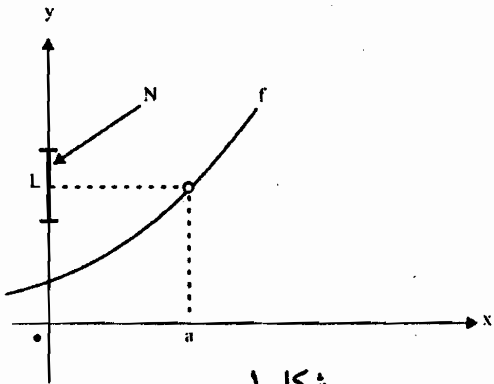
قبل از آن که به تعریف دقیق حد بپردازیم، ابتدا با ذکر مثالی، با استفاده از شکل، مقدمات آشنایی ذهنی، نسبت به این مفهوم را فراهم می‌آوریم.

تابعی مانند f را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر می‌گیریم:



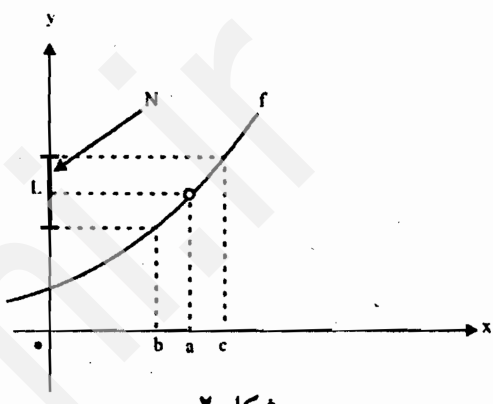
f در نقطه a تعریف نشده است $(a \notin D_f)$. این مطلب را در شکل بالا با رسم دایرهٔ کوچکی به دور نقطه (a,L) نشان داده‌ایم.

۱. فرض کنیم فاصلهٔ دلخواه N، که L در وسط آن قرار دارد، داده شده باشد.



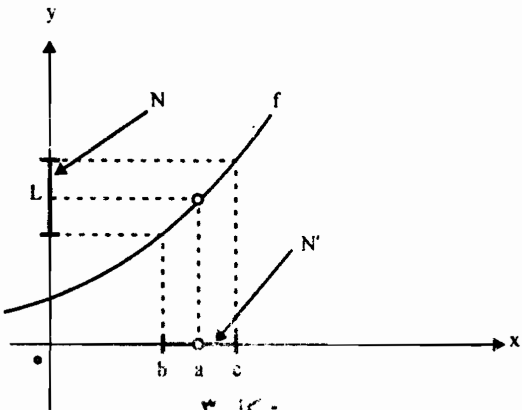
شکل ۱

۲. از دو انتهای این فاصله، خطوط موازی محور xها رسم می‌کنیم، و طولهای محل برخورد این خطوط را با نمودار تابع f، به ترتیب b و c می‌نامیم.



شکل ۲

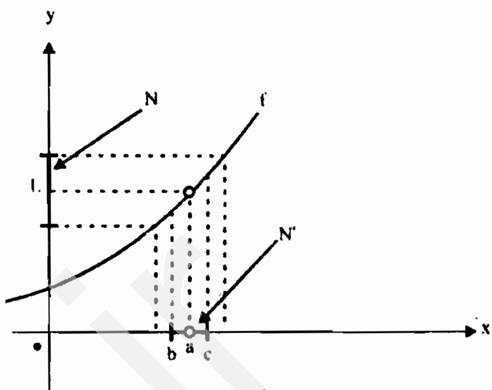
۳. روی پاره‌خط bc فاصله‌ای مانند N'، $a \notin N'$، را که دو انتهای آن از a به یک فاصله باشند، در نظر می‌گیریم.



شکل ۳

دایره کوچکی که به دور a رسم شده نشان‌دهندهٔ این است که $a \notin N'$.

۴. خطوطی به موازات محور y که از دو انتهای N' رسم می‌کنیم.



شکل ٤

در شکل (۴) ملاحظه می‌شود که قسمتی از نمودار f، که بین این دو خط قائم واقع است، بین دو خط افقی‌ای که از دو انتهای N رسم شده است نیز واقع می‌گردد. به عبارت دیگر اگر $x \in N'$ باشد، $f(x) \in N$ خواهد بود.

در شماره‌های (۱)، (۲)، (۳) و (٤)، از روی شکل می‌بینیم که برای فاصلهٔ مفروض N، فاصله‌ای مانند N' می‌توان یافت به طوری که:

$$x \in N' \Rightarrow f(x) \in N$$

فرض کنیم رابطهٔ بالا برای هر فاصلهٔ دلخواه N درست باشد. یعنی برای هر فاصلهٔ N، فاصله‌ای مانند N' وجود داشته باشد به طوری که:

$$x \in N' \;\Rightarrow\; f(x) \in N$$

در این صورت می‌گوییم:

$f(x)$ را هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به L نزدیک کنیم، مشروط بر آن که x به قدر کافی به a نزدیک شود.

و یا:

وقتی x به a نزدیک شود، $f(x)$ به سمت L میل کند.

در عبارت بالا را با علامت زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

۲-۲ حد تابع

یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات، مفهوم حد است. قبل از آن که به تعریف حد بپردازیم، با چند مثال خواننده را با این مفهوم آشنا می‌کنیم.

۲-۲-۱ مثال. تابع $f(x) = x + ۳$ را در نظر می‌گیریم.

دامنهٔ این تابع R است. حال جدولی به فرم زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۱	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱
f(x)	٤	۳/۱	۳/۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۰۰۱

ملاحظه می‌شود با نزدیک شدن x به صفر (امّا بیشتر از صفر)، مقدار تابع $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود. جدول دیگری تشکیل می‌دهیم:

x	۱-	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	۰/۰۰۰۱-	۰/۰۰۰۰۱-
f(x)	۲	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	۲/۹۹۹۹۹

ملاحظه می‌شود که با نزدیک شدن x به صفر (اما کمتر از صفر)، مقدار تابع $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود. به بیان دیگر هرقدر بخواهیم، می‌توانیم اختلاف

$f(x)$ و عدد ۳ را کوچک کنیم مشروط بر آن که عدد x را به اندازه کافی به صفر نزدیکتر کنیم. به عبارت دیگر عدد $|f(x)-3|$ را از هر عدد دلخواه مثبت، می‌توان کوچکتر نمود به شرط آن که $|x-0|$ به اندازه کافی کوچک اختیار شود. این مفهوم را به صورت $\lim_{x\to 0} f(x)=3$ نشان می‌دهیم.

۲-۲-۲ مثال. تابع $f(x)=\frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$ را در نظر می‌گیریم.

دامنه تابع $R-\{1\}$ می‌باشد. متغیر x را با مقادیر کمتر از ۱ و همچنین با مقادیر بیشتر از ۱ به سمت ۱ نزدیکتر کرده مقادیر نظیر را برای f تعیین و در جدول زیر می‌نویسیم:

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۲
f(x)	۱	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	...	۳	...	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۵

ملاحظه می‌شود که $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود. میزان نزدیکی آن به عدد ۳ بستگی به نزدیک شدن x به عدد ۱ دارد. مثلاً اگر بخواهیم فاصله f از ۳ کمتر از ۰/۰۰۲ باشد یعنی $|f(x)-3|<0/002$ یعنی $\left|\frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}-3\right|<0/002$ یا $|2x-2|<0/002$ کافی است $|x-1|<0/001$، یعنی فاصله x از عدد یک کمتر از ۰/۰۰۱ باشد. به همین ترتیب می‌توان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به عدد ۳ نزدیک نمود. برای این منظور که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم.

در این صورت گفته می‌شود که حد تابع f وقتی $x\to 1$ مساوی است با ۳ و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

به‌طور کلی منظور از $\lim_{x\to a} f(x)=L$ این است که فاصله $f(x)$ از عدد L یعنی $|f(x)-L|$ از هر عدد مثبتی کوچکتر شود. برای رسیدن به این هدف باید فاصله x از a یعنی $|x-a|$ را به قدر کافی کوچک اختیار کنیم.

۲-۲-۳ تعریف. فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. گفته می‌شود که f در a دارای حدی مانند L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد که اگر $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه $|f(x)-L| < \varepsilon$، به بیان دیگر:

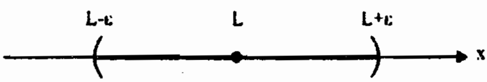
$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

۲-۲-۴ تذکر ۱. برای توضیح بیشتر تعریف فوق از محور اعداد استفاده می‌کنیم. ولی قبل از آن یادآوری می‌کنیم:

۱) $|f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

$$\Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

به بیان دیگر $f(x)$ متعلق به همسایگی به مرکز L و به شعاع ε است.



شکل ۲-۱۰

بازه $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ را ε همسایگی L می‌نامیم.

۲)

$$|x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow x \in (a-\delta, a+\delta)$$

یا x متعلق به همسایگی به مرکز a و شعاع δ است.

۳) $|x-a| > 0 \Rightarrow |x-a| \neq 0 \Rightarrow x \neq a$

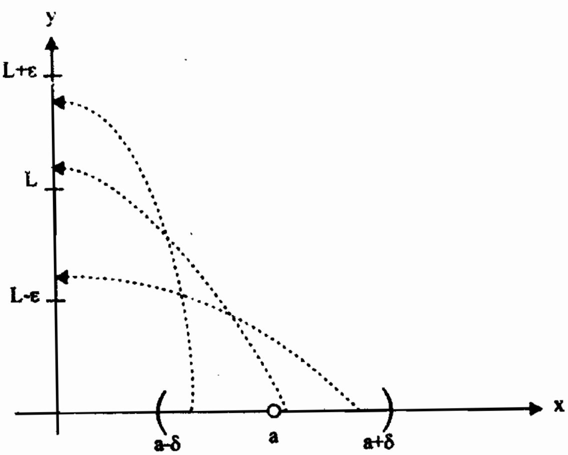
بنابراین از $0 < |x-a| < \delta$ نتیجه می‌شود که:

$$x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$$

که به آن همسایگی محذوف نقطه a به شعاع δ می‌گویند.

شکل ۲-۱۱

برای هر همسایگی نقطه L به شعاع ε یک همسایگی محذوف از نقطه a وجود دارد که وقتی x درون آن همسایگی باشد، $f(x)$ در همسایگی L به شعاع ε است.



شکل ۲-۱۲

تذکر ۲. در مسائل برای محاسبه δ معمولاً عبارت $|f(x)-L|$ را به صورت $|f(x)-L|=|x-a||g(x)|$ می‌نویسیم.

الف) اگر $f(x)$ کثیرالجمله درجه اول باشد، $|g(x)|$ مقدار ثابت است، δ به سادگی محاسبه می‌شود.

ب) اگر $f(x)$ کثیرالجمله درجه اول نباشد، $|g(x)|$ مقدار ثابت نیست و باید برای $|g(x)|$ یک کران بالا تعیین نمود.

تذکر ۳. برای اثبات اینکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ کافی است نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ را تشکیل دهیم و با اعمالی که روی این نامساوی انجام می‌دهیم. رابطهٔ عامل $|x-a|$ با

ε را پیدا کنیم، و با مقایسه $|x-a|$ با δ و ε رابطهٔ بین δ و ε را به دست آوریم. و سپس مقدار δ را برحسب ε محاسبه می‌کنیم.

تذکر ۴. برای پیدا کردن رابطهٔ بین $|x-a|$ و ε اگر به کسری برخورد کردیم که مخرج عامل x دارد باید کران پایین برای مخرج کسر پیدا کرد. در چنین مواردی معمولاً یک شعاع همسایگی برای δ فرض می‌گیریم و با این فرض کران پایین عبارت مخرج کسر را حساب می‌کنیم. باید توجه کرد که δی مفروض را عدد ۱ می‌گیرند. در صورتی که عددی بین ۱ و a وجود داشته باشد که دامنه تابع نباشند، باید شعاع δ را آن‌قدر کوچک کرد تا به چنین مشکلی برخورد نکنیم.

تذکر ۵. اگر در تعریف حد وقتی $x \to a$ به عبارت $|x-a|<\varepsilon|g(x)|$ برخورد کنیم باید x را در یک همسایگی نقطه a به شعاع معین r محدود کنیم در این صورت برای $g(x)$ یک کران بالا و پایین به دست می‌آوریم. $N<g(x)<M$، N و M باید هم‌علامت باشند و چنانچه برای همسایگی درنظر گرفته شده برای x، M و N مختلف‌العلامه باشند یا یکی از آنها صفر باشد شعاع r تعیین شده مورد قبول نیست و باید شعاع r را آن‌قدر کوچک کنیم تا نهایتاً M و N هم‌علامت باشند سپس کران پایین $|g(x)|$ را تعیین کنیم. اگر فرض کنیم $|x-a|<\varepsilon|g(x)|<\frac{\varepsilon}{k}$ باشد در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\delta = \mathrm{Min}\{r, \frac{\varepsilon}{k}\}$$

۲-۲-۵ مثال. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۲}(-۳x+۱)=-۵ \qquad (۱)$$

حل. برای این منظور باید نشان دهیم: $x \to ۲ \Rightarrow y \to -۵$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-۲|<\delta \Rightarrow |y+۵|<\varepsilon \qquad (*)$$

$$|y+۵|=|-۳x+۱+۵|=|-۳x+۶|=|-۳(x-۲)|=۳|x-۲|<\varepsilon \Rightarrow |x-۲|<\frac{\varepsilon}{۳}$$

با انتخاب $\delta \le \frac{\varepsilon}{۳}$ گزاره $(*)$ برقرار است.

۲) $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4$$

حل. برای این منظور باید نشان دهیم: $x\to 1 \Rightarrow y\to 4$

(*) $$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0: 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |y-4|<\varepsilon$$

$$|y-4|=\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|=\left|\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}-4\right|=|2x+2-4|=2|x-1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

با انتخاب $\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$ گزاره (*) برقرار است.

۳) $$\lim_{x\to 3}x^2=9$$

حل. باید نشان دهیم: $x\to 3 \Rightarrow y\to 9$

(*) $$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0: 0<|x-3|<\delta \Rightarrow |y-9|<\varepsilon$$

$$|y-9|=|x^2-9|=|(x-3)(x+3)|=|x-3||x+3|<\varepsilon$$

حال باید کران بالا برای $g(x)=|x+3|$ را به دست آوریم.

$$\begin{cases}x\to 3\\ \delta_1=1\end{cases} \Rightarrow 3-1<x<3+1 \Rightarrow 2<x<4 \xrightarrow{+3} 5<x+3<7$$

$$\Rightarrow 5<|x+3|<7$$

کران بالا ۷ می‌باشد.

$$|y-9|=|x-3||x+3|<7|x-3|<\varepsilon \to |x-3|<\frac{\varepsilon}{7} \longrightarrow \delta_2=\frac{\varepsilon}{7}$$

با انتخاب $\delta=\mathrm{Min}\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$، گزاره (*) برقرار است.

۴) $$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-4}=-1$$

حل. باید نشان دهیم: $x\to 3 \Rightarrow y\to -1$

$$\forall \varepsilon > \circ\ \exists \delta > \circ : \circ < |x - ۳| < \delta \Rightarrow |y + ۱| < \varepsilon \qquad (*)$$

$$|y+۱| = \left|\frac{x-۲}{x-۴}+۱\right| = \left|\frac{x-۲+x-۴}{x-۴}\right| = \left|\frac{۲x-۶}{x-۴}\right| = ۲\times\frac{|x-۳|}{|x-۴|} = ۲|x-۳|\times\frac{۱}{|x-۴|} < \varepsilon$$

برای $|x-۴|$ کران پایین باید پیدا کنیم.

$$\begin{cases} x \to ۳ \\ \delta_۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow +۲ < x \le ۴ \to -۲ < x - ۴ < \circ \to \circ < |x - ۴| < ۲$$

چون کران پایین صفر است پس شعاع را عوض می‌کنیم.

$$\begin{cases} x \to ۳ \\ \delta_۱ = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۳ - \frac{۱}{۲} < x < \frac{۱}{۲} + ۳ \Rightarrow ۲/۵ < x < ۳/۵ \xrightarrow{+(-۴)} -۱/۵ < x - ۴ < -\circ/۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < |x - ۴| < ۱/۵ = \frac{۳}{۲}$$

$(*)$

$$|y+۱| = ۲|x-۳|\times\frac{۱}{|x-۴|} < ۲|x-۳|\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۴|x-۳| < \varepsilon \to |x-۳| < \frac{\varepsilon}{۴} \to \delta_۲ = \frac{\varepsilon}{۴}$$

با انتخاب $\delta = \text{Min}\{\frac{۱}{۲}, \frac{\varepsilon}{۴}\}$ گزاره $(*)$ برقرار می‌باشد.

۵) $$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۲}{x - ۲} = ۷$$

حل. باید ثابت کنیم: $x \to ۳ \Rightarrow y \to ۷$

$$\forall \varepsilon > \circ\ \exists \delta > \circ : \circ < |x - ۳| < \delta \Rightarrow |y - ۷| < \varepsilon \qquad (*)$$

$$|y-۷| = \left|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷\right| = \left|\frac{x^۲-۲-۷x+۱۴}{x-۲}\right| = \left|\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}\right|$$

$$= \left|\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}\right| = |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|} < \varepsilon$$

برای $|x-4|$ کران بالا و برای $|x-2|$ کران پایین پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x \to 3 \\ \delta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2/5 < x < 3/5 \Rightarrow \begin{cases} -1/5 < x-4 < -0/5 \\ 0/5 < x-2 < 1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{3}{2} \end{matrix}$$

کران بالای $|x-4|$ برابر $\frac{3}{2}$ و کران پایین $|x-2|$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$|y-7| = |x-3| \times \frac{|x-4|}{|x-2|} < |x-3| \times \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta_2$$

پس $\delta = \mathrm{Min}\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{3}\}$.

۲-۲-۶ تمرین. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 1}(5x+4)=9$ ۲) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+2)=-4$

۳) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2)=4$ ۴) $\lim\limits_{x\to -2}x^2=4$

۵) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+1}{x+2}=\frac{4}{3}$ ۶) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2}{5x-8}=3$

۷) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-3x+3}=1$ ۸) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}]=1$

۹) $\lim\limits_{x\to 3}(-1)^{[x]}\times\frac{x^2-9}{x^2+3}=0$ ۱۰) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-10x)=-21$

۱۱) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-2}{x-2}=7$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1}{5x-3}=\frac{3}{2}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 2}(-1)^{[x]}\times\frac{x^2-4}{x+2}=0$ ۱۴) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{1}{6}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2}{x-3}=2$ ۱۶) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x-1}=3$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۶} \dfrac{x}{x-۳} = ۲$ ۱۸) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{۱}{x+۳} = -۱$

۱۹) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱}{\sqrt{۵-x}} = \dfrac{۱}{۲}$ ۲۰) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{x^۲-۱۶}{x+۴} = -۸$

حال در ادامه قضایای حدی را بیان می‌کنیم. این قضایا به ما کمک می‌کند حد بخش وسیعی از توابع را بدون استفاده از تعریف حد به دست آوریم.

۲-۲-۷ قضیه. اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، آنگاه این حد منحصر به فرد است. به عبارت دیگر اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۲$ آنگاه $L_۱ = L_۲$.

اثبات. فرض کنید (فرض خلف) $L_۱ \neq L_۲$، دراین صورت $|L_۱ - L_۲| > ۰$.

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \dfrac{|L_۱ - L_۲|}{۲}$.

چون $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ بنا بر تعریف حد داریم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta_۱ > ۰ : ۰ < |x-a| < \delta_۱ \ \Rightarrow \ |f(x) - L_۱| < \varepsilon = \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} \quad (۱)$$

همچنین چون $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۲$ بنا به تعریف حد داریم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta_۲ > ۰ : ۰ < |x-a| < \delta_۲ \ \Rightarrow \ |f(x) - L_۲| < \varepsilon = \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} \quad (۲)$$

قرار دهید $\delta = \operatorname{Min}\{\delta_۱, \delta_۲\}$، در این صورت هرگاه $۰ < |x-a| < \delta$ آنگاه بنا بر (۱) و (۲) داریم:

$$|f(x) - L_۱| < \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} \quad \& \quad |f(x) - L_۲| < \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲}$$

حال با استفاده از این دو نامساوی داریم:

$$|L_۱ - L_۲| = |(L_۱ - f(x)) + (f(x) - L_۲)| \le |L_۱ - f(x)| + |f(x) - L_۲|$$

$$< \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} + \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} = |L_۱ - L_۲|$$

پس $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ و این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است. یعنی $L_1 = L_2$.

۲-۳ محاسبه چند حد، قضایایی درباره حد

۲-۳-۱ قضیه. اگر m و b دو عدد ثابت باشند و $f(x) = mx + b$، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (mx + b) = ma + b$$

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > 0$، باید $\delta > 0$ای بیابیم که:

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; \left|(mx + b) - (ma + b)\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\left|mx + b - (ma + b)\right| = |mx - ma| = |m(x - a)| = |m||x - a|$$

حال برای آن‌که $|m||x - a| < \varepsilon$ باشد، واضح است که $|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$ باشد

بنابراین قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. اما این کار در صورتی ممکن است که $m \neq 0$ باشد.

حال اگر $m = 0$ باشد، $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ خواهد بود، و بنابراین δ را می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد.

۲-۳-۲ نتیجه. هرگاه $f(x) = b$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

اثبات. در قضیه فوق قرار دهید $m = 0$.

۲-۳-۳ قضیه. فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

به عبارت دیگر، حد مجموع دو تابع مساوی مجموع حدهای آن دو تابع است، مشروط بر اینکه آن حدها وجود داشته باشند.

اثبات. باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| < \varepsilon$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. باید $\delta > 0$ای بیابیم که در رابطه بالا صدق کند.

طبق فرض $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ پس به ازای عدد مثبت $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ عدد $\delta_1 > 0$ موجود است به طوری که:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

به همین ترتیب عدد $\delta_2 > 0$ موجود است به طوری که:

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-L_2| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

فرض کنید $\delta = \mathrm{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$، به این ترتیب هرگاه $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه هم $0 < |x-a| < \delta_1$ و هم $0 < |x-a| < \delta_2$ و لذا (۱) و (۲) توأماً برقرارند یعنی:

$$|f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین:

$$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| =$$

$$|(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)| \le |f(x)-L_2|+|g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

با انتخاب $\delta = \mathrm{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$، تعریف حد برای $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1+L_2$ برقرار است.

۲-۳-۴ نتیجه. با استفاده از استقراء ریاضی، به سادگی دیده می‌شود که اگر

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \ , \ \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \ ,\dots, \ \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$$

آنگاه:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)] = L_1+L_2+\cdots+L_n$$

۲-۳-۵ نتیجه. در قضیه ۲-۱-۳، $g(x)$ را به $-g(x)$ و $L_۲$ و به $-L_۲$ تبدیل کنیم داریم:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L_۱-L_۲$$

۲-۳-۶ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L]=\circ$$

اثبات.

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=L-L=\circ$$

۲-۳-۷ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=\circ$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\circ$$

اثبات. باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>\circ\ \exists\delta>\circ:\circ<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)g(x)-\circ|<\varepsilon \qquad (۱)$$

چون $\lim_{x\to a} f(x)=L$ است. می‌توان نوشت:

$$\forall\varepsilon_۱>\circ\ \exists\delta_۱>\circ:\circ<|x-a|<\delta_۱\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon_۱$$

در حالت خاص اگر $\varepsilon_۱=۱$ باشد، داریم:

$$\circ<|x-a|<\varepsilon_۱\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon_۱=۱ \qquad (۲)$$

می‌دانیم:

$$|f(x)-L|\ge|f(x)|-|L| \qquad (۳)$$

با استفاده از (۲) و (۳) داریم $\circ<|x-a|<\delta_۱\ \Rightarrow\ |f(x)|-|L|\le|f(x)-L|<۱$.

و یا:

$$\circ<|x-a|<\delta_۱\ \Rightarrow\ |f(x)|<۱+|L| \qquad (۴)$$

از $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ داریم:

$$\forall \varepsilon_2>0\ \exists \delta_2>0: 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)|<\varepsilon_2 \tag{5}$$

هرگاه $\delta=\text{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$، با توجه به (۴) و (۵)، برای هر $\varepsilon>0$ داریم:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)|<\varepsilon_2(1+|L|) \tag{6}$$

حال اگر در (۶) به‌جای ε_2 مقدار $\frac{\varepsilon}{1+|L|}$ قرار دهیم، داریم:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)|<\varepsilon_2(1+|L|)=\frac{\varepsilon}{1+|L|}(1+|L|)=\varepsilon$$

بنابراین رابطه (۱) ثابت شد و می‌توان نوشت: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

۲-۳-۸ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=L_1L_2$$

به عبارت دیگر، حد حاصلضرب دو تابع مساوی حاصلضرب حدهای آنهاست مشروط بر آن که آن حدها وجود داشته باشد.

اثبات. می‌توان نوشت:

$$f(x)g(x)=[f(x)-L_1]g(x)+L_1[g(x)-L_2]+L_1L_2$$

داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}[f(x)-L_1]g(x)+\lim_{x\to a} L_1[g(x)-L_2]+\lim_{x\to a} L_1L_2 \tag{1}$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L_1)=0\ ,\quad \lim_{x\to a}(g(x)-L_2)=0$$

و همچنین داریم:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-L_1]g(x)=0\ ,\quad \lim_{x\to a}[g(x)-L_2]L_1=0 \tag{2}$$

با جاگذاری (۲) در (۱) داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0 + 0 + L_1L_2 = L_1L_2$$

۲-۳-۹ نتیجه. اگر $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$ و... و $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right] = L_1L_2\cdots L_n$$

۲-۳-۱۰ نتیجه. اگر $L_1 = L_2 = \cdots = L_n = L$ و $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = f(x)$ باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

۲-۳-۱۱ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ باشد، داریم $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

اثبات. قضیه را تنها برای حالت $L > 0$ اثبات می‌کنیم، زیرا اثبات آن در حالت $L < 0$ با روش مشابهی ممکن است.

باید نشان دهیم:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon$$

چون $\lim_{x\to a} f(x) = L$، برای $\varepsilon_1 = \frac{L}{2} > 0$ عددی مانند $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{L}{2} = \varepsilon_1$$

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3}{2}L$$

در نتیجه:

$$0<|x-a|<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad f(x)>\frac{1}{2}L$$

از طرفی داریم:

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|=\left|\frac{L-f(x)}{f(x)L}\right|$$

باز هم با استفاده از $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ می‌توانیم بگوییم:

$$\forall \varepsilon_2>0\ \exists \delta_2>0: 0<|x-a|<\delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon_2$$

فرض کنید $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ در این صورت هرگاه $0<|x-a|<\delta$، آنگاه:

$$\left|\frac{L-f(x)}{Lf(x)}\right|<\frac{\varepsilon_2}{\frac{1}{2}L^2}=\frac{2\varepsilon_2}{L^2}$$

حال اگر $\varepsilon_2=\dfrac{L^2\varepsilon}{2}$ انتخاب شود، داریم:

$$0<|x-a|<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\dfrac{1}{L}$ است.

۲-۳-۱۲ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2\neq 0$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

اثبات. چون $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2\neq 0$ است، داریم $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{L_2}$.

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=L_1\cdot\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

۲-۳-۱۳ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

اثبات. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، بنا به تعریف حد،

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-L|<\varepsilon \qquad (1)$$

اما با استفاده از روابطی که درباره قدرمطلق خوانده‌ایم، داریم:

$$|f(x)-L|\ge |f(x)|-|L| \qquad (2)$$

و نیز:

$$|f(x)-L|=|L-f(x)|\ge |L|-|f(x)|$$

اگر طرفین نامساوی اخیر را در (۱-) ضرب کنیم، داریم:

$$-|f(x)-L|\le |f(x)|-|L| \qquad (3)$$

حال با استفاده از روابط (۲) و (۳) می‌توان نوشت:

$$-|f(x)-L|\le |f(x)|-|L|\le |f(x)-L| \ \Rightarrow \ \big||f(x)|-|L|\big|\le |f(x)-L|$$

در نتیجه با توجه به رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow \ \big||f(x)|-|L|\big|<\varepsilon$$

و در نتیجه:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$$

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۲-۳-۱۴ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

در این رابطه اگر n زوج باشد، L را غیرمنفی فرض کنیم.

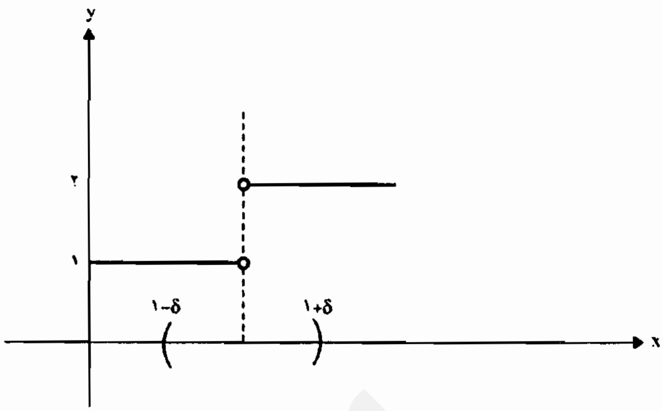
۲-۳-۱۵ مثال. نشان دهید که تابع زیر در $x=1$ حد ندارد.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

حل. برای اینکه نشان دهیم تابعی مانند f، در نقطه‌ای مانند a حد ندارد، ابتدا فرض می‌کنیم که حد f در نقطهٔ a برابر L باشد. سپس عدد مثبتی مانند ε پیدا می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\delta > ۰$ هرچه باشد از رابطه $۰ < |x-a| < \delta$، رابطه $|f(x)-L| < \varepsilon$ را نمی‌توان نتیجه گرفت. برای حل مسئله بالا، فرض کنیم $\lim_{x \to ۱} f(x) = L$ (فرض خلف) باشد.

طبق تعریف حد،

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ : n \in N'(۱,\delta) \ \Rightarrow \ |f(x)-L| < \varepsilon \qquad (۱)$$



از طرفی، می‌دانیم:

$$N'(۱,\delta) = (۱-\delta,۱) \cup (۱,۱+\delta)$$

حال اگر $x \in (۱-\delta,۱)$ باشد، $f(x) = ۱$ است، در نتیجه بنا بر (۱) داریم:

$$|f(x)-L| = |۱-L| < \varepsilon$$

حال اگر $L \neq ۱$ باشد، و ۱/۴ برابر $\frac{|۱-L|}{۲}$ انتخاب کنیم، داریم:

$|۱-L| < \frac{۱}{۲}|۱-L|$، و یا $۱ < \frac{۱}{۲}$، و این یک تناقض است.

پس اگر $\varepsilon = \frac{|۱-L|}{۲}$ انتخاب شود، $\delta > ۰$ هرچه باشد، (۱) درست نخواهد بود.

و اما اگر $L = ۱$ باشد، برای xهایی که به فاصله $(۱,۱+\delta)$ تعلق دارند، $f(x) = ۲$

خواهد بود و در نتیجه، بنا بر (۱)، داریم:

$$|f(x)-L|=|۲-L|=|۲-۱|=۱<\varepsilon$$

در این حالت اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ انتخاب شود، به تناقض برمی‌خوریم.

۲-۳-۱۶. حال صورت آن دسته از قضایایی را که در محاسبه حد به‌کار می‌آیند، فهرست‌وار ذکر می‌کنیم.

۱) $\lim\limits_{x\to a} x=a$

۲) $\lim\limits_{x\to a} c=c$

۳) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\neq g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a} g(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$

۵) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۶) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\ ,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq ۰$

۷) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|$

۸) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

(وقتی که n زوج باشد، باید $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq ۰$ باشد)

۲-۳-۱۷ مثال. آیا عکس قضیه ۲-۳-۳ درست است؟ به عبارت دیگر، آیا از وجود $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ می‌توان وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ را نتیجه گرفت؟

حل. عکس قضیه ۲-۳-۳ درست نیست. زیرا می‌دانیم تابع $f(x)=\begin{cases}1 & , \ 0\le x\le 1\\ 2 & , \ 1<x\le 2\end{cases}$ در نقطه $x=1$ حد ندارد. حال اگر تابع g را به صورت $g(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1+(-1) & 0\le x\le 1\\ 2+(-2) & 1<x\le 2\end{cases} \Rightarrow f(x)+g(x)=0\ ,\ x\in[0,2]$$

واضح است که $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=0$ است، در حالی که f و g در $x=1$ حد ندارند.

۲-۳-۱۸ **مثال.** فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1 & , \ 0\le x\le 1\\ 2 & , \ 1<x\le 2\end{cases}$، تابع g را طوری تعریف کنید که رابطهٔ $f(x)g(x)=1$ در فاصلهٔ $[0,2]$ درست باشد، و از آنجا نتیجه بگیرید که عکس قضیه ۲-۳-۸ درست نیست. یعنی از وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$، وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نتیجه نمی‌شود.

حل. تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2} & 1<x\le 2\end{cases}$$

داریم:

$$f(x)g(x)=\begin{cases}1\times 1=1 & , \ 0\le x\le 1\\ 2\times\frac{1}{2}=1 & , \ 1<x\le 2\end{cases}$$

پس اگر $0\le x\le 2$ باشد، $f(x)g(x)=1$ است و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)=1$ ولی $f(x)$ و $g(x)$ در $x=1$ حد ندارند. بنابراین از وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نتیجه نمی‌شود.

۲-۳-۱۹ مثال. آیا عکس قضیه ۲-۳-۱۲ درست است؟ به عبارت دیگر، آیا از وجود $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌توان وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ را نتیجه گرفت؟

حل. توابع f و g را که در زیر تعریف شده‌اند، در نظر می‌گیریم.

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} ۱ \;, & ۰\le x\le ۱ \\ ۲ \;, & ۱<x\le ۲ \end{cases}$$

هیچکدام از این دو تابع در $x=۱$ حد ندارند، ولی تابع

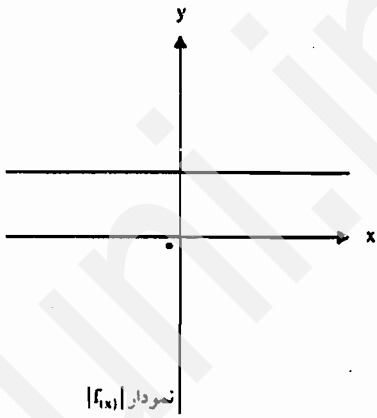
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} \frac{۱}{۱}=۱ & ۰\le x\le ۱ \\ \frac{۲}{۲}=۱ & ۱<x\le ۲ \end{cases}$$

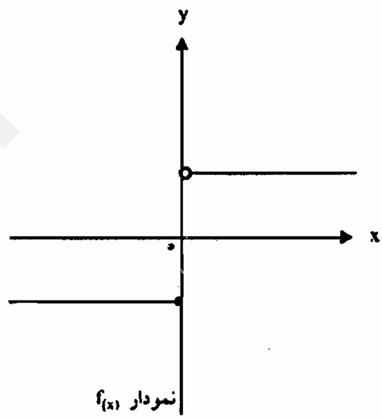
یعنی $\dfrac{f(x)}{g(x)}=۱$ در $x=۱$ دارای حد است.

۲-۳-۲۰ مثال. نشان دهید که عکس قضیه ۲-۳-۱۳ درست نیست. برای این کار می‌باید تابعی مانند f را طوری تعریف کنید که $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ وجود داشته باشد، ولی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود نداشته باشد.

حل. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x\le ۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases} \Rightarrow |f(x)|=۱$$





$\lim\limits_{x\to ۰}|f(x)|=۱$ است، ولی $f(x)$ در $x=۰$ حد ندارد.

۲-۳-۲۱ تعریف. تابع $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$، $a_n\neq 0$، را که در آن n عددی صحیح و مثبت است، یک چندجمله‌ای درجهٔ n ام می‌نامند، و تابعی به شکل $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ هر کدام یک چندجمله‌ای و $q(x)\neq 0$ باشد، یک تابع گویا نامیده می‌شود.

۲-۳-۲۲ مثال. فرض کنید a عددی حقیقی و n عددی صحیح مثبت باشد، نشان دهید که:

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n$$

$$x^n=x\cdot x\cdots x$$

$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a}(x\cdot x\cdots x)=(\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x)\cdots(\lim_{x\to a} x)=a\cdot a\cdot a\cdots a=a^n$$

۲-۳-۲۳ قضیه.

الف) $\lim\limits_{x\to b}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_nb^n+\cdots+a_1b+a_0$

است، یعنی حد یک چندجمله‌ای در $x=b$ مساوی مقدار آن چندجمله‌ای به ازاء $x=b$ است.

ب) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\dfrac{a_nc^n+\cdots+a_1c+a_0}{b_mc^m+\cdots+b_1c+b_0}$

است. مشروط بر آن که حد مخرج صفر نباشد. پس حد یک تابع گویا در $x=c$، برابر مقدار آن تابع به ازاء $x=c$ است.

اثبات. الف) از رابطهٔ زیر:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)\ ,\ \lim_{x\to a} x^n=a^n$$

$$\lim_{x\to a}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)$$

$$=\lim_{x\to a}a_nx^n+\lim_{x\to a}a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to a}a_1b+\lim_{x\to a}a_0$$

$$=a_n\operatorname{Lim}_{x\to b}x^n+a_{n-1}\operatorname{Lim}_{x\to b}x^{n-1}+\cdots+a_1\operatorname{Lim}_{x\to b}x+\operatorname{Lim}_{x\to b}a_0$$

$$=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to c}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0$$

$$\lim_{x\to c}(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)=b_mc^m+b_{m-1}c^{m-1}+\cdots+b_1c+b_0$$

اگر $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$ ، و $\lim_{x\to c}f(x)$ وجود داشته باشد، داریم:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$$

و یا:

$$\lim_{x\to c}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

$$=\frac{\lim_{x\to c}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)}{\lim_{x\to c}(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)}$$

$$=\frac{a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0}{b_mc^m+b_{m-1}c^{m-1}+\cdots+b_1c+b_0}$$

۲-۳-۲۴ مثال. حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1)=(1)^2-2(1)+1=1-2+1=0$

(۲)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4+3x^6}{(x^2+1)^2+x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)^4+3x^6]}{\lim\limits_{x\to 1}[(x^2+1)^2+x]}=\frac{(1-1)^4+3(1)^6}{(1+1)^2+1}=\frac{0+3}{4+1}=\frac{3}{5}$$

۲-۳-۲۵. رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$

یعنی:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

روش اول. $f(x)$ و $g(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود، سپس از صورت و مخرج عامل ابهام‌کننده $(x-a)$ را حذف می‌کنیم تا حد تابع به دست آید.

روش دوم. از هم‌ارزیها استفاده می‌کنیم.

۲-۳-۲۶ مثال. حدهای زیر را محاسبه کنید.

(۱)
$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

حل. صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=4$$

(۲)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}$$

حل. از اتحاد $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$ استفاده می‌کنیم. صورت و مخرج را عامل گویاکننده صورت یعنی $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{x-1}{(x-1)(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\frac{1}{(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{(-4)(1+1+1)}=-\frac{1}{12}$$

۳) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

حل. $x+x^2+\cdots+x^n-n=x+x^2+x^3+\cdots+x^n-1-1-\cdots-1$

$$=(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\cdots+(x^n-1)$$

و بنابراین:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^n-1}{x-1}\right]$$

حال با استفاده از اتحاد $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ و تقسیم صورت بر مخرج هر یک از کسرهای زیر خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+\cdots+x+1)]$$

$$L=1+(1+1)+(1+1+1)+\cdots+(1+1+\cdots+1)$$

$$L=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۲-۳-۲۷ مثال. اگر تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$ تعریف شده باشد $\lim_{x\to 2}f(x)$ را محاسبه نموده و نشان دهید که $\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$.

حل. می‌دانیم هرگاه x به a میل کند، آنگاه $x \neq a$، پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x-۱) = ۴-۱ = ۳ \ , \ f(۲) = ۱$$

در نتیجه: $\lim_{x\to ۲} f(x) \neq f(۲)$.

۱-۳-۲۸ مثال. $\lim_{x\to ۲} f(x)$ و $f(۲)$ را برای تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & x \neq ۲ \\ ۲m+۱ & x = ۲ \end{cases}$ به دست آورید. برای چه مقادیر از m رابطهٔ $\lim_{x\to ۲} f(x) = f(۲)$ درست است؟

حل. $f(۲) = ۲m+۱ \ , \ \lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x^۲-۱) = ۸-۱ = ۷$

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = f(۲) \ \Rightarrow \ ۷ = ۲m+۱ \ \Rightarrow \ ۲m = ۶ \ \rightarrow \ m = ۳$$

۲-۳-۲۹ تمرین. حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲+۳x-۴}$

۲) $\lim_{x\to -۱} \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+۱}$

۳) $\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۳x-۴}$

۴) $\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-۹x-۱۰}{x^۲+۳x+۲}$

۵) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱۹x-۲۰}{x^۲-۱}$

۶) $\lim_{x\to ۹} \frac{x^۲-۸۱}{\sqrt{x}-۳}$

۷) $\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x^۲-x-۶}$

۸) $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+x^۲+۴}{x^۲-۴}$

۹) $\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲-۲x-۱}{x^۲-۱}$

۱۰) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^{۲۰}-۴x+۳}{x^{۱۵}-۵x+۴}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-x-1}{x^3+3x^2-x-3}$ ۱۲) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ ۱۴) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

۲-٤ حد راست و حد چپ

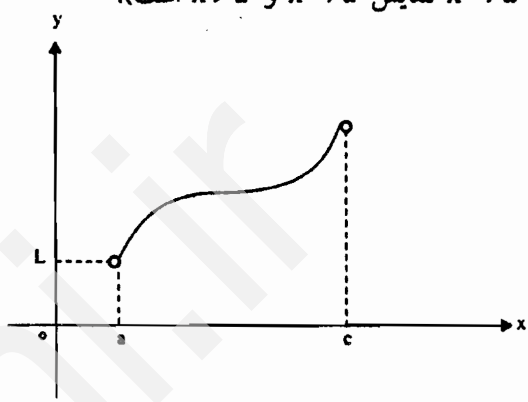
۲-٤-۱ تعریف حد راست. فرض کنیم f بر بازه بازی مانند (a,c)، $c>a$ تعریف شده باشد.اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0<x-a<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

آنگاه L را حد راست f، در نقطه $x=a$ می‌نامیم، و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

(علامت $x\to a^+$ نمایش $x\to a$ و $x>a$ است).



شکل ۲-۱۳

۲-۴-۲ تعریف حد چپ. فرض کنیم f روی فاصلهٔ بازی مانند (c,a) , $c<a$ تعریف شده باشد. اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

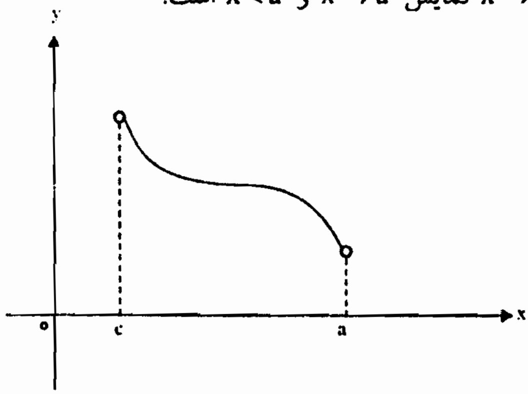
$$-\delta<x-a<0 \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

و یا: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

L را حد چپ f در نقطه $x = a$ می‌نامیم، و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

علت $x \to a^-$ نمایش $x \to a$ و $x < a$ است.



شکل ۲-۱۴

۲-۴-۳ قضیه. $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد، اگر و فقط اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to a^-} f(x)$ وجود داشته و با هم برابر باشند.

اثبات. اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ باشد، داریم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

اما نامساوی $0 < |x - a| < \delta$ از دو نامساوی $0 < x - a < \delta$ و $-\delta < x - a < 0$ تشکیل شده است، دو نتیجه داریم:

اگر $0 < x - a < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

اگر $-\delta < x - a < 0 \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

پس اگر $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد، داریم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

برعکس، اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ آنگاه داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : 0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

برای هر $\varepsilon > 0$ فرض می‌کنید $\delta = \text{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$، اگر $0 < |x-a| < \delta$ دو حالت پیش می‌آید یا $x > a$ که $0 < x - a < \delta \le \delta_1$ و یا $x < a$ که $0 < a - x < \delta \le \delta_2$ بنابراین:

در هر دو صورت $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$ یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

۲-۴-۴ مثال. (۱) اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \le -2 \\ 3-x & x > -2 \end{cases}$ آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ را تعیین کنید.

حل. الف) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} (3-x) = 3+2 = 5$

ب) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} (x+3) = -2+3 = 1$

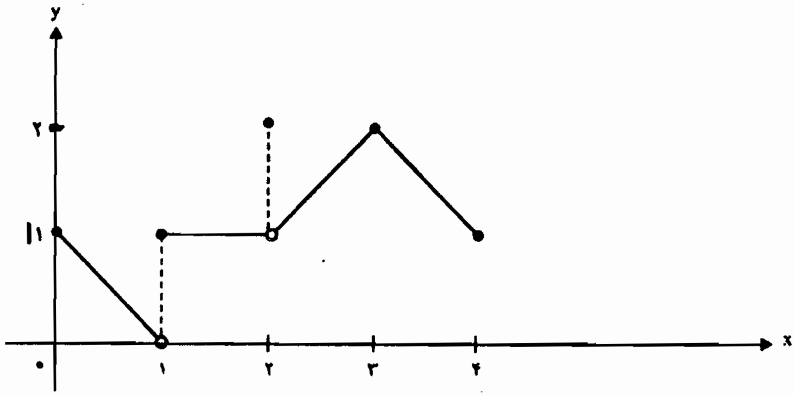
چون $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$، بنابراین $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ وجود ندارد.

(۲) مطابق شکل زیر برای تابع f مطلوبست محاسبه مقادیر زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ هـ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ و) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ز) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ط) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ ی) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$



حل.

الف) ۱	ب) ۱	ج) ٠
د) ۱	هـ) ۱	و) ۲
ز) ۲	ط) وجود ندارد	ی) ۱

۲-۴-۵ مثال. با استفاده از تعریف حد راست و چپ ثابت کنید.

(۱) $$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4}=0$$

حل. باید ثابت کنیم که: $x\to 2^+ \;\Rightarrow\; y\to 0$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<x-2<\delta \;\Rightarrow\; |y-0|<\varepsilon$$

$$|y-0|=\left|\sqrt{x^2-4}\right|=\sqrt{x^2-4}<\varepsilon \Rightarrow 0<x^2-4<\varepsilon^2 \Rightarrow 0<(x-2)(x+2)<\varepsilon^2$$

$$\begin{cases} x\to 2^+ \\ \delta=1 \end{cases} \Rightarrow\; 2<x<3 \;\Rightarrow\; 4<x+2<5$$

$$0<(x-2)(x+2)<\varepsilon^2 \Rightarrow 0<(x-2)(x+2)<5(x-2)<\varepsilon^2 \Rightarrow 0<x-2<\frac{\varepsilon^2}{5}$$

پس کافی است $\delta=\mathrm{Min}\{1,\frac{\varepsilon^2}{5}\}$

۲) $$\lim_{x\to ۲^-}\left[\frac{x^۲-۳x+۲}{|x-۲|}+۲\right]=۱$$

حل. باید ثابت کنیم که:

$$\forall\varepsilon>\circ\ \exists\delta>\circ:\circ<۲-x<\delta\ \Rightarrow\ |y-۱|<\varepsilon$$

$$|y-۱|=\left|\frac{(x-۲)(x-۱)}{|x-۲|}+۲-۱\right|<\varepsilon$$

چون $x\to ۲^-\ \Rightarrow\ x<۲\ \Rightarrow\ x-۲<\circ$

$$|y-۱|=\left|\frac{(x-۲)(x-۱)}{-(x-۲)}+۱\right|=|-x+۱+۱|=|-(x-۲)|=|x-۲|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ |۲-x|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \circ<۲-x<\varepsilon$$

پس کافی است $\delta\le\varepsilon$ اختیار شود.

۳) $$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}=۳$$

حل. $$\forall\varepsilon>\circ\ \exists\delta>\circ:\circ<x-۱<\delta\ \Rightarrow\ |y-۳|<\varepsilon$$

$$|y-۳|=\left|\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}-۳\right|=\left|\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{+(x-۱)}-۳\right|=|x^۲+x+۱-۳|=|x^۲+x-۲|$$

$$=|(x+۲)(x-۱)|=|x-۱||x+۲|=(x-۱)(x+۲)<\varepsilon\Rightarrow\circ<(x-۱)(x+۲)<\varepsilon$$

حال یک همسایگی محذوف یک‌طرفه برای ۱ با شعاع $\delta=۱$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}x\to ۱^+\\ \delta=۱\end{cases}\Rightarrow\ ۱<x<۲\ \Rightarrow\ ۳<x+۲<۴$$

$$|y-۳|<\varepsilon\ \to\ \circ<(x-۱)(x+۲)<۴(x-۱)<\varepsilon\ \to\ \circ<x-۱<\frac{\varepsilon}{۴}$$

پس کافی است $\delta\le \operatorname{Min}\{۱,\frac{\varepsilon}{۴}\}$ اختیار شود.

۲-۴-۶ تذکر. برای محاسبه حد تابع، در حالات زیر با محاسبه حد چپ و راست عمل می‌کنیم.

الف) هرگاه قانون تابع کسری بوده و x به سمت یک عدد حقیقی میل کند و صورت کسر یک عدد حقیقی و مخرج آن به سمت صفر میل کند در این حالت حد به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و برای تعیین علامت بی‌نهایت مجبور به محاسبه حد چپ و راست می‌شویم. به عبارت دیگر x به سمت جواب مخرج میل کند.

ب) هرگاه x به سمت یک عدد حقیقی میل کند و حد تابع به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و در صورت یا مخرج کسر، قدرمطلق وجود داشته باشد. به عبارت دیگر عبارت شامل قدرمطلق بوده و x به سمت جواب داخل قدرمطلق میل کند.

۲-۴-۷ مثال. مطلوبست محاسبه:

۱) $$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

حل.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

۲-٤-۸ مثال. مطلوبست محاسبه:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x-1}$$

حل.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

ج) در قانون تابع، تابع جزء صحیح وجود داشته باشد.

۲-۴-۹ مثال. مطلوبست محاسبه:

۱) $$\lim_{x\to n\in Z}[x]$$

حل.
$$\lim_{x\to n^+}[x]=[n^+]=n \quad , \quad n<n^+<n+1$$

$$\lim_{x\to n^-}[x]=[n^-]=n-1 \quad , \quad n-1<n^-<n$$

۲) $$\lim_{x\to n\in Z}[-x]$$

حل.
$$\lim_{x\to n^+}[-x]=[-(n^+)]=-(n+1)$$

$$\lim_{x\to n^-}[-x]=[-(n^-)]=-n$$

۳) $$\lim_{x\to 0}\frac{[5x]}{x^2+10}$$

حل.
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[5x]}{x^2+1}=\frac{0}{10}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[5x]}{x^2+1}=\frac{-1}{10}$$

د) تابع به صورت $f(x)=\sqrt[2n]{x-a}$ و x به سمت جواب زیر رادیکال میل کند.

۲-۴-۱۰ مثال. مطلوبست محاسبه:

۱) $$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$$

حل.

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=\sqrt{0^+}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=\sqrt{0^-}= \text{وجود ندارد}$$

وجود ندارد زیرا در تعریف حد باید تابع در همسایگی نقطه تعریف شده باشد.

۲) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt[۴]{۲-x}$

حل.

$$\lim_{x\to ۲^+} \sqrt[۴]{۲-x} = \sqrt[۴]{۰^-} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} \sqrt[۴]{۲-x} = \sqrt[۴]{۰^+} = ۰$$

هـ) تابع چندضابطه‌ای باشد.

۲-۴-۱۱ مثال. مطلوبست محاسبه:

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} ۲x^۲+۱ & , \quad x>۱ \\ ۵x^۳+x & , \quad x\le ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ?$$

حل.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (۲x^۲+۱) = ۲+۱ = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۵x^۳+x) = ۵+۱ = ۶$$

۲-۴-۱۲ محاسبه $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]$.

الف) اگر $f(a) \notin Z$ یعنی $f(a)$ عدد صحیح نباشد در این صورت:

$$\lim_{x\to a} [f(x)] = [f(a)]$$

۲-۴-۱۳ مثال. مطلوبست محاسبه:

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} [۵x+۱]$

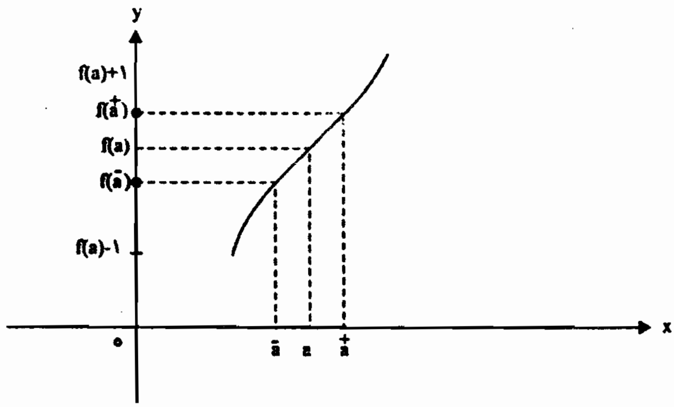
حل. $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} [۵x+۱] = [\frac{۵}{۲}+۱] = [۳/۵] = ۳$

ب) اگر $f(a) \in Z$ یعنی $f(a)$ عدد صحیح باشد، حالات زیر را در نظر می‌گیریم.

۲) اگر $f(x)$ در همسایگی a صعودی باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a^+}[f(x)]=[f(a^+)]=f(a)$$

$$\lim_{x\to a^-}[f(x)]=[f(a^-)]=f(a)-۱$$



زیرا با توجه به شکل:

$$f(a)<f(a^+)<f(a)+۱ \rightarrow [f(a^+)]=f(a)$$

$$f(a)-۱<f(a^-)<f(a) \rightarrow [f(a^-)]=f(a)-۱$$

۲-۴-۱۴ مثال. مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to ۰}[۵x]$.

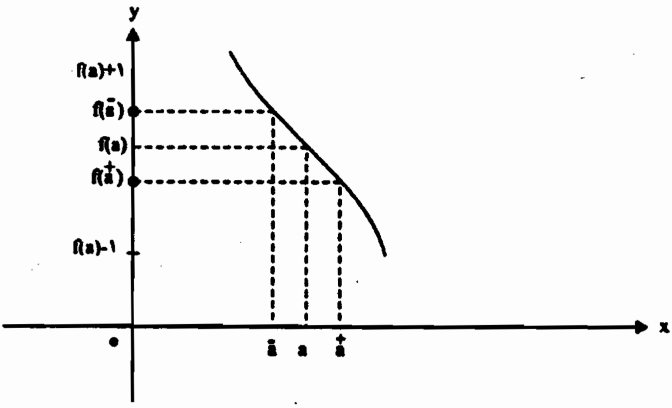
حل. چون $f(۰)=۰$ و در همسایگی صفر صعودی است، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰^+}[۵x]=f(۰)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-}[۵x]=f(۰)-۱=۰-۱=-۱$$

۲) اگر $f(x)$ در همسایگی a نزولی باشد، با توجه به شکل داریم:

$$f(a)-1<f(a^+)<f(a) \;\rightarrow\; \left[f(a^+)\right]=f(a)-1$$

$$f(a)<f(a^-)<f(a)+1 \;\rightarrow\; \left[f(a^-)\right]=f(a)$$



بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to a^+}[f(x)]=[f(a^+)]=f(a)-1$$

$$\lim_{x\to a^-}[f(x)]=[f(a^-)]=f(a)$$

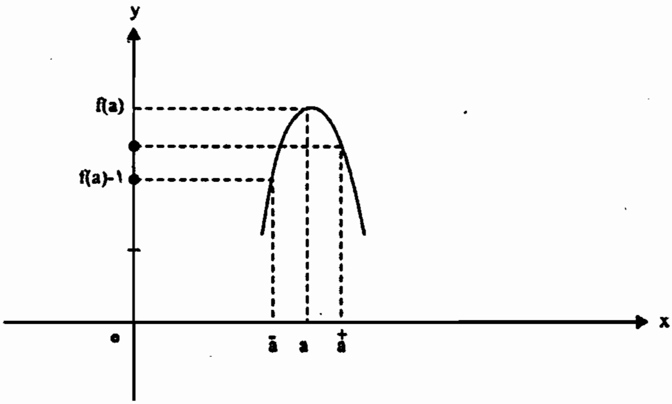
۲-۴-۱۵ مثال. مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to 0}[-3x]$.

حل. چون $f(0)=0$ و در همسایگی صفر، نزولی است، بنابراین $f(x)=-3x$

$$\lim_{x\to 0^+}[-3x]=f(0)-1=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}[-3x]=f(0)=0$$

۳) اگر $f(x)$ در نقطه a، Max داشته باشد، یعنی $f(x)$ در سمت چپ صعودی و در سمت راست a نزولی باشد.



با توجه به شکل:

$$f(a)-۱<f(a^+)<f(a) \rightarrow [f(a^+)]=f(a)-۱$$

$$f(a)-۱<f(a^-)<f(a) \rightarrow [f(a^-)]=f(a)-۱$$

بنابراین داریم:

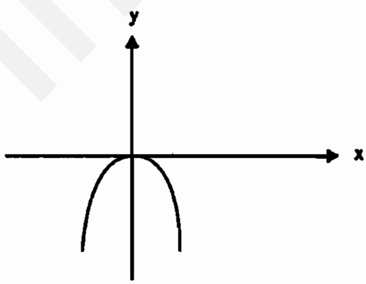
$$\lim_{x\to a}[f(x)]=f(a)-۱$$

۲-۴-۱۶ مثال. مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to ۰}[-x^۲]$.

حل. $F(x)=-x^۲$

در $x=۰$ دارای Max است و $f(۰)=۰$ پس، داریم:

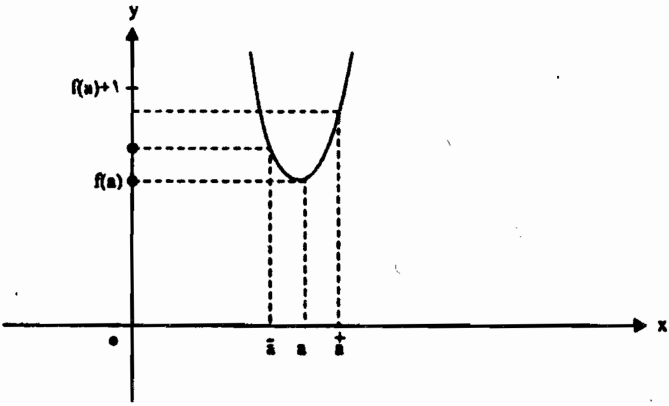
$$\lim_{x\to ۰}[-x^۲]=f(۰)-۱=۰-۱=-۱$$



۴) اگر $f(x)$ در نقطه a مینیمم داشته باشد، یعنی در سمت چپ a نزولی و در سمت راست a صعودی باشد، با توجه به شکل داریم:

$$f(a) < f(a^+) < f(a) + ۱ \rightarrow [f(a^+)] = f(a)$$

$$f(a) < f(a^-) < f(a) + ۱ \rightarrow [f(a^-)] = f(a)$$



بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to a} [f(x)] = f(a)$$

۲-۴-۱۷ مثال. مطلوبست محاسبه $\lim_{x \to ۱} [(x-۱)^۲]$.

حل. $f(۱) = ۰$ و f در $x = ۱$ دارای مینیمم است و $f(x) = (x-۱)^۲$، پس:

$$\lim_{x \to ۱} [(x-۱)^۲] = f(۱) = ۰$$

۲-۴-۱۸ مثال.

۱) مقدار a را طوری پیدا کنید که تابع f در $x = ۱$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + ۳ & , \quad x < ۱ \\ \sqrt{۵ - x} & , \quad x > ۱ \end{cases}$$

حل. حد راست و چپ را پیدا کرده با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim \sqrt{۵-x} = \sqrt{۵-۱} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim (ax+۳) = a+۳$$

$$\text{حد راست} = \text{حد چپ} \Rightarrow a+۳=۲ \Rightarrow a=-۱$$

۲) تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۲b & , \quad x>۳ \\ ax^۲+bx+۲ & , \quad x<۳ \end{cases}$ مفروض است. a و b را طوری پیدا کنید که $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۶$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ باشد.

حل.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} (ax+۲b) = ۳a+۲b=۶ \qquad (۱)$$

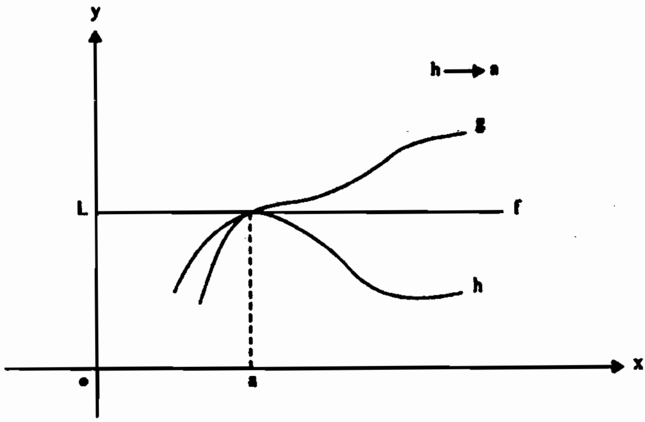
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} (ax^۲+bx+۲) = ۹a+۳b+۲=۲ \Rightarrow ۳a+b=۰ \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) را در یک آکولاد نوشته، دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳a+۲b=۶ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+۲b=۶ \\ -۳a-b=۰ \end{cases} \Rightarrow b=۶$$

$$۳a+b=۰ \Rightarrow ۳a+۶=۰ \Rightarrow a=-۲$$

۲-۴-۱۹ قضیه (فشار). اگر در یک همسایگی محذوف a توابع $f(x)$ و $g(x)$ تعریف شده و بر این بازه، $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.



شکل ۲-۱

اثبات. برای هر $\varepsilon > 0$، اعداد مثبتی مانند δ_1 و δ_2 وجود دارند به طوری که:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \qquad (2)$$

فرض کنید $\delta = \mathrm{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$ در این صورت اگر $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه هر دو نامساوی (۱) و (۲) تواماً برقرارند پس:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \\ -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \end{cases}$$

با استفاده از فرض قضیه داریم:

$$h(x) \le f(x) \le g(x) \Rightarrow h(x) - L \le f(x) - L \le g(x) - L$$

پس اگر $0 < |x-a| < \delta$ باشد، داریم:

$$-\varepsilon < h(x) - L \le f(x) - L \le g(x) - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \xrightarrow{\text{پس}} |f(x) - L| < \varepsilon$$

در نتیجه:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

یعنی $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ است.

۲-۴-۲۰ تذکر. قضیه فشار در مورد حد راست و چپ نیز برقرار است.

۲-۴-۲۱ مثال. حدهای زیر را به کمک قضیه فشار (فشردگی) حل کنید.

۱) $$\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$$

حل. می‌دانیم به ازاء هر $x \neq 0$

$$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$$

با ضرب طرفین نامساوی فوق در x، با توجه به علامت x، داریم:

$$\begin{aligned} x>0 &\Rightarrow 1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1 \\ x<0 &\Rightarrow 1-x>x[\frac{1}{x}]\ge 1 \end{aligned} \quad , \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0} 1=1 \end{cases}$$

از نامساوی‌های بالا، با استفاده از قضیه فشار، نتیجه می‌شود که چپ و راست $x[\frac{1}{x}]$ وقتی که $x\to 0$، برابر ۱ است پس $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$.

۲) اگر در یک همسایگی محذوف صفر، $x^4\le f(x)\le x^2$. آنگاه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را بیابید.

حل. چون $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x^4=0$ بنا به قضیه فشار $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

۳) اگر در یک همسایگی محذوف ۳، $|f(x)-2|\le(x-3)^2$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ را بیابید.

حل. $$|f(x)-2|\le(x-3)^2 \Rightarrow 2-(x-3)^2\le f(x)\le 2+(x-3)^2$$

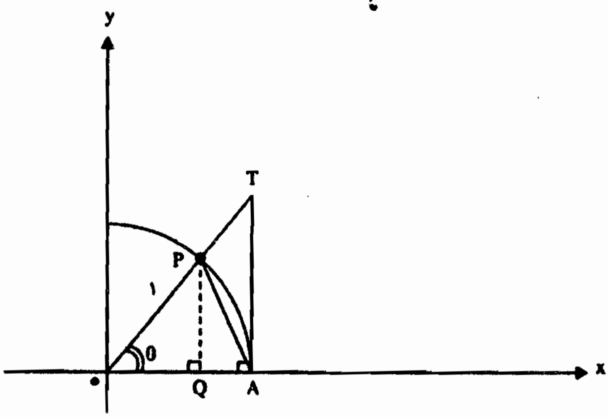
داریم: $\lim\limits_{x\to 3}\left(2+(x-3)^2\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-(x-3)^2\right)=2$.

پس بنا به قضیه فشار:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=2$$

۴) ثابت کنید $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$.

حل. فرض کنیم $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



$$OQ=\cos\theta\ ,\ PQ=\sin\theta\ ,\ AQ=1-\cos\theta$$

$$P\left|\begin{matrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{matrix}\right.\ ,\ T\left|\begin{matrix}1\\ tg\theta\end{matrix}\right.$$

با توجه به شکل داریم:

(۱) مساحت مثلث OTA > مساحت قطاع OPA > مساحت مثلث OPA

اما مساحت قطاع OPA برابر $\frac{1}{2}\theta$ است و:

مساحت مثلث OPA $=\frac{1}{2}\times$ قاعده $\times$ ارتفاع $=\frac{1}{2}\times OA\times PQ=\frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$

مساحت مثلث OTA $=\frac{1}{2}\times$ قاعده $\times$ ارتفاع $=\frac{1}{2}\times OA\times TA=\frac{1}{2}\times 1\times tg\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

پس با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}tg\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\overset{\times 2}{\Rightarrow}\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

چون $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، پس $\sin\theta>0$ با تقسیم طرفین نامساوی بر $\sin\theta$ داریم:

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

با معکوس کردن طرفین نامساوی، جهت نامساوی عوض شده و:

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \ , \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

از نامساوی طرف راست عبارت بالا داریم: $\frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Leftarrow \sin\theta < \theta$ و لذا $\sin^2\theta < \theta^2$ و با قرار دادن $\frac{\theta}{2}$ به‌جای θ داریم:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} < \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{4}$$

از طرفی $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$ پس:

$$\frac{1-\cos\theta}{2} < \frac{\theta^2}{4} \Rightarrow 1-\cos\theta < \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 1-\frac{\theta^2}{2} < \cos\theta$$

از نامساوی اخیر و نامساوی (۲) خواهیم داشت:

$$1-\frac{\theta^2}{2} < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \ , \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

نامساوی (۳) برای $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ برقرار است. هرگاه $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ آنگاه $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$. در (۳) به‌جای θ قرار می‌دهیم $-\theta$ پس:

$$1-\frac{(-\theta)^2}{2} < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} < 1 \ , \ -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

$$1-\frac{\theta^2}{2} < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

و لذا نامساوی (۳) برای هر $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ برقرار است.

حال بنا به قضیه فشار (فشردگی) داریم:

$$\lim_{\theta\to 0}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) = 1 \ , \ \lim_{\theta\to 0} 1 = 1$$

پس:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

۵) ثابت کنید $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.

حل.

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = \lim_{\theta \to 0} \theta \times \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \theta \times \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0 \times 1 = 0$$

۶) ثابت کنید $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$.

حل.

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = \lim_{\theta \to 0} (1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}) = 1 - 2(0)^2 = 1 - 0 = 1$$

۷) مطلوبست $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$.

حل. با ضرب صورت و مخرج کسر در $\frac{3}{5}$ داریم:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{5}\sin 3x}{\frac{3}{5} \times 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \times \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

هرگاه قرار دهیم $3x = t$ آنگاه:

$$x \to 0 \iff t \to 0$$

پس:

$$L = \frac{3}{5} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$$

۸) مطلوبست برای هر دو عدد حقیقی غیرصفر m و n داریم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

حل. با ضرب صورت و مخرج کسر در $\frac{m}{n}$ داریم:

$$L = \lim \frac{\sin mx}{nx} = \lim \frac{\frac{m}{n}\sin mx}{\frac{m}{n} \times nx} = \lim \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin mx}{mx} = \frac{m}{n} \lim \frac{\sin mx}{mx}$$

هرگاه قرار دهیم $mx = t$ آنگاه:

$$x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$$

پس:

$$L = \frac{m}{n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{m}{n}\times 1 = \frac{m}{n}$$

۹) نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.

حل. صورت و مخرج کسر را در $1+\cos x$ ضرب می‌کنیم.

$$L = \lim\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1\times\frac{0}{2} = 1\times 0 = 0$$

۱۰) مطلوبست $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

حل. حد صورت و مخرج هر دو صفر است. قرار می‌دهیم $t = x-\frac{\pi}{3}$ لذا:

$$x\to\frac{\pi}{3} \Rightarrow t\to 0 \quad , \quad x = t+\frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos\frac{\pi}{3}+\cos t\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$=\lim\frac{\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos t-1)}{t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t} = \frac{1}{2}\times 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0 = \frac{1}{2}$$

۱۱) نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(mx)}{nx} = \dfrac{m}{n}$.

حل.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,mx}{nx}=\lim\frac{\sin mx}{nx\cos mx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}\times\frac{1}{\cos mx}=\frac{m}{n}\times\frac{1}{1}=\frac{m}{n}$$

۲-۴-۲۲ قضیه. فرض کنید تابع $f(x)$ روی یک همسایگی محذوف a مانند $N'(a,\delta_1)$، نامنفی باشد، آنگاه اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، L نیز نامنفی خواهد بود.
(باید توجه داشت که این قضیه برای حد راست و حد چپ نیز درست است).

اثبات. فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد. طبق تعریف حد، داریم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

و یا:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon \qquad (1)$$

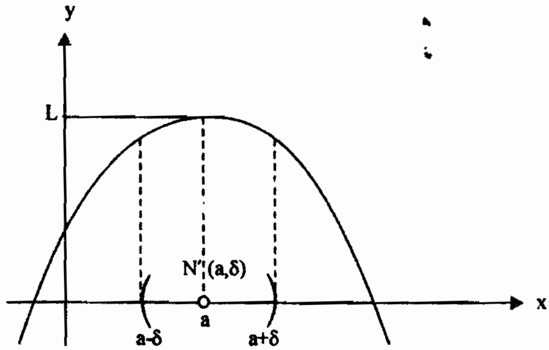
از طرفی بنا به فرض، چون f روی $N'(a,\delta_1)$ نامنفی است، داریم:

$$x\in N'(a,\delta_1)\ \Rightarrow\ f(x)\geq 0 \qquad (2)$$

حال اگر L نامنفی نباشد، یعنی $L<0$ باشد، $-L>0$ خواهد بود، و اگر $\varepsilon=-\frac{L}{2}$ انتخاب شود به تناقض برخواهیم خورد؛ زیرا اگر $x\in N'(a,\delta)\cap N'(a,\delta_1)$ باشد، بنا بر (۱)، $f(x)<L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}<0$ خواهد بود، در حالی که بنا بر (۲)، $f(x)\geq 0$ است.

۲-۴-۲۳ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L>0$ باشد، یک همسایگی محذوف a، مانند $N'(a,\delta)$ وجود خواهد داشت به طوری که:

$$x\in N'(a,\delta)\ \Rightarrow\ f(x)>0$$



شکل ۲-۱۶

اثبات. چون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ است، پس برای $\varepsilon=\frac{L}{۲}$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که:

$$\circ<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=\frac{L}{۲}$$

از نامساوی $|f(x)-L|<\frac{L}{۲}$، داریم:

$$-\frac{۱}{۲}L<f(x)-L<\frac{۱}{۲}L \Rightarrow \frac{L}{۲}<f(x)<\frac{۳}{۲}L$$

پس $\frac{۱}{۲}L<f(x)$ به دست می‌آید.

همسایگی محذوف $N'(a,\delta)$، همان همسایگی مطلوب است؛ زیرا اگر $x\in N'(a,\delta)$ باشد $f(x)>\frac{۱}{۲}L>\circ$ خواهد بود.

۲-۴-۲۴ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L<\circ$ باشد، یک همسایگی محذوف a، مانند $N'(a,\delta)$ وجود خواهدداشت به طوری که:

$$x\in N'(a,\delta) \Rightarrow f(x)<\circ$$

اثبات. چون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L<0$ است، پس برای $\varepsilon=-\frac{L}{2}$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=-\frac{L}{2}$$

از نامساوی $|f(x)-L|<-\frac{L}{2}$ داریم:

$$\Rightarrow \frac{L}{2}<f(x)-L<-\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}L<f(x)<\frac{1}{2}L$$

همسایگی محذوف a یعنی $N'(a,\delta)$، همان همسایگی مطلوب است، زیرا اگر $x\in N'(a,\delta)$ باشد، $f(x)<\frac{1}{2}L<0$ خواهد بود.

۲-۴-۲۵ قضیه. فرض کنید در یک همسایگی محذوف a مانند $N'(a,\delta)$ داشته باشیم $f(x)\le M$. همچنین f در a دارای حد باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آنگاه $L\le M$.

اثبات. قضیه را با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $L>M$ (فرض خلف). با انتخاب $\varepsilon=L-M>0$، $\delta>0$ای موجود است به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=L-M \qquad (1)$$

به عبارت معادل:

$$|f(x)-L|<L-M \Leftrightarrow -(L-M)<f(x)-L<L-M$$

$$\Leftrightarrow -L+M<f(x)-L<L-M$$

با افزودن L به طرفین نامساوی اخیر داریم: $M<f(x)$ پس:

$$x \in N'(a,\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) > M \qquad (۲)$$

و این تناقض آشکاری با فرض قضیه دارد. بنابراین فرض $L > M$ باطل و حکم برقرار است یعنی $L \leq M$ است.

۲-۴-۲۶ قضیه. فرض کنید در یک همسایگی محذوف a مانند $N'(a,\delta)$ داشته باشیم $f(x) \geq M$، همچنین f در a دارای حد باشد و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ، آنگاه $M \leq L$.

اثبات. فرض کنید $L < M$ (فرض خلف) باشد. با انتخاب $\varepsilon = M - L > ۰$ بنا به تعریف حد، $\delta > ۰$ای موجود است به طوری که:

$$۰ < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon = M - L \qquad (۱)$$

$$|f(x) - L| < M - L \quad \Rightarrow \quad -M + L < f(x) - L < M - L$$

با افزودن L به طرفین نامساوی فوق داریم: $f(x) < M$

پس:

$$f(x) < M \ \text{،} x \in N'(a,\delta) \qquad (۲)$$

و این یک تناقض آشکار با فرض قضیه $(f(x) \geq M)$ دارد. بنا بر این فرض $L < M$ باطل، حکم برقرار است یعنی $L \geq M$.

۲-۴-۲۷ قضیه. فرض کنید f و g برای همهٔ مقادیر x در نامساوی زیر صدق کنند.

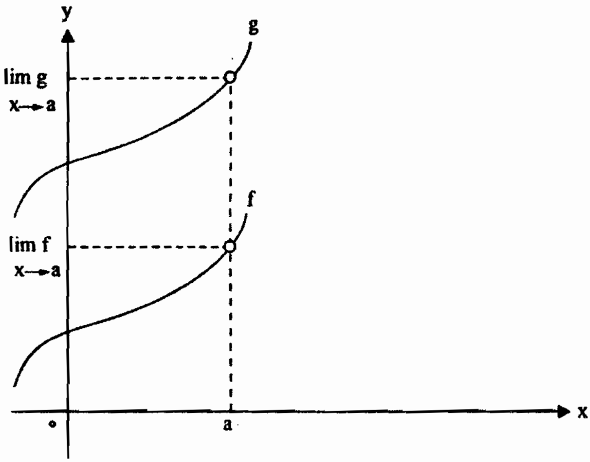
$$f(x) \leq g(x)$$

اگر f و g در $x = a$ حد داشته باشند، داریم:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

اثبات. از اینکه $f(x) \leq g(x)$ است، نتیجه می‌گیریم که $g(x) - f(x) \geq ۰$، حال داریم:

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] \geq ۰ \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} f(x) \geq ۰ \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) \geq \lim_{x \to a} f(x)$$



شکل ۲-۱۷

۲-۴-۲۸ قضیه. فرض کنید تابع f روی یک همسایگی محذوف از a کراندار باشد، اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

اثبات. بنا به فرض چون f روی یک همسایگی محذوف از a کراندار است پس:

$$\exists M>0\,,\ \exists\delta_1>0:\ 0<|x-a|<\delta_1\ \Rightarrow\ |f(x)|\le M$$

و چون $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ پس برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_2\ \Rightarrow\ |g(x)-0|<\frac{\varepsilon}{M}$$

بنابراین برای هر $\varepsilon>0$، اگر عدد δ را به صورت $\delta=\mathrm{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$ انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$

۲-۴-۲۹ قضیه حد تابع مرکب. اگر تابع g در a دارای حد b و تابع f در b دارای حد L باشد، به علاوه، اگر در همسایگی از a داشته باشیم $g(x) \neq b$، آنگاه تابع مرکب fog در a دارای حد L است.

اثبات. بنا به فرض $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$.

چون $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$ ، پس:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : 0 < |g(x) - b| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(g(x)) - L| < \varepsilon$$

اما چون $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ ، پس عدد مثبتی مانند δ_2 وجود دارد به طوری که:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - b| < \delta_1$$

به علاوه، بنا به فرض، عدد مثبتی مانند δ_3 وجود دارد به قسمی که:

$$0 < |x - a| < \delta_3 \ \Rightarrow \ g(x) \neq b$$

بنابراین برای هر x که $0 < |x - a| < \text{Min}\{\delta_2, \delta_3\}$، نتیجه می‌شود:

$$0 < |g(x) - b| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(g(x)) - L| < \varepsilon$$

یعنی: $\lim\limits_{x \to a} fog(x) = L$

۲-۴-۳۰ مثال. ۱) اگر $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ ، آنگاه $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) + 1)\sin\frac{\pi}{x^2}$ را حساب کنید.

حل. چون $g(x) = \sin\frac{\pi}{x^2}$، پس $|g(x)| \leq 1$، بنابراین $g(x)$ کراندار است.

$$h(x) = f(x) + 1 \ \Rightarrow \ \lim_{x \to 0} h(x) = -1 + 1 = 0$$

پس:

$$\lim_{x \to 0} h(x) g(x) = \lim_{x \to 0} (f(x) + 1) \sin\frac{\pi}{x^2} = 0$$

۲) اگر تابع $f(x)$ در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد و $|f(x)| \leq ۳$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(x^۲-۳x+۲)f(x)$ در چند نقطه وجود دارد.

حل. $$g(x)=x^۲-۳x+۲$$

چون f کراندار است پس $\lim\limits_{x\to a}g(x)f(x)$ در نقاطی وجود دارد که $\lim\limits_{x\to a}g(x)=۰$.

$$\lim_{x\to a}g(x)=a^۲-۳a+۲=۰ \Rightarrow a=۱,۲$$

پس در دو نقطه حد دارد.

۲-۴-۳۱ تمرین. حد هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳}[x]$ ‏ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}[۲x+۱]$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}[۳-۲x]$ ‏ ۴) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{|x-۵|}{۵-x}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۲}$ ‏ ۶) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۲}$

۷) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x-|۲-x|-۲}{x-۲}$ ‏ ۸) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{\sin ۲x}$

۹) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sin(x^۲-۱)}{x-۱}$ ‏ ۱۰) $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۲\sin\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to ۲}(x-[x])$ ‏ ۱۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۴x[x]}{۲x+|x|}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|\sin x|}{x}$ ‏ ۱۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}{\sqrt[۴]{x+۱}-۱}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}(2x)\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)$

۲۰) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}\ ,\ (n\in N)$

۲۱) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}$

۲۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x[\dfrac{2}{x}]+\dfrac{x}{2}-2\right)$

۲۳) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

۲۴) $\lim\limits_{x\to 1}\left((-1)^{[x]}\dfrac{x-1}{x}\right)=0$

۲۵) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{[x]}=-1$

۲۶) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

۲۷) $(a\neq 0)\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

۲۸) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|+3(1-x^2)[x-1]}{x-1}$

۲۹) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

۳۰) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

۳۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

۳۲) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-2}{|x-2|+[x-2]}$

۳۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

۳۴) $\lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{1-x}$

۳۵) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{1-x}$

۳۶) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

۳۷) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x}$

۲-۴-۳۲ تمرین. ۱) ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

۲) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=1$ دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases} 3x+4 \quad , & x<1 \\ [x]-a \quad , & x>1 \end{cases}$$

۳) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<-1 \\ x^2-b & x>-1 \end{cases}$، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$.

۴) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} 2x-a \quad , & x<-3 \\ ax+2b \quad , & -3\le x<3 \\ b-5x \quad , & 3<x \end{cases}$، a و b را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجود باشند.

۵) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع زیر باشند، نشان دهید که این توابع در نقطه $x=1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)\cdot g(x)$ در $x=1$ حد دارد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 \quad , & x\le 1 \\ x+1 \quad , & x>1 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x^2 \quad , & x\le 1 \\ 2 \quad , & x>1 \end{cases}$$

۶) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} 1 \quad , & x>0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ -1 \quad , & x<0 \end{cases}$. مقدار $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \left(x f(x^2-2)\right)$ را حساب کنید.

۷) حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\left([x]-[\frac{x}{۴}]\right)$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}}\left([۳x]+[-۳x]\right)$

۸) در مورد تابع $f:R\to R$ می‌دانیم:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad,\quad x,y\in R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد. همچنین ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۹) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. اگر $A\neq ۰$، ثابت کنید عددی مثبت مانند δ وجود دارد که هرگاه $۰<|x-a|<\delta$، آنگاه $|f(x)|>\frac{۱}{۲}|A|$

۱۰) فرض کنید:

$$f(x)=\begin{cases} x-[x] & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد} \\ x-[x+۱] & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

همهٔ نقاطی را بیابید که f در آنها حد دارد.

۱۱) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ و B عددی حقیقی باشد که $A>B$. ثابت کنید عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $۰<|x-a|<\delta$، آنگاه $f(x)>\frac{A+B}{۲}$.

۱۲) فرض کنید $\sqrt{۱+x^۲}\leq f(x)\leq ۱+|x|$.

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را حساب کنید.

۲-۵ حد در بی‌نهایت و حدود بی‌نهایتی

۲-۵-۱ تعریف. (۱) اگر f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ هرگاه:

$$\forall N>۰\ \exists\delta>۰: ۰<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ f(x)>N$$

(۲) اگر تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ هرگاه:

$$\forall N < ۰ \ \exists \delta > ۰ : ۰ < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < N$$

(۳) اگر تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ هرگاه:

$$\forall N > ۰ \ \exists \delta > ۰ : ۰ < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| > N$$

۲-۵-۲ مثال. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

۱) $$\lim_{x\to ۲} \frac{۵}{(x-۲)^{۲}} = +\infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N > ۰ \ \exists \delta > ۰ : ۰ < |x-۲| < \delta \ \Rightarrow \ y > N$$

$$y > N \ \Rightarrow \ \frac{۵}{(x-۲)^{۲}} > N \ \Rightarrow \ \frac{(x-۲)^{۲}}{۵} < \frac{۱}{N} \ \Rightarrow \ (x-۲)^{۲} < \frac{۵}{N}$$

$$\Rightarrow \ |x-۲| < \sqrt{\frac{۵}{N}}$$

پس $\delta \le \sqrt{\frac{۵}{N}}$.

۲) $$\lim_{x\to ۱} \frac{-۳}{(x-۱)^{۴}} = -\infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N < ۰ \ \exists \delta > ۰ : ۰ < |x-۱| < \delta \ \Rightarrow \ y < N$$

$$y < N \ \Rightarrow \ \frac{-۳}{(x-۱)^{۴}} < N \ \Rightarrow \ \frac{(x-۱)^{۴}}{-۳} > \frac{۱}{N} \ \Rightarrow \ (x-۱)^{۴} < -\frac{۳}{N}$$

$$\Rightarrow \ |x-۱| < \sqrt[۴]{\frac{-۳}{N}}$$

پس $\delta \le \sqrt[4]{\frac{-3}{N}}$.

۳) $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^3} = \infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |y| > N$$

$$|y| > N \Rightarrow \left|\frac{1}{(x-1)^3}\right| > N \Rightarrow \frac{1}{|x-1|^3} > N \rightarrow \frac{1}{|x-1|} > \sqrt[3]{N} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$$

پس $\delta \le \sqrt[3]{\frac{1}{N}} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$.

۲-۵-۳ تعریف. (۱) اگر تابع f در بازهٔ $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(۲) اگر تابع f در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه:

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) > N$$

(۳) اگر تابع f در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ هرگاه:

$$\forall N < 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) < N$$

(۴) اگر تابع f در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ هرگاه:

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

۲-۵-۴ مثال. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

۱) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

حل. باید ثابت کنیم

$$\forall \varepsilon>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow |y-1|>\varepsilon$$

$$|y-1|=\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|=\left|\frac{x^2-1-x^2-1}{x^2+1}\right|=\left|\frac{-2}{x^2+1}\right|=\frac{2}{x^2+1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{x^2+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2+1>\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x^2>\frac{2}{\varepsilon}-1 \Rightarrow |x|>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

پس کافی است که $M\geq\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$ ، $x \to +\infty \Rightarrow |x|=x>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$ چون

۲) $$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow f(x)>N$$

$$f(x)>N \Rightarrow x^2-4x+3>N \Rightarrow (x-2)^2-4+3>N$$

$$\Rightarrow (x-2)^2>N+1 \Rightarrow |x-2|>\sqrt{N+2}$$

$x \to +\infty \Rightarrow |x-2|=x-2>\sqrt{N+2} \Rightarrow x>2+\sqrt{N+2}$ چون

پس؛ $M\geq 2+\sqrt{N+2}$.

۳) $$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-4x}\right)=-\infty$$

حل. باید ثابت کنیم

$$\forall N<0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow f(x)<N$$

$$f(x)<N \Rightarrow -\sqrt{x^۲-۴x}<N \Rightarrow \sqrt{x^۲-۴x}>-N \Rightarrow x^۲-۴x>N^۲$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲-۴>N^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲>N^۲+۴ \Rightarrow |x-۲|>\sqrt{N^۲+۴}$$

چون $x \to +\infty \Rightarrow |x-۲|=x-۲>\sqrt{N^۲+۴} \Rightarrow x>۲+\sqrt{N^۲+۴}$

پس $M \geq ۲+\sqrt{N^۲+۴}$.

۲-۵-۵ تعریف. (۱) اگر تابع f در بازهٔ $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ هرگاه:

$$\forall \varepsilon>۰\ \exists M<۰ : x<M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

(۲) اگر تابع f در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ هرگاه:

$$\forall N>۰\ \exists M<۰ : x<M \Rightarrow f(x)>N$$

(۳) اگر تابع f در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ هرگاه:

$$\forall N<۰\ \exists M<۰ : x<M \Rightarrow f(x)<N$$

(٤) اگر تابع f در بازه $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، می‌گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ هرگاه:

$$\forall N>۰\ \exists M<۰ : x<M \Rightarrow |f(x)|>N$$

۲-۵-۶ مثال. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

(۱) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۳}{x}=۲$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > ۰\ \exists M < ۰ : x < M \Rightarrow |y-۲| < \varepsilon$$

$$|y-۲| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{۲x+۳}{x} - ۲\right| = \left|۲ + \frac{۳}{x} - ۲\right| = \frac{۳}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x|}{۳} > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{۳}{\varepsilon}$$

چون: $x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x > \frac{۳}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{۳}{\varepsilon}$

پس $M \geq \frac{-۳}{\varepsilon}$.

۲) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^۲ - ۶x + ۱} = +\infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N > ۰\ \exists M < ۰ : x < M \Rightarrow y > N$$

$$y > N \Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۶x + ۱} > N \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۱ > N^۲ \Rightarrow (x-۳)^۲ - ۹ + ۱ > N^۲$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲ > N^۲ + ۸ \Rightarrow |x-۳| > \sqrt{N^۲ + ۸}$$

چون $x \to -\infty \Rightarrow (x-۳) = -(x-۳) > \sqrt{N^۲+۸}$

$$\Rightarrow x - ۳ < -\sqrt{N^۲ + ۸} \Rightarrow x < ۳ - \sqrt{N^۲ + ۸}$$

پس $M \geq ۳ - \sqrt{N^۲ + ۸}$.

۳) $$\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{x^۲ - ۱} = -\infty$$

حل. باید ثابت کنیم:

$$\forall N < ۰\ \exists M < ۰ : x < M \Rightarrow y < N$$

$$y < N \Rightarrow -\sqrt{x^۲ - ۱} < N \Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۱} > -N \Rightarrow x^۲ - ۱ > N^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ > N^۲ + ۱ \Rightarrow |x| > \sqrt{N^۲ + ۱}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x > \sqrt{N^۲+۱} \Rightarrow x < -\sqrt{N^۲+۱}$$ چون

پس $M \geq -\sqrt{N^۲+۱}$.

۲-۵-۷ تمرین. با استفاده از تعریف ثابت کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲\sqrt{۲}}{(x+۱)^۲} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{-۳}{(x+۲)^۴} = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۲x+۳}{x-۲} = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{-۲}{\sqrt{x-۱}} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to ۴^-} \dfrac{۱-۴x}{x-۴} = +\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۳x}{x-۲} = -\infty$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۴x^۲-۵}{۲x^۲-۱} = ۲$

۸) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۲x^۲+۱}{x^۲+۱} = ۲$

۹) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^۲+۸x) = +\infty$

۱۰) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-x^۲+۴x) = -\infty$

۱۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۱} = ۱$

۱۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^۲}{۲-x} = +\infty$

۱۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^۵-۳) = +\infty$

۱۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^۵+x) = +\infty$

۱۵) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+۵}{۲x+۲} = \dfrac{۱}{۲}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۳x+۲}{۲x-۴} = \dfrac{۳}{۲}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^۲+۱} = +\infty$

۱۸) $\lim\limits_{x\to +\infty} -\sqrt{x^۲-۶x+۲} = -\infty$

۱۹) $\lim\limits_{x\to +\infty} -\sqrt{x^۲-۴} = -\infty$

۲۰) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲x^۲-۱}{x^۲-۱} = ۲$

۲۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^۲-۲x-۲} = +\infty$

۲۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{x^۲-x} = -\infty$

۲-۵-۸ قضیه. برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

اثبات.

الف) فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. باید نشان دهیم که عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$|x| > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$$

از نامساوی $\left|\frac{1}{|x^n|} - 0\right| < \varepsilon$ داریم:

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \frac{1}{|x^n|} < \varepsilon \Rightarrow |x|^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

پس اگر $M = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ باشد، آنگاه $\left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ب) باید نشان داد که:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M < 0 : x < M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$$

اما:

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \frac{1}{|x^n|} < \varepsilon \Rightarrow |x|^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

چون $x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \Rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$

حال اگر $M = -\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ باشد، $\left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ج) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. باید نشان دهیم که عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \frac{1}{|x^n|} < \varepsilon \Rightarrow |x^n| = |x|^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

چون $x \to +\infty \Rightarrow |x| = x > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$

پس اگر $M = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ باشد، $\left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

۲-۵-۹ تعریف. (۱) اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ باشد، آنگاه داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(۲) اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\forall N > 0 \ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) > N$$

(۳) اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\forall N < 0 \ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) < N$$

(۴) اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ باشد، آنگاه داریم:

$$\forall N > 0 \ \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

۲-۵-۱۰ تعریف. اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$ باشد، حد f را وقتی x به سمت a میل کند، بینهایت می‌نامیم، و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

۲-۵-۱۱ قضیه. فرض کنید $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L_2$ در این صورت:

(۱)
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2$$

(۲)
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=L_1-L_2$$

(۳)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=L_1 L_2$$

(۴) با شرط آن که $L_2\neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

(۵)
$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=|L_1|$$

(۶) اگر n زوج باشد، باید $L_1>0$ فرض شود.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$$

(۷)
$$\lim_{x\to+\infty} c=c\ ,\ c\in R$$

توجه. قضیه فوق هرگاه $x\to-\infty$ نیز برقرار است. همچنین برای $x\to\infty$ برقرار می‌باشد.

۲-۵-۱۲ تذکر. اگر تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ تعریف شود که دارای دو چندجمله‌ای از درجه n و m به صورت $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $h(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ باشند.

برای پیدا کردن حد تابع $f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0}=\frac{x^n[a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}]}{x^m[b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}]}$$

الف) اگر $n=m$، آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{a_n}{b_m}$$

ب) اگر $n<m$، آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

ج) اگر $m<n$، آنگاه حد وجود ندارد. یا به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty$$

۲-۵-۱۳ مثال. حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+5}{7x^3+2x+1}$$

حل.

$$\lim\frac{x^3(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3})}{x^3(7+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}=\lim\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{7+0+0}=\frac{0}{7}=0$$

۲) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$$

حل. صورت و مخرج را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}{\frac{x+4}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=\frac{-1}{1}=-1$$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

حل. چون عبارت موردنظر به صورت کسر نمی‌باشد، بنابراین از روشهای قبل نمی‌توان استفاده کرد. در این حالت به این عبارت، مخرج یک می‌دهیم و صورت و مخرج کسر جدید را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، داریم:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\times\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)$

حل.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+3}-x)}{1}\times\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+3-x^2)}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

حل.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{۱}\times\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(۱+\sqrt{\frac{۱}{x}})}}{\sqrt{x(۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{۱+\sqrt{\frac{۱}{x}}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x^۳}}}}+۱\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{۱+۰}}{\sqrt{۱+۰}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۶) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x+۱}-ax-b$.

a و b را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۰$.

حل.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^۲+۱-ax^۲-ax-bx-b}{x+۱}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۱-a)x^۲-(a+b)x+۱-b}{x+۱}$$

الف) اگر $a\neq ۱$، آنگاه:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty & a<۱\\ -\infty & a>۱\end{cases}$$

ب) اگر $a=1$، آنگاه:

$$\lim f(x) = -(1+b)$$

ج) اگر $a=1$ و $b=-1$، آنگاه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

راه دوم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a=1 \\ b=-1 \end{vmatrix}$$

یعنی درجه صورت از مخرج کمتر باید باشد.

۷) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $f(x) = ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}$.

a و b را طوری پیدا کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

حل.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3+ax+bx^2+b-x^3-1}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-1)x^3+bx^2+ax+b-1}{x^2+1} = 0$$

باید درجه صورت کمتر از مخرج باشد.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a-1=0 \\ b=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a=1 \\ b=0 \end{vmatrix}$$

۸) فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}-ax-b$.

a و b را طوری تعیین کنید که $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

حل.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۲-x+۱}-(ax+b)}{۱}\times\frac{\sqrt{x^۲-x+۱}+(ax+b)}{\sqrt{x^۲-x+۱}+(ax+b)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^۲-x+۱-(ax+b)^۲}{\sqrt{x^۲-x+۱}+ax+b} = \lim \frac{x^۲-x+۱-a^۲x^۲-۲abx-b^۲}{\sqrt{x^۲-x+۱}+ax+b}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(۱-a^۲)x^۲-(۱+۲ab)x+۱-b^۲}{\sqrt{x^۲-x+۱}+ax+b} = ۰$$

باید درجه صورت از مخرج کمتر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} ۱-a^۲=۰ \quad \Rightarrow \quad a=\pm۱ \\ ۱+۲ab=۰ \quad \Rightarrow \quad b=\mp\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۲-۵-۱۴ قضیه. اگر توابع f و g و h چنان باشند که برای هر $c < x$:

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad (۱)$$

همچنین $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = L$. در این صورت وقتی $x\to+\infty$، g دارای حد است و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = L$$

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. بنا بر فرض اعداد مثبت $M_۱$ و $M_۲$ موجودند به طوری که:

$$x > M_۱ \;\Rightarrow\; |f(x)-L| < \varepsilon \;\Rightarrow\; L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \qquad (۲)$$

$$x > M_۲ \;\Rightarrow\; |f(x)-L| < \varepsilon \;\Rightarrow\; L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon \qquad (۳)$$

با انتخاب $M = Max\{M_۱, M_۲, C\}$ هرگاه $x > M$ آنگاه (۱) و (۲) (۳) تواماً برقرارند لذا:

$$x > M \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$$
$$\Rightarrow |g(x)-L| < \varepsilon$$

یعنی: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L$.

۲-۵-۱۵ قضیه. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ در این صورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } L > ۰ \text{ و } g(x) \text{ از طریق مقادیر مثبت به صفر میل کند.} \\ -\infty & \text{اگر } L > ۰ \text{ و } g(x) \text{ از طریق مقادیر منفی به صفر میل کند.} \\ -\infty & \text{اگر } L < ۰ \text{ و } g(x) \text{ از طریق مقادیر مثبت به صفر میل کند.} \\ +\infty & \text{اگر } L < ۰ \text{ و } g(x) \text{ از طریق مقادیر منفی به صفر میل کند.} \end{cases}$$

۲-۵-۱۶ مثال. ۱) مطلوبست محاسبهٔ $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{۱-x}$.

حل. قرار دهید $x-۱=t$. در این صورت $x\to ۱^-$ معادل است با $t\to ۰^-$.

$$x-۱=t \to x=t+۱ \quad , \quad ۱-x=-t$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{۱-x} = \lim_{t\to ۰^-}\frac{t+۱}{-t} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

۲) مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to ۳^+}\frac{-x}{x-[x]}$.

حل. فرض کنید $x-۳=t$. در این صورت $x\to ۳^+$ معادل است با $t\to ۰^+$

و همچنین اگر $x=۳+t$، آنگاه:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{-x}{x-[x]} = \lim_{t\to ۰^+}\frac{-(t+۳)}{t+۳-[t+۳]} = \lim_{t\to ۰^+}\frac{-t-۳}{t+۳-۳}$$

$$= \lim_{t\to ۰^+}\frac{-t-۳}{t} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

۳) مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{\sqrt{۹-x^۲}}{۳-x}$.

حل.

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{\sqrt{۹-x^۲}}{۳-x} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{\sqrt{(۳-x)(۳+x)}}{۳-x} = \lim \frac{\sqrt{۳+x}}{\sqrt{۳-x}} = \frac{\sqrt{۶}}{۰^+} = +\infty$$

۴) مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴}$.

حل. چون $x \to ۲^-$. در این صورت در نزدیکی ۲، $\sqrt{۳} < x < ۲$ و لذا $۳ < x^۲ < ۴$ پس $[x^۲] = ۳$ و:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{۳-۴}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۱}{(x-۲)(x+۲)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

۲-۵-۱۷ قضیه. فرض کنید c عددی ثابت و a عددی حقیقی و یا یکی از نمادهای ∞، $+\infty$ و $-\infty$ باشد. در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$$

باید توجه داشت که اگر در روابط بالا $+\infty$ و یا $-\infty$ را جایگزین ∞ کنیم، قضیه همچنان برقرار خواهد ماند.

اثبات. قضیه را فقط در حالتی که a یک عدد حقیقی باشد، ثابت می‌کنیم، زیرا حالات دیگر آن با روش مشابهی قابل اثبات خواهد بود. باید ثابت کنیم که برای هر $N > ۰$، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که:

$$۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)| > N \qquad (۱)$$

اما چون $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ است، پس برای هر $M > ۰$، عدد مثبتی مانند $\delta_۱$ وجود دارد به طوری که:

$$\circ < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > M \qquad (۲)$$

و چون $\lim_{x \to a} g(x) = c$ است، پس برای هر $\varepsilon > \circ$، عدد مثبتی مانند δ_2 وجود دارد به طوری که:

$$\circ < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-c| < \varepsilon \qquad (۳)$$

امّا $|g(x)|-|c| \le |g(x)-c|$ است، در نتیجه:

$$|g(x)-c| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)|-|c| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon + |c|$$

اگر طرفین نامساوی اخیر را در ۱ ضرب کنیم، عبارت (۳) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\circ < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow -|g(x)| > -(\varepsilon + |c|) \qquad (۴)$$

اگر $\delta = \operatorname{Min}\{\delta_1, \delta_2\}$ اختیار کنیم از (۲) و (۴) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\circ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M - |g(x)| > -(\varepsilon + |c|) \qquad (۵)$$

از جمع کردن دو نامساوی اخیر خواهیم داشت:

$$|f(x)| - |g(x)| > M - (\varepsilon + |c|) \qquad (۶)$$

حال چون $|f(x) + g(x)| \ge |f(x)| - |g(x)|$ است، از عبارت (۶) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\circ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| > M - (\varepsilon + |c|) \qquad (۷)$$

ε و M اختیاری هستند. بنابراین اگر ε را مساوی $|c|$ و M را برابر $N + 2|c|$ انتخاب کنیم، از عبارت (۷) عبارت (۱) که مقصود ما بود حاصل می‌شود.

۲-۵-۱۸ قضیه. فرض کنید $c \neq \circ$ عددی ثابت و a یک عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای ∞، $+\infty$ و $-\infty$ باشد، در این صورت:

(۱) اگر $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = c > \circ$ باشد، آنگاه $\lim_{x \to a} g(x)f(x) = +\infty$ است.

(۲) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c<0$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=-\infty$ است.

(۳) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c>0$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)f(x)=-\infty$ است.

(۴) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c<0$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)f(x)=+\infty$ است.

باید توجه داشت که اگر در روابط بالا $+\infty$ را جایگزین $c>0$ و $-\infty$ را جایگزین $c<0$ سازیم، قضیه مجدداً برقرار خواهد بود.

اثبات. در اینجا فقط حالت (۱) را در حالتی که a عددی حقیقی باشد اثبات می‌کنیم، زیرا بقیه حالتها به روش مشابهی قابل اثبات خواهند بود. برای اثبات، باید نشان دهیم که برای هر $N>0$، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow g(x)f(x)>N$$

اما بنا به فرض، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ و $c>0$ است پس برای $\varepsilon=\frac{c}{2}$ عدد مثبتی مانند δ_1 وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow c-\frac{c}{2}<g(x)<c+\frac{c}{2}$$

و یا:

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \frac{c}{2}<g(x)$$

و نیز $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ است، پس برای عدد مثبت N'، عدد مثبتی مانند δ_2 وجود دارد، به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow f(x)>N'$$

بنابراین هرگاه $\delta=\text{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$، آنگاه داریم:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow g(x)>\frac{c}{2}\ ,\ f(x)>N'$$

و یا:

$$۰<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; g(x)f(x)>\frac{c}{۲}N'$$

حال اگر N' را برابر با $\frac{۲N}{c}$ اختیار کنیم داریم:

$$۰<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; g(x)f(x)>\frac{c}{۲}N'=\frac{c}{۲}\times\frac{۲N}{c}=N$$

۲-۵-۱۹ قضیه. اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، داریم:

(۱) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^n}=\infty$$

(۲) $$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^n}=+\infty$$

(۳) $$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^n}=\begin{cases}-\infty & n \text{ فرد} \\ +\infty & n \text{ زوج}\end{cases}$$

اثبات. بنا به تعریف، (۱) وقتی درست است که $\lim\limits_{x\to ۰}\left|\frac{۱}{x^n}\right|=+\infty$ باشد.

بنابراین، واضح است که از درستی (۲) و (۳) می‌توان درستی (۱) را نتیجه گرفت.

چون (۲) و (۳) به روش مشابهی قابل اثباتند، از این‌رو فقط (۲) را اثبات می‌کنیم.

باید نشان دهیم که برای هر $N>۰$، عددی مانند $\delta>۰$ وجود دارد به طوری که:

$$۰<x<\delta \;\Rightarrow\; \frac{۱}{x^n}>N$$

نامساوی $\frac{۱}{x^n}>N$ با نامساوی $x<\frac{۱}{\sqrt[n]{N}}$ معادل است، پس با انتخاب $\delta=\frac{۱}{\sqrt[n]{N}}$ می‌توان نوشت:

$$۰<x<\delta \;\Rightarrow\; \frac{۱}{x^n}>N$$

۲-۵-۲۰ قضیه. فرض کنید a یک عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای ∞، $+\infty$ و $-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ باشد، در این صورت:

۱) اگر $f(x)$، در حالی که همواره مثبت است، به سمت صفر میل کند، $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ خواهد بود.

۲) اگر $f(x)$، در حالی که همواره منفی است، به سمت صفر میل کند، $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ خواهد بود.

اثبات. فرض کنید $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ باشد، و $f(x)$ در حالی که همواره مثبت است به سمت صفر میل کند. می‌خواهیم ثابت کنیم $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ است. بدین منظور باید نشان دهیم که برای هر عدد مثبت N، عدد مثبتی مانند M وجود دارد به طوری که:

$$x > M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > N$$

چون $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ است، پس برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$x > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

چون $f(x)$ برای xهای خیلی بزرگ مثبت است، داریم:

$$x > M \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon$$

و یا:

$$x > M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

حال اگر ε را برابر با $\frac{1}{N}$ فرض کنیم، داریم:

$$x > M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > N$$

اثبات بقیه قضیه را بر این اساس ادامه دهید.

۲-۵-۲۱ قضیه. فرض کنید a یک عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای ∞، $\infty+$ و $\infty-$ باشد، در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ باشد، $\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=۰$ خواهد بود.

روش اثبات این قضیه شبیه قضیه ۲-۵-۲۰ می‌باشد.

۲-۵-۲۲ مثال. ۱) با فرض $x>۱$ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[x]+[x^۲]+\cdots+[x^n]}{x^n}$$

حل. می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x داریم $x^k-۱<[x^k]\le x^k$ پس داریم:

$$\begin{aligned}x-۱&<[x]\le x\\ x^۲-۱&<[x^۲]\le x^۲\\ &\vdots\\ x^n-۱&<[x^n]\le x^n\end{aligned}$$

$$(x-۱)+(x^۲-۱)+\cdots+(x^n-۱)<[x]+[x^۲]+\cdots+[x^n]\le x+x^۲+\cdots+x^n$$

طرفین را بر x^n تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x-۱)+(x^۲-۱)+\cdots+(x^n-۱)}{x^n}<\frac{[x]+[x^۲]+\cdots+[x^n]}{x^n}\le\frac{x+x^۲+\cdots+x^n}{x^n}$$

از طرف دیگر:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^۲+\cdots+x^n}{x^n}=\lim\frac{\frac{x(۱-x^n)}{۱-x}}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(۱-x^n)}{x^n(۱-x)}=\frac{x}{x-۱}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)+(x^{2}-1)+\cdots+(x^{n}-1)}{x^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+x^{2}+\cdots+x^{n})-(1+1+\cdots+1)}{x^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{2}+\cdots+x^{n}}{x^{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^{n}}=\frac{x}{x-1}-0=\frac{x}{x-1}$$

پس بنا به قضیه فشار داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[x^{2}]+\cdots+[x^{n}]}{x^{n}}=\frac{x}{x-1}$$

۲) اگر g یک تابع کراندار باشد، $\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}g(x)}{\sin x}$ را حساب کنید.

حل. $f(x)=\frac{x^{2}}{\sin x}=x\cdot\frac{x}{\sin x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0\times 1=0$

چون g کراندار است پس:

$$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}g(x)}{\sin x}=0$$

۳) مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

حل. $f(x)=\frac{x^{2}}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}$

فرض کنید: $h(x)=\frac{x^{2}}{\sin x}=x\cdot\frac{x}{\sin x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}h(x)=0\times 1=0$

به ازاء هر $x\neq 0$، اگر $g(x)=\sin\frac{1}{x}$، آنگاه $|g(x)|\leq 1$. بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$$

۴) اگر $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ -1 & \text{اصم } x \end{cases}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x^{101})e^{f(x)}$ را حساب کنید.

حل. فرض کنید:

$$g(x)=\ln x^{101} \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x)=\ln 1=0$$

$$e^{f(x)}=\begin{cases} e & \text{گویا } x \\ e^{-1}=\frac{1}{e} & \text{اصم } x \end{cases} \Rightarrow e^{f(x)} \text{ کراندار است}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1}(\ln x^{101})e^{f(x)}=0$$

۵) مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5}\right)$.

حل.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{3x+5-2x-6}{(x+3)(3x+5)}\right)=\lim\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{(x+3)(3x+5)}$$

$$=\lim\frac{1}{(x+3)(3x+5)}=\frac{1}{(4)(8)}=\frac{1}{32}$$

۲-۵-۲۳ بررسی حد توابع دوضابطه‌ای

۱) ضابطه تابع در نقطه $x=a$ عوض می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x>a \\ f_2(x) & x<a \end{cases}$$

چنانکه می‌دانیم وجود یا عدم وجود $f(a)$ در $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ تأثیری ندارد.

در این حالت حد چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} f_1(x)\ ,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} f_2(x)$$

۲) حد توابعی که ضابطه آنها روی Z عوض می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in Z \\ f_2(x) & x\notin Z \end{cases}$$

اگر a عدد دلخواه حقیقی باشد ($a\in Z$ یا $a\notin Z$) داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)$$

یعنی در محاسبه حد، به هیچ‌وجه از ضابطه $f_1(x)$ استفاده نمی‌کنیم.

تذکر. در حالتی که حد تابع فوق را در بینهایت بررسی می‌کنیم باید حد هر دو ضابطه f_1 و f_2 را در بینهایت به دست آوریم. مثلاً اگر $\lim_{x\to\infty} f_1(x)=L_1$ و $\lim_{x\to\infty} f_2(x)=L_2$ باشد تنها در صورتی $f(x)$ در بینهایت دارای حد است که $L_1=L_2$ باشد و اگر $L_1\neq L_2$ باشد تابع در بینهایت حد ندارد.

۳) حد توابعی که ضابطه آنها روی Q عوض می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in Q \\ f_2(x) & x\notin Q \end{cases}$$

برای بررسی حد این تابع وقتی که $x\to a$، لازم است حد $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را در نقطه $x=a$ بررسی کنیم. تابع f در a حد دارد اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)=L$ که در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)=L$. لازم به ذکر است گنگ یا گویا بودن a هیچ تأثیری در این موضوع ندارد.

۲-۵-۲۴ مثال.

۱) حد تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x^3+1} & x<-1 \\ 2^{\cos \pi x} & x>-1 \end{cases}$ را در نقطه $x=-1$ حساب کنید.

حل.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} ۲^{\cos \pi x} = ۲^{\cos(-\pi)} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim \frac{|(x-۱)(x+۱)|}{(x+۱)(x^۲-x+۱)} = \lim \frac{|x-۱||x+۱|}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}$$

$$= \lim \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)(x^۲-x+۱)} = \lim \frac{x-۱}{x^۲-x+۱} = \frac{-۲}{۱+۱+۱} = -\frac{۲}{۳}$$

پس تابع در $x=-۱$ حد ندارد.

۲) هرگاه حد تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin\frac{\pi x}{۳}+b & x\geq ۳ \\ \frac{cx^۲}{x+۱} & x<۳ \end{cases}$ برابر ۳ باشد، مقدار $b+c$ را حساب کنید. (در $x=۳$)

حل.

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim \frac{cx^۲}{x+۱} = \frac{۹c}{۴} = ۳ \Rightarrow ۹c = ۱۲ \Rightarrow c = \frac{۴}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim\left(a\sin\frac{\pi x}{۳}+b\right) = a\sin\pi + b = ۰ + b = b = ۳ \Rightarrow b = ۳$$

$$b+c = ۳+\frac{۴}{۳} = \frac{۹+۴}{۳} = \frac{۱۳}{۳}$$

۳) تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x-۱}{۲x-۱} & , x\in Z \\ |x-۲\sin x| & , x\notin Z \end{cases}$ مفروض است. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim |x-۲\sin x| = ۰$

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} f(x) = \lim|x-۲\sin x| = \left|\frac{\pi}{۲}-۲\sin\frac{\pi}{۲}\right| = \left|\frac{\pi}{۲}-۲\right| = ۲-\frac{\pi}{۲}$

۴) در تابع $f(x)=\begin{cases} \operatorname{Arctg} ۲x & x\in Z \\ \dfrac{x}{x-۱} & x\notin Z \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim \frac{x}{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x}{x-۱}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{x}{x-۱}=-\infty \end{cases}$$

۵) تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\cos x}{۲x} & x\notin Z \\ \dfrac{x^۲}{۲x^۲-۱} & x\in Z \end{cases}$ مفروض است، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ چقدر است؟

حل.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\cos x}{۲x}=\lim\left(\frac{۱}{۲}-\frac{\cos x}{۲x}\right)=\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^۲}{۲x^۲-۱}=\lim \frac{۱}{۲-\dfrac{۱}{x^۲}}=\frac{۱}{۲-۰}=\frac{۱}{۲} \qquad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$$

۶) تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x\in Q \\ x^۲-۱ & x\notin Q \end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

حل. فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد. پس داریم:

$$\lim_{x\to a} f_۱(x)=\lim_{x\to a} (۲x-۲)=۲a-۲$$

$$\lim_{x\to a} f_۲(x)=\lim_{x\to a} (x^۲-۱)=a^۲-۱$$

$$\lim_{x\to a} f_۱(x)=\lim_{x\to a} f_۲(x) \Rightarrow ۲a-۲=a^۲-۱ \Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)^۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

فقط در یک نقطه $x=۱$ حد دارد.

۲-۵-۲۵ تمرین. حد هریک را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-2}$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$

۳) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{[x]-1}{[x]-x}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x^2]-[x]^2}{x^2-1}$

۶) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

۷) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5+x^2}}{2x}$

۸) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-x^2-1}}$

۹) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3+x}{x^2-5x+6}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}$

۱۲) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+6}-3}{(x-27)^3}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)$

۱۴) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2-[\cos x]}{x}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

۲-۶ مفهوم پیوستگی

۲-۶-۱ تعریف پیوستگی در یک نقطه. تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌نامیم هرگاه هر سه شرط زیر برقرار باشد.

۱) $f(a)$ وجود داشته باشد، یعنی $a \in D_f$ باشد.

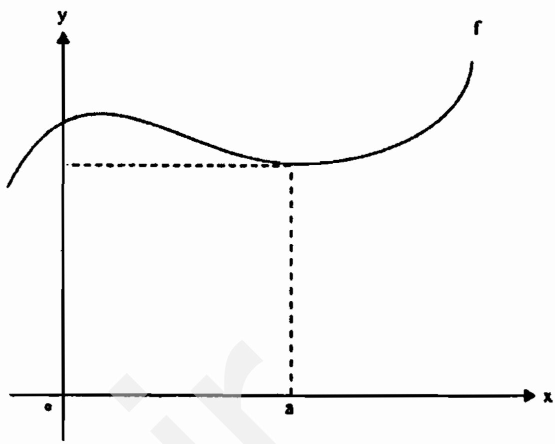
۲) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجود باشد.

۳) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

به‌طور خلاصه، تابع f در $x = a$ پیوسته است اگر:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

اگر یکی از سه شرط فوق در $x = a$ برقرار نباشد، f را در a گسسته یا ناپیوسته می‌نامیم.



شکل ۲-۱۸

۲-۶-۲ تعریف (پیوستگی یک‌طرفه). الف) گوییم تابع f در $x = a$ پیوستگی راست دارد اگر:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ب) گوییم تابع f در $x = a$ پیوستگی چپ دارد اگر:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

۲-۶-۳ مثال. پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

۱) $f(x) = \sin x \quad , \quad x = 0$

حل.

$f(0) = \sin 0 = 0$ *مقدار تابع*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

پس تابع در $x = 0$ پیوسته است.

۲) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \quad , \quad x = 2$

حل. $2 \notin D_f$، پس تابع در این نقطه ناپیوسته است.

پس تابع پیوسته نیست. زیرا $f(2)$ تعریف نشده است.

۳) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} \quad , \quad x = 1$

حل. تابع در $x = 1$ پیوسته نیست زیرا $1 \notin D_f$.

۲-۶-۴ (۱) درتعریف حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ a، دیدیم که f باید در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر f در a پیوسته باشد، $a \in \operatorname{dom} f$ خواهد بود. پس برای پیوستگی f در $x = a$، f باید در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده باشد.

(۲) بنا بر شرط سوم از تعریف پیوستگی در یک نقطه (۲-۶-۱)، اگر f در a پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (1)$$

پس اگر f در a پیوسته باشد آنگاه می‌توان عبارت (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$|x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (2)$$

برعکس، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که عبارت (۲) درست باشد، آنگاه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$، و در نتیجه f در a پیوسته خواهد بود؛ پس پیوستگی f در a را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

f را در a پیوسته گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد حقیقی و مثبت مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

(۳) در بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه، اغلب تعریف ۲-۶-۱ را در مسائل و در اثبات قضایا به‌کار خواهیم برد.

۲-۶-۵ مثال. پیوستگی هریک از توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

(۱
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2\\ 2 & x=2\end{cases} \quad , \quad x=2$$

حل. مقدار تابع $f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

چون $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ پس تابع پیوسته نیست.

(۲
$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x \neq 0\\ 2 & x=0\end{cases} \quad , \quad x=0$$

حل. مقدار تابع $f(0)=2$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(3x+1)=1$$

پس تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

(۳
$$f(x)=[x] \quad , \quad x=n\in Z$$

حل. مقدار تابع $f(n)=[x]=n$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=[n^+]=n\\ \lim\limits_{x\to n^-} f(x)=[n^-]=n-1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to n} f(x)=$$ وجود ندارد

پس تابع پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد.

۴) $f(x)=[-x] \quad , \quad x=n\in Z$

حل. مقدار تابع $f(n)=[-n]=-n$

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n}[-n]=[-(n^+)]=-(n+۱)$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}[-x]=[-(n^-)]=-n$$

پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

۵) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x>۱ \\ ۲x+۱ & x\le ۱\end{cases} \quad , \quad x=۱$

حل. مقدار تابع $f(۱)=۲(۱)+۱=۳$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x+۳)=۱+۳=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x+۱)=۲+۱=۳$$

پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

۶) $f(x)=x-[x] \quad , \quad x=n\in Z$

حل. مقدار تابع $f(n)=n-[n]=n-n=۰$

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}(x-[x])=n-[n^+]=n-n=۰$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}(x-[x])=n-[n^-]=n-(n-۱)=n-n+۱=۱$$

تابع پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد.

۷) $f(x)=\begin{cases} [۱-x^۲]+[۱+x^۲] & x\neq ۱ \\ ۴x-۳ & x=۱\end{cases} \quad , \quad x=۱$

حل. $f(x)=\begin{cases} ۲+[-x^۲]+[x^۲] & , \quad x\neq ۱ \\ ۴x-۳ & , \quad x=۱\end{cases}$

مقدار تابع $f(1)=4-3=1$

$$x\to 1^+ \Rightarrow \begin{cases}[x^2]=1\\ [-x^2]=-2\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=2-2+1=1$$

$$x\to 1^- \Rightarrow \begin{cases}[x^2]=0\\ [-x^2]=-1\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=2-1+0=1$$

پس تابع در $x=1$ پیوسته است.

۸) $x=1$ ، $f(x)=\begin{cases}|x-1|+[x] & x>1\\ 2-x^2 & x=1\\ \sin(x-1)+\cos(x-1) & x<1\end{cases}$

حل. مقدار تابع $f(1)=2-1=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(|x-1|+[x]\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\sin(x-1)+\cos(x-1)\right)=0+1=1$$

پس تابع در $x=1$ پیوسته است.

۲-۶-۶ مثال. ۱) تابع با ضابطه $x=1$ ، $f(x)=\begin{cases}b[x]+3ax & , x>1\\ 7 & , x=1\\ \dfrac{3a\sqrt{(x-1)^2}}{x^3-1}+2b & , x<1\end{cases}$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که این تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

حل. مقدار تابع $f(1)=7$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(b[x]+3ax\right)=b+3a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\left(\frac{۳a|x-۱|}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}+۲b\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۳a(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}+۲b=\frac{-۳a}{۳}+۲b=-a+۲b$$

$$\begin{cases} b+۳a=۷ \\ ۲b-a=۷ \end{cases} \Rightarrow\ a=۱,\ b=۴$$

۲) تابع با ضابطه
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۶b\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x^۳-۸} & , & x>۲ \\ ۳ & , & x=۲ \\ ۲[x]+a & , & x<۲ \end{cases}$$
مفروض است. اگر این تابع در $x=۲$ پیوسته باشد، a و b را بیابید.

حل.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۶b|x-۲|}{x^۳-۸} & , & x>۲ \\ ۳ & , & x=۲ \\ ۲[x]+a & , & x<۲ \end{cases}$$

مقدار تابع $f(۲)=۳$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim(۲[x]+a)=۲[۲^-]+a=۲(۱)+a=۲+a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۶b|x-۲|}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۶b(x-۲)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}$$

$$=\lim\frac{۶b}{x^۲+۲x+۴}=\frac{۶b}{۴+۴+۴}=\frac{b}{۲}$$

$$\begin{cases} ۲+a=۳ \\ \dfrac{b}{۲}=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۶ \end{cases}$$

۳) تابع با ضابطه $f(x)=(x-a)[۲x-۳]$ در $x=\frac{۳}{۲}$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

حل. مقدار تابع $f(\frac{۳}{۲})=(\frac{۳}{۲}-a)[۳-۳]=۰$

$$\lim_{x\to\frac{۳}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{۳}{۲}^+}(x-a)[۲x-۳]=(\frac{۳}{۲}-a)[۰^+]=(\frac{۳}{۲}-a)\times ۰=۰$$

$$\lim_{x\to\frac{۳}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{۳}{۲}^-}(x-a)[۲x-۳]=(\frac{۳}{۲}-a)[۰^-]=(\frac{۳}{۲}-a)(-۱)=a-\frac{۳}{۲}$$

$$a-\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۲-۶-۷ انواع ناپیوستگی. ناپیوستگی تابع در یک نقطه نظیر $x=a$ به دو نوع تقسیم می‌شود.

۱) ناپیوستگی رفع‌شدنی ۲) ناپیوستگی رفع‌نشدنی یا اساسی

اگر در میان شرایط پیوستگی شرط دوم برقرار باشد $(\lim_{x\to a} f(x)=L)$ ولی یکی از شرایط اول و سوم برقرار نباشد می‌گوییم تابع در $x=a$ ناپیوستگی رفع‌شدنی دارد. ولی اگر شرط دوم برقرار نباشد یعنی تابع در $x=a$ فاقد حد باشد، ناپیوستگی، اساسی یا رفع‌ناشدنی است.

۲-۶-۸ مثال. ۱) اولاً: ثابت کنید تابع زیر در نقطه $x=-۲$ ناپیوسته است. ثانیاً: نوع ناپیوستگی را تعیین کرده و در صورت رفع‌شدنی بودن $f(-۲)$ را طوری تعریف کنید که تابع f در $x=-۲$ پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & x\neq -2\\ 0 & x=-2\end{cases}$$

حل. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}$ وجود ندارد

پس تابع در $x=-2$ ناپیوسته است.

از طرفی نوع ناپیوستگی اساسی (رفع‌ناشدنی) است چون $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ وجود ندارد.

۲) اولاً: ثابت کنید تابع زیر در نقطه $x=1$ ناپیوسته است. ثانیاً: نوع ناپیوستگی را تعیین کرده و در صورت رفع‌شدنی بودن $f(1)$ را طوری تعریف کنید که تابع در $x=1$ پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ 5 & , \quad x=1\end{cases}$$

حل. شرط اول برقرار است $f(1)=5$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=1-3=-2$$

شرط دوم برقرار است

چون $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ است. شرط سوم برقرار نیست و تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است.

و چون شرط دوم برقرار است، لذا نوع ناپیوستگی رفع‌شدنی است و با تعریف $f(1)=-2$ تابع در $x=1$ پیوسته خواهد شد.

۲-۶-۹ بررسی پیوستگی توابعی که ضابطه آنها روی Z عوض می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\in Z\\ f_2(x) & x\notin Z\end{cases}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f_۲(x)$; $\forall a \in R$.

اگر $a \notin Z$ و $f(a) = f_۲(a)$، پس پیوستگی f در $x = a$ بستگی به پیوستگی $f_۲$ در a دارد.

اگر $a \in Z$ در این صورت $f(a) = f_۱(a)$ و پیوستگی f در نقطه $x = a$ بستگی به برقراری رابطه زیر دارد:

$$\lim_{x\to a} f_۲(a) = f_۱(a)$$

۲-۶-۱۰ نتیجه.

۱) فرض کنید $f_۲(x)$ روی R پیوسته باشد (نظیر توابع چندجمله‌ای) در این صورت تابع f در هر نقطه غیرصحیحی پیوسته است و در نقاط صحیح مثل $x = a$ در صورتی پیوسته است که a جواب معادله $f_۲(x) = f_۱(x)$ باشد.

۲) اگر $f_۲(x)$ روی R پیوسته باشد تابع f در هر نقطه دلخواهی اعم از صحیح و غیرصحیح دارای حد است به همین دلیل اگر در نقاط صحیح ناپیوسته باشد، ناپیوستگی آن رفع‌شدنی است.

۲-۶-۱۱ مثال. تابع $f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \in Z \\ x^۲ & x \notin Z \end{cases}$ مفروض است.

الف) پیوستگی تابع را در نقاط $x = ۱$ و $x = ۲$ بررسی کنید.

ب) نقاط صحیحی که تابع در آنها پیوسته است را بیابید.

حل. الف) $f(۱) = (۱)^۳ = ۱$

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} x^۲ = ۱$$

پس تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

$$f(۲) = (۲)^۳ = ۸$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} x^۲ = ۴$$

پس تابع در $x = ۲$ پیوسته نیست.

ب) تابع در جوابهای صحیح معادله زیر پیوسته است.

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

تابع فقط در نقاط صحیح $x = 0,1$ پیوسته است و در باقی نقاط صحیح ناپیوسته است.

۲-۶-۱۲ بررسی پیوستگی توابعی که ضابطه آنها روی Q عوض می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in Q \\ f_2(x) & x \notin Q \end{cases}$$

فرض کنید f_1 و f_2 روی R، توابعی پیوسته باشند (نظیر چندجمله‌ایها). در این صورت اگر $f_1(a) = f_2(a)$، تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است.

پس در این شرایط مجموعه نقاط پیوستگی تابع جوابهای معادله $f_1(x) = f_2(x)$ می‌باشد و در سایر نقاط تابع ناپیوسته است و حد هم ندارد.

اگر تابع فوق در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، ناپیوستگی آن اساسی است و پیوستگی یک‌طرفه هم ندارد.

۲-۶-۱۳ مثال. تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in Q \\ x^2 + 2x & x \notin Q \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

حل. در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌های مختلف تابع با هم مساوی باشند.

$$x^3 = x^2 + 2x \rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \ , \ x = -1$$

فقط در سه نقطه $x = 0,-1,2$ پیوسته است.

۲-۶-۱۴ قضیه. اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه:

۱) $f(x)\pm g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

۲) $cf(x)$، برای هر عدد ثابت c، در $x=a$ پیوسته است.

۳) $f(x)g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

۴) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به شرطی که $g(x)\neq 0$ باشد، در $x=a$ پیوسته است.

۵) $|f(x)|$ در $x=a$ پیوسته است.

اثبات. (۱) چون f و g در $x=a$ پیوسته هستند، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

با استفاده از قضیه حد مجموع و تفاضل دو تابع داریم:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)$$

در نتیجه بنا به تعریف ۲-۶-۱ تابع $f(x)\pm g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

(۲) چون f در $x=a$ پیوسته است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cf(a)$$

پس $cf(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

(۳)

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)=(f\cdot g)(a)$$

در نتیجه $f(x)g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

(۴)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

بنابراین $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ پیوسته است.

۲-۶-۱۵ قضیه. هر کثیرالجمله (چندجمله‌ای) در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

اثبات. کثیرالجمله $f(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad (a_n \neq 0), n \in N, x \in R$$

حال ثابت می‌کنیم که این تابع کثیرالجمله (چندجمله‌ای) در نقطه $b \in R$ پیوسته است. داریم:

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

و با استفاده از قضیه حد مجموع، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} a_n x^n + \lim_{x \to b} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to b} a_1 x + \lim_{x \to b} a_0$$

$$= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = f(b)$$

و در نتیجه برای هر $b \in R$، $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

۲-۶-۱۶ قضیه. تابع گویا در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

اثبات. می‌دانیم که اگر $f(x)$ تابعی گویا باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ نوشت به طوری که $g(x)$ و $h(x)$ دو کثیرالجمله هستند، می‌توان نوشت و دامنه تابع $f(x)$، کلیه مقادیر حقیقی x است که $h(x) \neq 0$.

حال اگر $a \in D_f$ باشد، داریم $h(a) \neq 0$ و با استفاده از قضیه حد تقسیم، داریم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)} = f(a)$$

بنابراین $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ و تابع در $x = a$ پیوسته است.

۲-۶-۱۷ مثال. ۱) نشان دهید که توابع زیر در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

الف) $$f(x)=\frac{x^{2}+1}{x^{3}-1}$$

حل. $$x^{3}-1=0 \Rightarrow x^{3}=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=R-\{1\}$$

در نتیجه اگر $a \in D_f$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^{2}+1}{x^{3}-1}=\frac{a^{2}+1}{a^{3}-1}=f(a)$$

پس تابع f در هر نقطه $a \in D_f$ پیوسته است.

ب) $$f(x)=\frac{x-1}{x^{2}-3x+2}$$

حل.

$$x^{2}-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1,2 \Rightarrow D_f=R-\{1,2\}$$

فرض کنید $a \in D_f$ یک عدد دلخواه باشد، در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x^{2}-3x+2}=\frac{a-1}{a^{2}-3a+2}=f(a)$$

بنابراین f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

۲-۶-۱۸ قضیه. اگر تابع f در $x=b$ پیوسته، و $\lim_{x\to a} g(x)=b$ باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}(fog)(x)=f(b)$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

اثبات. طبق فرض، f در $x=b$ پیوسته است. پس برای هر $\varepsilon_1>0$، عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که:

$$|y-b|<\delta_1 \Rightarrow |f(y)-f(b)|<\varepsilon_1 \qquad (1)$$

و چون $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ است، برای هر $\delta_1>0$، عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-b|<\delta_1 \qquad (2)$$

برای هر $x\in N'(a,\delta_2)$، می‌توان به‌جای y در (۱)، $g(x)$ را قرار دارد؛ در نتیجه:

$$|g(x)-b|<\delta_1 \Rightarrow |f(y)-f(b)|<\varepsilon \qquad (3)$$

از مقایسه (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $\varepsilon_1>0$، عددی مانند $\delta_2>0$ وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(g(x))-f(b)|<\varepsilon_1$$

و در نتیجه:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

۲-۶-۱۹ قضیه. اگر g در a، و f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه ترکیب دو تابع f و g یعنی fog در a پیوسته خواهد بود.

اثبات. اگر g در a پیوسته باشد، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$ است. با استفاده از قضیه ۱-۶-۱۸ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a}(fog)(x)=\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(x))=(fog)(a)$$

و این به معنی پیوستگی fog در نقطهٔ a است.

۲-۶-۲۰ قضیه. اگر f در a پیوسته باشد، $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ برای همهٔ اعداد صحیح و مثبت n در $x=a$ پیوسته خواهد بود. (برای مقادیر زوج n، $f(a)\geq ۰$ فرض شود)

اثبات. تابع $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ از ترکیب دو تابع $h(x)=\sqrt[n]{x}$ و $f(x)$ به دست آمده است.

$$g(x)=\sqrt[n]{f(x)}=(hof)(x)=h\big(f(x)\big)$$

تابع f در a و تابع $h(x)=\sqrt[n]{x}$ در همهٔ نقاط دامنه‌اش پیوسته است. اگر $f(a)\in D_h$ باشد، h در $f(a)$ و در نتیجه بنا به قضیه ۲-۶-۱۹ تابع $g(x)$ در a پیوسته خواهد بود.

۲-۶-۲۱ مثال. ۱) حد زیر را تعیین کنید:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{x^{۳}+۱}$$

حل. توابع f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\quad,\quad g(x)=x^{۳}+۱$$

در این صورت:

$$fog(x)=f\big(g(x)\big)=\sqrt{x^{۳}+۱}$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to ۲}g(x)=۸+۱=۹$$

و تابع f در ۹ پیوسته است. بنابراین با استفاده از قضیه ۲-۶-۱۸ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{x^{۳}+۱}=\lim_{x\to ۲}f\big(g(x)\big)=f\left(\lim_{x\to ۲}g(x)\right)=f(۹)=\sqrt{۹}=۳$$

۲) نشان دهید که توابع زیر در تمام نقاط دامنه‌شان پیوسته‌اند.

الف) $f(x)=(x^{۵}+x-۱)^{۱۰}\quad,\quad x\in R$

حل. فرض کنید $g(x)=x^{10}$ و $h(x)=x^5+x-1$، در این صورت داریم:

$$f(x)=(goh)(x)=g(h(x))=g(x^5+x-1)=(x^5+x-1)^{10}$$

می‌دانیم $D_g=D_h=R$. این دو تابع در تمام نقاط R پیوسته هستند. بنابراین بنا به قضیه ۲-۶-۱۹، تابع f در تمام نقاط R پیوسته است.

ب) $$g(x)=\frac{(x+1)^5-2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

حل. تابع g وقتی تعریف شده است که $x^2-1>0$ باشد. یعنی $D_g=\{x\,|\,|x|>1\}$. از طرفی تابع g، حاصلضرب دو تابع $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ و $(x+1)^5-2x$ است.

و چون $(x+1)^5-2x$ در تمام نقاط پیوسته است، g در نقاطی پیوسته خواهد بود که $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ پیوسته باشد.

اما تابع اخیر از ترکیب دو تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $h(x)=x^2-1$ نتیجه می‌شود.

تابع $f(x)$ در دامنه خود یعنی $D_f=\{x\,|\,x>0\}$ و تابع $h(x)$ در تمام نقاط پیوسته است. پس $foh(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ در تمام نقاط مجموعه زیر پیوسته خواهد بود.

$$\{x\,|\,h(x)>0\}=\{x\,|\,x^2-1>0\}=\{x\,|\,x^2>1\}=\{x\,|\,|x|>1\}$$

این مجموعه دامنه g می‌باشد، در نتیجه g روی دامنه‌اش پیوسته است.

۳) تعیین کنید که به ازای چه مقادیری از x، تابع $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ پیوسته است؟

حل. توابع $f(x)$ و $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\quad,\quad h(x)=x^2+4$$

در این صورت:

$$g(x) = foh(x) = f\big(h(x)\big)$$

چون تابع h یک چندجمله‌ای است، برای کلیه مقادیر حقیقی x پیوسته است. از طرف دیگر چون f در تمام اعداد مثبت پیوسته است، بنابراین g در تمام نقاط x پیوسته است که در آن $h(x) > ۰$ و یا $x^۲ + ۴ > ۰$ باشد. چون $x^۲ + ۴ > ۰$ است برای جمیع مقادیر x، در نتیجه g در هر نقطه دلخواه x پیوسته است.

۴) به ازای چه مقادیری از x تابع $f(x) = \sqrt{\dfrac{۴-x}{۴+x}}$ پیوسته است؟

حل. توابع $g(x)$ و $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad h(x) = \frac{۴-x}{۴+x}$$

بنابراین:

$$f(x) = goh(x) = g\big(h(x)\big)$$

چون تابع h تابعی گویا است، در تمام نقاط به‌جز جواب مخرج یعنی $x = -۴$ پیوسته است و g در تمام اعداد مثبت پیوسته می‌باشد. بنابراین تابع f در تمام نقاط پیوسته است که برای آنها $x \neq -۴$ و $h(x) > ۰$ باشد یعنی برای تمام مقادیر x که $\dfrac{۴-x}{۴+x} > ۰$ باشد با توجه به جدول زیر تابع f برای تمام xهای متعلق به فاصله $(-۴,۴)$ پیوسته می‌باشد.

x	$-\infty$	-۴		۴	$+\infty$
$\dfrac{۴-x}{۴+x} > ۰$	$-$		$+$		$-$

$$-۴ < x < ۴$$

۵) ثابت کنید که اگر تابع f در a پیوسته و تابع g در a ناپیوسته باشد، آنگاه $f + g$ در a ناپیوسته است.

حل. برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $f+g$ در a پیوسته باشد (فرض خلف).

چون $f+g$ در a و f نیز در a پیوسته است پس $(f+g)-f=g$ در a پیوسته است که این خلاف فرض بوده و در نتیجه تابع $f+g$ در a ناپیوسته است.

۶) دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطه a ناپیوسته بوده ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

حل. فرض کنید f و g به صورت زیر باشند:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}x-1 & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad (f+g)(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$$

یعنی $f(x)+g(x)=2x$ برای هر x پیوسته است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)= \text{وجود ندارد}$$

پس f در $x=0$ ناپیوسته است

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} g(x)= \text{وجود ندارد}$$

پس، g در $x=0$ ناپیوسته است

امّا $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=0=f(0)+g(0)$ در نتیجه $f+g$ در صفر پیوسته است.

۷) اگر g در نقطه a پیوسته و f در نقطه a ناپیوسته باشد، آیا $\frac{f}{g}$ در a پیوسته است؟ (با ذکر دلیل)

حل. خیر، فرض کنید که $\frac{f}{g}$ در a پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad,\quad g(a)\neq 0 \tag{۱}$$

چون تابع g در a پیوسته است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a}g(x)=g(a)\neq 0 \tag{۲}$$

حال نشان می‌دهیم که از (۱) و (۲) ثابت می‌شود که تابع f در a پیوسته است و این خلاف فرض می‌باشد. چون $g(a)\neq 0$ است، پس:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{g(a)}\cdot g(a)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\cdot g(a)=\frac{f(a)}{g(a)}\cdot g(a)=f(a)$$

و یا $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ و در نتیجه تابع f در a پیوسته است و این خلاف فرض بوده و در نتیجه $\frac{f}{g}$ نمی‌تواند در a پیوسته باشد.

۸) تابعی مانند f مثال بزنید که در نقطه $x=1$ ناپیوسته بوده و

الف) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ وجود داشته ولی $f(1)$ وجود نداشته باشد.

ب) $f(1)$ وجود داشته ولی $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ وجود نداشته باشد.

ج) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ و $f(1)$ وجود داشته ولی با هم برابر نباشند.

حل. الف) فرض کنید $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. برای این تابع داریم:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim(x+1)=2$$

ولی $f(1)$ تعریف نشده است.

ب) تابع f را به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 0 & x\geq 1 \end{cases}$ تعریف می‌کنیم. برای این تابع $f(1)=0$ ولی $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد زیرا:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

ج) تابع f را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x\neq 1 \\ 0 & , \quad x=1 \end{cases}$$

برای این تابع داریم:

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

ولی با هم برابر نیستند.

۹) نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ را پیدا کنید.

حل. به ازای جمیع مقادیر x که $x^2-1\geq 0$، تابع f پیوسته است:

$$x^2-1\geq 0 \iff x^2\geq 1 \Rightarrow |x|\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1$$

پس تابع f در $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ پیوسته است.

۱۰) نقاط ناپیوستگی تابع زیر را بیابید:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2-5x+6)}$$

حل. نقاط ناپیوستگی، ریشه‌های مخرج یعنی $x=2$ و $x=3$ است. به این نقاط، $x=1$ نیز افزوده می‌شود چون تابع در $x=1$ معین نیست.

۱۱) نقاط پیوستگی تابع زیر را بیابید:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

حل. xهایی که به ازای آنها عبارت زیر رادیکال نامنفی است، تابع پیوسته است، بنابراین هرگاه:

$$\frac{x+۱}{x-۱} \geq ۰$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \quad , \quad x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

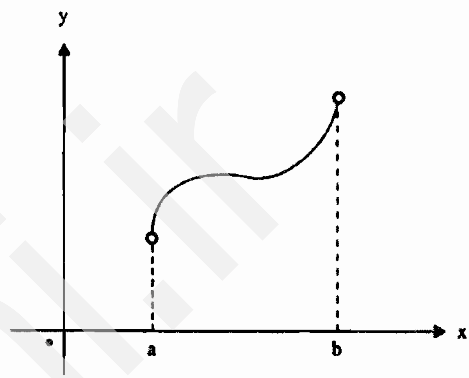
x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$\frac{x+۱}{x-۱} \geq ۰$		+	○	−	○	+	

$$\text{فاصله پیوستگی} = (-\infty, -۱] \cup (۱, +\infty)$$

پیوستگی تابع روی یک فاصله:

۲-۶-۲۲ تعریف. تابع f را روی فاصله باز (a,b) پیوسته گوییم که این تابع در هر نقطه از این فاصله پیوسته باشد. یعنی:

$$\forall x_۰ \in (a,b) : \lim_{x \to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$



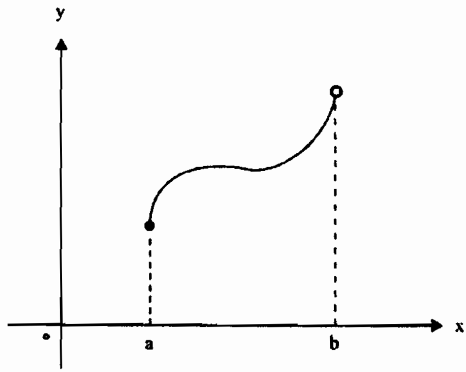
شکل ۲-۱۹

۲-۶-۲۳ تعریف. تابع f را در فاصله $[a,b)$ پیوسته گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) تابع f در فاصله باز (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع f در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد. یعنی:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$



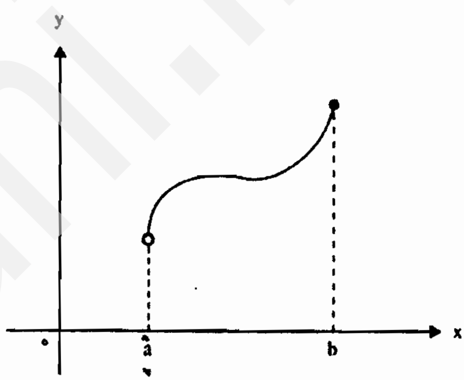
شکل ۲-۲۰

۲-۶-۲۴ تعریف. تابع f را در فاصله $[a,b)$ پیوسته گوییم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) تابع f در فاصله باز (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع f در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد. یعنی:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



شکل ۲-۲۱

۲-۶-۲۵ تعریف. تابع f را روی فاصلهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

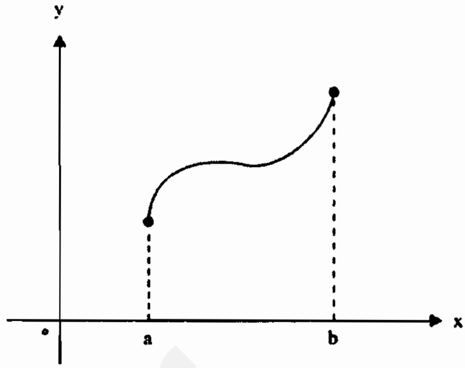
۱) f روی (a,b) پیوسته باشد.

۲) f در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

۳) f در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$



شکل ۲-۲۲

توجه. اگر $x_\circ$ در بازه (a,b) باشد، یعنی $a < x_\circ < b$، آنگاه $a < x_\circ^+ < b$ و $a < x_\circ^- < b$.

۲-۶-۲۶ تعریف. (۱) تابع f را روی فاصله $(a,+\infty)$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در همه نقاط $x > a$ پیوسته باشد.

(۲) تابع f را روی فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) f روی فاصله $(a,+\infty)$ پیوسته باشد.

ب) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

(۳) تابع f را روی فاصله $(-\infty,a)$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در همه نقاط $x<a$ پیوسته باشد.

(۴) تابع f را روی فاصله $(-\infty,a]$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه در هر دو شرط زیر صدق کند:

الف) f روی فاصله $(-\infty,a)$ پیوسته باشد.

ب) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

۲-۶-۲۷ مثال. ۱) تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ مفروض است. ثابت کنید که این تابع در بازه $(-۱,۱)$ پیوسته است.

حل.

$$-۱<x_۰<۱ \Rightarrow \begin{cases}-۱<x_۰^+<۱\\ -۱<x_۰^-<۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x_۰^۲}}\ ,\ \lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x_۰^۲}}\ ,\ f(x_۰)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x_۰^۲}}$$

پس این تابع در بازه $(-۱,۱)$ پیوسته است.

۲) ثابت کنید که تابع با ضابطه $f(x)=۲x+[x]$ در بازه $[۱,۲)$ پیوسته است.

حل. اولاً: باید ثابت کنیم که این تابع در بازه $(۱,۲)$ پیوسته است.

$$۱<x_۰<۲ \Rightarrow \begin{cases}۱<x_۰^+<۲\\ ۱<x_۰^-<۲\end{cases}$$

مقدار تابع $f(x_۰)=۲x_۰+[x_۰]=۲x_۰+۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)=۲x_۰+[x_۰^+]=۲x_۰+۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to x_۰^-} f(x)=۲x_۰+[x_۰^-]=۲x_۰+۱$

پس این تابع در بازه $(۱,۲)$ پیوسته است.

ثانیاً: باید ثابت کنیم که این تابع در $x_{\circ} = ۱$ پیوستگی راست دارد.

$$\lim_{x \to ۱^{+}} f(x) = ۲(۱) + [۱^{+}] = ۲ + ۱ = ۳$$

$$f(۱) = ۲(۱) + [۱] = ۲ + ۱ = ۳$$

بنابراین، این تابع در $x_{\circ} = ۱$ پیوستگی راست دارد.
پس تابع f در $[۱,۲)$ پیوسته است.

۳) فواصلی را تعیین کنید که تابع $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-۵}{x+۶}}$ روی آنها پیوسته باشد.

حل. ابتدا دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-۵}{x+۶} \geq \circ$$

$$x - ۵ = \circ \Rightarrow x = ۵ \quad , \quad x + ۶ = \circ \Rightarrow x = -۶$$

x	$-\infty$	-۶	۵	$+\infty$
$\frac{x+۵}{x-۶} \geq \circ$	+			+

با توجه به جدول $D_f = (-\infty, -۶) \cup [۵, +\infty)$ می‌باشد.

پس تابع f در هر نقطه روی فاصله $(-\infty, -۶) \cup [۵, +\infty)$ پیوسته است و چون

$$f(۵) = \circ$$

$$\lim_{x \to ۵^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۵^{+}} \sqrt{\frac{x-۵}{x+۶}} = \circ = f(۵)$$

بنابراین f روی فواصل $(-\infty, -۶)$ و $[۵, +\infty)$ پیوسته است.

۴) فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده و عدد مثبتی مانند M با شرط:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \qquad (\text{برای هر } x,y \in [a,b])$$

موجود باشد. نشان دهید f بر $[a,b]$ پیوسته است.

حل. فرض کنید $x_0 \in (a,b)$. بنا بر فرض با انتخاب $y = x_0$ داریم:

$$|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0|$$

پس بنا به قضیه فشار:

$$0 \le \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| \le \lim_{x \to x_0} M|x - x_0|$$

و بنابراین:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

از طرفی چون:

$$-|f(x) - f(x_0)| \le f(x) - f(x_0) \le |f(x) - f(x_0)|$$

پس بنا به قضیه فشار داریم:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$$

و بنابراین: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ و لذا f در x_0 پیوسته است. پیوستگی یک‌طرفه f در a و b به طریق مشابه ثابت می‌شود.

۵) نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ در a پیوسته باشد آنگاه تابع $|f(x)|$ نیز در a پیوسته است.

حل. چون f در $x = a$ پیوسته است پس:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

بنا به قضیه حد داریم:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$$

پس $|f(x)|$ نیز در $x = a$ پیوسته است.

۶) فرض کنید دو تابع f و g در $x = a$ پیوسته باشند و:

$$h(x) = \operatorname{Max}\{f(x), g(x)\}$$

ثابت کنید $h(x)$ در $x = a$ پیوسته است.

حل. می‌دانیم:

$$h(x) = \frac{1}{2}\{(f(x)+g(x))+(f(x)-g(x))\}$$

چون f و g در $x = a$ پیوسته‌اند لذا $f+g$ و $|f-g|$ در $x = a$ پیوسته است و لذا عبارت داخل آکولاد نیز در $x = a$ پیوسته است یعنی h در $x = a$ پیوسته است.

۲-۶-۲۸ تمرین. (۱) در مورد پیوستگی هریک از توابع زیر در روی بازه‌های داده شده تحقیق کنید.

الف) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ روی بازه‌های $[0,3]$، $(0,3)$، $[2,\infty)$ و $(-\infty,2]$.

ب) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ روی بازه‌های $[-2,0]$، $[0,2]$، $[0,2)$، $(-2,2)$، $[2,+\infty)$ و $(-\infty,-2)$.

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{25-x^2}}$ روی بازه‌های $(-\infty,-5)$، $(-\infty,-5]$، $[-5,-2]$، $[-2,5]$، $[-2,5)$، $(-2,5]$، $(-2,5)$، $[5,+\infty)$ و $(5,+\infty)$.

(۲) فواصلی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

۱) $f(x) = \sqrt{x^2-x-12}$ ۲) $f(x) = \frac{7}{x^2-9}$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x-1}$ ۴) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-4}}$

(۳) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ۲) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

۳) $f(x)=\frac{x}{x}$

٤) $f(x)=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x^2-3x+2}$

۵) $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & x\le -1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x<1\\ 2x+1 & 1<x\end{cases}$

۶) $f(x)=\begin{cases}[x] & -2<x<0\\ x-[x] & 0\le x<2\end{cases}$

(۴) پیوستگی هریک از توابع زیر را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x)=x-[x]\quad ,\ x_0=1\ ,\ x_0=2$

۲) $f(x)=\begin{cases}x+\frac{|x-1|}{x-1} & ,\quad x\neq 1\\ 0 & ,\quad x=1\end{cases}\quad ,\quad x_0=1$

۳) $f(x)=\begin{cases}x^2+\frac{2x}{|x|} & ,\quad x\neq 0\\ 2 & ,\quad x=0\end{cases}\quad ,\quad x_0=0$

۴) فاصله $(4,6)$ ، $f(x)=\frac{5}{\sqrt{2-x^2}}$

۵) در فاصله $[1,+\infty)$ ، $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

۶) در فاصله $(-\infty,2]$ ، $f(x)=\sqrt{2-x}$

۷) در فاصله $[-5,5]$ ، $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

۸) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{|x|} & ,\quad x>1\\ 2[2x]+1 & ,\quad x<1\end{cases}\quad ,\quad x_0=1$

(۵) اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3x^2-12}{x-2}$ پیوسته باشد، $f(2)$ را حساب کنید.

(۶) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x} & , x\neq 0\\ 2 & , x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ چه نوع پیوستگی دارد؟

(۷) به ازاء چه مقدار a، تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ a & , x\neq 0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

(۸) اگر تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-2\sin x & -\pi\leq x\leq -\frac{\pi}{2}\\ a\sin x+b & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x & \frac{\pi}{2}\leq x\leq \pi\end{cases}$ پیوسته باشد، مقدار a را حساب کنید.

(۹) تابع با ضابطه $f(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]$ در نقطه $x=1$ چه نوع پیوستگی دارد؟

(۱۰) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x+ax & , x>2\\ ax^2+1 & , x\leq 2\end{cases}$ در R پیوسته باشد مقدار a را حساب کنید.

(۱۱) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[[x]-x] & , x\notin Z\\ a & , x\in Z\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

(۱۲) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x+a & , x>1\\ 3 & , x=1\\ bx-1 & , x<1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

(۱۳) به ازاء چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} e^{x}+e^{-x} & , \quad x\geq 0 \\ 2a-x & , \quad x<0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

(۱۴) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0=4$ پیوسته باشد؟

$$f(x)=\begin{cases} a[x-2]+b & , \quad x<4 \\ \left[\dfrac{x}{3}\right]+b & , \quad x=4 \\ \dfrac{x^{2}-16}{x-4} & , \quad x>4 \end{cases}$$

(۱۵) اگر تابع با ضابطه $f(x)=(a^{2}-4a)[x]+3[x]+\dfrac{x}{x^{2}+1}$ در R پیوسته باشد، مقادیر a را پیدا کنید.

(۱۶) پیوستگی تابع $f(x)=[x+[x]]\cdot[1-x+[x]]$ را در $x=0$ بررسی کنید.

(۱۷) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} 4x^{3}-9x^{2}+5x+1 & , \quad x\in Z \\ 1 & , \quad x\notin Z \end{cases}$ مفروض است. این تابع در چند نقطه به طوری صحیح، پیوسته است. آیا این تابع در $x_0=\dfrac{5}{4}$ و $x_0=\sqrt{2}$ و $x_0=\dfrac{7}{3}$ پیوسته است؟

(۱۸) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{2}-4}{\sqrt{x^{2}+4x+4}} & , \quad x<-2 \\ a & , \quad x=-2 \\ b+[x^{2}] & , \quad x>-2 \end{cases}$$

در $x_0=-2$ پیوسته باشد.

(۱۹) a و b را طوری پیدا کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} 2ax^2+bx-3 &, \quad x<1 \\ x^3-x+4a &, \quad 1\le x<2 \\ 5x-2b &, \quad x\ge 2 \end{cases}$$

همواره پیوسته باشد.

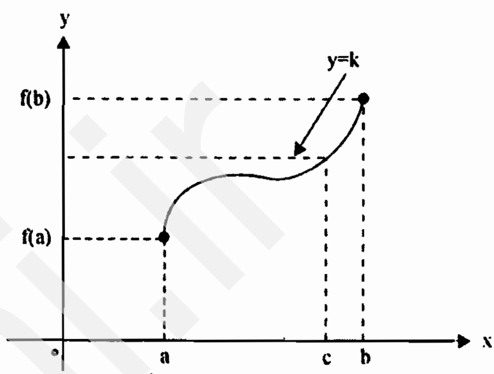
کاربردهای پیوستگی:

یکی از قضایای پیوستگی که بسیار کاربردی است، قضیهٔ مقدار میانی است.

۲-۶-۲۹ قضیه مقدار میانی. فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a)\neq f(b)$، در این صورت برای هر عدد دلخواه k بین $f(a)$ و $f(b)$، نقطه‌ای مانند c بین a و b موجود است به طوری که:

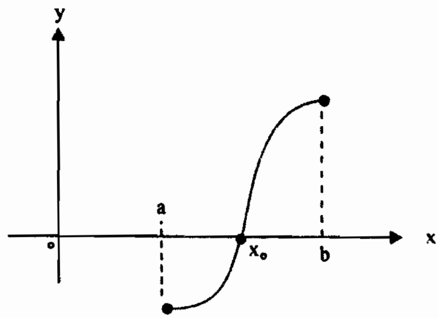
$$f(c)=k$$

یعنی f همهٔ مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.



شکل ۲-۲۳

۲-۶-۳۰ قضیه بولتزانو. اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند. آنگاه معادلهٔ $f(x)=0$ در بازهٔ (a,b) حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.



شکل ۲-۲۴

در حقیقت قضیه بولتزانو، حالت خاصی از قضیه مقدار میانی است که در آن $k=0$ است.

بیان دیگر قضیهٔ بولتزانو: اگر در تابع f داشته باشیم: $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$، آنگاه نمودار f محور xها را حداقل در یک نقطه، بین α و β قطع می‌کند.

۲-۶-۳۱ مثال. ۱) تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$ مفروض است.

الف) نشان دهید که معادله $f(x)=0$ در بازه $[0,1]$ دارای ریشه است.

ب) نشان دهید که خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع f را در بازه $[2,3]$ قطع می‌کند.

حل. الف)

$$\begin{matrix} f(0)=-6 \\ f(1)=1 \end{matrix} \Rightarrow f(0)f(1)=-6<0 \xrightarrow{\text{بنا به قضیه بولتزانو}}$$

$f(x)=0$ در بازه $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد.

ب)

$$\begin{matrix} f(a)=f(2)=4 \\ f(b)=f(3)=9 \end{matrix} \Rightarrow 4<\sqrt{17}<9 \Rightarrow f(2)<\sqrt{17}<f(3)$$

پس خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع را در بازه $[2,3]$ حداقل در یک نقطه قطع می‌کند (بنا به قضیه مقدار میانی)

۲) ثابت کنید، نمودار تابع به معادله $f(x) = \cos ۲\pi x - ۳x^۲$، محور xها را حداقل در یک نقطه، در بازه $[۰,۱]$ قطع می‌کند.

حل.
$$f(۰) = \cos ۰ - ۳\cos^۲ = ۱$$
$$f(۱) = \cos\pi - ۳(۱)^۲ = -۱ - ۳ = -۴$$
چون
$$f(۰)f(۱) = -۴ < ۰$$
پس نمودار تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه در $(۰,۱)$ قطع می‌کند.

۳) اولاً: نشان دهید که معادله $x^۳ - ۳x + ۱ = ۰$ در بازهٔ $[۰,۱]$ حداقل یک ریشه دارد.

ثانیاً: بازهٔ بسته‌ای به طول $\frac{۱}{۴}$ تعیین کنید که طول آن $\frac{۱}{۴}$ طول بازهٔ فوق باشد و معادله در این بازه نیز یک ریشه داشته باشد.

حل. اولاً: فرض کنیم $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$.
$$f(۰) = ۱$$
$$f(۱) = ۱ - ۳ + ۱ = -۱$$
چون $f(۰)f(۱) = -۱ < ۰ \xrightarrow{\text{بنا به قضیه بولتزانو}}$ معادله حداقل یک ریشه در $[۰,۱]$ دارد.

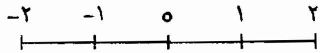
ثانیاً:

$$f(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۶۴} - \frac{۳}{۴} + ۱ = \frac{۱۵}{۶۴} > ۰$$
$$f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۸} - \frac{۳}{۲} + ۱ = -\frac{۳}{۸} < ۰$$
چون $f(\frac{۱}{۴})f(\frac{۱}{۲}) < ۰ \Rightarrow$ معادله حداقل یک ریشه در بازه $[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}]$ دارد

در ضمن طول بازه $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$ است.

۴) نشان دهید که هر سه ریشه معادله $x^{۳}-۳x+۱=۰$ در بازه $[-۲,۲]$ است.

حل. فرض کنیم $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ و ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ می‌نامیم.



$$\begin{cases} f(-۲)=-۸+۶+۱=-۱<۰ \\ f(-۱)=-۱+۳+۱=۳>۰ \end{cases} \Rightarrow$$ یک ریشه در بازه $(-۲,-۱)$ دارد.

$$\begin{cases} f(۰)=۰-۰+۱=۱>۰ \\ f(۱)=۱-۳+۱=-۱<۰ \end{cases} \Rightarrow$$ یک ریشه در بازه $(۰,۱)$ دارد.

$$\begin{cases} f(۱)=۱-۳+۱=-۱<۰ \\ f(۲)=۸-۶+۱=۳>۰ \end{cases} \Rightarrow$$ یک ریشه در بازه $(۱,۲)$ دارد.

۲-۶-۳۲ تمرین. (۱) فرض کنید تابع g در نقطهٔ ۰ پیوسته باشد، $g(۰)=۰$ و f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر و بر نامساوی $|f(x)|\le g(x)$ صدق می‌کند. ثابت کنید f در نقطهٔ ۰ پیوسته است.

(۲) فرض کنید تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد.

الف) اگر $f(a)>۰$، ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

ب) اگر $f(a)<۰$، ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

(۳) فرض کنید تابع f در نقطه $x_۰$ پیوسته باشد و در هر همسایگی $x_۰$، نقاطی مانند $x_۱$ و $x_۲$ وجود داشته باشند که $f(x_۲)>۰$ و $f(x_۱)<۰$.

ثابت کنید $f(x_۰)=۰$.

(۴) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+۱}-۱}{\sqrt[۳]{x+۱}-۱} & , \quad x\neq ۰ \\ a & , \quad x=۰ \end{cases}$$

(۵) فرض کنید:
$$f(x)=\begin{cases}[x+1]\sin\frac{1}{x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & \text{در هر نقطه دیگر}\end{cases}$$

پیوستگی f را در نقطه‌های ۰ و ۱ بررسی کنید.

(۶) فرض کنیم $g(x)=1+x-[x]$ و $f(x)=\begin{cases}1 & , x>0\\ 0 & , x=0\\ -1 & , x<0\end{cases}$. نقاط ناپیوستگی تابع‌های fog و gof را پیدا کنید.

(۷) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطهٔ a پیوسته است اگر و فقط اگر:

$$\lim_{x\to 0} f(x+a)=f(a)$$

(۸) نقاط ناپیوستگی هریک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases}x & |x|\le 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & |x|\le 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$

۳) $f(x)=x[x]$

۴) $f(x)=x-[x]$

۵) $f(x)=[\frac{1}{x}]\ ,\ x\in R-\{0\}$

۶) $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]\ ,\ x\in R^{+}$

۷) $f(x)=\begin{cases}x^{2} & x\in Q\\ -x^{2} & x\notin Q\end{cases}$

۸) $f(x)=\begin{cases}x^{4} & x\in[0,1]\\ x+1 & x\in(1,3)\end{cases}$

۹) $f(x)=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}[1-2x]\ ,\ x\in[0,1]$

(۹) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4,10]$ پیوسته است.

(۱۰) فرض کنید $f:[0,+\infty)\to R$ تابعی دلخواه باشد و $x\in R$, $g(x)=f(|x|)$.

ثابت کنید f در نقطه ۰ از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه ۰ پیوسته باشد.

(۱۱) آیا معادله $x^{5}-18x+2=0$ ریشه‌ای در بازه $[-1,1]$ دارد؟

(۱۲) ثابت کنید معادله $x^{5}-3x^{3}-x+1=0$ حداقل یک ریشه در بازه $(0,2)$ دارد.

(۱۳) فرض کنید تابع $f:[1,2]\to[0,3]$ پیوسته باشد و $f(1)=0\,,\,f(2)=3$. ثابت کنید عددی مانند x_0 در بازه $(1,2)$ وجود دارد که $f(x_0)=x_0$.

(۱۴) فرض کنید $f(x)=\frac{x^{3}}{4}-\sin(\pi x)+3$. آیا عددی مانند x_0 در بازه $(-2,2)$ وجود دارد که $f(x_0)=\frac{7}{3}$؟

(۱۵) فرض کنید تابع $f:[-1,1]\to R$ پیوسته باشد، $f(0)=0$ و $f(x)\neq 2\,,\,x\in[-1,1]$.

ثابت کنید که اگر $x\in[-1,1]$، آنگاه $f(x)<2$.

(۱۶) فرض کنید تابع $f:[3,5]\to R$ پیوسته باشد، $f(3)=3$ و $f(x)\neq 4\,,\,x\in[3,5]$.

ثابت کنید $f(5)<4$.

(۱۷) فرض کنید تابع $f:[0,3]\to R$ پیوسته باشد، $f(0)=1$ و معادله $f(x)=0$ هیچ ریشه‌ای در بازه $[0,3]$ نداشته باشد. ثابت کنید برای هر $x\in[0,3]$، $f(x)>0$.

(۱۸) فرض کنید $f:R\to R$ و $f(0)=0$ و

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)\quad,\quad x,y\in R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه ۰ پیوسته باشد، آنگاه در هر نقطهٔ دیگر هم پیوسته است.

(۱۹) فرض کنید I بازه‌ای باز باشد، تابع‌های $g:I\to R$ و f پیوسته باشند و:

$$s(x)=\mathrm{Min}\{f(x),g(x)\}\quad,\quad x\in I$$

$$t(x)=\mathrm{Max}\{f(x),g(x)\}\quad,\quad x\in I$$

ثابت کنید توابع $t:I\to R$ و S هم پیوسته‌اند.

(۲۰) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؛

الف) f در نقطهٔ a پیوسته باشد و g در نقطهٔ a پیوسته نباشد اما fog در نقطهٔ a پیوسته باشد؟

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما gof در نقطه a پیوسته باشد؟

ج) نه f در a پیوسته باشد و نه g، اما fog در نقطهٔ a پیوسته باشد؟

(۲۱) الف) ثابت کنید هر چندجمله‌ای از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

ب). فرض کنید $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ و $d<0$ ثابت کنید معادله $P(x)=0$ حداقل ۲ ریشه متمایز دارد.

(۲۲) فرض کنید n عددی زوج باشد، $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $a_na_0<0$. ثابت کنید معادله $f(x)=0$ حداقل ۲ ریشه حقیقی دارد.

فصل سوم

مشتق

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. شیب خط مماس و خط قائم بر منحنی داده شده را در نقطه داده شده تعریف کرده و محاسبه کند.

۲. معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی را در یک نقطه داده شده به دست آورد.

۳. سرعت متوسط و لحظه‌ای و شتاب متحرکی را که روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند و معادله حرکت آن داده شده است به دست آورد.

۴. مشتق تابع در یک نقطه را تعریف کرده و محاسبه کند.

۵. مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه را تعریف کند.

۶. قضایای مشتق را بیان کرده و به‌کار برد.

۷. مشتق چپ و راست را بیان کرده و محاسبه کند.

۸. قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری را بیان و آن را در محاسبات به‌کار برد.

۹. مشتق توابع، منحنی و پارامتری را بیان و مشتق آنها را محاسبه کند.

۱۰. رابطه بین مشتق چپ و راست و مشتق تابع را در یک نقطه بیان کند.

۱۱. دیفرانسیل یک تابع را تعریف کند.

۱۲. مشتق وارون یک تابع را محاسبه کند.

۱۳. مشتقات مرتبه‌های بالاتر یک تابع را تعریف کرده و محاسبه کند.

۳-۱ مشتق

مشتق، یکی از مفاهیم مهم ریاضی است و کاربردهای زیر در سایر علوم، مانند فیزیک، معماری، عمران و... دارد.

مشتق دو مسأله به ظاهر متفاوت، سرعت لحظه‌ای یک متحرک و شیب خط مماس بر یک منحنی را مطرح می‌کند، سپس ملاحظه خواهید کرد که دو مطلب فوق، یکی هستند. ابتدا با بیان سرعت لحظه‌ای یک متحرک می‌پردازیم.

۳-۱-۱ سرعت لحظه‌ای یک متحرک. متحرک M را که روی OM حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که t ثانیه پس از شروع حرکت فاصلهٔ M از O برابر باشد با:

$$S = S(t)$$

(۱) رابطهٔ $S = S(t)$ را معادلهٔ حرکت نقطه M روی محور OS نسبت به نقطهٔ O می‌نامند.

(۲) نسبت مسافت پیموده شده از لحظه $t_1 = a$ تا $t_2 = b$ به $t_2 - t_1 = b - a$ $(b \neq a)$ را سرعت متوسط M در فاصله زمانی $[a,b]$ می‌نامند، یعنی:

$$\frac{S(b)-S(a)}{b-a} = V_m = \overline{V} = \text{سرعت متوسط در فاصله زمانی } [a,b]$$

سرعت متوسط را میزان متوسط تغییر مسافت در فاصله زمانی $[a,b]$ نیز می‌نامند.

(۳) اگر سرعت متوسط M در فاصله زمانی $[a,t]$، وقتی t به سمت a میل کند، حد داشته باشد، آن حد را سرعت M در لحظه $t = a$ می‌نامند و با علامت $V(t)$ نمایش می‌دهیم.

$$V(t) = \lim_{t \to a} \frac{S(t)-S(a)}{t-a}$$

$V(t)$ را میزان آنی تغییر مسافت نسبت به زمان در لحظه $t = a$ نیز می‌نامند.

۳-۱-۲ مثال. ۱) معادله حرکت نقطه‌ای که روی خط مستقیمی حرکت می‌کند $S(t)=t^{2}+2t$ است. سرعت این متحرک را در لحظه $t=2$ محاسبه کنید.

حل.
$$V(2)=\lim_{t\to 2}\frac{S(t)-S(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^{2}+2t-8}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t+4)(t-2)}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2}(t+4)=6$$

۲) فرض کنید $S(t)=t^{2}-\frac{1}{3}t^{3}$ و $t\geq 0$، معادله حرکت نقطه‌ای روی خط مستقیمی باشد. در کدام لحظه سرعت این متحرک برابر ۱ خواهد بود؟

حل. در لحظه $t=a$ سرعت متحرک برابر است با:

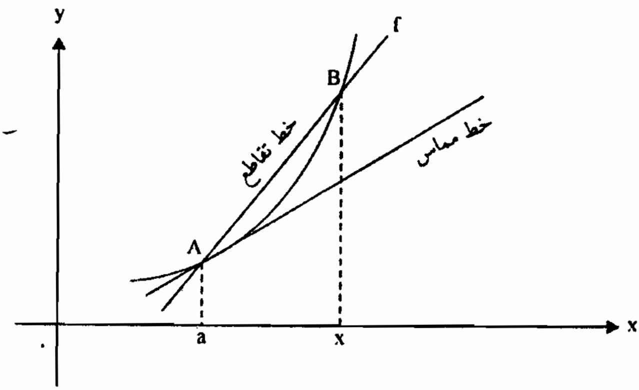
$$V(a)=\lim_{t\to a}\frac{S(t)-S(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{t^{2}-\frac{1}{3}t^{3}-(a^{2}-\frac{1}{3}a^{3})}{t-a}$$
$$=\lim_{t\to a}\frac{(t^{2}-a^{2})-\frac{1}{3}(t^{3}-a^{3})}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{(t-a)(t+a)-\frac{1}{3}(t-a)(t^{2}+at+a^{2})}{t-a}$$
$$=\lim_{t\to a}\left[(t+a)-\frac{1}{3}(t^{2}+at+a^{2})\right]=2a-a^{2}$$
$$V(a)=1\ \Rightarrow\ 2a-a^{2}=1\ \Rightarrow\ a^{2}-2a+1=0\ \Rightarrow\ a=1$$

پس در لحظه $t=1$، سرعت متحرک برابر ۱ می‌باشد.

۳-۱-۳ شیب خط مماس بر منحنی. فرض کنید، نمودار f مانند شکل زیر باشد و دو نقطه $A\left|\begin{matrix}a\\ b=f(a)\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x\\ y=f(x)\end{matrix}\right.$ روی نمودار f باشند. می‌دانیم:

$$A\left|\begin{matrix}a\\ f(a)\end{matrix}\right.\quad,\quad B\left|\begin{matrix}x\\ f(x)\end{matrix}\right.$$

$$m_{AB}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$



شکل ۳-۱

حال اگر نقطهٔ B را به نقطهٔ A فوق‌العاده نزدیک کنیم، به عبارت دیگر $x-a$ به سمت صفر میل کند، در این شرایط، وتر AB به خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A نزدیک می‌شود، در این صورت، شیب وتر AB وضع حدّی پیدا می‌کند، که در صورت وجود حد، آن را شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه A گوئیم؛ پس:

$$m = \text{شیب خط مماس در } A = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

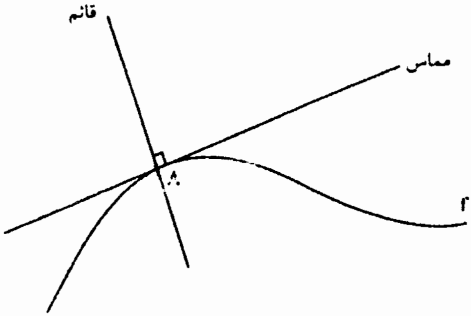
این حد را در صورت وجود $f'(a)$ گوییم.

۳-۱-۴ شیب مماس و خط قائم بر منحنی. برای تعیین شیب خط مماس و قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ واقع بر منحنی به طریق زیر عمل می‌کنیم.

الف) طبق رابطه‌ی $m_{\text{مماس}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$، شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم.

ب) با استفاده از رابطه‌ی زیر شیب خط قائم بر منحنی را تعیین می‌کنیم.

$$m_{\text{ق}} = m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{m_{\text{مماس}}}$$



شکل ۳-۲

۳-۱-۵ تعیین معادله خط مماس و قائم بر منحنی. برای نوشتن معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ واقع بر منحنی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) در تابع به‌جای x عدد a را قرار داده y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

نقطه تماس (پای قائم):

$$x = a \Rightarrow y = f(a) \Rightarrow A\left|\begin{array}{l} a \\ f(a) \end{array}\right.$$

ب) $m_{\text{مماس}}$ و $m_{\text{قائم}}$ را پیدا می‌کنیم.

ج) با استفاده از رابطه زیر معادله خط مماس و قائم بر منحنی را می‌نویسیم:

خط مماس $\quad y - y_A = m_{\text{مماس}}(x - x_A)$

خط قائم $\quad y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A)$

۳-۱-۶ مثال. ۱) معادله خط مماس بر منحنی $y = x^۲ + x$ را در نقطه $x = ۱$ بنویسید.

حل. نقطه تماس $x = ۱ \Rightarrow y = ۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow A(۱,۲)$

$$m_{\text{م}} = m_{\text{مماس}} = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{x - ۱} = ۳$$

معادله خط مماس به صورت زیر خواهدبود:

$$y - y_A = m_{\text{مماس}}(x - x_A) \Rightarrow y - ۲ = ۳(x - ۱) \Rightarrow y = ۳x - ۱$$

۲) معادله خط قائم بر منحنی $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ را در نقطه $x=۱$ بنویسید.

حل. $x=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲} \Rightarrow A(۱,\frac{۱}{۲})$

$$\text{شیب خط مماس}=m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۱+x^۲}-\frac{۱}{۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲-۱-x^۲}{۲(۱+x^۲)}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x^۲}{۲(x-۱)(x^۲+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{۲(x-۱)(x^۲+۱)}=\frac{-۲}{۲(۲)}=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه شیب خط قائم برابر است با $۲=\frac{-۱}{m_{\text{مماس}}}=m_{\text{قائم}}$، در نتیجه معادله خط قائم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-y_A=m_{\text{ق}}(x-x_A)\Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=۲(x-۱)\Rightarrow ۲y-۱=۴x-۴\Rightarrow ۲y=۴x-۳$$

۳) مختصات نقطه‌ای از منحنی $y=\frac{x+۱}{۲x-۱}$ را تعیین کنید که مماس بر منحنی در آن نقطه با خط $y+۳x=۰$ موازی باشد.

حل. (خط=خ) $y+۳x=۰ \Rightarrow m_{\text{خ}}=-\frac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}=-\frac{۳}{۱}=-۳$

چون خط مماس بر منحنی موازی با خط $y+۳x=۰$ است، پس شیب خط مماس بر منحنی برابر با ۳- خواهد شد.

$$\text{شرط موازی}: m_{\text{م}}=m_{\text{خ}} \Rightarrow m_{\text{م}}=-۳$$

$$m_{\text{م}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x+۱}{۲x-۱}-\frac{a+۱}{۲a-۱}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{(x+۱)(۲a-۱)-(a+۱)(۲x-۱)}{(۲x-۱)(۲a-۱)}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{۲ax-x+۲a-۱-۲ax+a-۲x+۱}{(x-a)(۲x-۱)(۲a-۱)}=\lim_{x\to a}\frac{۳a-۳x}{(x-a)(۲x-۱)(۲a-۱)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-۳}{(۲x-۱)(۲a-۱)} = \frac{-۳}{(۲a-۱)^۲} = -۳ \Rightarrow (۲a-۱)^۲ = ۱ \Rightarrow ۲a-۱=\pm ۱$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a=۱ \\ a=۰ \end{vmatrix} \Rightarrow A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix} \quad , \quad B\begin{vmatrix} ۰ \\ -۱ \end{vmatrix} \text{ نقاط}$$

۳-۱-۷ تعریف مشتق در یک نقطه. اگر تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، می‌گوییم، تابع f در a مشتق‌پذیر است. و مقدار این حد را با $f'(a)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $f'(a)$ یعنی مشتق تابع f در نقطه a.

۳-۱-۸ تعریف. مشتق چپ و راست تابع در یک نقطه:

مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{مشتق راست} = f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\text{مشتق چپ} = f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

۳-۱-۹ تذکر. فرض کنید $x-a=h$، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x = a+h \\ x \to a \\ h \to ۰ \end{cases}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۳-۱-۱۰ تعریف. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که مشتق چپ و راست تابع در $x=a$ وجود داشته و با هم برابر باشند.

۳-۱-۱۱ تعریف. مشتق تابع $y=f(x)$ را با نماد $f'(x)$ نشان داده و مقدار آن در هر نقطه x از دامنه تابع f، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

اگر $\Delta x=h$ در نظر بگیریم، داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

توجه. هرگاه تابع $y=f(x)$ در x مشتق‌پذیر باشد، نمادهای زیر همه به یک معنی هستند.

$$f'(x)=D_x\big(f(x)\big)=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$$

۳-۱-۱۲ مثال. مشتق هر یک از توابع زیر را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

۱) $y=x^{۲}+۲x$

حل.
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)=(x+h)^{۲}+۲(x+h)=x^{۲}+۲xh+h^{۲}+۲x+۲h$$

$$f(x+h)-f(x)=x^{۲}+۲x+۲xh+h^{۲}+۲h-x^{۲}-۲x=(۲x+h+۲)h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(۲x+h+۲)h}{h}=۲x+۲$$

۲) $f(x)=\sqrt{x+۲}$

حل.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+2}-\sqrt{x+2}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+2-x-2}{h(\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+2}+\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

۳) $$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

حل.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h+2}-\frac{1}{x+2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+2-x-h-2}{h(x+h+2)(x+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+2)(x+2)}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+2)(x+2)}=\frac{-1}{(x+2)^2}$$

۳-۱-۱۳ قضیه. اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات. برای آنکه ثابت کنیم f در a پیوسته است، باید نشان دهیم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=0$$

می‌نویسیم:

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \quad , \quad x\neq a$$

چون تابع f در a مشتق‌پذیر است، پس:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

که $f'(a)$ عددی است مشخص و معین پس:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

یعنی، تابع f در a پیوسته است.

۳-۱-۱۴ تذکر. (۱) عکس قضیه فوق درست نیست. یعنی هر تابع پیوسته لزوماً مشتق‌پذیر نیست. مثلاً تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

(۲) اگر تابع f در a پیوسته نباشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر نیست.

(۳) ممکن است تابع f در a پیوسته باشد، ولی $f'(a)$ وجود نداشته باشد، زیرا شرط پیوسته بودن تابع f، برای وجود $f'(a)$ شرط لازم است ولی کافی نیست.

۳-۱-۱۵ نکته. در بررسی $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ به موارد زیر برمی‌خوریم. اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود نداشته باشد، ولی

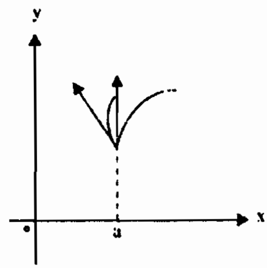
(۱) اگر $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، به آن شیب نیم‌مماس راست در نقطه a گویند.

(۲) اگر $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، به آن شیب نیم‌مماس چپ در نقطه a گویند.

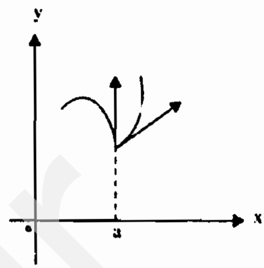
(۳) اگر f در a پیوسته و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ دو عدد متمایز باشند و یا حداکثر یکی از $f'_+(a)$ یا $f'_-(a)$ نامتناهی باشد، نقطهٔ به طول a واقع بر منحنی f را نقطهٔ زاویه‌دار گوییم.

(۴) هرگاه f در a پیوسته باشد و $f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$ در این صورت شیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطه به طول a برابر ∞ است و خط مماس در نقطه به طول a به صورت $x=a$ است و موازی محور yها است. در این حالت نقطه به طول a نقطه عطف تابع است.

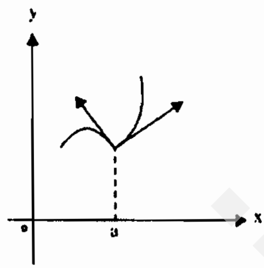
نمودار مربوط به نکته (۳)



شکل ۳-۵

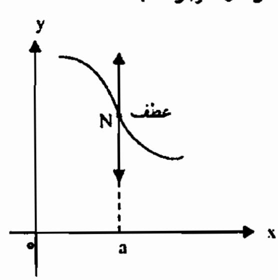


شکل ۳-۴

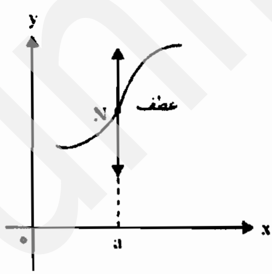


شکل ۳-۳

نمودار مربوط به نکته (۴)

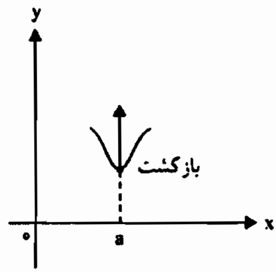


شکل ۳-۷

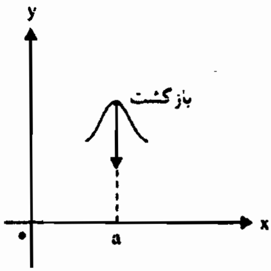


شکل ۳-۶

(۵) اگر f در a پیوسته باشد و $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$ یا $f'_+(a)=-\infty$ و $f'_-(a)=+\infty$ باشد، نقطه به طول a را نقطهٔ بازگشت گویند.



شکل ۳-۹



شکل ۳-۸

۳-۱-۱۶ مثال. مشتق‌پذیری هریک از توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱) $$f(x)=\left|x^{۲}-۲x\right| \quad , \quad x_{\circ}=۲$$

حل.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left|x^{۲}-۲x\right|-\circ}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x||x-۲|}{x-۲}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x||x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x||x-۲|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{x-۲}=-۲$$

چون $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$، پس تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۲) $$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\geq -۲ \\ -x-۱ & x<-۲ \end{cases} \quad , \quad x_{\circ}=-۲$$

حل.

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to -۲^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{x+۳-۱}{x+۲}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{x+۲}{x+۲}=۱$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to -۲^-}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{-x-۱-۱}{x+۲}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{-(x+۲)}{x+۲}=-۱$$

چون $f'_+(-۲)\neq f'_-(-۲)$، بنابراین تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}\quad,\quad x_\circ=۲$

حل. $$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}-\circ}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{\frac{x-۲}{(x-۲)^۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{\frac{۱}{(x-۲)^۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{\circ^+}}=\sqrt[۳]{+\infty}=+\infty$$

چون این حد وجود ندارد پس تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۴) $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲}\quad,\quad x_\circ=\circ$

حل.

$$\lim_{x\to \circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to \circ}\frac{\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲}}{x}=\lim_{x\to \circ}\sqrt[۳]{\frac{x^۳-۳x^۲}{x^۳}}=\lim_{x\to \circ}\sqrt[۳]{۱-\frac{۳}{x}}$$

$$f'_+(\circ)=\lim_{x\to \circ^+}\sqrt[۳]{۱-\frac{۳}{x}}=\sqrt[۳]{-\infty}=-\infty$$

$$f'_-(\circ)=\lim_{x\to \circ^-}\sqrt[۳]{۱-\frac{۳}{x}}=\sqrt[۳]{+\infty}=+\infty$$

پس نه مشتق راست و نه مشتق چپ وجود ندارد.

پس تابع f در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست.

۵) $f(x)=[x] \quad , \quad x=0$

حل.
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=[0^+]=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=[0^-]=-1$$

چون f در $x=0$ پیوسته نیست پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۶) $f(x)=x[x] \quad , \quad x=0$

حل. f پیوسته است $\Leftarrow$ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x[x]=0=f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x[x]}{x}=\lim_{x\to 0}[x]=\text{وجود ندارد}$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۷) $f(x)=x^2[x] \quad , \quad x=0$

حل. f پیوسته است $\Leftarrow$ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2[x]=0=f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2[x]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x[x]}{1}=0$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۸) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases} \quad , \quad x=0$

حل. f پیوسته نیست $\xleftarrow{\text{پس}}$ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\text{وجود ندارد}$

در نتیجه f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۹) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \quad , \quad x=0$

حل. f پیوسته است $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=$$ وجود ندارد

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۰) $$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad ,\quad x=0$$

حل. f پیوسته است $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۱۱) اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}ax^2 & x\geq 2\\ 8x+b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، a و b را حساب کنید.

حل. اولاً: تابع f باید در $x=2$ پیوسته باشد، پس:

مقدار تابع $f(2)=4a$

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim(ax^2)=4a & \text{حد راست}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim(8x+b)=16+b & \text{حد چپ}\end{array}\right\}\Rightarrow 4a=16+b\Rightarrow 4a-b=16 \quad (1)$$

ثانیاً: باید $f'_+(2)=f'_-(2)$ باشد.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{ax^2-4a}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(x-2)(x+2)}{x-2}=4a$$

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۸x + b - ۱۶ - b}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۸(x - ۲)}{x - ۲} = ۸$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

$$(۱) \Rightarrow ۸ - b = ۱۶ \Rightarrow -b = ۸ \Rightarrow b = -۸$$

۱۲) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ax + b & x \geq ۱ \\ x^۳ + ۲ax & x < ۱ \end{cases}$ مفروض است. a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر باشد.

حل. اولاً: f در $x = ۱$ پیوسته باشد. $f(۱) = ۱ + a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} (x^۲ + ax + b) = ۱ + a + b \\ \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} (x^۳ + ۲ax) = ۱ + ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ + a + b = ۱ + ۲a \Rightarrow b = a \quad (۱)$$

ثانیاً: باید $f'_+(۱) = f'_-(۱)$ باشد.

$$f'_+(۱) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x^۲ + ax + b - (۱ + a + b)}{x - ۱}$$

$$= \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x^۲ - ۱) + a(x - ۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} (x + ۱ + a) = ۲ + a$$

$$f'_-(۱) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x^۳ + ۲ax - (۱ + ۲a)}{x - ۱}$$

$$= \lim_{x \to ۱^-} \frac{(x^۳ - ۱) + ۲a(x - ۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} (x^۲ + x + ۱ + ۲a) = ۳ + ۲a$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow ۳ + ۲a = ۲ + a \Rightarrow a = -۱ \xrightarrow{(۱)} b = -۱$$

(۱۳) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+۴ & x<-۲ \\ ۳x+۵ & x\geq -۲ \end{cases}$ مفروض است. a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=-۲$ مشتق‌پذیر باشد.

حل. اولاً: باید f در $x=-۲$ پیوسته باشد.

$$f(-۲)=-۶+۵=۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-۶+۵=-۱ \\ \lim\limits_{x\to-۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-۲^-}(ax^{۲}+bx+۴)=۴a-۲b+۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a-۲b+۴=-۱$$

$$\Rightarrow ۴a-۲b=-۵ \qquad (۱)$$

ثانیاً: باید $f'_+(-۲)=f'_-(-۲)$ باشد.

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to-۲^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^+}\frac{۳x+۵+۱}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^+}\frac{۳(x+۲)}{x+۲}=۳$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^-}\frac{ax^{۲}+bx+۴-(۴a-۲b+۴)}{x+۲}$$

$$=\lim_{x\to-۲^-}\frac{ax^{۲}+bx+۴-۴a+۲b-۴}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^-}\frac{a(x^{۲}-۴)+b(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\lim_{x\to-۲^-}[a(x-۲)+b]=-۴a+b$$

$$f'_+(-۲)=f'_-(-۲) \Rightarrow ۳=-۴a+b \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} ۴a-۲b=-۵ \\ -۴a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow -b=-۲ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \\ a=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

(۱۴) اگر تابع g در $x=a$ پیوسته باشد و $f(x)=(x-a)g(x)$، $f'(a)$ را حساب کنید.

حل. چون g در $x=a$ پیوسته است پس داریم:

$$\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-(a-a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

۳-۱-۱۷ تمرین. (۱) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

۱) $f(x)=3x+1$ ۲) $f(x)=\sqrt{3x+4}$

۳) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ۴) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

(۲) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

۱) $f(x)=5x^2+x\ ,\ (x=1)$

۲) $f(x)=\sqrt{x^2+5}\ ,\ (x=2)$

۳) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}\ ,\ (x=1)$

۴) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ ,\ (x=-1)$

(۳) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید $(x=a)$ ثانیاً $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۱) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -4 \\ -x-6 & x>-4 \end{cases}\ ,\ x=a=-4$

۲) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<2 \\ \sqrt{x-2} & x\ge 2 \end{cases}\ ,\ a=2$

(۳
$$f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۴ & x<۱ \\ x-۲ & x\geq ۱ \end{cases} \quad , \quad a=۱$$

(۴) اولاً: ثابت کنید تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ پیوسته بوده ولی مشتق‌پذیر نیست. ثانیاً: نشان دهید که به ازای هر $x\neq ۰$، داریم $f'(x)=\frac{|x|}{x}$.

(۵) a و b را طوری پیدا کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق‌پذیر باشد.

(۱
$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۱ \\ ax+b & x\geq ۱ \end{cases} \quad , \quad x=۱$$

(۲
$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+۳ & x<۳ \\ bx+۶ & x\geq ۳ \end{cases} \quad , \quad x=۳$$

(۶) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f را در $x=۲$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^۲-۳ & x\leq ۲ \\ ۸x-۱۱ & x>۲ \end{cases}$$

(۷) در چه نقطه‌ای از منحنی $y=x^۳-۳x+۵$، مماس بر منحنی موازی خط $y=-۲x$ است؟

(۸) در چه نقطه‌ای از منحنی $y=x^۳-۳x+۵$، خط مماس عمود بر خط $y=-\frac{x}{۹}$ است.

(۹) معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt[۳]{x-۲}$ را در نقطه $A(۲,۰)$ بیابید.

۳-۱-۱۸ تمرین. (۱) مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

(۱
$$f(x)=|x^۲-۱| \quad , \quad (x_۰=۱)$$

(۲
$$f(x)=۴x+۱+|x-۲| \quad , \quad (x_۰=۲)$$

۳) $f(x)=\sqrt{x^{۳}+x^{۴}}\quad,\quad (x_{\circ}=\circ)$

۴) $f(x)=\sqrt{(x-۱)^{۲}(x+۲)}\quad,\quad (x_{\circ}=۱)$

۵) $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x<۱\\ ۴x-۱ & x\geq ۱\end{cases}\quad,\quad (x_{\circ}=۱)$

۶) $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}\quad,\quad (x_{\circ}=۱)$

(۲) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۱+x} & x>\circ\\ \dfrac{۱+x}{۱-x} & x\leq\circ\end{cases}$. ثابت کنید f در نقطه $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست.

(۳) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۱\\ x^{۲}+۱ & x<۱\end{cases}$. ثابت کنید f در نقطه $x=۱$ مشتق‌پذیر است و $f'(۱)$ را حساب کنید.

(۴) فرض کنید $x\neq\circ$ ، $f(x)=(-۱)^{[x]}\dfrac{x-۱}{x}$. آیا f در نقطه $x=\circ$ مشتق‌پذیر است؟

(۵) دربارهٔ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x[x]\ ,\ x\in R$ بحث کنید.

(۶) فرض کنید تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد و $f(a)\neq\circ$. ثابت کنید تابع $g(x)=|x-a|f(x)$ در نقطه a مشتق‌پذیر نیست.

(۷) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{|x|} & |x|\geq ۱\\ ax^{۲}+b & |x|<۱\end{cases}$ در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد.

(۸) فرض کنید $f(x)=x+(x-۱)\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x}{x+۱}}$ ، $f'(۱)$ را حساب کنید.

(۹) فرض کنید $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-1001)$، $f'(0)$ را حساب کنید.

(۱۰) اگر $f(x)=[x]\sin x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ را حساب کنید.

(۱۱) اگر برای $|x|<1$، $x\le f(x)\le x+x^2$، مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

(۱۲) مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x)=x|x|$ را در صفر به دست آورید.

۳-۱-۱۹ تعریف. تابع f روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

الف) f روی (a,b)، یعنی در تمام نقاط این فاصله، مشتق داشته باشد.

ب) $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته باشند.

۳-۱-۲۰ مثال. ۱) کدام‌یک از توابع زیر روی $[0,1]$ مشتق دارند:

الف) $f(x)=x^2$ ب) $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$

حل. الف) f روی $[0,1]$ مشتق دارد زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$x\in(0,1)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\Rightarrow f'(x)$$

ب)
$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

پس f در $x=0$ پیوسته نیست. پس f' در $x=0$ تعریف نشده است. برای تمام مقادیر $0<x<1$، $f(x)=0$، و در نتیجه $f'(x)=0$ است. و نیز $f'_-(1)=0$ است، زیرا داریم:

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0}{h}=0$$

۳-۱-۲۱ تذکر. از این پس:

الف) در تعریف مشتق $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، h را با نماد Δx نمایش می‌دهیم:

$$\Delta x = h$$

ب) تفاضل $f(x+h)-f(x)$ را با نماد Δf نشان می‌دهیم:

$$\Delta f = f(x+h)-f(x)$$

بنابراین داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

۳-۱-۲۲ تعریف. یک چندجمله‌ای درجهٔ nام تابعی است به صورت زیر:

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$$

که در آن n عددی است صحیح و غیرمنفی، و a_0 و a_1 و ... و a_n $(a_n\neq 0)$ که ضرایب f نامیده می‌شوند، اعداد حقیقی هستند. اگر $n=0$ باشد، x^0 را برابر ۱ تعریف می‌کنیم $(x^0=1)$، و در نتیجه $f(x)=0$ خواهد شد.

۳-۱-۲۳ قضیه. الف) اگر c عدد ثابتی باشد و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $f(x)=c$، آنگاه $f'(x)=0$ یعنی مشتق تابع ثابت صفر است.

ب) اگر $f(x)=x$، آنگاه $f'(x)=1$ است.

ج) اگر c مقداری ثابت، و f(x) مشتق داشته باشد، آنگاه:

$$\big(cf(x)\big)'=cf'(x)$$

اثبات. الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

یعنی: مشتق تابع ثابت، صفر است.

ب)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

ج) تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=cf(x)$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

یعنی: مشتق حاصلضرب یک عدد ثابت در یک تابع، برابر است با حاصلضرب آن عدد ثابت در مشتق تابع، به شرط آنکه مشتق تابع موجود باشد.

۳-۱-۲۴ قضیه. اگر $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، $g(x)=xf(x)$ نیز مشتق‌پذیر خواهد بود و داریم:

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

اثبات. طبق تعریف مشتق داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{xf(x+h)+f(x+h)-xf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x+h)$$

$$=x\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x+h)=xf'(x)+f(x)$$

۳-۱-۲۵ قضیه. برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

اثبات. این رابطه را به وسیله استقراء ریاضی روی n ثابت می‌کنیم، به ازای $n=1$ داریم:

$$(x)'=(1)x^{1-1}=x^0=1$$

زیرا برحسب تعریف، وقتی که $x\neq 0$ باشد، $x^0=1$ است. حال فرض کنیم که رابطه به ازای $n=k$ برقرار باشد. یعنی:

$$(x^k)'=kx^{k-1}\quad \text{فرض استقراء}$$

در این صورت، باید نشان دهیم که رابطه برای $n=k+1$ نیز برقرار است یعنی:

$$(x^{k+1})'=(k+1)x^k$$

با استفاده از قضیه ۳-۱-۲۵ داریم:

$$(x^{k+1})'=(x\cdot x^k)'=x^k+x(x^k)'=x^k+x(kx^{k-1})=x^k+kx^k=(k+1)x^k$$

بنابراین، رابطه $(x^n)' = nx^{n-1}$ برای تمام مقادیر صحیح و مثبت n برقرار است.

اثبات دوم:

فرض کنیم $f(x) = x^n$، آنگاه داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

چون n یک عدد صحیح مثبت است، می‌توانیم عبارت $(x+h)^n - x^n$ در طرف راست را به کمک $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ بسط داد. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right]$$

$$= \underbrace{(x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + \cdots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-2}}_{\text{n جمله}}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

۳-۱-۲۶ قضیه. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f(x) + g(x)$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

اثبات. فرض کنیم: $h(x) = f(x) + g(x)$

بنا به تعریف مشتق داریم:

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

یعنی: مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق‌های آن دو تابع، مشروط بر آنکه این مشتق‌ها وجود داشته باشند.

۳-۱-۲۷ تمرین. با استقراء ریاضی و قضیه ۳-۱-۲۶ رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$[f_1(x) + \cdots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$$

۳-۱-۲۸ قضیه. مشتق چندجمله‌ای درجهٔ nام $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$، برابر است با:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$$

اثبات. بنا به ۳-۱-۲۷ داریم:

$$f'(x) = (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)'$$

$$f'(x) = a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \cdots + a_1 (x)' + 0$$

$$f'(x) = a_n (n x^{n-1}) + a_{n-1} \left[(n-1) x^{n-2}\right] + \cdots + a_1 (1)$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

۳-۱-۲۹ قضیه. اگر $f(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $f(x)g(x)$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=\big(f(x)g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

اثبات. تابع $h(x)$ را به صورت $h(x)=f(x)g(x)$ تعریف می‌کنیم و با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+[f(x+h)-f(x)]g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x)$$

چون f در x مشتق‌پذیر است، پس f در x پیوسته است و داریم $\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$ و در نتیجه داریم:

$$h'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

قضیه فوق بدین معنی است:

مشتق حاصلضرب دو تابع برابر است با حاصلضرب تابع اول در مشتق تابع دوم به اضافه حاصلضرب تابع دوم در مشتق تابع اول، مشروط بر آنکه مشتق‌ها وجود داشته باشد.

۳-۱-۳۰ مثال. به استقراء ثابت کنید:

$$\left(f^n(x)\right)' = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

حل. به ازای $n=1$ این رابطه عبارت است از.

$$\left(f(x)\right)' = f^{0}(x) f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x)$$

زیرا $f^{0}(x)=1$ است، حال فرض می‌کنیم که این رابطه به ازای $n=k$ برقرار باشد.

$$\left(f^k(x)\right)' = k f^{k-1}(x) f'(x) \qquad \text{(فرض استقراء)}$$

ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

$$\left[f^{k+1}(x)\right]' = (k+1) f^k(x) f'(x) \qquad \text{(حکم استقراء)}$$

$$\left[f^{k+1}(x)\right]' = \left[f^k(x)\cdot f(x)\right]' = \left[f^k(x)\right]' f(x) + f^k(x) f'(x)$$

$$= k f^{k-1}(x) f'(x) f(x) + f^k(x) f'(x)$$

$$= k f^k(x) f'(x) + f^k(x) f'(x) = (k+1) f^k(x) f'(x)$$

۳-۱-۳۱ قضیه. اگر $f(x)$ و $g(x)\neq 0$ مشتق‌پذیر باشند، $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

اثبات. تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x)\neq 0$$

با استفاده از تعریف مشتق، داریم:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h}$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{g(x)g(x+h)h}$$

و $f(x)g(x)$ را به صورت کسر، اضافه و کم می‌کنیم. بنابراین:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x)-f(x)g(x)]+[f(x)g(x)-g(x+h)f(x)]}{hg(x)g(x+h)}$$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-[g(x+h)-g(x)]f(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x)-f(x)\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x)-\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]f(x)}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)g(x+h)}$$

چون g در x مشتق‌پذیر است پس $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$ و:

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)\cdot g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یعنی: مشتق خارج قسمت دو تابع برابر است با مشتق صورت در مخرج منهای مشتق مخرج در صورت تقسیم بر مخرج به توان ۲.

۳-۱-۳۲ مثال. (۱) اگر $f(x)=x^{-n}$، n عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

حل. می‌دانیم:
$$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$$

$$f'(x)=\frac{(1)'x^{n}-(x^{n})'(1)}{(x^{n})^{2}}=\frac{0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-(2n)}$$

$$=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}$$

(۲) مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $$y=5x^{4}-3x^{3}+7x^{2}-4x+1$$

حل. $$y'=20x^{3}-9x^{2}+14x-4$$

۲) $$y=x^{3}+7x^{2}-5x+4$$

حل. $$y'=3x^{2}+14x-5$$

۳) $$y=(x^{2}+5)(x^{6}-3x+1)$$

حل. $$y'=(2x)(x^{6}-3x+1)+(6x^{5}-3)(x^{2}+5)$$

۴) $$y=(x^{2}+1)(x^{3}+3)$$

حل. $$y'=(2x)(x^{3}+3)+(3x^{2})(2x^{2}+1)$$

۵) $$y=(x^{3}-2x+1)^{5}$$

حل. $$y'=5(3x^{2}-2)(x^{3}-2x+1)^{4}$$

۶) $$y=(x^{2}+x)^{3}(2x^{3}+x+1)$$

حل.

$$y'=3(2x+1)(x^{2}+x)^{2}(2x^{3}+x+1)^{4}+4(6x^{2}+1)(2x^{3}+x+1)^{3}(x^{2}+x)^{3}$$

۷) $$y=\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}$$

حل:

$$y' = \frac{(2x)(x^2-1)-(2x)(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

۸) $$y = \frac{5x^3+4x^2+1}{6x^2+2x}$$

حل:

$$y' = \frac{(15x^2+8x)(6x^2+2x)-(12x+2)(5x^3+4x^2+1)}{(6x^2+2x)^2}$$

۹) $$y = x^2+\frac{1}{x^2}$$

حل:

$$y = x^2+x^{-2} \Rightarrow y' = 2x-2x^{-3} = 2x-\frac{2}{x^3}$$

۱۰) $$y = \frac{1}{(x^2-1)^5}$$

حل:

$$y = (x^2-1)^{-5} \Rightarrow y' = -5(2x)(x^2-1)^{-6} = \frac{-10x}{(x^2-1)^6}$$

۱۱) $$y = \left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^4$$

حل:

$$y' = 4\left[\frac{2(x+7)-(1)(2x-1)}{(x+7)^2}\right]\left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^3$$

$$= 4\left(\frac{2x+14-2x+1}{(x+7)^2}\right)\frac{(2x-1)^3}{(x+7)^3} \Rightarrow y' = \frac{60(2x-1)^3}{(x+7)^5}$$

۱۲) $$y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

حل.

$$y=\frac{x^3-2x^2-x^2+2x}{x^4}=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}=x^{-4}(x^3-3x^2+2x)$$

$$=x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}$$

$$y'=-1x^{-2}+6x^{-3}-6x^{-4}\ \Rightarrow\ y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

۳-۲ مشتق ترکیب توابع و تابع ضمنی

۳-۲-۱ مثال. ۱) تابع $y=\sqrt{2+x^2}$ را به صورت چند تابع ساده‌تر بنویسید.

حل. معمولاً یک تابع را می‌توان به گونه‌های مختلف به صورت ترکیب چند تابع دیگر نوشت.

در اینجا y را به دو فرم به صورت ترکیب چند تابع ساده‌تر می‌نویسیم.

منظور از توابع ساده توابعی است مانند x^r و چندجمله‌ای‌ها، که مشتق آنها را به آسانی می‌توان محاسبه کرد.

الف) اگر $g(x)=2+x^2$ و $f(u)=\sqrt{u}$ فرض شوند، داریم:

$$y=f[g(x)]=f(2+x^2)=\sqrt{2+x^2}$$

ب) اگر داشته باشیم: $f(u)=\sqrt{u}$

$$g(v)=2+v^2$$

$$h(x)=x^2$$

می‌توان نوشت:

$$y=f[g(h(x))]$$

۲) هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب چند تابع ساده‌تر بنویسید:

الف)
$$y = \frac{(1+x)^{10}}{x^{10}}$$

حل.
$$y = \left(\frac{1+x}{x}\right)^{10} = (1+\frac{1}{x})^{10}$$

اگر $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ باشد، $f(u) = u^{10}$.

$$y = f[g(x)]$$

ب)
$$y = (1 + x^2 - x)^4$$

حل. اگر $g(x) = 1 + x^2 - x$ و $f(u) = u^4$ باشد داریم:

$$y = f[g(x)]$$

۳-۲-۲ مثال. تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. چون $f'(x) = 3x^2$ است، داریم:

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \Delta f = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

پس از تقسیم طرفین این رابطه بر Δx، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

اگر تفاضل $3x^2$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را با هم ε نشان دهیم، داریم:

$$\varepsilon = 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

و:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$$

و:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ۳x^{۲} + \varepsilon$$

و یا:

$$\Delta y = ۳x^{۲}\,\Delta x + \varepsilon\Delta x \quad , \quad \lim_{\Delta x \to ۰} \varepsilon = ۰$$

۳-۲-۳ مثال. فرض کنید $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که با انتخاب مناسب ε می‌توان Δy را به شکل زیر نوشت:،

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \quad , \quad \lim_{\Delta x \to ۰} \varepsilon = ۰$$

حل. چون $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ است، داریم:

$$\lim_{\Delta x \to ۰}\left(f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = ۰$$

اگر $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ باشد، داریم $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \varepsilon = ۰$ و:

$$\Delta y = f'(x) + \Delta x + \varepsilon\Delta x$$

۴-۲-۳ قضیه. (قاعدهٔ زنجیری): اگر تابع g در نقطهٔ x و f در نقطه $g(x)$ مشتق داشته باشد، آنگاه تابع $fog(x) = f[g(x)]$ نیز در نقطهٔ x مشتق دارد و مشتق آن برابر است با:

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

اثبات. فرض کنید $u = g(x)$ و $y = f(x)$ مشتق داشته باشند و:

$$y = fog(x) = f\big(g(x)\big)$$

بنا به ۳-۲-۳ می‌توان نوشت:

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \varepsilon_1 \Delta u \quad , \quad \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon_1 = 0$$

$$\Delta u = g'(x)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

اگر به‌جای Δu در رابطه اول، مقدار آن را برحسب Δx قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = f'(u)g'(x)\Delta x + f'(u)\varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta u$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x) + f'(u)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

اگر $\Delta x \to 0$، آنگاه $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ و چون g مشتق دارد، پس $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$، به علاوه $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

در نتیجه داریم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(u)g'(x) + f'(u)\varepsilon_2 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\varepsilon_1 \right]$$

$$= f'(u)g'(x) + f'(u) \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1$$

پس:

$$y' = f'(u)g'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

و به عبارت دیگر:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

۳-۲-۵ تذکر. در ۳-۲-۴ به‌طور ضمنی فرض شده است که یک همسایگی $\Delta x = 0$ وجود دارد به طوری که روی آن $\Delta u \neq 0$ است؛ زیرا اگر $\Delta u = 0$ باشد، مثلاً a تابعی ثابت باشد، ε_1 را نمی‌توان با رابطهٔ $\varepsilon_1 = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u)$ تعریف کرد. برای احتراز از این

فرض، ε_1 را وقتی $\Delta u = 0$ است، برابر صفر تعریف می‌کنیم. با این تعریف، حتی موقعی که Δu در هر همسایگی $\Delta x = 0$ برابر صفر باشد، در اثبات قضیه اشکالی پیش نمی‌آید.

قضیه زنجیره‌ای را به صورت زیر نیز می‌توان ثابت نمود.

۳-۲-۶ قضیه زنجیره ۱. فرض کنید تابع g در x_0 و تابع f در $g(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت تابع fog در x_0 مشتق‌پذیر است و:

$$(fog)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

اثبات. قرار دهید $u = g(x)$ و $u_0 = g(x_0)$ آنگاه:

$$(fog)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{fog(x) - fog(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \lim_{u\to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} \quad , \quad (u \neq u_0)$$

اما تابع g در x_0 پیوسته است، پس $\lim_{x\to x_0} u = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = u_0$ و لذا هرگاه $x \to x_0$، آنگاه $u \to u_0$ در نتیجه:

$$(fog)'(x_0) = \lim_{u\to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \times \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0)g'(x_0)$$

$$= f'(g(x_0))g'(x_0)$$

۳-۲-۷ مثال. ۱) به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای رابطهٔ زیر را اثبات کنید.

اگر $f'(x)$ وجود داشته باشد و n عددی صحیح باشد:

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

حل. فرض کنید $h(t) = t^{n}$ و $g(x) = f(x)$ بوده، بنابراین:

$$[f(x)]^{n} = h(g(x))$$

$$h'(t) = n\,t^{n-۱}$$

$$\left([f(x)]^{n}\right)' = h'(g(x))g'(x) = n(f(x))^{n-۱} f'(x)$$

۲) مشتق هر یک از توابع زیر را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای تعیین کنید.

۱) $$y = f(x) = (x^{۳} - ۴x^{۲} + ۲)^{۷}$$

حل. فرض کنید:

$$u = g(x) = x^{۳} + ۴x^{۲} + ۲ \;\Rightarrow\; g'(x) = ۳x^{۲} + ۸x$$

$$h(x) = x^{۷} \;\Rightarrow\; h(u) = u^{۷} \;\Rightarrow\; h'(u) = ۷u^{۶}$$

$$y = hog(x) = h[g(x)] \;\Rightarrow\; y' = h'(g(x))g'(x)$$

$$y' = ۷(x^{۳} + ۴x^{۲} + ۲)^{۶}(۳x^{۲} + ۸x)$$

۲) $$y = (۵x^{۴} + ۷x^{۳})^{۴}$$

حل. فرض کنید $u = g(x) = ۵x^{۴} + ۷x^{۳}$ و $f(u) = u^{۴}$.

$$u = g(x) \;\Rightarrow\; g'(x) = ۲۰x^{۳} + ۲۱x^{۲}$$

$$f(u) = u^{۴} \;\Rightarrow\; f'(u) = ۴u^{۳}$$

$$y = fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x) = ۴(۵x^{۴} + ۷x^{۳})^{۳}(۲۰x^{۳} + ۲۱x^{۲})$$

۳-۲-۸ نکته. اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد یعنی $y = f(u)$ و $u = g(x)$. آنگاه بنا به قاعده زنجیره‌ای داریم که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

۳-۲-۹ نتیجه. هرگاه $n \in N$ و $y = u^n$ و u تابعی از x، آنگاه y نهایتاً تابعی از x است و:

$$y' = n u' u^{n-1}$$

و به عبارت دیگر:

$$\frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

۳-۲-۱۰ مثال. مشتق هر یک را تعیین کنید.

۱) $$y = (2x^8 + 3x^2)^5$$

حل. $$y' = 5(16x^7 + 6x)(2x^8 + 3x^2)^4$$

۲) $$y = (4x^3 + x + 1)^{11}$$

حل. $$y' = 11(4x^3 + x + 1)^{10}(12x^2 + 1)$$

۳) $$y' = y = (3x^4 + x)^5 (2x^2 + x^3 + 1)^4$$

حل. با استفاده از مشتق حاصلضرب داریم:

$$y' = 5(3x^4 + x)^4(12x^3 + 1)(2x^2 + x^3 + 1)^4 + 4(2x^2 + x^3 + 1)^3(4x + 3x^2)(3x^4 + x)^5$$

۴) $$y = \left(\frac{3x^2 + 1}{x^3 + 2}\right)^4$$

حل. فرض کنید:

$$u = g(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + 2}$$

$$g'(x) = u' = \frac{6x(x^3 + 2) - 3x^2(3x^2 + 1)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{18x^4 + 12x - 9x^4 - 3x^2}{(x^3 + 2)^2}$$

$$= \frac{9x^4 - 3x^2 + 12x}{(x^3 + 2)^2}$$

$$f(u)=u^4 \Rightarrow f'(u)=4u^3$$

$$y=fog(x)=f(g(x))=f'(g(x))g'(x)=4\left(\frac{3x^2+1}{x^3+2}\right)^3\left(\frac{9x^4-3x^2+12x}{(x^3+2)^2}\right)$$

۵) اگر $f(x)=x^3$ و $g(x)=f(x^2)$، مطلوبست:

الف) $f'(x^2)$ ب) $g'(x)$

حل. الف) $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(x^2)=3(x^2)^2=3x^4$

ب) $g(x)=f(x^2)=(x^2)^3=x^6 \Rightarrow g'(x)=6x^5$

۶) اگر $f(u)=u^2+5u+5$ و $g(x)=(\frac{x+1}{x-1})$ باشد مشتق تابع fog را به دو روش تعیین کنید:

الف) ابتدا $(fog)(x)$ را تعیین کرده و سپس $(fog)'(x)$ را محاسبه کنید.

ب) از قاعده زنجیره‌ای مشتق استفاده کنید.

حل. الف)

$$y=fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2+5\left(\frac{x+2}{x-2}\right)+5$$

$$=\frac{x^2+4x+4+5(x^2-4)+5(x-2)^2}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x+4+5x^2-20+5x^2-20x+20}{x^2-4x+4}=\frac{11x^2-16x+4}{x^2-4x+4}$$

$$y'=(fog)'(x)=\frac{(22x-16)(x^2-4x+4)-(2x-4)(11x^2-16x+4)}{(x^2-4x+4)^2}$$

$$=\frac{(x-2)^2(22x-16)-2(x-2)(11x^2-16x+4)}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{۲۲x^۲-۱۶x-۴۴x+۳۲-۲۲x^۲+۳۲x-۸}{(x-۲)^۳}=\frac{-۲۸x+۲۴}{(x-۲)^۳}$$

ب) فرض کنید $y=f(u)$ و $u=g(x)$، بنا به تعریف:

$$\frac{dy}{du}=۲u+۵=۲\left(\frac{x+۲}{x-۲}\right)+۵=\frac{۲x+۴+۵x-۱۰}{x-۲}=\frac{۷x-۶}{x-۲}$$

$$\frac{du}{dx}=g'(x)=\frac{۱(x-۲)-(x+۲)}{(x-۲)^۲}=\frac{x-۲-x-۲}{(x-۲)^۲}=\frac{-۴}{(x-۲)^۲}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{۷x-۶}{x-۲}\times\frac{-۴}{(x-۲)^۲}=\frac{-۲۸x+۲۴}{(x-۲)^۳}$$

۳-۲-۱۱ مشتق‌گیری تابع ضمنی. توابعی که با آنها سروکار داریم به دو صورت ممکن است بیان شوند. اگر تابع f به صورت $y=f(x)$ بیان شود، تابع f را «تابع صریح» گوئیم مانند:

$$y=f(x)=۲x^۷-x^۳+۲x+۱$$

و اگر تابع f به صورت معادله‌ای برحسب x و y مشخص شده باشد، تابع f را تابع ضمنی گوئیم مانند:

$$x^۳y^۲+۲yx+۱=۰ \quad , \quad x^۲+y^۲-۲x+۲y=۱$$

در توابع ضمنی $f(x,y)=۰$ بوده و ممکن است نتوانیم معادله را حل کنیم و y را برحسب x به دست آوریم.

و نکته دیگر اینکه، ممکن است معادله چند جواب به صورت $y=f(x)$ داشته باشد. از نکات جالبی که در مورد تابع ضمنی می‌توان گفت آن است که اگر y تابع مشتق‌پذیری باشد بدون حل معادله و محاسبه y برحسب x می‌توان مشتق y را تعیین نمود. به شرطی که بتوان ثابت کرد که به ازای هر x ثابت، این معادله در یک همسایگی از آن نسبت به y حل‌پذیر است، آنگاه بدون حل معادله می‌توان مشتق y را نسبت به x محاسبه کرد.

۳-۲-۱۲ مثال. اگر معادله $x^2 + y^2 - 4 = 0$ را برای y حل کنیم می‌بینیم که:

$$x^2 + y^2 = +4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

دو تابع $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ در رابطه فوق صدق می‌کنند و معادله $f(x)y = 0$ به ازای هر $x \in [-2,2]$، برقرار است:

$$D_{f_1} = D_{f_2} = [-2,2]$$

در این حالت برای مشتق‌گیری از f از فرآیند مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم، به عنوان مثال در اینجا داریم:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

با مشتق‌گیری نسبت به x و بنا بر قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$2x + 2y'y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

۳-۲-۱۳ مثال. در هر یک از توابع زیر، مشتق y را برحسب x محاسبه کنید.

۱) $$x^2y + xy^2 + y^4 - 7x + y = 0$$

حل. $$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' + 4y'y^3 - 7 + y' = 0$$

$$(x^2 + 2xy + 4y^3 + 1)y' = -2xy - y^2 + 7$$

$$y' = \frac{-2xy - y^2 + 7}{x^2 + 2xy + 4y^3 + 1} = \frac{-(2xy + y^2 - 7)}{x^2 + 2xy + 4y^3 + 1}$$

۲) $$x^2 + xy + y^5 = 3$$

حل. $$2x + y + xy' + 5y^4y' = 0$$

$$(x + 5y^4)y' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x + y}{x + 5y^4} = \frac{-(2x - y)}{x + 5y^4}$$

۳) $$x^2+xy+y^2-3y=10$$

حل.

$$2x+y+xy'+2yy'-3y'=0 \Rightarrow (x+2y-3)y'=-2x-y$$

$$y'=\frac{-(2x+y)}{x+2y-3}$$

۳-۲-۱۴ تذکر. اثبات درستی روش مشتق‌گیری ضمنی بدون استفاده از مشتقات جزئی، کار راحتی نیست. منظور از مثالهایی که آوردیم، نشان دادن این مطلب بود که مشتق‌گیری ضمنی اشکالی ندارد، اما هر جا که تقسیم بر صفر ضرورت پیدا کند باید از این عمل خودداری کنیم.

۳-۲-۱۵ قضیه. اگر $r\in Q$، $f(x)=x^r$، آنگاه $f'(x)=7x^{r-1}$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $r\in Z^-$ پس $-r\in N$. بنابراین با استفاده از قضیه داریم:

$$f(x)=x^r=\frac{1}{x^{-r}} \Rightarrow f'(x)=(\frac{1}{x^{-r}})'=\frac{-(-r)x^{-r-1}}{(x^{-r})^2}=\frac{rx^{-r-1}}{x^{-2r}}$$

$$f'(x)=7x^{-r-1+2r}=rx^{r-1}$$

حال اگر $r\in Q$ و $r=\frac{m}{n}$ باشد که در آن m و n اعداد صحیح و $n\neq 0$:

$$y=f(x)=x^r \Rightarrow y=x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y^n=x^m$$

با مشتق‌گیری از طرفین و با توجه به اینکه y تابعی از x است داریم:

$$ny'y^{n-1}=mx^{m-1} \Rightarrow y'=\frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

در نتیجه داریم:

$$f'(x) = r x^{r-1}$$

۳-۳ مشتق توابع مثلثاتی

۳-۳-۱ یادآوری روابط و نسبتهای مثلثاتی.

الف) روابط اصلی

۱) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ۲) $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

۳) $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$ ۴) $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$

۵) $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\sin a}$

ب) بسط مجموع و تفاضل دو کمان

۱) $$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

۲) $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

۳) $$\begin{cases} \operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\ \operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \end{cases}$$

۴) $$\begin{cases} \operatorname{cotg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a} \\ \operatorname{cotg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a} \end{cases},$$

ج) بسط کمان ۲a و ۳a

۱)
$$\begin{cases} \sin ۲a = ۲\sin a \cos a \\ \cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a = ۲\cos^۲ a - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲ a \\ \operatorname{tg} ۲a = \dfrac{۲\operatorname{tg} a}{۱ - \operatorname{tg}^۲ a} \\ \operatorname{cotg} ۲a = \dfrac{\operatorname{cotg}^۲ a - ۱}{۲\operatorname{cotg} a} \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} \sin ۳a = ۳\sin a - ۴\sin^۳ a \\ \cos ۳a = ۴\cos^۳ a - ۳\cos a \\ \operatorname{tg} ۳a = \dfrac{۳\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^۳ a}{۱ - ۳\operatorname{tg}^۲ a} \end{cases}$$

د) تبدیل مجموعه و تفاضل به حاصلضرب

۱)
$$\begin{cases} \sin a + \sin b = ۲\sin \dfrac{a+b}{۲} \cos \dfrac{a-b}{۲} \\ \sin a - \sin b = ۲\cos \dfrac{a+b}{۲} \cos \dfrac{a-b}{۲} \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} \cos a + \cos b = ۲\cos \dfrac{a+b}{۲} \cos \dfrac{a-b}{۲} \\ \cos a - \cos b = -۲\sin \dfrac{a+b}{۲} \sin \dfrac{a-b}{۲} \end{cases}$$

۳)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{cases}$$

$$
\text{(۴)} \quad \begin{cases} \cot g\, a + \cot g\, b = \dfrac{\sin(b+a)}{\sin a \sin b} \\ \cot g\, a - \cot g\, b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b} \end{cases}
$$

هـ) تبدیل حاصلضرب به مجموع و تفاضل

$$\sin a \cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

و) برحسب تانژانت نصف قوس

$$
\begin{cases} \sin a = \dfrac{۲\,tg\dfrac{a}{۲}}{۱+tg^{۲}\dfrac{a}{۲}} \\ \cos a = \dfrac{۱-tg^{۲}\dfrac{a}{۲}}{۱+tg^{۲}\dfrac{a}{۲}} \\ tg\, a = \dfrac{۲\,tg\dfrac{a}{۲}}{۱-tg^{۲}\dfrac{a}{۲}} \end{cases}
$$

۳-۳-۲ قضیه. توابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در هر نقطه مشتق‌پذیر و برای هر $x \in R$ داریم:

$$f'(x) = \cos x \quad , \quad f'(x) = -\sin x$$

اثبات. با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\times \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos(x)\times 1 = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0} \sin(x+\frac{h}{2})\times \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin(x)\times 1 = -\sin x$$

۳-۳-۳ نتیجه. الف) اگر $y = \sin u$ و $u = g(x)$ باشد، آنگاه $y' = u'\cos u$.

ب) اگر $y = \cos u$ و $u = g(x)$ باشد، آنگاه $y' = -u'\sin u$.

اثبات. الف) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \Rightarrow y' = u'\cos u$$

ب)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du} \Rightarrow y'=-u'\sin u$$

۳-۳-۴ قضیه. الف) تابع $f(x)=\operatorname{tg}x$ در هر نقطه به‌جز در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ مشتق‌پذیر و $f'(x)=۱+\operatorname{tg}^۲x$.

ب) تابع $f(x)=\operatorname{cotg}x$ در هر نقطه به‌جز در نقاط $x=k\pi$ مشتق‌پذیر و $f'(x)=-(۱+\operatorname{cotg}^۲x)$.

اثبات. الف) چون $f(x)=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{\cos^۲x+\sin^۲x}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\cos^۲x}=۱+\operatorname{tg}^۲x$$

ب) چون $f(x)=\operatorname{cotg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{-\sin^۲x-\cos^۲x}{\sin^۲x}=\frac{-۱}{\sin^۲x}=-(۱+\operatorname{cotg}^۲x)$$

۳-۳-۵ نتیجه. الف) اگر $y=\operatorname{tg}u$ و $u=g(x)$ باشد آنگاه $y'=u'(۱+\operatorname{tg}^۲u)$.

ب) اگر $y=\operatorname{cotg}u$ و $u=g(x)$ باشد آنگاه $y'=-u'(۱+\operatorname{cotg}^۲u)$.

اثبات. الف) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \Rightarrow y'=(۱+\operatorname{tg}^۲u)u'=u'(۱+\operatorname{tg}^۲u)$$

ب)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-(۱+\operatorname{cotg}^۲u)u'=-u'(۱+\operatorname{cotg}^۲u)$$

۳-۳-۶ قضیه. الف) اگر $f(x)=\sec x$، آنگاه $f'(x)=\sec x\,\mathrm{tg}\,x$.

ب) اگر $f(x)=\mathrm{cosec}\,x$، آنگاه $f'(x)=-\mathrm{cosec}\,x\,\mathrm{cotg}\,x$.

اثبات. الف) چون $f(x)=\dfrac{۱}{\cos x}$ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{۰-(-\sin x)(۱)}{\cos^{۲} x}=\frac{\sin x}{\cos^{۲} x}=\frac{۱}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\,\mathrm{tg}\,x$$

ب) چون $f(x)=\dfrac{۱}{\sin x}$ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{۰-(\cos x)(۱)}{\sin^{۲} x}=-\frac{۱}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\mathrm{cosec}\,x\cdot\mathrm{cotg}\,x$$

۳-۳-۷ نتیجه. الف) اگر $y=\sec u$ و $u=g(x)$ باشد آنگاه $y'=u'\sec u\,\mathrm{tg}\,u$.

ب) اگر $y=\mathrm{cosec}\,u$ و $u=g(x)$ باشد، آنگاه $y'=-u'\mathrm{cosec}\,u\,\mathrm{cotg}\,u$.

اثبات. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

الف)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dx}=\sec u\,\mathrm{tg}\,u\cdot u' \quad\Rightarrow\quad y'=u'\sec u\,\mathrm{tg}\,u$$

ب)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\mathrm{cosec}\,u\,\mathrm{cotg}\,u\cdot u' \quad\Rightarrow\quad y'=u'\mathrm{cosec}\,u\,\mathrm{cotg}\,u$$

۳-۳-۸ مثال. مشتق هر یک را بنویسید.

۱) $y=۳\sin ۵x+\sin\sqrt{x}+\sin(\sin x)$

حل. $y'=۱۵\cos ۵x+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+\cos x\cos(\sin x)$

۲) $y=\cos ۲x^{۳}+\cos\sqrt[۳]{x}+\cos(\mathrm{tg}\,x)$

حل.

$$y' = -6x^2 \sin 2x^3 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin \sqrt[3]{x} - (1+tg^2 x)\sin(tg\, x)$$

۳) $$y = tg\, 5x^2 + tg\sqrt{x} + 3\, tg(\cos x)$$

حل.

$$y' = 10x(1+tg^2 5x^2) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+tg^2\sqrt{x}) - 3\sin x[1+tg^2(\cos x)]$$

۴) $$y = cotg\, x + 3\, cotg\, x^3 - 5\, cotg(\sin x)$$

حل.

$$y' = -(1+cotg^2 x) - 9x^2(1+cotg^2 x^3) + 5(\cos x)[1+cotg^2(\sin x)]$$

۵) $$y = \sin^3\sqrt{x} + 3\sin^5 x^2 + \sin^4\frac{1}{x}$$

حل.

$$y' = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x} + 15(2x)\cos x^2 \sin^4 x^2 + 4\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}\sin^3\frac{1}{x}$$

۶) $$y = \cos^4\sqrt[3]{x^2} + \cos^3(\sin x) + 3\cos^2 3x^2$$

حل.

$$y' = -4\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\sin\sqrt[3]{x^2}\cos^3\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x \sin(\sin x)\cos^2(\sin x)$$
$$-6(6x^2)\sin 3x^2 \cos 3x^2$$

۷) $$y = tg^3 x^5 + 4\, tg^4\sqrt{x}$$

حل.

$$y' = 3(5x^4)(1+tg^2 x^5)tg^2 x^5 + 16\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+tg^2\sqrt{x})tg^3\sqrt{x}$$

۸) $$y=\sec^2(x^3+2x)$$

حل.

$$y'=2(3x^2+2)\sec(x^3+2x)\,\mathrm{tg}(x^3+2x)\sec(x^3+2x)$$

۹) اگر $x\sin y+y\cos x=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=?$

حل. $$\sin y+x\,y'\cos y+y'\cos x-y\sin x=0$$

$$(x\cos y+\cos x)\,y'=y\sin x-\sin y$$

$$y'=\frac{y\sin x-\sin y}{x\cos x+\cos x}$$

۱۰) $$y=x^3\sin x+\sin x(\cos x-1)$$

حل. $$y=x^3\sin x+\sin x\cos x-\sin x$$

$$y'=3x^2\sin x+x^3\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-\cos x$$

۱۱) $$y=\sqrt{\mathrm{cotg}\,3x}+\sec^2 2x-\mathrm{tg}^2\,3x$$

حل.

$$y'=\frac{-3(1+\mathrm{tg}^2\,3x)}{2\sqrt{\mathrm{cotg}\,3x}}+4\sec 2x\,\mathrm{tg}\,2x\sec 2x-6(1+\mathrm{tg}^2\,3x)\,\mathrm{tg}\,3x$$

۱۲) $$y=\sin^4(x^2+3x+2)^3$$

حل.

$$y'=4\times 3(2x+3)(x^2+3x+2)^2\cos(x^2+3x+2)^3\sin^3(x^2+3x+2)^3$$

۱۳) اگر $y=\mathrm{tg}(x+y) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=y'=?$

حل.
$$y' = y'[۱ + tg^{۲}(x+y)] + [۱ + tg^{۲}(x+y)]$$

$$[۱ - ۱ - tg^{۲}(x+y)]y' = ۱ + tg^{۲}(x+y) \Rightarrow y' = \frac{۱ + tg^{۲}(x+y)}{-tg^{۲}(x+y)}$$

۳-۳-۹ قضیه (مشتق توابع معکوس). هرگاه تابع $y = f(x)$ بر فاصله $[a,b]$ معکوس‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in [a,b]$، $f'(x) \neq ۰$. آنگاه تابع $x = f^{-۱}(y)$ بر فاصله $[f(a), f(b)]$ یا $[f(b), f(a)]$ مشتق‌پذیر است.

$$(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$$

اثبات. چون $f^{-۱}$ معکوس f است پس $f^{-۱}(f(x)) = x$. با مشتق‌گیری نسبت به x و بنا بر قاعده زنجیره‌ای (و با فرض وجود $(f^{-۱})'$) داریم:

$$(f^{-۱})'(f(x))f'(x) = ۱ \Rightarrow (f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$$

۳-۳-۱۰ قضیه (مشتق تابع مثلثاتی معکوس).

الف) $y = \sin^{-۱} x \Rightarrow y' = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \quad , \quad x \in [-۱, ۱]$

ب) $y = \cos^{-۱} x \Rightarrow y' = \dfrac{-۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} \quad , \quad x \in [-۱, ۱]$

ج) $y = tg^{-۱} x \Rightarrow y' = \dfrac{۱}{۱ + x^{۲}} \quad , \quad x \in R$

د) $y = cotg^{-۱} x \Rightarrow y' = \dfrac{-۱}{۱ + x^{۲}} \quad , \quad x \in R$

اثبات. الف) فرض کنید $x \in [-1,1]$.

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y \quad , \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ب) فرض کنید $x \in [-1,1]$.

$$y = \cos^{-1} x \Rightarrow x = \cos y \quad , \quad y \in [0, \pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ج) فرض کنید $x \in R$.

$$y = tg^{-1} x \iff x = tg\, y \quad , \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

د) فرض کنید $x \in R$.

$$y = cotg^{-1} x \iff x = cotg\, y \quad , \quad y \in (0, \pi)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-(1+cotg^2 y)} = \frac{-1}{1+cotg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

۳-۳-۱۱ نتیجه.

الف) $y = \sin^{-1} u = \mathrm{Arcsin}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad u \in [-1,1]$

ب) $y = \cos^{-1} u = \mathrm{Arccos}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad u \in [-1,1]$

ج) $y = tg^{-۱}u = \mathrm{Arctg}\,u \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{u'}{۱+u^{۱}} \quad , \quad u \in R$

د) $y = \cot g^{-۱}u = \mathrm{Arccotg}\,u \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{-u'}{۱+u^{۲}} \quad , \quad u \in R$

۳-۳-۱۲ مثال. مشتق هر یک از توابع را محاسبه کنید.

۱) $$y = \left(\sin^{-۱}(۳x^{۲})\right)^{۴}$$

حل.
$$y' = ۴\left(\frac{۶x}{\sqrt{۱-۹x^{۴}}}\right)\left(\sin^{-۱}(۳x^{۲})\right)^{۳}$$

۲) $$y = tg^{-۱}\frac{۱}{x}$$

حل.
$$y' = \frac{-\frac{۱}{x^{۲}}}{۱+\frac{۱}{x^{۲}}} = \frac{-۱}{۱+x^{۲}}$$

۳) $$y = \cos^{-۱}\sqrt{۱-x^{۲}} \quad , \quad x \in (-۱,۰)$$

حل. با فرض $u = \sqrt{۱-x^{۲}}$ داریم:

$$y = \cos^{-۱}u \;\Rightarrow\; y' = \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} = \frac{-\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{۱-(۱-x^{۲})}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{x^{۲}}} = \frac{x}{|x|\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

و چون $-۱ < x < ۰$ لذا $|x| = -x$ و بنابراین:

$$y' = \frac{x}{-x\sqrt{۱-x^{۲}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

۴) اگر $f(x)=x^5+x$ داریم $f(1)=2$، آنگاه $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

حل.
$$f(1)=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x)=5x^4+1 \Rightarrow f'(1)=5+1=6 \Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{6}$$

۵) فرض کنید f تابعی وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f'(x)=1+\left(f(x)\right)^7$ آنگاه $(f^{-1})'(x)$ را بیابید.

حل. اگر $f(a)=b$. می‌دانیم که:

$$f^{-1}(b)=a \quad , \quad (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

در حالت کلی داریم:

$$(f^{-1})'\left(f(x)\right)=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'\left(f(x)\right)=\frac{1}{1+\left(f(x)\right)^7}$$

با تبدیل $f(x)$ به x داریم که:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^7}$$

۶) تابع به معادله $f(x)=x^2-4x+7$ با دامنه $[2,+\infty]$ مفروض است. $(f^{-1})'(7)$ را بیابید ($7\in D_{f^{-1}}$).

حل. می‌دانیم:

$$A'\left|\begin{matrix}7\\a\end{matrix}\right.\in f^{-1} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}a\\7\end{matrix}\right.\in f$$

پس:

$$f(x)=x^2-4x+7 \quad , \quad x\in[2,+\infty)$$

$$7=x^2-4x+7 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=4$$

$x=۴$ عضو دامنه تابع است. این نقطه $A\left|\begin{matrix} ۴=a \\ ۷=b \end{matrix}\right.$ روی نمودار است. می‌دانیم:

$$(f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{f'(a)} \quad , \quad f(a)=b$$

$$f'(x)=۲x-۴ \Rightarrow f'(۴)=۸-۴=۴$$

در نتیجه:

$$(f^{-۱})'(۷)=\frac{۱}{f'(۴)}=\frac{۱}{۴}$$

۷) هرگاه $g(x)=x^{۲}-۱$ و $f'(x)=\sqrt{۳x+۴}$ و $h(x)=fog(x)$، مطلوبست محاسبه $h'(x)$.

حل. $$g(x)=x^{۲}-۱ \Rightarrow g'(x)=۲x \quad , \quad f'(x)=\sqrt{۳x+۴}$$

$$h(x)=fog(x)=f\big(g(x)\big) \Rightarrow h'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

$$h'(x)=\sqrt{۳g(x)+۴}\,(۲x)=۲x\sqrt{۳(x^{۲}-۱)+۴}$$

$$h'(x)=۲x\sqrt{۳x^{۲}+۱}$$

۸) اگر $h(x)=(fog)(x)$ و $g(x)=\sin^{۲}\frac{\pi}{x}$ و $f'(\frac{۳}{۴})=۲\sqrt{۳}$ مطلوبست $h'(۳)$.

حل. $$g'(x)=۲(\frac{-\pi}{x^{۲}})\cos\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}=-\frac{\pi}{x^{۲}}\sin\frac{۲\pi}{x}$$

$$h'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)=-\frac{\pi}{x^{۲}}\sin\frac{۲\pi}{x}f'(\sin^{۲}\frac{\pi}{x})$$

$$h'(۳)=-\frac{\pi}{۹}\sin\frac{۲\pi}{۳}f'(\sin^{۲}\frac{\pi}{۳})=-\frac{\pi}{۹}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})f'(\frac{۳}{۴})$$

$$h'(۳)=-\frac{\pi}{۹}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۲\sqrt{۳}}{۱}=-\frac{\pi}{۳}$$

۹) اگر $f(x^3+6x)=g(\sin 4x+\sin 2x)$، $f'(0)=5$، آنگاه $g'(0)$ چقدر است؟

حل. از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$(3x^2+6)f'(x^3+6x)=(4\cos 4x+2\cos 2x)g'(\sin 4x+\sin 2x)$$

$$x=0 \Rightarrow 6f'(0)=(4+2)g'(0) \Rightarrow g'(0)=f'(0) \Rightarrow g'(0)=5$$

۱۰) مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ هرگاه:

$$y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots}}}} \quad , \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

حل. طرفین تابع را به توان ۲ می‌رسانیم. داریم:

$$y^2=\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots}}}=\sin x+y$$

$$y^2=\sin x+y$$

حال با مشتق‌گیری ضمنی نسبت به x داریم:

$$2y'y=\cos x+y' \Rightarrow 2yy'-y'=\cos x \Rightarrow (2y-1)y'=\cos x$$

$$y'=\frac{\cos x}{2y-1}$$

۳-۳-۱۳ تعیین ضریب زاویه خط مماس و قائم بر منحنی در نقطه $x=\alpha$ واقع بر منحنی.

الف) از تابع مشتق می‌گیریم.

ب) در مشتق به‌جای x عدد α را قرار می‌دهیم، حاصل ضریب زاویه خط مماس می‌باشد.

مشتق به ازای طول نقطه تماس = $m_{\text{مماس}}$ = ضریب زاویه خط مماس = شیب خط مماس

ج) با استفاده از رابطه‌ی زیر ضریب زاویه (شیب) خط قائم را پیدا می‌کنیم:

$$m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{m_{\text{مماس}}}$$

۳-۳-۱۴ تذکر. اگر تابع ضمنی باشد، به طریق زیر عمل می‌کنیم:

الف) در تابع به‌جای x عدد α قرار داده y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

$$x = \alpha \Rightarrow y = \beta \Rightarrow A(\alpha,\beta)$$ نقطه تماس (یا پای قائم)

ب) از تابع مشتق گرفته به‌جای x و y مختصات نقطه تماس را قرار می‌دهیم، مقدار حاصل ضریب زاویه خط مماس می‌باشد.

$$m_{\text{مماس}} = \text{مشتق به ازای مختصات نقطه تماس}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی زیر ضریب زاویه خط قائم را پیدا می‌کنیم:

$$m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{m_{\text{مماس}}}$$

۳-۳-۱۵ تعیین معادله خط مماس و قائم بر منحنی در نقطه $x = \alpha$ واقع بر آن.

الف) در معادله به‌جای x، عدد α را قرار داده، y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

$$x = \alpha \Rightarrow y = \beta \Rightarrow A(\alpha,\beta)$$

ب) $m_{\text{مماس}}$ و $m_{\text{قائم}}$ را تعیین می‌کنیم.

ج) با استفاده از روابط زیر معادله خط مماس و قائم بر منحنی را می‌نویسیم:

خط مماس $\qquad y - y_A = m_{\text{مماس}}(x - x_A)$

خط قائم $\qquad y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A)$

۳-۳-۱۶ مثال. ۱) در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر نمودار $2xy^3 + 3x^2y - 4x - 1 = 0$، مماس بر منحنی رسم شده است. شیب خط مماس را بیابید.

حل.

$$x = 1 \Rightarrow 2y^3 + 3y - 4 - 1 = 0 \Rightarrow 2y^3 + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1\ ,\ A(1,1)$$

مجموع ضرایب این معادله صفر است پس یک ریشه معادله عدد ۱ است.

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2y^3 + 6xy - 4}{6xy^2 + 3x^2}$$

حال نقطه $A(1,1)$ را در مشتق قرار می‌دهیم، شیب خط مماس به دست می‌آید:

$$m_{\text{مماس}} = m_{\text{م}} = -\frac{2+6-4}{6+3} = -\frac{4}{9}$$

۲) تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + x + 1$ مفروض است، معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} را در نقطه‌ای به طول ٤ واقع بر آن به دست آورید.

حل. $y = 4 \Rightarrow 4 = 2x^3 + x + 1 \Rightarrow x = 1$

$$A\Big|^{1}_{4} \in f \Rightarrow A'\Big|^{4}_{1} \in f^{-1}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 7$$

ضریب زاویه خط مماس بر f^{-1} $\quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$

$$y - y_{A'} = m_{\text{مماس}}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{7}(x-4) \Rightarrow 7y - 7 = x - 4$$

خط مماس بر f^{-1} $\quad 7y = x + 3$

۳) تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + x - 6$ مفروض است. از نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر نمودار تابع معکوس، خطی بر نمودار تابع معکوس مماس رسم می‌کنیم. شیب خط را به دست آورید.

حل. $f(x) = x^3 + x - 6$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 + 2 - 6 = 4 \Rightarrow A\Big|^{2}_{4}$$

$$f'(x)=3x^2+1 \Rightarrow f'(2)=12+1=13$$

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{13}$$

۴) معادله‌های خطهای مماس بر منحنی به معادلهٔ $4x^2-y^2+16x+2y+11=0$ را بنویسید که موازی محور عرضها باشد.

حل. اگر خط مماس موازی محور yها باشد، شیب خط مماس تعریف نشده (∞) است.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{8x+16}{-2y+2}=\infty \Rightarrow -2y+2=0 \Rightarrow y=1$$

$$y=1 \Rightarrow 4x^2-1+16x+2+11=0 \Rightarrow 4x^2+16x+12=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

$$A\left|\begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array}\right. \quad , \quad B\left|\begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array}\right.$$

معادله مماس‌ها $x=-1$ و $x=-3$ می‌باشد.

۵) در نقطه $A\left|\begin{array}{l} \pi \\ 0 \end{array}\right.$ واقع بر منحنی به معادله $y^3=\sin(x-y)$ مماس بر آن رسم کرده‌ایم. معادله خط مماس را بنویسید.

حل. $$y^3-\sin(x-y)=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-\cos(x-y)}{3y^2+\cos(x-y)} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{-\cos\pi}{0+\cos\pi}=\frac{-1}{-1}=1$$

خط مماس $$y-y_A=m_{\text{مماس}}(x-x_A) \Rightarrow y-0=1(x-\pi) \Rightarrow y=x-\pi$$

۶) معادله خط مماس در نقطه A' به طول ۳ واقع بر f^{-1} (تابع معکوس f) در صورتی که $f(x)=\sqrt{x^{3}+1}$ را بنویسید.

حل.
$$f(x)=\sqrt{x^{3}+1}$$

$$A'\Big|^{3}\in f^{-1}\Rightarrow A\Big|_{3}\in f\Rightarrow 3=\sqrt{x^{3}+1}\Rightarrow 9=x^{3}+1\Rightarrow x^{3}=8\Rightarrow x=2$$

$$A\Big|^{2}_{3}\in f\quad\Rightarrow\quad A'\Big|^{3}_{2}\in f^{-1}$$

$$f'(x)=\frac{3x^{2}}{2\sqrt{x^{3}+1}}\quad\Rightarrow\quad f'(2)=\frac{12}{2\times 3}=2$$

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad m_{\text{مماس}}=\frac{1}{2}$$

$$y-y_{A'}=m_{\text{مماس}}(x-x_{A'})\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}(x-3)\Rightarrow 2y-4=x-3$$

$$\Rightarrow 2y=x+1\qquad \text{خط مماس بر } f^{-1}$$

۷) تابع با ضابطه $f(x)=x^{5}+3x+2$ مفروض است. معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} را در نقطه‌ای به طول ۶ واقع بر f^{-1} بنویسید.

حل.
$$A'\Big|^{6}\in f^{-1}\quad\Rightarrow\quad A\Big|_{6}\in f$$

$$6=x^{5}+3x+2\Rightarrow x=1\Rightarrow A\Big|^{1}_{6}\in f\Rightarrow A'\Big|^{6}_{1}\in f^{-1}$$

$$f'(x)=5x^{4}+3\quad\Rightarrow\quad f'(1)=8$$

$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{8}\quad\Rightarrow\quad m_{\text{مماس}}=\frac{1}{8}$$

$$y - y_{A'} = m_{\text{مماس}}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - ۱ = \frac{۱}{۸}(x - ۶) \Rightarrow ۸y - ۸ = x - ۶$$

$$\text{خط مماس بر } f^{-۱} \qquad ۸y = x + ۲$$

۳-۴ مشتق مراتب بالاتر و دیفرانسیل

۳-۴-۱ تعریف. هرگاه مشتق تابع f موجود باشد، آنگاه f' نیز یک تابع است و مشتق اول f نامیده می‌شود. حال اگر مشتق f' موجود باشد آن را با f'' (یا $f^{(۲)}$) نشان می‌دهیم و f'' را مشتق دوم f می‌نامیم. به همین صورت اگر $f^{(n-۱)}$ (مشتق مرتبه $(n-۱)$ام) موجود باشد و مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق مرتبه nام f را با $f^{(n)}$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-۱)}\right)'$$

در برخی موارد f' را با $f^{(۱)}$ و f را با $f^{(۰)}$ نشان می‌دهیم.

همچنان که f' را با نماد $\frac{df}{dx}$ نشان دادیم، f'' را با $\frac{d^۲f}{dx^۲} = \frac{d}{dx}(\frac{df}{dx})$ نشان می‌دهیم.

$$\frac{d^۲f(x)}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = f''(x)$$

به همین ترتیب مشتق n ام f با نماد زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-۱}f(x)}{dx^{n-۱}}\right) = f^{(n)}(x)$$

علاوه بر این، $f^{(n)}(x)$ را با نماد $D_x^n f(x)$ و یا به‌طور خلاصه با $D^n f(x)$ نیز نشان می‌دهند.

۳-۴-۲ مثال. ۱) اگر $f(x)=\cos x$، آنگاه $f^{(3)}(x)$ را محاسبه کنید.

حل.

$$f'(x)=-\sin x \Rightarrow f''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(x)=f^{(3)}(x)=\sin x$$

۲) نشان دهید هرگاه $f(x)=\dfrac{1}{1-ax}$، آنگاه $f^{(n)}(x)=\dfrac{a^n n!}{(1-ax)^{n+1}}$.

حل. با استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم به ازای $n=1$ حکم برقرار است زیرا:

$$f'(x)=\frac{-1(-a)}{(1-ax)^2}=\frac{a}{(1-ax)^2}$$

فرض کنید به ازای $n=k$ برقرار باشد یعنی:

$$f^{(k)}(x)=\frac{a^k k!}{(1-ax)^{k+1}} \quad \text{(فرض استقراء)}$$

ثابت می‌کنیم برای $n=k+1$ نیز برقرار است یعنی:

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{a^{k+1}(k+1)!}{(1-ax)^{k+2}} \quad \text{حکم}$$

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\frac{a^k k!}{(1-ax)^{k+1}}\right)'$$

$$=\frac{-(k+1)(-a)(1-ax)^k a^k k!}{\left[(1-ax)^{k+1}\right]^2}=\frac{a^{k+1}(k+1)!}{(1-ax)^{k+2}}$$

۳) مشتق اول و دوم تابع $f(x)=\sqrt[5]{2x^3+1}$ را تعیین کنید.

حل.

$$f(x)=(2x^3+1)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(6x^2)(2x^3+1)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{6}{5}x^2(2x^3+1)^{-\frac{4}{5}}=\frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3+1)^4}}$$

$$f''(x)=-\frac{۴}{۵}(\frac{۶}{۵}x^{۲})(۶x^{۲})(۲x^{۳}+۱)^{-\frac{۹}{۵}}+\frac{۱۲}{۵}x(۲x^{۳}+۱)^{-\frac{۴}{۵}}$$

$$f''(x)=-\frac{۱۲}{۵}(\frac{۱۲}{۵}x^{۴})(۲x^{۳}+۱)^{-\frac{۹}{۵}}+\frac{۱۲}{۵}x(۲x^{۳}+۱)^{-\frac{۴}{۵}}$$

۴) اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ باشد، $f^{(۴)}(x)$ را تعیین کنید.

حل. $$f(x)=۲(x-۱)^{-۱}$$

$$f'(x)=۲(-۱)(x-۱)^{-۲}=-۲(x-۱)^{-۲}$$

$$f''(x)=(-۲)(-۲)(x-۱)^{-۳}=۴(x-۱)^{-۳}$$

$$f'''(x)=۴(-۳)(x-۱)^{-۴}=-۱۲(x-۱)^{-۴}$$

$$f^{(۴)}(x)=۴۸(x-۱)^{-۵}=\frac{۴۸}{(x-۱)^{۵}}$$

۵) اگر $x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}=۲$ باشد نشان دهید $y''=\frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}$.

حل. از طرفین به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$+\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}y'y^{-\frac{۱}{۲}}=۰ \Rightarrow y'=-\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{y^{-\frac{۱}{۲}}}=-x^{-\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱)$$

از معادله (۱) به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y''=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}y'x^{-\frac{۱}{۲}}y^{-\frac{۱}{۲}} \qquad (۲)$$

با جاگذاری y' از (۱) در (۲) داریم:

$$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1}$$

$$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(1) = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

۶) به ازای چه مقادیر a و b و c تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 1 \\ ax^2 + bx + c & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟

حل. اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f در a هموار است (پیوسته و بدون زاویه است). همچنین اگر f در a مشتق دوم داشته باشد، آنگاه تابع مشتق دوم یعنی تابع f' در a هموار است (پیوسته و بدون زاویه است).

برای حل مسأله توجه داریم که تابع f و تابع f' باید در $x = 1$ پیوسته و تابع f' باید در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{x \to 1^-} x^3 = \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + bx + c) \Rightarrow 1 = a + b + c \qquad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \le 1 \\ 2ax + b & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} 3x^2 = \lim_{x \to 1^+} (2ax + b) \Rightarrow 3 = 2a + b \qquad (2)$$

حال می‌گوییم تابع f' باید در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=6=f''_-(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2ax+b-(2a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2a(x-1)}{x-1}=2a=f''_+(1)$$

$$f''_-(1)=f''_+(1)\ \Rightarrow\ 6=2a\ \Rightarrow\ a=3$$

$$(2):2a+b=3\ \Rightarrow\ 6+b=3\ \Rightarrow\ b=-3$$

$$(1):a+b+c=1\ \Rightarrow\ 3-3+c=1\ \Rightarrow\ c=1$$

۷) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ a\sin 2x+b\cos 2x+c & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق مرتبه دوم دارد. a و b و c را به دست آورید.

حل. اگر تابع f در $x=a$ مشتق مرتبه دوم داشته باشد آنگاه تابع‌های f و f' در a پیوسته‌اند و هر دو تابع f و f' در همسایگی $x=a$ هموارند.

مقدار تابع $f(\frac{\pi}{4})=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

حد چپ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim \operatorname{tg}x=1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=a\sin\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2}+c=a+c$ $\qquad\Rightarrow\quad a+c=1\qquad(1)$

$$f'(x)=\begin{cases}1+\operatorname{tg}^2x & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 2a\cos 2x-2b\sin 2x & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

مقدار f' $\qquad f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + tg^2 \frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f'(x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f'(x) = \lim (2a\cos 2x - 2b\sin 2x) = 0 - 2b = -2b$$

$$\Rightarrow \ -2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

باید در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{f'(x) - f'(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 + tg^2 x - 2}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{tg^2 x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{(tg\,x - 1)(tg\,x + 1)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{(tg\,x - tg\frac{\pi}{4})(tg\,x + 1)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\cos x \cos\frac{\pi}{4}}(tg\,x + 1)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \times \frac{tg\,x + 1}{\cos x \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 \times \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\frac{2}{4}} = \frac{8}{2} = 4 = f''_-(\frac{\pi}{4})$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \frac{f'(x) - f'(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \frac{2a\cos 2x - 2b\sin 2x - (0 - 2b)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{2a(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2b(1-\sin^2 x)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{2a(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + 2b(\sin x - \cos x)^2}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{(\sin x - \cos x)[-2a(\cos x - \sin x) + 2b(\sin x - \cos x)]}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})[-2a(\cos x + \sin x) + 2b(\sin x - \cos x)]}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} \times \sqrt{2}\,[-2a(\cos x + \sin x) + 2b(\sin x - \cos x)]$$

$$= 1\times\sqrt{2}\,[-2a(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2b(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

$$= \sqrt{2}\,(-2a\sqrt{2}) = -4a = f''_+(\frac{\pi}{4})$$

$$f''_+(\frac{\pi}{4}) = f''_-(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1$$

$$(1): a + c = 1 \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2$$

۸) مشتق مرتبه n ام تابع با ضابطهٔ $y = \sin ax$ را بیابید.

حل. $y' = a\cos ax = a\sin(\frac{\pi}{2} + ax)$

$$y'' = a^2\cos(\frac{\pi}{2}+ax) = a^2\sin(\frac{2\pi}{2}+ax)$$

$$y''' = a^3\cos(\frac{2\pi}{2}+ax) = a^3\sin(\frac{3\pi}{2}+ax)$$

حال حدس می‌زنیم که فرمول مشتق مرتبه n ام این تابع چنین است:

$$y^{(n)} = a^n\sin(\frac{n\pi}{2}+ax)$$

به کمک استقراء ثابت می‌کنیم که این حدس، درست است.

$$n=1: y^{(1)} = a\sin(\frac{\pi}{2}+ax)$$

فرض استقراء $\quad n=k: y^{(k)} = a^k\sin(\frac{k\pi}{2}+ax)$

حکم استقراء $\quad n=k+1: y^{(k+1)} = a^{k+1}\sin(\frac{(k+1)\pi}{2}+ax)$

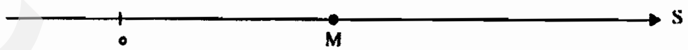
از طرفین فرض استقراء نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y^{(k+1)} = a^k \times a\cos(\frac{k\pi}{2}+ax)$$

$$= a^{k+1}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}+ax)$$

$$= a^{k+1}\sin(\frac{(k+1)\pi}{2}+ax)$$

۳-۴-۳ تعریف. مقدار لحظه‌ای تغییر سرعت یک متحرک نسبت به زمان را، شتاب آن متحرک می‌نامیم. پس اگر معادله حرکت نقطهٔ M روی محور OS، $S=f(t)$ باشد، شتاب آن در لحظه t_0 برابر با $a=f''(t_0)$ است.



۳-۴-۴ مثال. ۱) فرض کنید $S = t^3 - 2t + 1$، معادله حرکت جسمی روی محور OS باشد، شتاب متحرک را در لحظه $t = 1$ تعیین کنید.

حل.

$$S' = 3t^2 - 2 \Rightarrow S'' = 6t$$

$$\text{شتاب} \quad a = 6(1) = 6$$

۲) فرض کنید $S = t^3 - t^2$، معادله حرکت جسمی روی محور OS باشد، در چه لحظه‌ای شتاب این جسم صفر می‌شود؟ سرعت جسم در آن لحظه چقدر است؟

حل.

$$S' = 3t^2 - 2t \Rightarrow S'' = 6t - 2$$

$$S'' = 0 \Rightarrow 6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

پس در لحظه $t = \frac{1}{3}$ شتاب حرکت جسم برابر صفر می‌باشد.

$$\text{معادله سرعت} \quad V = S' = 3t^2 - 2t$$

$$\text{سرعت} \quad V = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

۳-۴-۵ تعریف. اگر $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، دیفرانسیل y را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$dy = f'(x) = dx$$

دیفرانسیل متغیر × مشتق تابع = دیفرانسیل تابع

۳-۴-۶ مثال. ۱) Δy و dy را برای تابع $y = x^2 + 3x$ در نقطه $x = 2$، با فرض $\Delta x = dx = 0/1$ محاسبه کنید.

حل. با توجه به این‌که $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - (x^2 + 3x)$$

$$\Delta y = x^{۲} + ۲x\Delta x + (\Delta x)^{۲} + ۳x + ۳\Delta x - (x^{۲} + ۳x)$$

$$\Delta y = ۲x\Delta x + (\Delta x)^{۲} + ۳\Delta x$$

$$\Delta y = ۲(۲)(۰/۱) + (۰/۱)^{۲} + ۳(۰/۱)$$

$$\Delta y = ۰/۴ + ۰/۰۱ + ۰/۳ = ۰/۷ + ۰/۰۱ = ۰/۷۱$$

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

$$dy = (۲x + ۳)dx$$

$$dy = (۴ + ۳)(۰/۱) = ۰/۷$$

۲) دیفرانسیل هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $y = x^{۳} + ۵x^{۲} + x + ۱$

حل. $dy = (۳x^{۲} + ۱۰x + ۱)dx$

۲) $y = (x^{۴} + ۷x^{۳})^{۵}$

حل. $dy = ۵(۴x^{۳} + ۲۱x^{۲})(x^{۴} + ۷x^{۳})^{۴}\, dx$

۳) $y = \dfrac{x^{۲} + x}{۲x^{۳} + ۱}$

حل. $dy = \left[\dfrac{(۲x + ۱)(۲x^{۳} + ۱) - (۶x^{۲})(x^{۲} + x)}{(۲x^{۳} + ۱)^{۲}}\right]dx$

$$dy = \frac{۴x^{۴} + ۲x + ۲x^{۳} + ۱ - ۶x^{۴} - ۶x^{۳}}{(۲x^{۳} + ۱)^{۲}}dx = \frac{(-۲x^{۴} - ۴x^{۳} + ۲x + ۱)}{(۲x^{۳} + ۱)^{۲}}dx$$

۴) $y = \sqrt[۳]{x^{۲} + ۵x}$

حل. $dy = \dfrac{۲x + ۵}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲} + ۵x)^{۲}}}dx$

۳-۴-۷ تعریف. فرض کنید f و g توابعی حقیقی از متغیر مستقل t باشند. اگر قلمرو مشترک f و g، I باشد، معادلات $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} , \ t \in I$ را معادلات پارامتری منحنی (c) می‌نامیم.

منحنی (c) پیوسته نامیده می‌شود، در صورتی که f و g روی I پیوسته باشند.

۳-۴-۸ فرض کنید f و g روی I توابعی مشتق‌پذیر باشند و:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} , \ t \in I$$

معادلات پارامتری یک منحنی باشد. dx و dy برحسب t و dt عبارت‌اند از:

$$dx = f'(t)dt$$

$$dy = g'(t)dt$$

dx و dy را دو مقدار مجزا تعریف می‌کنیم به طوری که خارج قسمت آن همان مشتق y نسبت به x شود. پس:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)dt}{g'(t)dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dg}{dt}}$$

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

۳-۴-۹ مثال. ۱) اگر معادلات پارامتری یک منحنی به صورت $\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$ باشد، y'_x را حساب کنید.

حل.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+3}{3t^2+2t}$$

۲) مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ را برای معادلات پارامتری $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ را حساب کنید.

حل.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-6t(1-2t) - (-2)(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^3} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$

۳-۴-۱۰ مثال. ۱) ثابت کنید بین تابع با ضابطه $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + ax + b}}$ و مشتق‌های مرتبه اول و دوم آن، رابطهٔ $yy'' - 3y'^2 + y^4 = 0$ برقرار است.

حل.

$$y^2 = \frac{1}{x^2 + ax + b} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = x^2 + ax + b$$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{-2y'y}{y^4} = 2x + a \Rightarrow \frac{-2y'}{y^3} = 2x + a \Rightarrow \frac{-2y''y^3 - 3y'y^2(-2y')}{y^6} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-2y''y^3 + 6y'^2y^2}{y^6} = 2 \Rightarrow \frac{-2y''y + 6y'}{y^4} = 2$$

$$\overset{\div 2}{\Rightarrow} \frac{-yy'' + 3y'^2}{y^4} = 1 \Rightarrow y^4 = -y''y + 3y'^2 \Rightarrow y''y - 3y'^2 + y^4 = 0$$

۲) اگر y' و y'' مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع با ضابطه $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$, $n\in N$ باشد، ثابت کنید که:

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

حل.

$$y'=n\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}$$

$$y'=n\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}=n\times\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y'(\sqrt{x^2-1})=n(x+\sqrt{x^2-1})^n \Rightarrow y'(\sqrt{x^2-1})=ny$$

$$\Rightarrow y'^2(x^2-1)=n^2y^2 \Rightarrow 2y''y'(x^2-1)+2xy'^2=2n^2y'y$$

$$\xrightarrow{\div 2y'} y''(x^2-1)+xy'=n^2y \Rightarrow (x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

۳-۴-۱۱ تمرین. (۱) مشتق توابع زیر را حساب کنید:

۱) $y=\sin^5 x$

۲) $y=(\mathrm{tg}\,x+\cos x)^3$

۳) $y=\mathrm{tg}(\sin x)$

۴) $y=\sin(\sin x)$

۵) $y=\cos^2(\sin 3x)$

۶) $y=5\sin(\cos 4x)$

۷) $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x+3}$

۸) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x}$

۹) $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

۱۰) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,x-1}{\mathrm{tg}\,x+1}$

(۲) در هر مورد $y'=\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

۱) $x\sin y+y\sin x=xy$

۲) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{16}$

۳) $y\sqrt{x}-x\sqrt{x}=5$

۴) $x^2y+\sin^2 y=y$

(۳) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $y=\cos^{-1}(7x^2)$

۲) $y=\sin^{-1}(x^3+2x)$

۳) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)$

۴) $y=tg^{-1}(x^5)$

۵) $y=tg^{-1}(\cos x)$

۶) $y=\cos(5\cos^{-1}x)$

۷) $y=tg^{-1}(\sqrt{x+1})$

۸) $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

۹) $y=\cos^{-1}(\sin x)$

۱۰) $y=tg^{-1}(\frac{1}{x})$

۱۱) $x\sin y+x^2=tg^{-1}y$

۱۲) $y\sin^{-1}(xy)=\cos^{-1}(x+y)$

(۴) هرگاه $f(x)=x^3+x$، مطلوبست محاسبه $(f^{-1})'(2)$.

(۵) اگر f مسافتی باشد که متحرک در زمان t طی می‌کند، مطلوبست محاسبهٔ شتاب $a=\frac{d^2S}{dt^2}$، اگر $S=50+80t+16t^2$ باشد.

(۶) اگر $x=t+t^2$ و $y=t+t^3$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در $t=1$ محاسبه کنید.

(۷) اگر $y=3x^2+4x+1$، آنگاه Δy و dy را به ازای $x=3$ و $\Delta x=0/1$ محاسبه کنید.

(۸) اگر معادله حرکت یک ذره $S=20+30t+3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t=2$ محاسبه کنید.

(۹) اگر $f(x)=\sqrt{x^2+x}$، آنگاه $\frac{dy}{dx}=y'_x$ را در هر یک از موارد زیر بیابید.

۱) $y=f(x+\sqrt{x})$

۲) $y=f(\cos x+\cot g x)$

۳) $y=f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

۴) $y=f\left(f(x^2)\right)$

(۱۰) معادله‌های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع‌های به معادله زیر، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

۱) $f(x)=(x^{2}-4x)^{3}$ ۲) $f(x)=\dfrac{x^{2}+1}{2x^{2}-1}$

۳) $f(x)=\sqrt[3]{(x^{2}-2)^{2}}$ ۴) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(۱۱) در تابع به معادله $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$ اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم تابع y باشند، ثابت کنید: رابطهٔ $3y'^{2}-yy''=y^{4}$ برقرار است.

(۱۲) در تابع به معادله $y=\dfrac{x^{2}+1}{x}$ اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم تابع باشند، ثابت کنید $xy''+2y'=2$.

(۱۳) فرض کنید $f,g:R\to R$ تابع‌های مشتق‌پذیر باشند و $g'(0)\neq 0$، $f(0)=g(0)=0$. ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(۱۴) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{3}}{3} & x\leq 0\\ \dfrac{5}{2}x^{2}-4x & x>0\end{cases}$. تابع مشتق تابع را پیدا کنید.

(۱۵) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ (1-x)(2-x) & 1\leq x\leq 2\\ -(2-x) & x>2\end{cases}$. تابع مشتق f را پیدا کنید.

(۱۶) مشتق هر یک را تعیین کنید. $y' = \dfrac{dy}{dx}$

۱) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}$ ۲) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

۳) $y = \sqrt{\operatorname{Arccotg} \dfrac{x}{2}}$ ۴) $y = \operatorname{Arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$

۵) $y = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{|x|}$ ۶) $\sin xy + \cos xy = 0$

۷) $xy = \operatorname{Arctg} \dfrac{x}{y}$ ۸) $x - y = \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arccos} y$

(۱۷) فرض کنید $f(x) = \sin(n \operatorname{Arcsin} x)$. ثابت کنید:

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) + n^2 f(x) = 0$$

(۱۸) فرض کنید $f(x) = [x] \sin^2 \pi x \ , \ x \in R$. تابع مشتق f را پیدا کنید.

(۱۹) فرض کنید $f(x) = \left|(x^2 - 1)^2 (x + 1)^3\right| \ , \ x \in R$. تابع مشتق f را پیدا کنید.

(۲۰) فرض کنید $f : R \to R$، n مرتبه مشتق‌پذیر باشد (n عددی طبیعی است) ثابت کنید:

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$$

(۲۱) در هر مورد مشتق مرتبه nام تابع داده شده را به دست آورید.

۱) $f(x) = \sin x$ ۲) $f(x) = \cos x$

۳) $f(x) = \sin^2 x$ ۴) $f(x) = \cos^2 x$

۵) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(۲۲) مقادیر b و c را طوری تعیین کنید که نمودار $y = x^{۲} + bx + c$ در نقطه $A(۱,۱)$ بر خط $y = x$ مماس باشد.

(۲۳) در چه نقاطی از منحنی $y = x^{۳} + x - ۲$ خط مماس بر منحنی موازی خط $y = ۴x - ۱$ است؟

(۲۴) معادله مماس بر منحنی $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۵$ را بنویسید که بر خط $۲x - ۶y + ۱ = ۰$ عمود باشد.

(۲۵) در مورد تابع $f: R \to R$ می‌دانیم $|f(x)| \leq x^{۲}\ ,\ x \in R$. ثابت کنید f در نقطه $x = ۰$ مشتق‌پذیر است و $f'(۰)$ را حساب کنید.

(۲۶) در مورد تابع $f: R \to R$ می‌دانیم $|f(x)| \leq |x|\ ,\ x \in R$. آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که f در نقطه $x = ۰$ مشتق‌پذیر است؟

(۲۷) اگر $f(x) = [x]\sin x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۴})$ را حساب کنید.

(۲۸) اگر $f: R \to R$ یک تابع و $f'(a)$ موجود باشد، حاصل $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(a + ۲h) - f(a - h)}{h}$ را حساب کنید.

(۲۹) اگر برای $|x| < ۱$، $x \leq f(x) \leq x + x^{۲}$، مقدار $f'(۰)$ را حساب کنید.

(۳۰) اگر $f(a) = ۰$ و $f'(a) = ۴$، $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(a + ۲h) - f(a)}{۵h}$ را حساب کنید.

(۳۱) اگر f بر R دو مرتبه مشتق‌پذیر باشد و $g(x) = f(x f(x))$، آنگاه $g''(۰)$ را حساب کنید.

(۳۲) اگر توابع f و g بر R مشتق‌پذیر باشند و $۲g'(-۲) = f(a) = f'(a) = -۲$، مقدار $(gof)'(a)$ را حساب کنید.

(۳۳) اگر $\begin{cases} x = (t+2)t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ را به ازای $t = 3$ حساب کنید.

(۳۴) اگر $f'(1) = f(1) = -2$ و $g'(-2) = 3$، حاصل $(gof)'(1)$ را حساب کنید.

(۳۵) اگر f تابعی مشتق‌پذیر در a باشد، مقدار $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$ را حساب کنید.

(۳۶) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x - t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$ در $t = 2$ را حساب کنید.

فصل چهارم

کاربردهای مشتق

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع را در یک بازه تعریف کند و مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را در صورت وجود محاسبه کند.

۲. نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع را روی قلمرواش تعریف کرده و مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را در صورت وجود محاسبه کند.

۳. قضایای مقدار میانه، بولتزانو، رُل و میانگین را بیان کرده و به‌کار برد.

۴. نقاط بحرانی یک تابع را تعریف کرده و تعیین کند.

۵. بازه‌هایی را که تابع در آن صعودی یا نزولی است، با استفاده از علت مشتق اول تعیین کند.

۶. تقعر و تحدب منحنی تابع را در یک نقطه تعریف کرده و تقعر یا تحدب توابع داده شده را تعیین کند.

۷. نقطه عطف منحنی یک تابع را تعریف کرده و برای توابع داده شده در صورت وجود نقطه عطف، آن را تعیین کند.

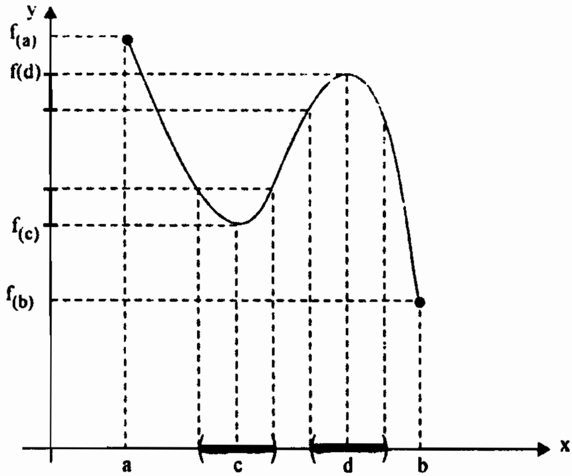
۸. مجانب‌های منحنی یک تابع را بیان کرده و در صورت وجود آن را به‌دست آورد.

۹. منحنی تابع داده شده را رسم کند.

۱۰. مسائل دلده شده را با استفاده از مفاهیم ماکزیمم و مینیمم حل کند.

۴-۱ ماکزیمم و مینیمم

۴-۱-۱. فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ تعریف شده و نمایش هندسی آن شکل زیر باشد:



شکل ۴-۱

با توجه به شکل، مشاهده می‌کنیم که این تابع بیشترین مقدار خود را در نقطهٔ $x = a$، و کمترین مقدار خود را در $x = b$ اختیار کرده است. بنابراین «ماکزیمم» این تابع برابر $f(a)$، و «مینیمم» آن برابر $f(b)$ خواهد بود.

از طرفی اگر یک همسایگی از نقطه d را که با سایه مشخص گردیده است در نظر بگیریم، می‌بینیم که تابع f در این همسایگی بیشترین مقدار خود را در d داراست، یا به عبارت دیگر برای هر نقطهٔ این همسایگی به‌جز نقطه d، داریم:

$$f(d) > f(x)$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ d یک «ماکزیمم نسبی» دارد. همچنین اگر یک همسایگی از نقطهٔ c را که با سایه مشخص شده است در نظر بگیریم، مشاهده

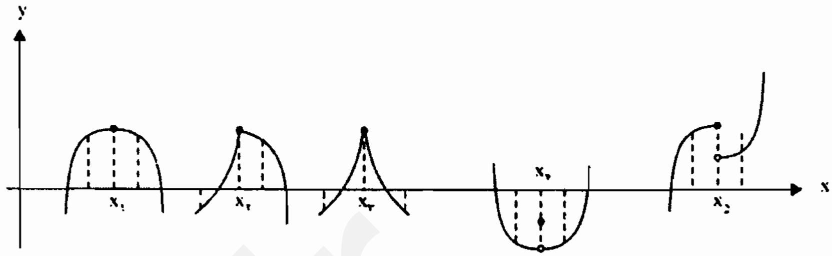
می‌کنیم که تابع f در این همسایگی کمترین مقدار خود را در c داراست، یا به عبارت دیگر، برای هر نقطه $x \neq c$ از این همسایگی، داریم:

$$f(c) < f(x)$$

در این صورت می‌گوییم، تابع f در نقطهٔ c یک «مینیمم نسبی» دارد.

۴-۱-۲ تعریف ماکزیمم نسبی. تابع f در نقطهٔ d یک «ماکزیمم نسبی» دارد هرگاه یک همسایگی از نقطهٔ d مانند $N(d,\delta)$ وجود داشته باشد به طوری که f در آن همسایگی تعریف شده و برای هر $x \in N(d,\delta)$ رابطهٔ $f(d) \geq f(x)$ برقرار باشد. در این صورت $f(d)$ را «مقدار ماکزیمم نسبی» تابع f در نقطهٔ d می‌نامیم.

در نمودارهای زیر نقاط به طولهای x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 طولهای ماکزیمم نسبی تابع می‌باشند.

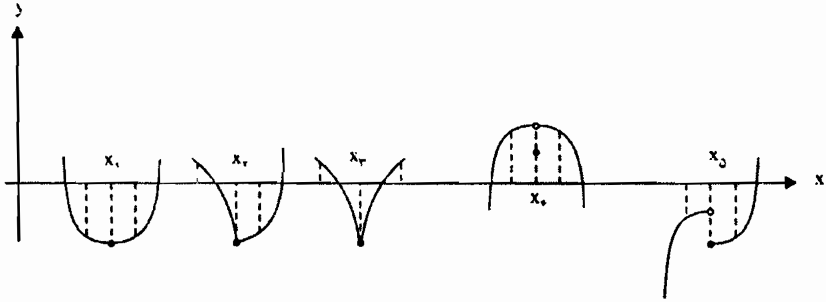


شکل ۴-۲

با توجه به شکل $f'(x_1) = 0$ و $f'(x_2)$ و $f'(x_3)$ و $f'(x_4)$ و $f'(x_5)$ وجود ندارد.

۴-۱-۳ تعریف مینیمم نسبی. تابع f در نقطهٔ c دارای یک «مینیمم نسبی» است، هرگاه یک همسایگی از نقطهٔ c مانند $N(c,\delta)$ وجود داشته باشد به طوری که f در آن همسایگی تعریف شده و برای هر $x \in N(c,\delta)$ رابطهٔ $f(c) \leq f(x)$ برقرار باشد، در این صورت $f(c)$ را «مقدار مینیمم نسبی» تابع f در نقطه c می‌نامیم.

در نمودارهای زیر، نقاط x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 طولهای نقاط مینیمم نسبی تابع می‌باشند.



شکل ۴-۳

با توجه به شکل $f'(x_1)=0$ و $f'(x_2)$ و $f'(x_3)$ و $f'(x_4)$ و $f'(x_5)$ وجود ندارد.

۴-۱-۴ تعریف اکسترمم نسبی. اگر تابع f در c دارای ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی باشد، می‌گوییم f در c دارای اکسترمم نسبی است و $x=c$ را نقطه اکسترمم نسبی f می‌نامند و $f(c)$ را مقدار اکسترمم نسبی تابع f می‌نامیم.

۴-۱-۵ تذکر.

۱) اگر تابع f در c اکسترمم نسبی باشد، لزومی ندارد که تابع f در c پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

۲) اگر تابع f فقط در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه چون f در همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است، لذا a و b نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع f باشند.

۳) اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آنگاه نقطهٔ c نقطهٔ اکسترمم نسبی f نیز است.

۴-۱-۶ تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق. فرض کنید $d,c \in D_f$ باشد:

الف) $f(d)$ را ماکزیمم مطلق تابع f روی قلمرو خود گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f \ : \ f(d) \geq f(x)$$

ب) $f(c)$ را مینیمم مطلق تابع f روی قلمرو خود گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f \ : \ f(c) \leq f(x)$$

و می‌نویسیم:

$$f(d) = \sup\{f(x) \mid x \in D_f\}$$

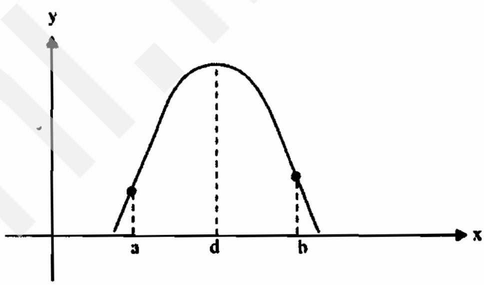
$$f(c) = \inf\{f(x) \mid x \in D_f\}$$

در این صورت اصطلاحاً می‌گوییم f روی قلمرو خود در d ماکزیمم مطلق و در c مینیمم مطلق دارد.

اگر $f(e)$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق f روی قلمرو خود باشد، آن را اکسترمم مطلق f روی قلمرو خود می‌نامیم.

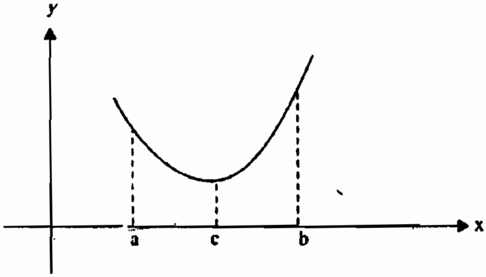
۴-۱-۷ نکته. از مقایسه تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق، ماکزیمم و مینیمم نسبی نتیجه می‌شود.

۱) اگر $f(d)$ ماکزیمم مطلق f روی (a,b) باشد، ماکزیمم نسبی آن نیز هست، در حالی که عکس این موضوع همیشه درست نیست.



شکل ۴-۴

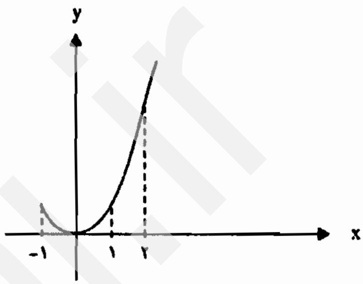
۲) اگر $f(c)$ مینیمم مطلق f روی (a,b) باشد، مینیمم نسبی آن نیز هست، در حالی که عکس این موضوع همیشه درست نیست.



شکل۴-۵

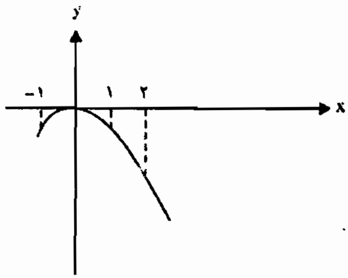
۴-۱-۸ مثال. ۱) فرض کنید $f:[-۱,۲]\to R$ با ضابطه $f(x)=x^۲$ تعریف شده باشد، در این صورت f در $x=۰$ دارای یک مینیمم نسبی است. زیرا:

$$\forall x\in(-۱,۲) \Rightarrow f(x)=x^۲\geq ۰=f(۰)$$



۲) هرگاه $f:[-۱,۲]\to R$ با ضابطه $f(x)=-x^۲$ تعریف شود آنگاه f در $x=۰$ دارای ماکزیمم نسبی است. زیرا:

$$\forall x\in(-۱,۲) \Rightarrow f(x)=-x^۲\leq ۰=f(۰)$$



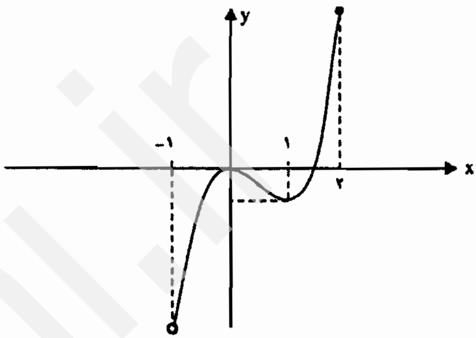
۳) تابع $f(x)=x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲$ را در بازه $[-۱,۲]$ در نظر بگیرید.

این تابع در $x=۰$ یک ماکزیمم نسبی دارد. زیرا f روی همسایگی $N(۰,۱)$ تعریف شده است و برای هر $x\in N(۰,۱)$ داریم:

$$x\in(۰,۱) \Rightarrow -۱<x<۱\ ,\ f(۰)=۰$$

$$\Rightarrow x\le\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times x^۲} x^۳\le\frac{۳}{۲}x^۲ \to x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲\le ۰ \to f(x)\le f(۰)$$

یعنی $f(۰)=۰$ ماکزیمم نسبی است.

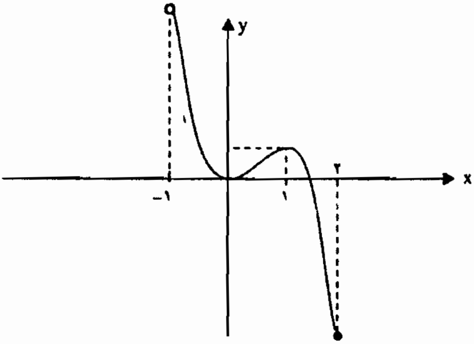


۴) هرگاه $f:[-۱,۲]\to R$ با ضابطه $f(x)=-x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲$ تعریف شود آنگاه f در $x=۰$ یک مینیمم نسبی دارد، زیرا f روی همسایگی $N(۰,۱)$ تعریف شده است و داریم:

$$\forall x \in N(0,1) \Rightarrow -1<x<1 \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(-x^2)} -x^3 \ge -\frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow -x^3+\frac{3}{2}x^2 \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(0)$$

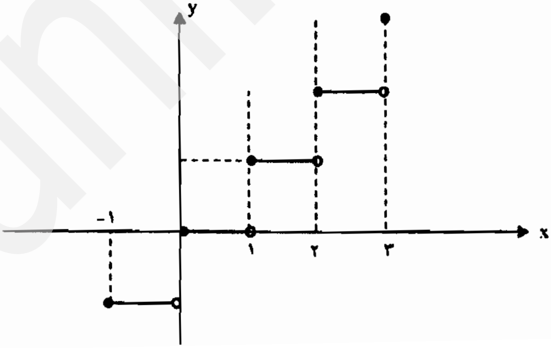
یعنی $f(0)=0$ مینیمم نسبی است.



۵) تابع ثابت با ضابطه $f(x)=k\ ,\ k\in R$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $D_f=R$، فرض کنیم $c\in R$، پس تابع f در همسایگی c تعریف شده است. چون برای هر $x\in D_f$ می‌توان نوشت: $f(c)\le f(x)$ و $f(c)\ge f(x)$ پس بنا به تعریف، c هم طول مینیمم نسبی است و هم طول ماکزیمم نسبی است.

پس برای تابع ثابت $f(x)=k$، هر نقطه اکسترمم نسبی است. در واقع هر نقطه می‌تواند نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی تلقی شود.

۶) تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $D_f=R$. این تابع را رسم می‌کنیم.



نقطه به طول $x_1 = ۱$ را در نظر بگیرید. این تابع در همسایگی ۱ تعریف شده است. با توجه به شکل برای هر $x \in (۰/۹, ۱/۱)$ می‌توان نوشت:

$$f(۱) \geq f(x)$$

پس $x_1 = ۱$ طول نقطه، ماکزیمم نسبی تابع است.

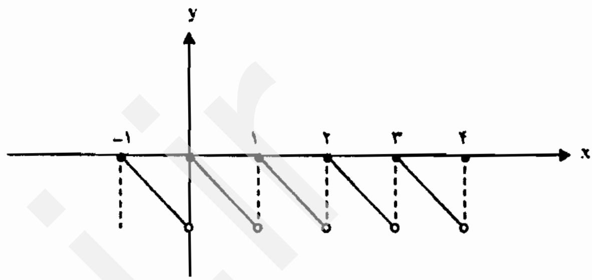
حال نقطه‌ای به طول $x_2 = \frac{۱}{۴}$ را در نظر می‌گیریم.

برای هر $x \in (۱/۳, ۱/۵)$ می‌توان نوشت: $f(۱/۴) \geq f(x)$ و $f(۱/۴) \leq f(x)$

پس نقطه، به طول $x_2 = \frac{۱}{۴}$ هم طول ماکزیمم نسبی و هم طول مینیمم نسبی است.

نتیجه. در تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ نقاط $x_0 \in Z$، طول‌های ماکزیمم نسبی تابع و نقاط $x_0 \in R - Z$ طول‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع‌اند.

۷) تابع با ضابطه $f(x) = [x] - x$ را در نظر می‌گیریم، دامنه این تابع، $D_f = R$ است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

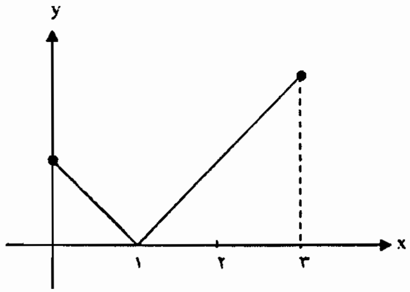


نقطه‌ای به طول $x_1 = ۲$ را در نظر بگیرید، این تابع، در همسایگی ۲ تعریف شده است.

با توجه به شکل، برای هر x که $x \in (۱/۸, ۲/۲)$، $f(۲) \geq f(x)$. پس ۲، طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

نتیجه: این تابع در نقاط $x_0 \in Z$ ماکزیمم نسبی دارد.

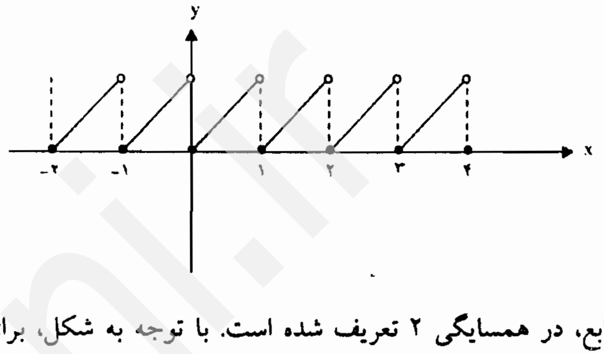
۸) تابع با ضابطه $f(x)=|x-1|$ را در بازه $[0,3]$ در نظر می‌گیریم. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



این تابع در همسایگی ۱ تعریف شده است، زیرا $D_f=R$.

برای هر x که $x\in(0,2)$، $f(1)\le f(x)$. پس $x=1$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

۹) تابع با ضابطه $f(x)=x-[x]$ را در نظر می‌گیریم. دامنه این تابع $D_f=R$ است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



این تابع، در همسایگی ۲ تعریف شده است. با توجه به شکل، برای هر x که $x\in(1/8,2/2)$، $f(2)\le f(x)$. پس ۲، طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

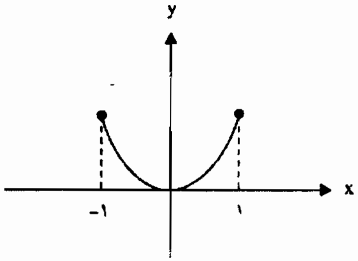
نتیجه: این تابع در نقاط $x_0\in Z$، مینیمم نسبی دارد.

۱۰) هرگاه $f:[-1,1]\to R$ با ضابطه $f(x)=x^2$ تعریف شود، نشان دهید که روی قلمرواش در $x=1$ و $x=-1$ ماکزیمم مطلق دارد.

حل. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$D_f = [-1,1]$$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱



با توجه به شکل:

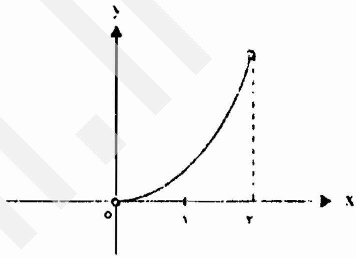
$$\forall x \in D_f \ : \ f(1) \geq f(x) \ , \ f(-1) \geq f(x)$$

پس تابع در $x = 1, -1$ دارای ماکزیمم مطلق است.

در $x = 0$ دارای مینیمم مطلق و نسبی است زیرا:

$$\forall x \in D_f \ : \ f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$$

۱۱) فرض کنید $f:(0,2) \to R$ با ضابطه $f(x) = x^2$ تعریف شده باشد. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع f در $(0,2)$ دارای هیچ اکسترمم نسبی یا مطلق نیست.

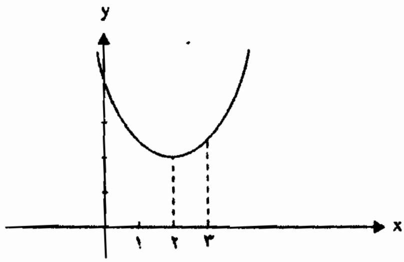
۱۲) نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 - 4x + 8$ روی قلمرواش در $x = 2$ مینیمم مطلق دارد.

حل.

$$y = x^{۲} - ۴x + ۸$$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

x	۱	۲	۳
y	۵	۴	۵



$$x = ۱ \Rightarrow y = ۱ - ۴ + ۸ = ۵$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = ۹ - ۱۲ + ۸ = ۵$$

$$f(۲) = ۴ - ۸ + ۸ = ۴$$

$$\forall x \in D_f = R \ : \ f(x) = (x-۲)^{۲} - ۴ + ۸$$

$$f(x) = (x-۲)^{۲} + ۴ \geq ۴ = f(۲)$$

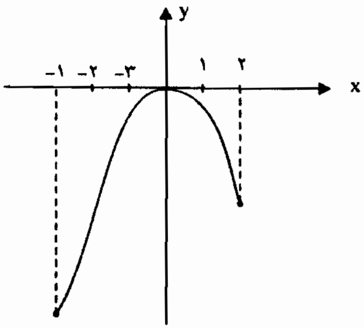
پس تابع f در قلمرواش در $x = ۲$ دارای مینیمم مطلق است.

۱۳) نشان دهید که تابع $f(x) = -x^{۲}\ ,\ -۳ < x \leq ۲$ در $x = ۰$ ماکزیمم مطلق دارد.

حل. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = -x^{۲}$$

x	−۳	۰	۲
y = f(x)	−۹	۰	−۴



$$f(\circ) = -(\circ)^{۲} = \circ$$

$$\forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x^{۲} \leq \circ = f(\circ)$$

پس تابع f در قلمرو خود در $x = \circ$ دارای ماکزیمم مطلق است

۴-۱-۹ قضیه. اگر تابع f در $x = c \ , \ c \in D_f$ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه:

$$f'(c) = \circ$$

اثبات. بنا به تعریف مشتق داریم:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اگر $f'(c) \neq \circ$ باشد، یا مثبت است و یا منفی. اگر $f'(c) > \circ$ باشد آنگاه یک همسایگی محذوف از نقطهٔ c وجود دارد به طوری که $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ نیز در آن همسایگی مثبت باشد. به عبارت دیگر در آن همسایگی صورت و مخرج این کسر هم‌علامت است؛ یعنی اگر $x < c$ باشد $f(x) < f(c)$ و اگر $x > c$ باشد، $f(x) > f(c)$ خواهد بود. پس در این حالت $f(c)$ نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی، و این خلاف فرض قضیه است. بنابراین $f'(c)$ نمی‌تواند مثبت باشد. با روش مشابهی می‌توان نشان داد که $f'(c)$ منفی نیز نمی‌تواند باشد، در نتیجه الزاماً $f'(c) = \circ$ خواهد بود.

اثبات دیگری برای قضیه ۴-۱-۹. فرض کنید که f در c دارای ماکزیمم نسبي باشد، آنگاه در یک همسایگی c مانند I داریم:

$$f(x)-f(c)\le 0 \quad , \quad x\in I$$

بنا بر فرض $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود است.

حال اگر $x>c$ و $x\in I$ ، آنگاه:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\le 0 \qquad (1)$$

و نیز اگر $x<c$ و $x\in I$ ، آنگاه:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'(c)\ge 0 \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $f'(c)=0$.

فرض کنید f در c دارای مینیمم نسبی باشد، آنگاه در یک c مانند I داریم:

$$f(x)-f(c)\ge 0 \quad , \quad x\in I$$

بنا به فرض $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود است.

حال اگر $x>c$ و $x\in I$، آنگاه:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_+(c) = f'(c) \geq 0 \qquad (۳)$$

و نیز اگر $x < c$ و $x \in I$، آنگاه:

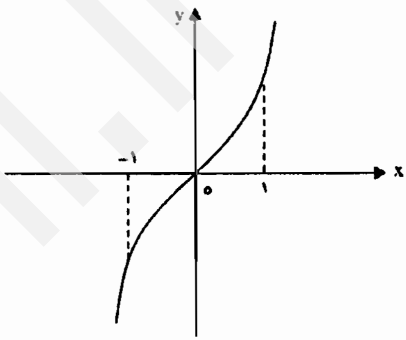
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c) = f'(c) \leq 0 \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که $f'(c) = 0$.

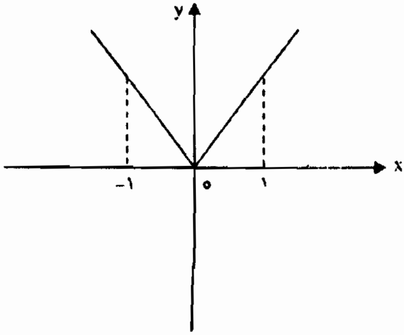
۴-۱-۱۰ تذکر. باید توجه داشت که ممکن است مشتق f در نقطه‌ای صفر باشد، ولی f در آن نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی نداشته باشد. به عبارت دیگر عکس قضیه (۴-۱-۹) همیشه درست نیست. مثلاً تابع $f(x) = x^3$ در $x = 0$ مشتق دارد و $f'(0) = 0$ است، ولی f در این نقطه نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.



شکل ۴-۶

۴-۱-۱۱ تذکر. باید توجه داشت که ممکن است تابع در نقطه‌ای از قلمرو خود ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد، بدون این که در آن نقطه مشتق داشته باشد.

مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$، مینیمم نسبی دارد ولی مشتق ندارد.



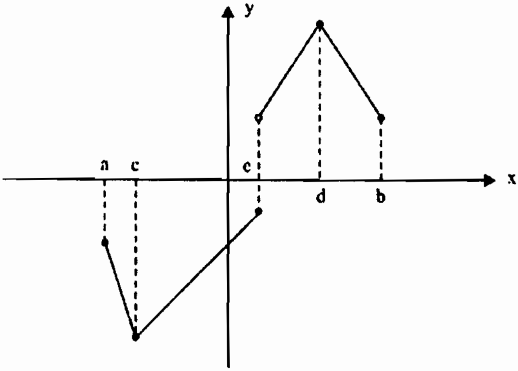
شکل ۴-۷

۴-۱-۱۲ قضیه اکسترمم. هرگاه f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق است، یعنی نقاطی مانند c و d در بازه $[a,b]$ موجود است به قسمی که:

$$f(c)\le f(x)\le f(d) \quad , \quad x\in[a,b] \text{ به ازای هر}$$

یعنی $f(d)$ ماکزیمم مطلق و $f(c)$ مینیمم مطلق f روی $[a,b]$ می‌باشند. یعنی هر تابع که روی بازه بسته‌ای پیوسته باشد، روی آن بازه اکسترمم مطلق خواهد داشت.

۴-۱-۱۳ تذکر. توجه داشته باشیم پیوستگی تابع روی بازه $[a,b]$ برای وجود مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق شرط کافی است و لازم نیست، زیرا ممکن است تابع در بازه $[a,b]$ پیوسته نباشد. ولی ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق داشته باشد. مانند شکل زیر که تابع در نقطه e، $a<e<b$ ناپیوسته است، ولی در d ماکزیمم مطلق و در c مینیمم مطلق دارد.



شکل ۴-۸

۴-۲ قضایای رُل و میانگین.

۴-۲-۱ قضیه رُل. فرض کنید تابع f دارای شرایط زیر باشد.

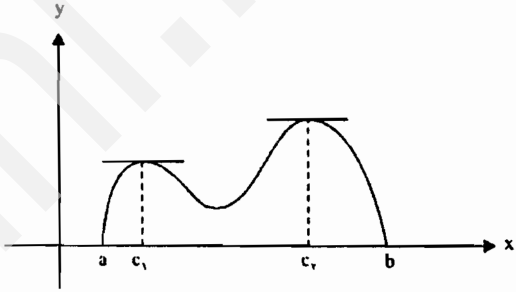
الف) f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

ج) $f(a) = f(b) = 0$

در این صورت عددی مانند c، $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که:

$$f'(c) = 0$$



شکل ۴-۹

اثبات. برای اثبات دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر تابع $f(x)$ به ازای تمام xهای فاصله $[a,b]$، صفر تعریف شده باشد، یعنی برای همهٔ مقادیر $x \in [a,b]$، $f(x) = 0$ باشد، در این صورت، چون f روی فاصله (a,b) مشتق‌پذیر است، بنابراین برای هر $x \in (a,b)$ خواهیم داشت $f'(x) = 0$، یعنی برای هر عدد دلخواه c که در فاصله (a,b) باشد، داریم $f'(c) = 0$.

حالت دوم: فرض کنید تابع $f(x)$ به ازای حداقل یک x در فاصله (a,b) مخالف صفر باشد.

چون تابع f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته است، بنا به قضیه اکسترمم، f روی $[a,b]$ دارای یک مقدار ماکزیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق است.

و بنا به فرض $f(a) = f(b) = 0$، و چون به ازای حداقل یک مقدار x روی فاصله (a,b) تابع $f(x)$ مخالف صفر است، پس f در نقطه‌ای مانند c_1 واقع در (a,b) دارای یک مقدار ماکزیمم مطلق مثبت است و یا در نقطه‌ای مانند c_2، $c_2 \in (a,b)$ دارای یک مقدار مینیمم مطلق منفی است، و یا هر دو (به عبارت دیگر چون $f(c) \neq 0$ است، پس $f(c) > 0$ یا $f(c) < 0$ و یکی از مقادیر ماکزیمم و یا مینیمم مطلق حتماً در نقطه c به دست می‌آید.)

بنابراین به ازای $c = c_1$ و یا $c = c_2$، بسته به اینکه کدام مورد به وقوع بپیوندد، f دارای یک اکسترمم مطلق در فاصله باز (a,b) است و چون اکسترمم مطلق در فاصله باز قرار دارد. پس اکسترمم نسبی نیز هست. از طرفی چون $f'(c)$ وجود دارد، با توجه به قضیه ٤-١-٩، نتیجه می‌گیریم که $f'(c) = 0$ است.

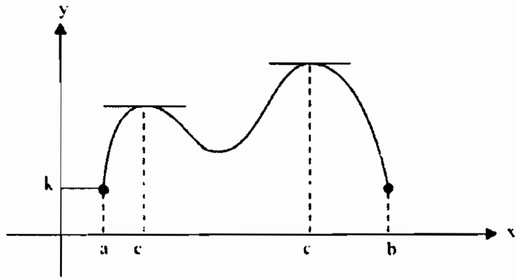
۴-۲-۲ نتیجه. اگر تابع f تابعی با شرایط زیر باشد،

الف) f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد،

ب) f روی فاصله (a,b) مشتق‌پذیر باشد،

ج) $f(a) = f(b) = k$ باشد،

آنگاه $c \in (a,b)$ وجود دارد، به طوری که $f'(c) = 0$ است.



شکل ۴-۱۰

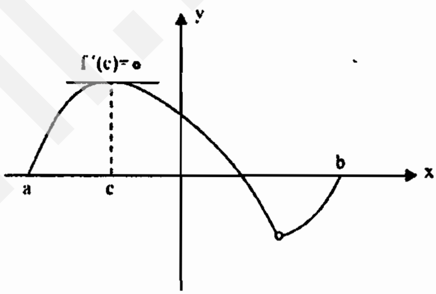
اثبات. تابع g را بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) - k \quad , \quad a \le x \le b$$

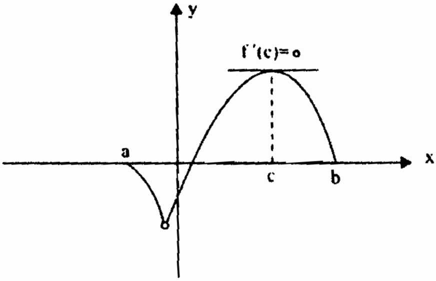
بنا به فرض $g(a) = g(b) = 0$، g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $g'(x) = f'(x)$. بنا بر قضیه رُل نقطه‌ای مانند c، $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $g'(c) = f'(c) = 0$.

۴-۲-۳ تذکر. ۱) عکس قضیه رُل ممکن است درست نباشد. بدین معنی که اگر تابعی در نقطه c روی فاصله بسته $[a,b]$ دارای مشتق صفر باشد $\left(f'(c) = 0\right)$، لازم نیست که شرایط قضیه رُل برقرار باشد.

به شکل‌های زیر توجه کنید.



شکل ۴-۱۱



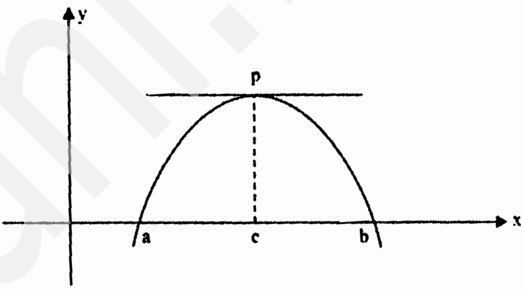
شکل ۴-۱۲

شکل شماره ٤-۱۱ تابعی را نشان می‌دهد که شرط دوم قضیه رُل را نداشته ولی نقطه $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c) = ۰$.

شکل شماره ٤-۱۲ تابعی را نشان می‌دهد که شرط اول و دوم قضیه رُل را نداشته ولی نقطه $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f'(c) = ۰$ می‌باشد.

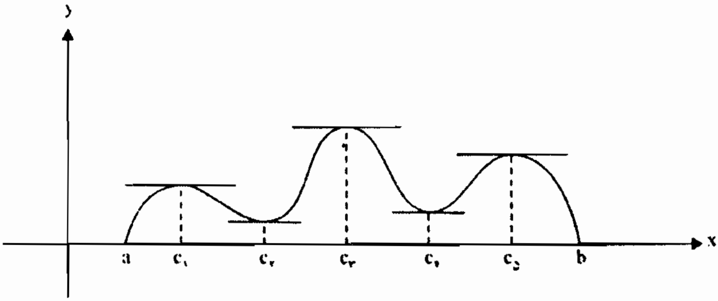
۲) تعبیر هندسی قضیه رُل آن است که تابعی شرایط قضیه را داشته باشد، همواره نقطه‌ای بین $x = a$ و $x = b$ می‌توان یافت که خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه موازی محور xها باشد.

به شکل زیر توجه کنید:



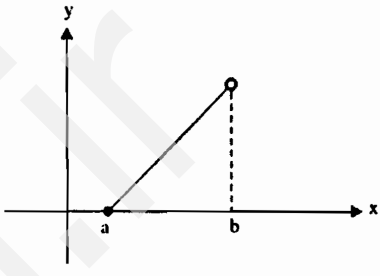
شکل ۴-۱۳

۳) وجود نقطه c منحصر به فرد نیست. به عبارت دیگر ممکن است در فاصله $[a,b]$ نقاط زیادی را یافت که خط مماس در آن نقاط موازی محور xها باشد مانند شکل زیر:



شکل ۴-۱۴

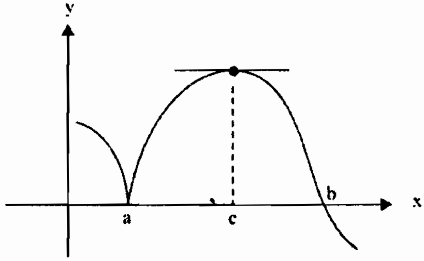
۴) توجه کنید که وجود پیوستگی در نقاط انتهائی فاصله بسته $[a,b]$ الزامی نبوده و کافی است که تابع در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد. به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۴-۱۵

در این شکل تابعی را ملاحظه می‌کنید که در فاصله (a,b) پیوسته است و $f(a) = f(b) = 0$ و تابع در فاصله (a,b) مشتق‌پذیر، ولی هیچ نقطه‌ای در فاصله باز (a,b) وجود ندارد به طوری که خط مماس در آن نقطه موازی محور xها باشد.

۵) وجود مشتق در نقاط انتهائی فاصله الزامی نیست و کافی است که تابع در فاصله باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد، تابعی که نمودار آن در زیر رسم شده دارای نقطه‌ای مانند c است که مماس در آن نقطه بر منحنی تابع موازی محور xها است ولی در نقاط a و b مشتق ندارد.



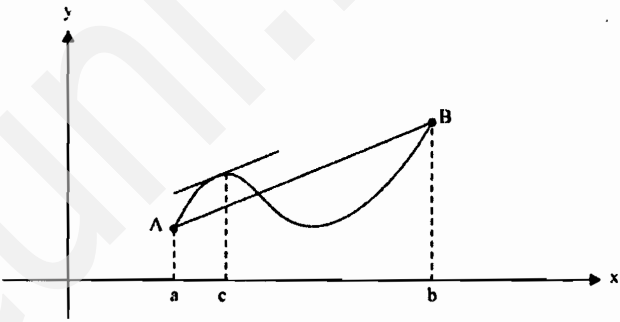
شکل ۴-۱۶

۴-۲-۴ قضیه مقدار میانگین. اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (1)$$

رابطه (۱) را می‌توان به صورت $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ نیز نوشت.

یعنی شیب خطی که نقاط $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ را به هم وصل می‌کند، برابر است با $f'(c)$ که شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(c,f(c))$ است.



شکل ۴-۱۷

اثبات. تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$g(x) = f(x) - kx$ (k مقداری ثابت است)

نشان می‌دهیم که تابع g در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند.

تابع $g(x)$ شرط اول و دوم قضیه رُل را در فاصله $[a,b]$ دارا می‌باشد. زیرا f چنین می‌باشد. حال k را طوری انتخاب می‌کنیم که شرط دوم نیز برای تابع g برقرار باشد.

$$g(a) = g(b) \Rightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow kb - ka = f(b) - f(a)$$

$$\Rightarrow k(b-a) = f(b) - f(a) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

پس اگر از اوّل مقدار k را مساوی $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ انتخاب کنیم، شرط دوم قضیه رُل برای تابع g برقرار است.

حال با توجه به قضیه رُل، نقطه‌ای مانند c، $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $g'(c) = 0$ و چون:

$$g'(x) = f'(x) - k$$

$$g'(c) = f'(c) - k \Rightarrow 0 = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$$

پس:

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

اثبات. دوم. تابع g را بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \quad , \quad a \le x \le b$$

نشان می‌دهیم که تابع g در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند.

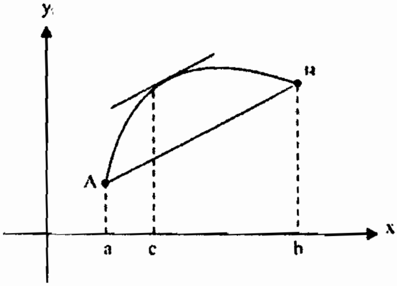
g بر $[a,b]$ پیوسته است زیرا f چنین است. همچنین g بر (a,b) مشتق‌پذیر است و:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad , \quad x \in (a,b)$$

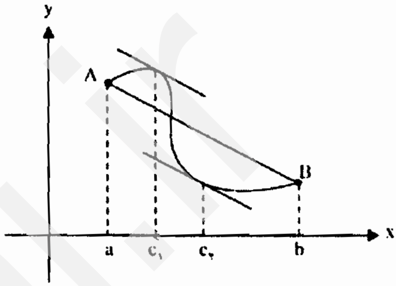
همچنین $g(a) = g(b) = 0$. بنا بر قضیه رل نقطه‌ای مانند c، $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که $g'(c) = 0$:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

۴-۲-۵ تعبیر هندسی. فرض کنید تابع f در شرایط قضیه میانگین صدق کند. شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۱۸



شکل ۴-۱۹

بنا بر قضیه مقدار میانگین نقطه‌ای مانند c، $c \in (a,b)$ موجود است، به طوری که ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $(c, f(c))$، برابر ضریب زاویه خط AB می باشد و به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند c، $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که خط مماس در آن نقطه با خط AB موازی است.

۴-۲-۶ مثال.

ابتدا نشان دهید که هر یک از توابع زیر در بازهٔ داده شده در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند، سپس مقدار c قضیه رُل را به دست آورید.

$$f(x)=x^{4}-4x^{2}\ ,\ x\in[0,2] \qquad (1)$$

حل. تابع f در بازه $[0,2]$ پیوسته و در $(0,2)$ مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(2)=0$. پس شرایط قضیه رُل برقرار است. نقطه‌ای مانند c، $c\in(0,2)$ یافت می‌شود که $f'(c)=0$.

$$f'(x)=4x^{3}-8x \Rightarrow f'(c)=4c^{3}-8c=0 \Rightarrow 4c(c^{2}-2)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} c=0 \\ c=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

مقدار $\sqrt{2}$ برای c قابل قبول است.

$$f(x)=x^{3}-6x^{2}+10x-5\ ,\ x\in[1,4] \qquad (2)$$

حل. تابع f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است پس در بازه $[1,4]$ پیوسته و در بازه $(1,4)$ مشتق‌پذیر است و $f(1)=0$ و $f(4)=3$ پس $f(1)\neq f(4)$.

در نتیجه شرایط قضیه رُل برقرار نیست.

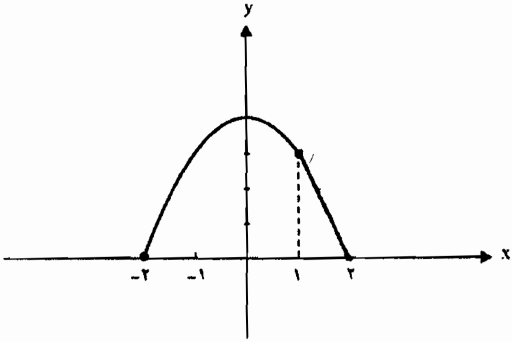
$$f'(x)=3x^{2}-12x+10=0 \Rightarrow 3c^{2}-12c+10=0 \Rightarrow c=\frac{6\pm\sqrt{6}}{6}$$

که فقط $c=\frac{6-\sqrt{6}}{6}\in(1,4)$ و $f'(c)=0$.

نکته: در صورتی از نتیجه یک قضیه می‌توان استفاده کرد که تمام شرایط آن قضیه برقرار باشد و گاهی ممکن است همه مفروضات و شرایط مربوط به یک قضیه برقرار نباشد ولی نتیجه آن قضیه برقرار باشد مانند مثال فوق.

$$f(x)=\begin{cases}4-x^{2} & -2\le x\le 1\\ 6-3x & 1<x\le 2\end{cases}\ ,\quad x\in[-2,2] \qquad (3)$$

حل. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



f در بازه $[-۲,۲]$ پیوسته است ولی در $(-۲,۲)$ مشتق‌پذیر نیست زیرا:

$$f'(x)=\begin{cases}-۲x & -۲<x<۱\\ -۳ & ۱<x<۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_-(۱)=-۲\\ f'_+(۱)=-۳\end{cases} \Rightarrow$$ $f'(۱)$ وجود ندارد

پس f روی بازه $(-۲,۲)$ مشتق‌پذیر نیست ولی $f'(\circ)=\circ$.

۴-۲-۷ مثال.

۱) معادلهٔ $x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\cdots+a_{n-۱}x=\circ$ را که در آن n یک عدد طبیعی و $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{n-۱}$ اعدادی حقیقی‌اند در نظر بگیرید و فرض کنید که $x=r$ یک ریشه مثبت این معادله باشد با استفاده از قضیه رُل نشان دهید که معادلهٔ

$$nx^{n-۱}+a_۱(n-۱)x^{n-۲}+\cdots+a_{n-۱}=\circ$$

حداقل یک ریشه مثبت کوچکتر از r دارد.

حل. توجه کنید که $x=\circ$ در این معادله صدق می‌کند. حال تابع

$$f(x)=x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\cdots+a_{n-۱}x$$

را در فاصله $[\circ,r]$ در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض $f(r)=f(\circ)=\circ$، و از طرفی f در فاصله $[\circ,r]$ پیوسته و در فاصله $(\circ,r)$ مشتق‌پذیر است. بنا بر قضیه رُل برای حداقل یک عدد c به طوری که $\circ<c<r$ باشد، $f'(c)=\circ$ است. اما داریم:

$$f'(x) = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

بنابراین عدد مثبت c، $c < r$، ریشه معادله زیر نیز هست:

$$nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

۲) فرض کنید n عددی مثبت و زوج باشد، a و b اعدادی حقیقی باشند. با استفاده از قضیه رُل نشان دهید که معادله $x^n + ax + b = 0$ نمی‌تواند بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

حل. تابع $f(x) = x^n + ax + b$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در تمام نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$f'(x) = nx^{n-1} + a$$

چون n عددی طبیعی و زوج است، $n-1$ مثبت و فرد، و در نتیجه $f'(x) = 0$ بیش از یک ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت، که برابر است با:

$$nx^{n-1} + a = 0 \Rightarrow x^{n-1} = -\frac{a}{n} \Rightarrow x = \sqrt[n-1]{\frac{-a}{n}}$$

حال اگر معادله $x^n + ax + b = 0$ بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد مثلاً x_1، x_2 و x_3، می‌توان فرض کرد که رابطه $x_1 < x_2 < x_3$ برقرار باشد. در این صورت داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

بنا بر قضیه رُل عددی مانند c_1، $x_1 < c_1 < x_2$، وجود دارد به طوری که داریم:

$$f'(c_1) = 0$$

و بنا بر قضیه رُل عددی مانند c_2، $x_2 < c_2 < x_3$، وجود دارد به طوری که داریم:

$$f'(c_2) = 0$$

بنابراین $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ دو ریشه متمایز $c_1 \neq c_2$ دارد. ولی ما نشان دادیم که معادله $f'(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد، و این تناقض از آنجا ناشی شده است که فرض کردیم $x^n + ax + b = 0$ بیش از دو ریشهٔ حقیقی دارد. در نتیجه معادله $x^n + ax + b = 0$ نمی‌تواند بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

۳) فرض کنید n عددی فرد و طبیعی و a و b اعدادی حقیقی باشند. با استفاده از قضیه رل نشان دهید که معادله $x^n + ax + b = 0$ بیش از سه ریشهٔ حقیقی نمی‌تواند داشته باشد.

حل. تابع $f(x) = x^n + ax + b$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در تمام نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر، و $f'(x) = nx^{n-1} + a$ است. حال اگر n یک عدد فرد و مثبت باشد، $n-1$ زوج مثبت و یا صفر خواهد بود، و در نتیجه معادلهٔ $f'(x) = 0$ بیش از دو ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت. حال اگر معادله $x^n + ax + b = 0$ بیش از سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد، مثلاً x_1، x_2، x_3 و x_4، می‌توانیم فرض کنیم که رابطه $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ برقرار است، داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

از آنجایی که f در فاصله $[x_1, x_2]$ پیوسته و در فاصله (x_1, x_2) مشتق‌پذیر است، بنا به قضیه رل عدد c_1، $x_1 < c_1 < x_2$، چنان موجود است که $f'(c_1) = 0$ باشد، و به طریق مشابه اعداد c_2 و c_3، $x_2 < c_2 < x_3$ و $x_3 < c_3 < x_4$، چنان موجودند که $f'(c_2) = f'(c_3) = 0$ باشد؛ یا به عبارت دیگر $f'(x) = 0$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز است. ولی ما نشان دادیم که $f'(x) = 0$ بیش از دو ریشه حقیقی ندارد، و این تناقض از آنجا ناشی شده است که فرض کردیم معادله $x^n + ax + b = 0$ بیش از سه ریشه حقیقی داشته باشد.

بنابراین $x^n + ax + b = 0$ نمی‌تواند بیش از سه ریشه حقیقی داشته باشد.

۴) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید که معادله $x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد که در بازه $[0,1]$ قرار دارد.

حل. تابع $f(x)=x^{3}-3x^{2}+5x-2$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(1)=-2<0$$

پس معادله در بازه $(0,1)$ حداقل دارای یک ریشه است.

حال اگر معادله بیش از یک ریشه مثلاً دو ریشه x_1 و x_2 داشته باشد، $(x_1<x_2)$ داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

چون تابع f در R پیوسته و مشتق‌پذیر است پس در بازه $[x_1,x_2]$ پیوسته و در بازه (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه رُل برقرار است و حداقل یک c، $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$، اما $f'(x)=0$ جواب ندارد.

$$f'(x)=3x^{2}-6x+5 \Rightarrow f'(c)=3c^{2}-6c+5=0 \Rightarrow c=\frac{3\pm\sqrt{9-15}}{3}$$

و این با قضیه رُل تناقض دارد. پس فرض اینکه f بیش از یک ریشه دارد باطل است. یعنی معادله دقیقاً یک ریشه در $[0,1]$ دارد.

۴-۲-۸ نکته. از ترکیب قضیه رُل و قضیه بولتزانو محک زیر برای جدا کردن جوابهای حقیقی معادله $f(x)=0$ به دست می‌آید.

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که:

الف) $f(x)$ در بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

ب) $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند، $f(a)f(b)<0$.

ج) $f'(x)$ برای همه مقادیر x در فاصلهٔ (a,b) مخالف صفر باشد.

آنگاه معادله $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$ یک و تنها یک جواب خواهد داشت.

۴-۲-۹ مثال. ابتدا نشان دهید که هر یک از توابع زیر در بازهٔ داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند. سپس مقدار c مربوطه را به دست آورید.

$$f(x)=x^{3}-3x+1 \quad , \quad x\in[0,3] \qquad (1)$$

حل. تابع f در بازه $[0,3]$ پیوسته و در بازه $(0,3)$ مشتق‌پذیر است.

$$f(0)=1 \quad , \quad f(3)=27-9+1=19$$

$$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(c)=3c^2-3$$

$$(b-a)f'(c)=f(b)-f(a) \Rightarrow (3-0)(3c^2-3)=f(3)-f(0)$$

$$9(c^2-1)=19-1 \Rightarrow c^2-1=2 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

فقط مقدار $c=\sqrt{3}\in(0,3)$ قابل قبول است.

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2+2x \quad , \quad x\in[-2,-1] \qquad (2)$$

حل. f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است پس در بازه $[-2,-1]$ پیوسته و در بازه $(-2,-1)$ مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

$$f(-1)=-5 \quad , \quad f(-2)=8$$

$$f'(x)=4x^3+3x^2-6x+2 \Rightarrow f'(c)=4c^3+3c^2-6c+2$$

$$(b-a)f'(c)=f(b)-f(a) \Rightarrow (-1+2)(4c^3+3c^2-6c+2)=-5+8$$

$$4c^3+3c^2-6c-1=0 \Rightarrow (c-1)(4c^2+7c+1)=0$$

$$c=1\notin(-2,-1)$$

$$4c^2+7c+1=0 \Rightarrow c=\frac{-7\pm\sqrt{49-16}}{8}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{-7+\sqrt{33}}{8}\notin(-2,-1) \\ c=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{8}\in(-2,-1) \end{cases}$$

پس فقط $c=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{8}$ قابل قبول است.

۴-۲-۱۰ مثال. ۱) برای تابع $f(x)=۲x^{\frac{۲}{۳}}$ روی $[-۱,۱]$ نشان دهید که هیچ عددی یافت نمی‌شود که در رابطه قضیه مقدار میانگین صدق کند؟ چرا؟

حل. تابع f در بازه $[-۱,۱]$ پیوسته است ولی در بازه $(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در $\circ \in (-۱,۱)$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$f'(\circ)$ وجود ندارد پس شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار نیست. و cای یافت نمی‌شود که در رابطه قضیه مقدار میانگین صدق کند.

۲) برای هر دو عدد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ نشان دهید:

$$|\sin x_۲-\sin x_۱|\le|x_۲-x_۱|$$

حل. فرض کنید $x_۱<x_۲$ تابع $f(x)=\sin x$ در R پیوسته و مشتق‌پذیر است پس در بازه $[x_۱,x_۲]$ پیوسته و در بازه $(x_۱,x_۲)$ مشتق‌پذیر است در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(c)=\cos c$$

$$(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$$

$$\sin x_۲-\sin x_۱=(x_۲-x_۱)\cos c \Rightarrow |\sin x_۲-\sin x_۱|=|x_۲-x_۱||\cos c|$$

و چون $|\cos c|\le ۱$ پس:

$$|\sin x_۲-\sin x_۱|=|x_۲-x_۱||\cos c|\le|x_۲-x_۱| \Rightarrow |\sin x_۲-\sin x_۱|\le|x_۲-x_۱|$$

۳) برای هر دو عدد حقیقی که $\circ<x_۱<x_۲<\frac{\pi}{۲}$، نشان دهید:

$$\operatorname{tg} x_۲-\operatorname{tg} x_۱\ge x_۲-x_۱$$

حل. تابع $f(x) = \mathrm{tg}\,x$ را در نظر می‌گیریم. تابع در بازه $[x_1, x_2]$ پیوسته و در بازه (x_1, x_2) مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است و داریم:

$$f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2 x \Rightarrow f'(c) = 1 + \mathrm{tg}^2 c$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \Rightarrow \frac{\mathrm{tg}\,x_2 - \mathrm{tg}\,x_1}{x_2 - x_1} = 1 + \mathrm{tg}^2 c \geq 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,x_2 - \mathrm{tg}\,x_1 \geq x_2 - x_1$$

۴) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید اگر $0 < a < b$ آنگاه:

$$\frac{b-a}{b} < \mathrm{Ln}\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

حل. تابع $f(x) = \mathrm{Ln}\,x$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\mathrm{Ln}\,b - \mathrm{Ln}\,a}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} = \frac{\mathrm{Ln}\,b - \mathrm{Ln}\,a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

چون $b > a$ پس $b - a > 0$ و طرفین را در $b - a$ ضرب می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\times(b-a)} \frac{b-a}{b} < \mathrm{Ln}\,b - \mathrm{Ln}\,a < \frac{b-a}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \mathrm{Ln}\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

۵) ثابت کنید:

$$(a < b)\frac{b-a}{1+b^2} < \mathrm{Art\,tg}\,b - \mathrm{Arc\,tg}\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

حل. تابع $f(x)=\mathrm{Arctg}\,x$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است و داریم:

$$a<b \quad , \quad a<c<b$$

$$f(x)=\mathrm{Arctg}\,x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \Rightarrow \mathrm{Arctg}\,b-\mathrm{Arctg}\,a=\frac{b-a}{1+c^2}$$

داریم $a<c<b$، در نتیجه:

$$a^2<c^2<b^2 \Rightarrow 1+a^2<1+c^2<1+b^2 \Rightarrow \frac{1}{1+a^2}>\frac{1}{1+c^2}>\frac{1}{1+b^2}$$

$$\xrightarrow{\times(b-a)>0} \frac{b-a}{1+a^2}>\frac{b-a}{1+c^2}>\frac{b-a}{1+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+a^2}>\mathrm{Arctg}\,b-\mathrm{Arctg}\,a>\frac{b-a}{1+b^2}$$

۶) فرض می‌کنیم تابع f روی فاصله بسته $[1,2]$ پیوسته و در فاصله باز $(1,2)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(1)=1$ و $f(2)=2$. ثابت کنید نقطه‌ای مانند x_0 در فاصلهٔ باز $(1,2)$ موجود است که مماس بر منحنی f در x_0 از مبدأ می‌گذرد. (راهنمایی: از تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ می‌توانید استفاده کنید.)

حل. اگر $g(x)=\frac{f(x)}{x}$، آنگاه:

$$g(1)=\frac{f(1)}{1}=\frac{1}{1}=1 \quad , \quad g(2)=\frac{f(2)}{2}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow g(1)=g(2)$$

تابع $g(x)$ در $[1,2]$ پیوسته و در بازه $(1,2)$ مشتق‌پذیر است در نتیجه شرایط قضیه رُل برقرار است.

$$\exists\, c \in (1,2) \Rightarrow g'(c) = 0$$

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \Rightarrow g'(c) = \frac{c f'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \Rightarrow c f'(c) = f(c)$$

معادله خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه A:

$$A\big(c, f(c)\big)$$

$$y - y_A = m_{\text{مماس}}(x - x_A)$$

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \Rightarrow y - f(c) = x f'(c) - c f'(c)$$

$$\Rightarrow y = f'(c)\,x \quad \text{خط مماس}$$

که خط مماس فوق از مبدأ می‌گذرد.

۷) با در نظر گرفتن تابع $f(x) = \operatorname{Ln}(\cos x)$، ثابت کنید:

$$(a-b)\operatorname{tg} b < \operatorname{Ln}\frac{\cos b}{\cos a} < (a-b)\operatorname{tg} a \quad , \quad (0 < a < b < \frac{\pi}{2})$$

حل. تابع $f(x) = \operatorname{Ln}\cos x$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است و داریم:

$$f(x) = \operatorname{Ln}\cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \Rightarrow f'(c) = -\operatorname{tg} c$$

رابطه قضیه:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

رابطه (۱):

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}(\cos b) - \operatorname{Ln}(\cos a) = (b-a)(-\operatorname{tg} c) = (a-b)\operatorname{tg} c$$

داریم:

$$0 < a < c < b \Rightarrow \operatorname{tg} a < \operatorname{tg} c < \operatorname{tg} b$$

چون $a - b < 0$، پس داریم:

$$\xrightarrow{\times(a-b)} (a-b)\,tg\,a > (a-b)\,tg\,c > (a-b)\,tg\,b$$

بنا به رابطه (۱) داریم:

$$(a-b)\,tg\,b < Ln\cos b - Ln\cos a < (a-b)\,tg\,a$$

$$\Rightarrow \quad (a-b)\,tg\,b < Ln\frac{\cos b}{\cos a} < (a-b)\,tg\,a$$

۸) نشان دهید:

$$(x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,x \le Ln\sin x \le ۰ \quad , \quad (\frac{\pi}{۲} < x < \pi)$$

حل. تابع $f(x)=Ln(\sin x)$ در بازه $[\frac{\pi}{۲},x]$ پیوسته و در بازه $(\frac{\pi}{۲},x)$ مشتق‌پذیر است. در نتیجه شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

$$f(x)=Ln(\sin x) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x} \;\Rightarrow\; f'(c)=\cot g\,c$$

$$\exists c\in(\frac{\pi}{۲},x) \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{۲}<c<x$$

$$f(x)-f(\frac{\pi}{۲})=f'(c)(x-\frac{\pi}{۲})$$

$$Ln(\sin x)-Ln\sin\frac{\pi}{۲}=(x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,c$$

$$Ln(\sin x)=(x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,c$$

$$\frac{\pi}{۲}<c<x \;\Rightarrow\; \cot g\,x<\cot g\,c<\cot g\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,x \le (x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,c \le (x-\frac{\pi}{۲})(۰)$$

$$\Rightarrow \quad (x-\frac{\pi}{۲})\cot g\,x \le Ln(\sin x) \le ۰$$

۴-۲-۱۱ قضیه کُشی (قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته). فرض کنید دو تابع f و g دارای شرایط زیر باشند:

الف) هر دو روی فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند.

ب) هر دو روی فاصله باز (a,b) مشتق‌پذیر باشند.

ج) به ازای تمام xهای فاصله (a,b) مشتق تابع g مخالف صفر باشد ($g'(x) \neq 0$).

آنگاه عددی مانند c در فاصله باز (a,b) وجود دارد، به طوری که:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $g(b) \neq g(a)$ است. زیرا اگر $g(b) = g(a)$ باشد، چون تابع g دارای شرایط قضیه مقدار میانگین می‌باشد، پس عددی مانند c، $c \in (a,b)$ وجود دارد به قسمی که:

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

اما اگر $g(b) = g(a)$ باشد یعنی عددی مانند c وجود دارد به طوری که $g'(c) = 0$ است و این با فرض سوم قضیه متناقض است، پس $g(b) \neq g(a)$.

حال تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = f(x) - k\,g(x) \qquad (\text{k مقدار ثابت})$$

تابع h روی فاصله $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. زیرا f و g چنین است. بنابراین شرط اول و دوم قضیه رُل برای تابع h روی فاصله $[a,b]$ برقرار است و برای اینکه شرط سوم قضیه رُل برقرار باشد، سعی می‌کنیم k را طوری اختیار کنیم که داشته باشیم $h(a) = h(b)$.

$$h(a) = h(b) \iff f(a) - k\,g(a) = f(b) - k\,g(b)$$
$$\iff f(b) - f(a) = k\big(g(b) - g(a)\big)$$

و یا:

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

بنابراین اگر از ابتدا مقدار k را برابر با $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ اختیار کنیم، شرط سوم قضیه رُل نیز برای تابع h برقرار خواهد بود و در نتیجه عددی مانند c، $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $h'(c)=0$ است.

از طرفی:

$$h'(x)=f'(x)-kg'(x)$$

$$h'(c)=f'(c)-kg'(c)$$

و چون $h'(c)=0$ است پس:

$$f'(c)-kg'(c)=0 \;\;\Rightarrow\;\; f'(c)=kg'(c)$$

و با استفاده از فرض سوم که $g'(c)\neq 0$ داریم:

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

و یا:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

۴-۲-۱۲ مثال. شرایط قضیه کُشی را برای تابع زیر بررسی کرده و مقدار مناسب c را تعیین کنید.

$$f(x)=x^3 \;,\quad g(x)=x^2 \;,\quad x\in[0,2]$$

حل. چون f و g هر دو کثیرالجمله هستند. همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشند.

$g'(x)=2x$ که در بازه $(0,2)$ مخالف صفر می‌باشد، لذا شرایط قضیه کُشی برقرار است.

برای تعیین c می‌نویسیم: $c\in(0,2)$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}$$

چون $f'(x)=3x^2$ داریم:

$$\frac{3c^2}{2c}=\frac{8-0}{4-0}$$

$$\frac{3c}{2}=2 \Rightarrow 3c=4 \Rightarrow c=\frac{4}{3}$$

۴-۲-۱۳ تمرین. شرایط قضیه کشی را برای توابع داده شده بررسی کنید و در صورت برقرار بودن شرایط، مقدار مناسب c را تعیین کنید.

۱) $f(x)=x^2+2x\ ;\ g(x)=x+1 \quad , \quad x\in[1,3]$

۲) $f(x)=x^3+4x^2+1\ ;\ g(x)=5x^2 \quad , \quad x\in[2,5]$

۳) $f(x)=\frac{2}{x+1}\ ;\ g(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad x\in[1,4]$

۴-۲-۱۴ تمرین. ۱) ابتدا نشان دهید که هر یک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه رُل صدق می‌کند. سپس مقدار c مربوطه را به دست آورید.

۱) $f(x)=x^3-2x^2-x+2 \quad , \quad x\in[-1,2]$

۲) $f(x)=x^3-16x \quad , \quad x\in[-4,0]$

۳) $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}} \quad , \quad x\in[0,3]$

۴) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}} \quad , \quad x \in [0,4]$

۵) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \le 2 \\ 7-x & x > 2 \end{cases} \quad , \quad x \in [-3,7]$

۶) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x-3} \quad , \quad x \in [-3,4]$

۷) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad , \quad x \in [2,3]$

۸) $f(x) = (x-\pi)\sin x \quad , \quad x \in [0,\pi]$

۹) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x < 2 \\ 5x - 4 & x \ge 2 \end{cases} \quad , \quad x \in [-3,4]$

۱۰) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x-1} \quad , \quad x \in [-2,4]$

۲) اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ باشد، به کمک قضیه رُل ثابت کنید که معادله $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ در بازه $(0,1)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۳) به کمک قضیه رُل ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = 0$، که در آن c یک ثابت دلخواه است، نمی‌تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

۴) با استفاده از قضیه رُل ثابت کنید معادله $f(x) = 0$ ، $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$ دقیقاً یک ریشه در بازه $(0,1)$ دارد.

۵) ابتدا نشان دهید که هر یک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند. سپس مقدار c مربوطه را به دست آورید.

۱) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x \in [0,1]$

۲) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} \quad , \quad x \in [\frac{3}{2}, 3]$

۳) $$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x<3 \\ 15-2x & x\ge 3 \end{cases} \quad , \quad x\in[-1,5]$$

۴) $$f(x)=3(x-4)^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x\in[-4,5]$$

۵) $$f(x)=\frac{x^2-3}{x+3} \quad , \quad x\in[-5,0]$$

۶) $$f(x)=x^2+7x-1 \quad , \quad x\in[-1,5)$$

۶) نشان دهید هر چندجمله‌ای از درجه ۳ حداکثر ۳ ریشه حقیقی دارد.

۷) نشان دهید معادله $x^5+3x^3+x+13=0$ دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

۸) نشان دهید معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $a>0$ و $n\in N$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۹) نشان دهید معادله $x^5+x^3+x+1=0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۱۰) نشان دهید:

$$\frac{x}{1+x}<\mathrm{Ln}(1+x)<x \quad , \quad (x>0)$$

۱۱) نشان دهید:

$$\frac{1}{x+1}<\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x} \quad , \quad (x>0)$$

۱۲) اگر f بر بازه بسته $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه باز $(0,1)$ موجود و صعودی باشد نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

۱۳) فرض کنید $f'(x)=\frac{x}{1+x^2}$. ثابت کنید به ازای هر a و b متمایز داریم:

$$|f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

۱۴) اگر $\frac{\pi}{2} > \alpha \geq \beta > 0$ باشد، نشان دهید که:

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leq \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

۱۵) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله $[0,2]$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$$

۱۶) ثابت کنید که معادلهٔ $x = 2^{-x}$ یک و تنها یک ریشه در بازهٔ $(0,1)$ دارد.

۱۷) قضیهٔ رُل را بیان کرده و با استفاده از آن نشان دهید که معادلهٔ $x^3 + x - 1 = 0$ یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۱۸) قضیه رُل را فقط بیان کنید و سپس با استفاده از آن ثابت کنید که بین هر دو ریشه حقیقی معادلهٔ $e^x \sin x = 1$ حداقل یک ریشه $e^x \cos x = -1$ قرار دارد.

(راهنمایی: فرض کنید $f(x) = e^{-x} - \sin x$)

۱۹) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نامساوی زیر را بررسی کنید.

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{x}{x+1} \quad , \quad (0 < x \leq 1)$$

۲۰) قضیه مقدار میانگین را بیان کرده و نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی $\alpha \geq 1$ رابطهٔ زیر برقرار است. (به شرط آن که $(z+1) > 0$ باشد).

$$(1+z)^\alpha \geq 1+\alpha z$$

۲۱) با استفاده از قضیه رُل نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 = 12x$ فقط یک ریشه در $[-1,1]$ دارد.

۲۲) ثابت کنید که تابع $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ در فاصلهٔ $[0,1]$ تنها یک ریشه دارد.

۲۳) فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[0,1]$ پیوسته و روی بازه $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند c، $0 < c < 1$ وجود دارد به طوری که:

$$c^2 f'(c) + 2c f(c) = f(1)$$

۴-۳ تعیین ماکزیمم و مینیمم

۴-۳-۱ تعریف. فرض کنید تابع f بر بازه I تعریف شده باشد.

الف) گوییم تابع f در بازه I اکیداً صعودی است؛ هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

ب) گوییم تابع f در بازه I صعودی است؛ هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

ج) گوییم تابع f در بازهٔ I نزولی است؛ هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

د) گوییم تابع f در بازه I اکیداً نزولی است؛ هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

۴-۳-۲ قضیه. فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x) > 0$، آنگاه f روی $[a,b]$ تابعی صعودی است.

ب) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x)<0$، آنگاه f روی $[a,b]$ تابعی نزولی است.

اثبات. الف) فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد متمایز دلخواه در بازهٔ $[a,b]$ باشند، به طوری که $x_1<x_2$. پس f بر بازه $[x_1,x_2]$ پیوسته و بر بازه (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه مقدار میانگین عددی مانند c، $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

چون $f'(c)>0$ و $x_2-x_1>0$ پس باید $f(x_2)-f(x_1)>0$ در نتیجه $f(x_2)>f(x_1)$؛ بنابراین برای هر دو عدد دلخواه x_1 و x_2 پس $[a,b]$ داریم:

$$x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$$

پس تابع f روی بازه $[a,b]$ صعودی است.

ب) فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد متمایز دلخواه در بازهٔ $[a,b]$ باشد؛ به طوری که $x_1<x_2$. پس f بر بازه $[x_1,x_2]$ پیوسته و بر بازهٔ (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه مقدار میانگین عددی مانند c، $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد که:

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

چون $f'(c)<0$ و $x_2-x_1>0$، پس باید $f(x_2)-f(x_1)<0$ در نتیجه $f(x_2)<f(x_1)$؛ بنابراین برای هر دو عدد دلخواه x_1 و x_2 در بازه $[a,b]$ داریم:

$$x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$$

پس تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. ▾

۴-۳-۳ قضیه. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، به علاوه برای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) = 0$ باشد، آنگاه مقدار f روی $[a,b]$ ثابت است.

اثبات. برای هر $x \in (a,b)$ قضیه مقدار میانگین را برای تابع f در بازه $[a,b]$ می‌نویسیم.

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \quad , \quad a < c < x$$

ولی $f'(c) = 0$، در نتیجه $f(x) = f(a)$، پس برای هر $x \in [a,b]$ داریم:

$$f(x) = f(a)$$

یعنی مقدار f در فاصله $[a,b]$ ثابت است.

۴-۳-۴ نتیجه. اگر f و g دو تابع باشند به طوری که مشتق آنها روی (a,b) برابر باشد، یعنی:

$$f'(x) = g'(x) \quad , \quad x \in (a,b)$$

آنگاه برای هر $x \in (a,b)$:

$$f(x) - g(x) = k \qquad \text{(k عدد ثابت)}$$

زیرا مشتق تابع با ضابطه $h(x) = f(x) - g(x)$ روی (a,b) برابر صفر است.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

پس برای هر $x \in [a,b]$، $h(x)$ تابع ثابت است یعنی:

$$h(x) = f(x) - g(x) = k \quad , \quad k \in R$$

۴-۳-۵ تعریف. نقطه $c \in D_f$ را یک نقطه بحرانی f می‌نامیم، در صورتی که یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $f'(c) = 0$ باشد.

ب) $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

۴-۳-۶ تذکر. هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است، ولی هر نقطه بحرانی، ممکن است اکسترمم نسبی نباشد. یک شرط لازم برای این که تابعی در عدد حقیقی c اکسترمم نسبی باشد، آن است که c یک نقطه بحرانی تابع باشد.

۴-۳-۷ مثال.

۱) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

$$y = 3x^5 - 5x^3$$

حل. الف) از تابع مشتق گرفته، نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

ب) مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y' = 15x^4 - 15x^2$$

$$y' = 0 \Rightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{vmatrix}$$ ریشه مضاعف

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	●	−	●	−	●	+	
y		صعودی		نزولی		نزولی		صعودی	

در تعیین علامت بزرگترین حد y' را در شاخه آخر می‌نویسیم، بقیه را یک در میان تغییر علامت می‌دهیم، فقط طرفین ریشه زوج تغییر نمی‌کند.

۲) نشان دهید معادله $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه در R دارد.

حل. تابع $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ را در نظر می‌گیریم. چون $\begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(-1) = -2 < 0 \end{cases}$ پس $f(0)f(-1) = -2 < 0$ و بنا به قضیه مقدار میانی معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در بازه $(-1, 0)$ دارد. از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ پس تابع f روی R صعودی است در نتیجه محور xها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. از این‌رو معادله $f(x) = 0$ فقط یک ریشه دارد.

۳) نشان دهید معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ برای $a>0$ و $n\in N$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حل. تابع $f(x)=x^{2n+1}+ax+b$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{cases}$ و $\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-\infty \end{cases}$. پس دو عدد مانند α و β یافت می‌شوند به طوری که:

$$\begin{cases} f(\alpha)>0 \\ f(\beta)<0 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$$

پس بنا به قضیه مقدار میانی معادله دارای حداقل یک ریشه بین دو عدد α و β است.

از طرفی $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+a>0$، پس تابع f روی R صعودی است در نتیجه محور xها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین معادله $f(x)=0$ فقط یک ریشه دارد.

۴) ثابت کنید $\text{Arctg}\,x+\text{Arccotg}\,x=\frac{\pi}{2}$.

حل. تابع $f(x)=\text{Arctg}\,x+\text{Arccotg}\,x$ را روی R در نظر بگیرید. f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}=0 \Rightarrow f(x)=k \quad \text{ثابت}$$

برای تعیین k کافی است x را مقدار دلخواهی مثلاً $x=1$ اختیار کنیم.

$$f(1)=\text{Arctg}\,1+\text{Arccotg}\,1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=k \Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}$$

پس: $$\text{Arctg}\,x+\text{Arccotg}\,x=\frac{\pi}{2}$$

۵) ثابت کنید $\text{Arcsin}\,x+\text{Arccos}\,x=\frac{\pi}{2}$.

حل. مانند مثال (۴) حل کنید.

۶) ثابت کنید روی بازه $[0,\frac{\pi}{2})$ داریم: $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$

حل. دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$ را در نظر بگیرید.

«می‌دانیم اگر f و g روی $[a,b)$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشند و $f(a)=g(a)$ و نیز برای هر x، $x\in(a,b)$، $f'(x)<g'(x)$ آنگاه برای هر x، $x\in(a,b)$ داریم $f(x)<g(x)$.»

$$\begin{cases} f'(x)=-\sin x \\ g'(x)=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=-\sin x \geq -x = g'(x) \\ f(0)=g(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\geq g(x) \Rightarrow \cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$$

۷) ثابت کنید به ازای هر x در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$، $x\leq \operatorname{tg} x$.

حل. دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\operatorname{tg} x$ را در نظر بگیرید. توابع f و g در $[0,\frac{\pi}{2})$ پیوسته و در $(0,\frac{\pi}{2})$ مشتق‌پذیرند.

$$\begin{cases} f'(x)=1 \\ g'(x)=\operatorname{tg}^2 x+1 \end{cases} \Rightarrow 1\leq 1+\operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \begin{cases} f'(x)\leq g'(x) \\ f(0)=g(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\leq g(x) \Rightarrow x\leq \operatorname{tg} x$$

۸) ثابت کنید به ازای هر x در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$، $x\geq \sin x$.

حل. تابع $f(x)=x-\sin x$ را در نظر بگیرید. در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$ داریم:

$$f'(x)=1-\cos x\geq 0 \Rightarrow \text{f صعودی است}$$

$$x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(0) \Rightarrow x-\sin x\geq 0 \Rightarrow x\geq \sin x$$

۹) ثابت کنید برای هر x، اگر $0 < x < \pi$ آنگاه $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$.

حل. دو تابع $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \\ g'(x) = \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4} \Rightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < g'(x) \\ f(0) = g(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) < g(x) \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x$$

۴-۳-۸ تمرین.

۱) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

$f(x) = x^4 - 2x^2$ $\qquad$ $f(x) = -x^5 - 4x + 2$

$f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \;,\; D_f = [-2, 2]$ $\qquad$ $f(x) = \frac{-x + 2}{(x-1)^2} \;,\; D_f = R - \{1\}$

$f(x) = |x| - |x + 1|$ $\qquad$ $f(x) = [x]$

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ $\qquad$ $f(x) = x + \cos x$

$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2} \qquad\qquad f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x^3 (x-2)^2$$

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x - 2 \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$$

۲) با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$، نامساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\sin x < x$ ب) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$

۳) نشان دهید:

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctg} x < x \quad , \quad (x > 0)$$

۴) با فرض $f(x) = x - \operatorname{Ln}(1+x)$ و $0 < x < 1$ نشان دهید:

$$\frac{x^2}{4} < x - \operatorname{Ln}(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

۵) نشان دهید:

$$\frac{x}{x+1} < \operatorname{Ln}(1+x) < x \quad , \quad (x > 0)$$

۶) نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

۷) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد نشان دهید:

$$\operatorname{tg} x + \sin x > 2x$$

۸) فرض کنید تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و f'' در فاصله (a,b) همواره موجود و مثبت باشد. نشان دهید:

$$\forall x, y \in [a,b] : f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

۹) اگر f بر بازه بسته $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه باز $(0,1)$ موجود و صعودی باشد، نشان دهید که $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

۴-۳-۹ مثال. نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $$y=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f=R$$

حل.
$$y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})=\frac{4}{3}(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}})$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1\in D_f$$
$$\sqrt[3]{x^2}=0 \Rightarrow x=0\in D_f$$

پس $x=0,-1$ نقاط بحرانی تابع است.

۲) $$y=\cos^2 x-\sin^2 x-1$$

حل.
$$y=\cos 2x-1 \quad , \quad D_f=R$$
$$y'=-2\sin 2x$$
$$y'=0 \Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \quad , \quad k\in Z$$
$$x=\frac{k\pi}{2}$$

پس برای تابع f نقاط بحرانی $x=\frac{k\pi}{2}$ و $k\in Z$.

۳ $$f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

حل.

$$۴-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۴ \Rightarrow |x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow D_f = [-۲,۲]$$

$$f'(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}} = \frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$$

برای تعیین نقاط بحرانی از تابع مشتق می‌گیریم:

الف) صورت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

ب) مخرج را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$-x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$۴-x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

پس نقاط بحرانی تابع، $x = ۰, \pm ۲$ می‌باشد.

۴) $$f(x) = \frac{x^۲}{x-۱}$$

حل. $$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_f = R-\{۱\}$$

$$f'(x) = \frac{۲x(x-۱)-۱(x^۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{۲x^۲-۲x-x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$\text{صورت} = ۰ \Rightarrow x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \notin D_f$$

پس نقاط بحرانی تابع $x = ۰,۲$ می‌باشد.

تذکر. «از صورت برابر صفر، نقاطی به دست می‌آید که مشتق را صفر می‌کند. از مخرج برابر صفر، نقاطی به دست می‌آید که مشتق در آن وجود ندارد.»

۵) $f(x)=|x^{۲}-۱|+۱$

حل.
$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\le -۱ \\ ۲-x^{۲} & -۱\le x\le ۱ \\ x^{۲} & x\ge ۱\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<-۱ \\ \text{موجود نیست} & x=-۱ \\ -۲x & -۱<x<۱ \\ \text{موجود نیست} & x=۱ \\ ۲x & x>۱\end{cases} \Rightarrow f'(x)=۰ \Rightarrow x=۰$$

نقاط ۱ و ۰ و ۱- نقاط بحرانی تابع‌اند زیرا در ۱ و ۱- مشتق وجود ندارد و $f'(۰)=۰$.

۴-۳-۱۰ تمرین. نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=۴x^{۴}+۴x^{۳}$ ۲) $f(x)=\dfrac{-x}{x^{۲}+۴}$

۳) $f(x)=\sin^{۲}x-\sin x$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳ & -\frac{۳}{۲}\le x<۲ \\ -x+۳ & ۲\le x\le ۵\end{cases}$

۵) $f(x)=x^{\frac{۷}{۳}}+x^{\frac{۴}{۳}}-۳x^{\frac{۱}{۳}}$ ۶) $f(x)=\sqrt[۳]{(x^{۳}-۳x^{۲}+۴)}$

۷) $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۲}-۵x+۴}$ ۸) $f(x)=x^{\frac{۳}{۲}}-۴x^{\frac{۱}{۲}}+۲$

۴-۳-۱۱ قضیه. اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و نقطه $c\in(a,b)$ نقطه اکسترمم مطلق تابع روی این بازه باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.

اثبات. چون f در همسایگی c تعریف شده است پس c اکسترمم نسبی تابع است. اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد c را نقطه بحرانی f گویند و اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ که باز هم c نقطه بحرانی است.

۴-۳-۱۲ قضیه (آزمون مشتق اول). فرض کنید عدد حقیقی c، $a < c < b$ نقطه بحرانی تابع f باشد و تابع f روی بازه (a,b) پیوسته، و در تمام نقاط آن به‌جز c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c یک ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c یک مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر f' روی (a,c) و روی (c,b) هم‌علامت باشد، آنگاه f در c یک اکسترمم نسبی ندارد.

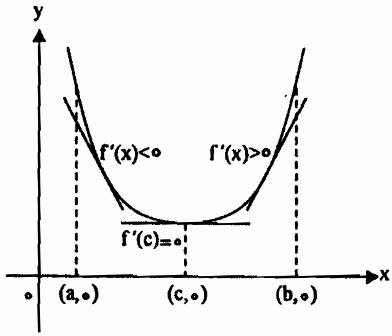
اثبات. الف) اگر $f'(x)$ روی (a,c) مثبت باشد آنگاه f روی $[a,c]$ صعودی است، و اگر $f'(x)$ روی (c,b) منفی باشد، f روی $[c,b]$ نزولی است. بنابراین برای xهای متعلق به $[a,c)$، $f(x) < f(c)$، و برای تمام xهای متعلق به $(c,b]$، $f(x) < f(c)$. در نتیجه طبق تعریف ماکزیمم نسبی، f در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f'(x)$ روی (a,c) منفی، f روی $[a,c]$ نزولی است، و اگر $f'(x)$ روی (c,b) مثبت باشد، f روی $[c,b]$ صعودی است. بنابراین برای xهای متعلق به $[a,c)$، $f(x) > f(c)$، و برای تمام xهای متعلق به $(c,b]$، $f(x) > f(c)$، در نتیجه طبق تعریف مینیمم نسبی، f در $x = c$ مینیمم نسبی دارد.

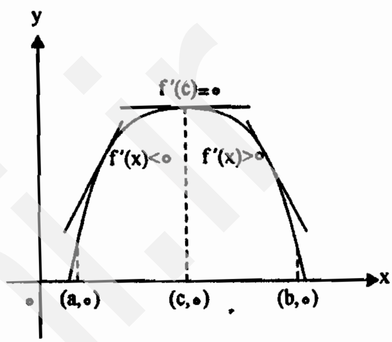
ج) اگر $f'(x)$ روی (a,c) و روی (c,b) هم‌علامت باشد، f روی $[a,b]$ همیشه صعودی و یا همیشه نزولی است. بنابراین $f(c)$ اکسترمم نسبی f نیست.

۴-۳-۱۳ تذکر. به‌طور خلاصه، آزمون مشتق اول بیان می‌کند که اگر $f'(x)$ در نقطهٔ بحرانی c از مثبت به منفی تغییرعلامت دهد، $f(c)$ ماکزیمم نسبی f، و اگر $f'(x)$ در نقطهٔ بحرانی c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، $f(c)$ مینیمم نسبی f است.

در شکل زیر به ترتیب حالت اول و دوم آزمون مشتق اول را نشان می‌دهند.

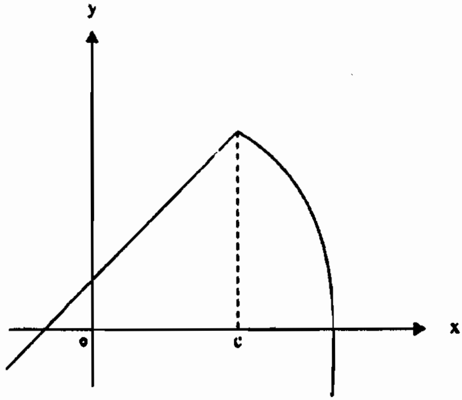


شکل ۴-۲۰



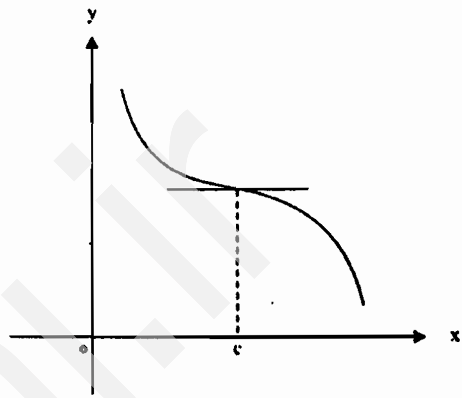
شکل ۴-۲۱

شکل زیر نمودار تابعی را نشان می‌دهد که در نقطه c یک ماکزیمم نسبی دارد، در حالی که $f'(c)$ وجود ندارد. به ازای $x < c$، $f'(x) > 0$، و به ازای $x > c$، $f'(x) < 0$ است.



شکل ۴-۲۲

شکل زیر حالت سوم آزمون مشتق اول را نشان می‌دهد. C نقطهٔ بحرانی f است و $f'(x)$ تغییرعلامت ندارد، همیشه منفی است.



شکل ۴-۲۳

۴-۳-۱۴ نکته. ۱) در توابع پیوسته اکسترمم‌های نسبی در نقاط بحرانی مشروط بر اینکه $f'(x)$ در آن نقاط تغییرعلامت دهد واقع‌اند و اگر $f'(x)$ در آن نقاط تغییرعلامت ندهد، نقطه را نقطه عطف تابع گویند.

۲) صفر شدن $f'(x)$ در c (c نقطه بحرانی) شرط لازم و کافی برای اکسترمم بودن تابع در نقطه c نیست. مانند توابع $y=(x-2)^3$ که $y'=3(x-2)^2$ در $x=2$ صفر می‌شود ولی این نقطه، نقطه اکسترمم تابع نیست یا در تابع $y=|x|$ که مشتق آن در $x=0$ تعریف نشده است ولی این نقطه اکسترمم (مینیمم) تابع است.

۳) شرط لازم و کافی برای آن که تابع f در نقطه $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد آن است که تابع در $x=c$ پیوسته و مشتق در آن نقطه تغییرعلامت دهد.

۴-۳-۱۵ نقاط اکسترمم و ریشه‌های مشتق. اگر $f'(c)=0$، نقطه $x=c$ یک نقطه بحرانی است ولی ممکن است اکسترمم نباشد.

الف) اگر علامت مشتق در $x=c$ عوض شود یک اکسترمم نسبی است و این در حالتی است که $x=c$ ریشه ساده مشتق باشد.

ب) اگر علامت مشتق در $x=c$ عوض نشود، اکسترمم نیست و این در حالتی است که $x=c$ ریشه مضاعف باشد.

۴-۳-۱۶ روش تعیین اکسترمم نسبی. الف) نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

ب) نقاط بحرانی را در تابع قرار داده، y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

ج) مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

۴-۳-۱۷ مثال. ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی توابع زیر را به وسیلهٔ آزمون مشتق اول به دست آورید.

۱) $$y=x^4-2x^2$$

حل. $$y'=4x^3-4x$$

$$y'=0 \Rightarrow 4x^3-4x=0 \Rightarrow 4x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm 1$$

$$x=0 \Rightarrow y=0 \quad , \quad x=1 \Rightarrow y=1-2=-1 \quad , \quad x=-1 \Rightarrow y=-1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
			مینیمم نسبی		ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

۲) $$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

حل. $$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

نقطه $(1,4)$ ماکزیمم نسبی و $(3,0)$ مینیمم نسبی تابع است.

۳) $$y = 3x^5 - 5x^3$$

حل. $$y' = 15x^4 - 15x^2$$

$$y' = 0 \Rightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow x = 0 \,,\, x = \pm 1 \,,\, x = 0$ ریشه مضاعف

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 \\ +2 \end{vmatrix}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم				مینیمم		

نقطه $(-1,2)$ ماکزیمم نسبی و نقطه $(1,-2)$ مینیمم نسبی تابع است.

۴) $$y=\left|x^2-2x\right|$$

حل. $$x^2-2x=0 \;\Rightarrow\; x=0\,,\, x=2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

با توجه به جدول داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<0 \text{ یا } x>2 \\ 2x-x^2 & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$0\le x\le 2:\; f(x)=2x-x^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=2-2x=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

$x<0$ یا $x>2$: $f(x)=x^2-2x \Rightarrow f'(x)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$ قابل‌قبول نیست

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نقطه $(1,1)$ ماکزیمم نسبی تابع است.

نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ مینیمم مطلق تابع است.

۴-۳-۱۸ قضیه (آزمون مشتق دوم). فرض کنید c یک نقطهٔ بحرانی تابع f و $f'(c)=0$ باشد، و f' و f'' در یک همسایگی c وجود داشته باشند.

الف) اگر $f''(c)<0$، آنگاه f در نقطهٔ c ماکزیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f''(c)>0$، آنگاه f در نقطهٔ c مینیمم نسبی دارد.

اثبات. الف) بنا به فرض $f''(c)$ وجود دارد و منفی است، پس داریم:

$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

پس یک همسایگی نقطهٔ c مانند (a,b) وجود دارد به طوری که اگر $x \neq c$ و $x \in (a,b)$، آنگاه:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

اگر $a < x < c$ باشد، داریم $x - c < 0$ است، و چون علامت کسر بالا منفی است، باید:

$$f'(x) - f'(c) > 0$$

یا:

$$f'(x) > f'(c)$$

اگر $c < x < b$ باشد، $x - c > 0$ است، و چون علامت کسر بالا منفی است، باید:

$$f'(x) - f'(c) < 0$$

یا:

$$f'(x) < f'(c)$$

چون $f'(c) = 0$ است پس:

$$a < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$c < x < b \Rightarrow f'(x) < 0$$

بنابراین طبق آزمون مشتق اول، f در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد.

ب) بنا به فرض $f''(c)$ وجود دارد و مثبت است، پس داریم:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

پس یک همسایگی نقطهٔ c مانند (a,b) وجود دارد که اگر $x \neq c$ و $x \in (a,b)$، آنگاه:

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} > 0$$

اگر $a < x < c$، داریم $x-c<0$، و چون علامت کسر بالا نیز مثبت است، باید:

$$f'(x)-f'(c) < 0$$

و یا:

$$f'(x) < f'(c)$$

اگر $c < x < b$، داریم $x-c>0$، و چون علامت کسر بالا مثبت است، باید:

$$f'(x)-f'(c) > 0$$

و یا:

$$f'(x) > f'(c)$$

چون $f'(c)=0$، پس:

$$a<x<c \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0$$
$$c<x<b \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$$

بنابراین طبق آزمون مشتق اول، f در $x=c$ مینیمم نسبی دارد.

۴-۳-۱۹ نکته. توجه کنید که اگر $f'(c)=f''(c)=0$ باشد، آزمون مشتق دوم دربارهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی اطلاعی به دست نمی‌دهد. بلکه در این مورد باید از آزمون مشتق اول استفاده کرد.

۴-۳-۲۰ مثال. با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

حل.
$$f'(x)=۱۲x^{۳}+۱۲x^{۲}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱۲x^{۳}+۱۲x^{۲}=۰ \Rightarrow ۴x^{۲}(۳x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-\frac{۳}{۳}=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=۳-۴=-۱ \end{cases}$$

$$f''(x)=۳۶x^{۲}+۲۴x$$

$f''(۰)=۰$ مشخص نیست

در $x=-۱$ مینیمم نسبی وجود دارد. $f''(-۱)=۳۶-۲۴=۱۲>۰$

۲) $$f(x)=x^{۴}+\frac{۴}{۳}x^{۳}-۴x^{۲}$$

حل.
$$f'(x)=۴x^{۳}+۴x^{۲}-۸x$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴x^{۳}+۴x^{۲}-۸x=۰ \Rightarrow ۴x(x^{۲}+x-۲)=۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ x=۱,-۲ \end{array} \right.$$

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۰ \ , \ x=۱ \Rightarrow f(۱)=-\frac{۵}{۳} \ , \ f(-۲)=-\frac{۳۲}{۳}$$

$$f''(x)=۱۲x^{۲}+۸x-۸$$

$f''(۰)=-۸<۰ \Rightarrow (۰,۰)$ نقطه ماکزیمم نسبی

$\Rightarrow f''(۱)=۱۲>۰ \Rightarrow (۱,-\frac{۵}{۳})$ نقطه مینیمم نسبی

$f''(-۲)=۲۴>۰ \Rightarrow (-۲,-\frac{۳۲}{۳})$ نقطه مینیمم نسبی.

۴-۳-۲۱ تمرین. با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x+\cos x \qquad\qquad f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۴$$

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$ $\qquad$ $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

$f(x) = (x-3)^4$ $\qquad$ $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$

$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}$

۴-۳-۲۲ تعیین نقاط اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a,b]$. برای تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: تابع روی بازه $[a,b]$ پیوسته است.

۱) نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

۲) مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم.

۳) بزرگترین مقدار به دست آمده ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار به دست آمده مینیمم مطلق تابع است.

حالت دوم: تابع f در نقطه c درون $[a,b]$ پیوسته نباشد و در سایر نقاط پیوسته باشد. در این صورت:

۱) نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

۲) مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم.

۳) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ و $\lim_{x\to c^-} f(x)$ را به دست می‌آوریم.

۴) در این مجموعه بزرگترین و کوچکترین مقدار را مشخص می‌کنیم.

اگر یکی از حدهای فوق ماکزیمم یا مینیمم باشد تابع فاقد ماکزیمم یا مینیمم است. در غیر این صورت مانند حالت اول ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را به دست می‌آوریم.

۴-۳-۲۳ تذکر. اگر تابع f روی بازه (a,b) پیوسته باشد باید $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)$ را هم به دست آورد و آنها همان نقش حدهای راست و چپ c در حالت دوم را دارند.

۴-۳-۲۴ مثال.

۱) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=۳x^{۴}-۴x^{۳}$ را روی بازه $[-۱,۲]$ تعیین کنید.

حل. تابع f روی بازه $[-۱,۲]$ پیوسته است.

$$f'(x)=۱۲x^{۳}-۱۲x^{۲}$$

$$'(x)=۰ \Rightarrow ۱۲x^{۳}-۱۲x^{۲}=۰ \Rightarrow ۱۲x^{۲}(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$ نقاط بحرانی

می‌دانیم نقاط $x=-۱,۲$ نیز نقاط بحرانی تابع است.

$$\begin{aligned} x=۰ &\Rightarrow f(۰)=۰ \\ x=-۱ &\Rightarrow f(-۱)=۷ \\ x=۱ &\Rightarrow f(۱)=-۱ \\ x=۲ &\Rightarrow f(۲)=۱۶ \end{aligned}$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱۶ و مینیمم مطلق تابع برابر ۱- است.

۲) نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع‌های زیر را روی بازه داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=|x|(x-۲) \quad , \quad [-۱,۲]$

حل.

$$f(x)=\begin{cases} x(x-۲) & ۰<x\leq ۲ \\ -x(x-۲) & -۱\leq x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & ۰<x<۲ \\ -۲x+۲ & -۱<x<۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_{+}(۰)=-۲ \\ f'_{-}(۰)=-۲ \end{cases} \Rightarrow$$ $f'(۰)$ وجود ندارد

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f'(۱)=۱$$

پس نقاط ۱- و ۰ و ۱ و ۲ نقاط بحرانی تابع می‌باشند و داریم:

$f(-۱)=-۳$ مینیمم مطلق

$f(0)=0$ ماکزیمم مطلق

$f(1)=-1$

$f(2)=0$ ماکزیمم مطلق

نقطه $(1,-3)$ نقطه مینیمم مطلق است.

نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ نقاط ماکزیمم مطلق است.

ب) $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-3)^2}$ ، $[-5,4]$

حل.
$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

$0 = \text{مخرج} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x=3$ و $x=-5,4$ نقاط بحرانی تابع می‌باشند و داریم:

$f(-5)=-3$ مینیمم مطلق

$f(3)=1$ ماکزیمم مطلق

$f(4)=0$

نقطه $(-5,-3)$، مینیمم مطلق تابع است.

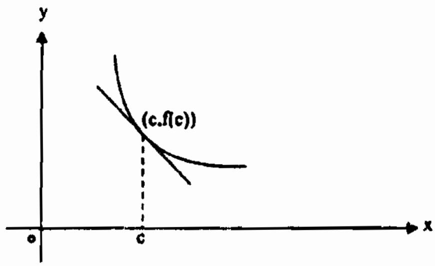
نقطه $(3,1)$، ماکزیمم مطلق تابع است.

۴-۴ تقعر، تحدب و نقطه عطف

۴-۴-۱ تعریف. منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $\begin{vmatrix} c \\ f(c) \end{vmatrix}$ را مقعر می‌نامیم، اگر:

الف) $f'(c)$ وجود داشته باشد.

ب) یک همسایگی محذوف نقطه c وجود داشته باشد، به طوری که برای هر x متعلق به این همسایگی نقطه $(x,f(x))$ در بالای خط مماس بر منحنی در نقطه $(c,f(c))$ واقع باشد.

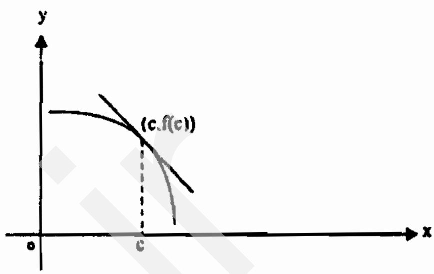


شکل ۲-۲۴

۴-۴-۲ تعریف. منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $(c,f(c))$ را محدّب می‌نامیم، اگر:

الف) $f'(c)$ وجود داشته باشد.

ب) یک همسایگی محذوف نقطهٔ c وجود داشته باشد، به طوری که برای هر x متعلق به این همسایگی، نقطه $(x,f(x))$ در پایین خط مماس بر منحنی در نقطه $(c,f(c))$ واقع باشد.



شکل ۴-۲۵

۴-۴-۳ نکته. اگر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $x = c$ مماس داشته باشد، معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

برای تعیین تقعر یا تحدب یک منحنی باید تغییرات شیب خط مماس بر آن را بررسی کرد.

یعنی باید علامت $f''(c)$ را بررسی کرد. قضیهٔ زیر آزمونی برای تعیین تقعر یا تحدب منحنی می‌باشد.

۴-۴-۴ قضیه. فرض کنید f روی یک همسایگی نقطهٔ $x = c$ مشتقات مرتبهٔ اول و دوم داشته باشد، در این صورت:

الف) اگر $f''(c) > 0$، آنگاه منحنی f در نقطه $(c, f(c))$ مقعر است.

ب) اگر $f''(c) < 0$، آنگاه منحنی f در نقطه $(c, f(c))$ محدب است.

اثبات. الف) طبق تعریف $f''(c)$ داریم:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

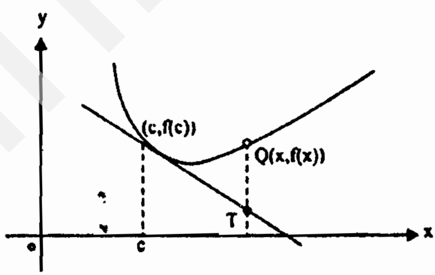
چون $f''(c) > 0$، پس حد $\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$ وقتی که x به سمت c میل می‌کند نیز مثبت است.

و در نتیجه یک همسایگی محذوف نقطهٔ c مانند I وجود دارد به طوری که برای هر $x \in I$ داریم:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ خط مماس بر نمودار f در نقطه $x = c$ عبارت است از:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \;\Rightarrow\; y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad (2)$$



شکل ۴-۲۶

فرض کنید Q نقطه‌ای روی منحنی f به طول x و $x \in I$ باشد. محل تلاقی خط قائم گذرنده بر Q با خط مماس را T می‌نامیم.

برای آن که نشان دهیم منحنی f مقعر است، باید ثابت کنیم که Q در بالای T قرار دارد، یعنی فاصلهٔ جبری $\overline{TQ}$ مثبت است. داریم:

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$

$$= [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \tag{۳}$$

طبق قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند d بین x و c وجود دارد به طوری که داریم:

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \tag{۴}$$

از مقایسه (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$\overline{TQ} = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)$$

$$= (x - c)[f'(d) - f'(c)] \tag{۵}$$

چون $d \in I$، بنابراین در نامساوی (۱) به‌جای x می‌توان d را قرار داد:

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \tag{۶}$$

برای مثبت بودن $\overline{TQ}$ کافی است که علامتهای $x - c$ و $f'(d) - f'(c)$ یکی باشند. اگر $x - c > 0$ آنگاه $x > c$، چون d بین c و x واقع است $d > c$، و یا $d - c > 0$، در این صورت، با توجه به نامساوی (۶)، $f'(d) - f'(c) > 0$ خواهد بود.

اگر $x - c < 0$، آنگاه $x < c$ و در نتیجه $d - c < 0$. در این صورت با توجه به نامساوی (۶)، $f'(d) - f'(c) < 0$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\overline{TQ} = (x - c)[f'(d) - f'(c)] > 0$$

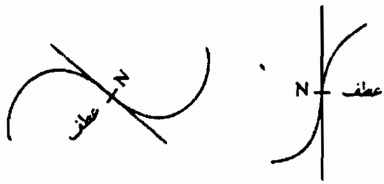
ب) مشابه الف ثابت می‌شود.

۴-۴-۵ تعریف. نقطه $(c,f(c))$، نقطه عطف نمودار تابع f است. اگر نمودار f در $x=c$ دارای خط مماس باشد و بر بازه باز مانند I شامل c یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) هرگاه $x<c$، آنگاه $f''(x)<0$ و هرگاه $x>c$، آنگاه $f''(x)>0$.

ب) هرگاه $x<c$، آنگاه $f''(x)>0$ و هرگاه $x>c$، آنگاه $f''(x)<0$.

و به طور خلاصه، f'' در $x=c$ تغییرعلامت دهد.



شکل ۴-۲۷

اگر جهت تقعر منحنی در c تغییر کند و نمودار f در نقطه $(c,f(c))$ یک خط مماس داشته باشد، آنگاه نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ عطف منحنی تابع f گویند.

۴-۴-۶ تعیین نقاط عطف و جهت تقعر منحنی. ۱) نقاط بحرانی f' (نقاطی که f'' در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است) را تعیین می‌کنیم.

۲) f'' را تعیین علامت می‌کنیم. در هر فاصله که $f''>0$، جهت تقعر منحنی به طرف بالا «$\cup$» است و در هر فاصله که $f''<0$، جهت تقعر منحنی به طرف پائین «$\cap$» است.

۳) وجود خط مماس را در این نقاط بررسی می‌کنیم.

نقاطی که در آن نمودار خط مماس داشته و جهت تقعر منحنی عوض شود، نقطه عطف تابع است.

۴-۴-۷ قضیه. فرض کنید f روی یک همسایگی نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر باشد و $f''(c)$ وجود داشته باشد. اگر $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف منحنی f باشد، آنگاه:

$$f''(c)=0$$

اثبات. فرض کنید $g(x)=f'(x)$ باشد، پس $g'(x)=f''(x)$ است. چون نقطهٔ $x=c$ نقطهٔ عطف است، $f''(x)$ در c تغییرعلامت می‌دهد و بنابراین $g'(x)$ نیز در $x=c$ تغییرعلامت می‌دهد. بنابراین g در این نقطه یک ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی دارد. پس $g'(c)=0$، و در نتیجه $f''(c)=0$ است.

۴-۴-۸ مثال. ۱) جهت تقعر و مختصات نقطه عطف هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $$f(x)=4x^4-4x^3$$

حل. $$f'(x)=16x^3-12x^2 \Rightarrow f''(x)=48x^2-24x$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 48x^2-24x=0 \Rightarrow 24x(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(0)=0$$

$$f(\frac{1}{2})=4(\frac{1}{16})-4(\frac{1}{8})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
جهت تقعر		$\cup$	0 عطف	$\cap$	$-\frac{1}{4}$ عطف	$\cup$	

نقاط $(0,0)$ و $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ نقاط عطف تابع است.

۲) $$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

حل. $$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(x^۲+۱)^۲-۲(۲x)(x^۲+۱)(۱-x^۲)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$=\frac{-۲x(x^۲+۱)(x^۲+۱+۲-۲x^۲)}{(x^۲+۱)^۴}=\frac{-۲x(۳-x^۲)}{(x^۲+۱)^۳}$$

$$f''(x)=\frac{-۲x(۳-x^۲)}{(x^۲+۱)^۳}$$

$$-۲x(۳-x^۲)=۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ ۳-x^۲=۰ \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ x=\pm\sqrt{۳} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(۰)=۰ \\ f(\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۴} \\ f(-\sqrt{۳})=\frac{-\sqrt{۳}}{۴} \end{array} \right.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
جهت تقعر		$\cap$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۴}$ عطف	$\cup$	۰ عطف	$\cap$	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ عطف	$\cup$	

نقاط $(-\sqrt{۳},\frac{-\sqrt{۳}}{۴})$ و $(۰,۰)$ و $(\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۴})$ نقاط عطف تابع است.

۳) $f(x)=|x^۲-۱|$

حل.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & |x|\geq ۱ \\ ۱-x^۲ & |x|<۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & |x|>۱ \\ -۲x & |x|<۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۲ & |x|>۱ \\ -۲ & |x|<+۱ \end{cases}$$

پس در بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۱,+\infty)$، $f''=۲>۰$ تقعر به طرف بالاست.

و در بازه $(-1,1)$، $f'' = -2 < 0$ تقعر به طرف پایین است.

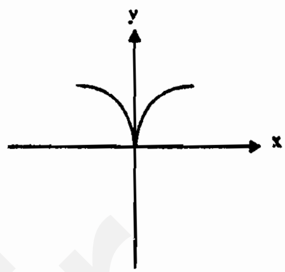
در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ خط مماس وجود ندارد پس نمودار نقطه عطف ندارد.

۴) $$f(x) = x + x^{\frac{2}{3}}$$

حل.

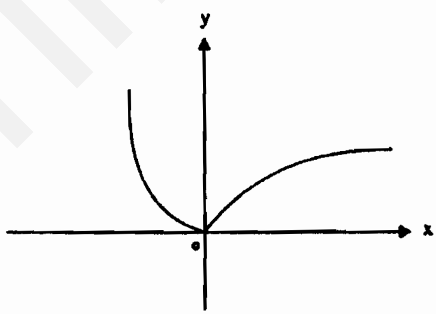
$$f'(x) = 1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

به ازای هر $x \neq 0$ داریم $f''(x) < 0$ یعنی همواره تقعر منحنی به طرف پایین است. $f'(0)$ و $f''(0)$ وجود ندارند نقطه $(0,0)$، نقطه بازگشتی است.



۵) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

حل.



$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & x>0 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} & x>0 \end{cases}$$

در بازه $(-\infty,0)$ تقعر به طرف بالا و در بازه $(0,+\infty)$ تقعر به طرف پایین است. اما دارای نقطه عطف نیست. زیرا در $(0,0)$ خط مماس وجود ندارد. مماس چپ بر نمودار محور xها و مماس راست آن محور yها است.

۲) تابع $y=x^3+ax^2+2$ مفروض است. a را طوری پیدا کنید که طول نقطه عطف $x=1$ باشد.

حل. می‌دانیم طول نقطه عطف در معادله $y''=0$ صدق می‌کند.

$$y'=3x^2+2ax \Rightarrow y''=6x+2a \xrightarrow[y''=0]{x=1} 6x+2a=0 \Rightarrow a=-3$$

۳) در تابع $y=x^3+ax^2+b$، a و b را طوری پیدا کنید که نقطه $N\Big|\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ نقطه عطف منحنی باشد.

حل. می‌دانیم هرگاه $N\Big|\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}$ نقطه عطف تابع باشد:

الف) مختصات N در تابع صدق می‌کند.

ب) طول عطف در معادله $y''=0$ صدق می‌کند.

$$N\Big|\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \Rightarrow 1+a+b=2 \Rightarrow a+b=1 \qquad (1)$$

$$y'=3x^2+2ax \Rightarrow y''=6x+2a \xrightarrow[y''=0]{x=1} 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$\text{رابطهٔ (1)} \Rightarrow -3+b=1 \Rightarrow b=4$$

۴) در تابع $y=x^2+ax+1$، a را طوری پیدا کنید که $x=1$ طول نقطه Min باشد.

حل. می‌دانیم طول اکسترمم نسبی در معادله $y' = ۰$ صدق می‌کند.

$$y' = ۲x + a \xrightarrow[y'=۰]{x=۱} ۲ + a = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

۵) در تابع $y = x^۳ + ax + b$، a و b را طوری پیدا کنید که $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ اکسترمم نسبی منحنی باشد.

حل.

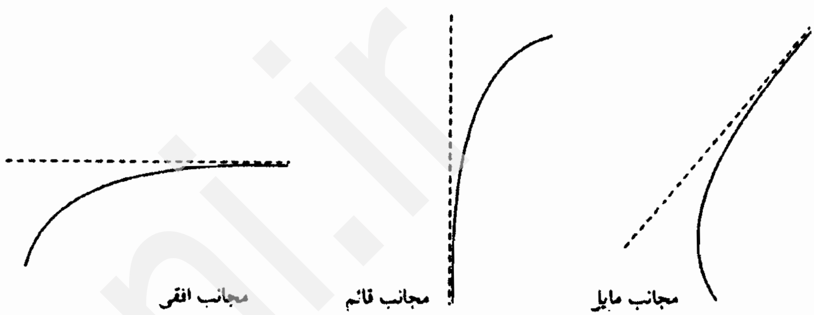
$$A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right. \underset{\text{صدق}}{\overset{\text{در تابع}}{\Rightarrow}} ۱ + a + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۱ \qquad (۱)$$

$$y' = ۳x^۲ + a \xrightarrow[y'=۰]{x=۱} ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\text{رابطهٔ (۱)} \Rightarrow -۳ + b = ۱ \Rightarrow b = ۴$$

۴-۵ رسم نمودار یا منحنی تابع

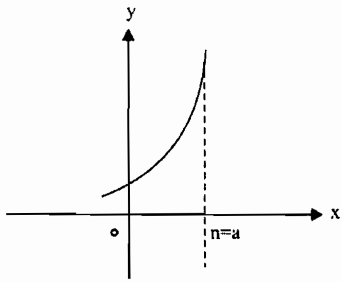
۴-۵-۱ مجانب. مجانب‌ها، خطوطی هستند که در بی‌نهایت، بر منحنی تابع مماس‌اند.



شکل ۴-۲۸

۴-۵-۲ مجانب قائم. اگر در یک تابع $x \to a$، آنگاه $f(x) \to \infty$، در این صورت خط به معادله $x = a$ را مجانب قائم منحنی تابع گویند.

الف) مجانب قائم در توابع کسری وجود دارد. برای تعیین معادلهٔ مجانب قائم، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم.



شکل ۴-۲۹

ب) مجانب قائم، وقتی قابل قبول است که عبارت داخل رادیکال فرجه زوج معادلهٔ تابع رابه عدد منفی تبدیل نکند. چنانچه مجانب قائم تابع را به $\frac{\circ}{\circ}$ تبدیل کند، وقتی قابل قبول است که پس از رفع ابهام، حد تابع ∞ شود.

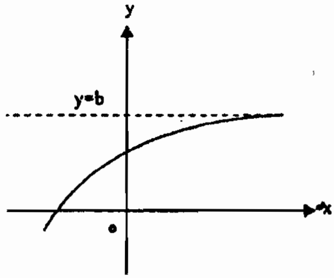
ج) اگر خط به معادله $x = a$ مجانب قائم منحنی یک تابع باشد، اولاً عدد a عضو دامنه نیست، ثانیاً: حداقل a^+ یا a^- باید عضو دامنه باشد.

۴-۵-۳ مجانب افقی. خط $y = b$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند؛ هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ و $M > \circ$ وجود داشته باشد که اگر $x > M$، آنگاه $f(x) \neq b$.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ و $M > \circ$ وجود داشته باشد که اگر $x < -M$، آنگاه $f(x) \neq b$.

برای تعیین مجانب افقی یک تابع، x را به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا هر دو میل می‌دهیم و حد تابع را پیدا می‌کنیم. اگر این حد، مساوی عدد حقیقی b باشد، آنگاه خط به معادله $y = b$ را مجانب افقی منحنی تابع گوییم.



شکل ۴-۳۰

نکته. یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت کسر، از درجه مخرج کسر بیشتر نباشد.

۴-۵-۴ مجانب مایل. شرط لازم وجود مجانب مایل در تابع به معادله $y = f(x)$ آن است که $x \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$.

خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$ و $M > 0$ وجود داشته باشد که $x > M$ آنگاه $f(x) \neq ax + b$.

ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$ و $M > 0$ وجود داشته باشد که $x < -M$ آنگاه $f(x) \neq ax + b$.

نکته: یک تابع کسری، وقتی مجانب مایل دارد که اولاً: درجه صورت کسر، فقط یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد. ثانیاً: اگر صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم، خارج قسمت به شکل $ax + b$ باشد.

۴-۵-۵ تعیین مجانب مایل. ۱) راه حد: اگر $y = ax + b$ معادله مجانب مایل منحنی تابع f باشد، داریم:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$ ضریب زاویه مجانب

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right)$$

۲) راه تقسیم: صورت کسر را بر مخرج کسر، تقسیم می‌کنیم، «خارج قسمت=y» را معادله مجانب مایل گوییم.

۳) راه هم‌ارزی رادیکالها: به کمک هم‌ارزی رادیکالها، مجانب افقی و مایل بسیاری از تابع‌ها به دست می‌آید.

تذکر. اگر معادله تابع به صورت $y = ax + b + \frac{h(x)}{g(x)}$ باشد، به طوری که درجه $h(x)$ کمتر از درجه $g(x)$ باشد، آنگاه خط $y = ax + b$ معادله مجانب مایل منحنی f است.

۴-۵-۶ مثال. مجانبهای هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $$y = \frac{۲x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

حل. مجانبهای قائم $y \to \infty \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{۲x}{|x|} = \lim \frac{۲x}{x} = ۲ \Rightarrow y = ۲$$ مجانب افقی

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \frac{۲x}{|x|} = \lim \frac{۲x}{-x} = -۲ \Rightarrow y = -۲$$ مجانب افقی

۲) $$y = \frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{\sqrt{x - ۱}}$$

حل. $$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰ \Rightarrow y = ۰$$ مجانب افقی

$$y \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{مجانب قائم نیست} \\ x = ۱ & \text{مجانب قائم} \end{cases}$$

۳) $$f(x) = x + \sqrt{x^{2} - 2x}$$

حل.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

مجانب مایل $x \to +\infty \Rightarrow y = x + (x-1) \Rightarrow y = 2x - 1$

مجانب افقی $x \to -\infty \Rightarrow y = x - (x-1) \Rightarrow y = 1$

۴) $$y = \frac{x^{2} - 4x + 1}{x - 1}$$

حل. مجانب قائم $y \to \infty \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$\begin{array}{l|l} x^{2} - 4x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} x^{2} - x & x - 3 \\ \underline{-\quad +} & \\ -3x + 1 & \\ -3x + 3 & \\ \underline{+\quad -} & \\ \quad -2 & \end{array}$$

مجانب مایل $y = x - 3$

۴-۵-۷ رسم نمودار تابع $f(x) = ax^{n} + bx^{n-1} + \cdots + L$ ، $n \in N$:

۱) از تابع مشتق گرفته، آن را برابر صفر قرار داده جوابهای x را پیدا می‌کنیم.

۲) جوابهای x را در تابع قرار داده y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

۳) نقاط تلاقی منحنی را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

۴) در تابع به‌جای x $\pm\infty$ قرار داده و y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \infty$$

۵) جدولی به صورت زیر رسم کرده، آن را کامل می‌کنیم.

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y		

۶) محورهای مختصات را رسم کرده، نقاط جدول را یافته به هم وصل می‌کنیم. شکل، نمودار تابع می‌باشد.

۴-۵-۸ رسم نمودار توابع با معادلهٔ کسری و گویا. ۱) دامنه تعریف تابع را به دست می‌آوریم.

۲) از تابع مشتق گرفته، جوابهای x را از حل معادله $y' = 0$ به دست می‌آوریم.

۳) جوابهای x را در تابع قرار داده و y نظیرش را پیدا می‌کنیم.

٤) نقاط تلاقی منحنی را با محورهای مختصات مشخص می‌کنیم.

۵) مجانبهای منحنی را پیدا می‌کنیم (قائم و افقی یا مایل).

۶) جدولی به صورت زیر رسم کرده، آن را کامل می‌کنیم.

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y		

۷) محورهای مختصات و مجانبها را رسم کرده، نقاط جدول را یافته به هم وصل می‌کنیم.

۴-۵-۹ رسم نمودار توابع با معادله‌های گنگ یا اصم. ۱) دامنه تعریف تابع را به دست می‌آوریم (در تمام مسائل، داخل رادیکال را مساوی صفر قرار می‌دهیم).

۲) در صورت وجود، مجانب‌ها را پیدا می‌کنیم.

۳) در صورت امکان؛ x را مساوی صفر قرار داده و y را پیدا می‌کنیم.

۴) در صورت امکان x را به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم.

۵) از تابع مشتق گرفته و جوابهای مشتق را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که جوابهای مشتق هم باید در دامنه تعریف تابع باشد و هم در معادلهٔ رادیکالی مشتق، صدق کند.

۶) جدول تغییرات را رسم می‌کنیم.

x	
y'	
y	

۷) محورهای مختصات مجانبها را رسم کرده، نقاط جدول را یافته، نمودار را رسم می‌کنیم.

تذکر: در هر نقطه از منحنی که تابع در آن تعریف شده باشد، ولی y' تعریف نشده (∞) باشد، خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی محور yهاست.

۴-۵-۱۰ مثال. جدول تغییرات و منحنی نمایش هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱) $$y = x^2 - 2x - 3$$

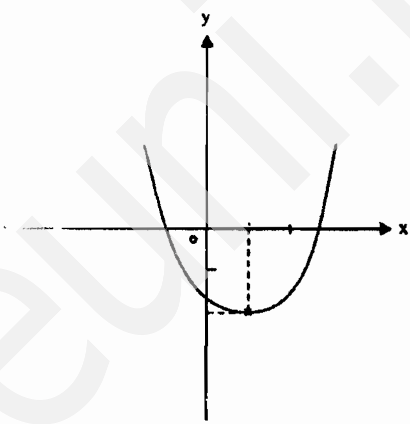
حل.
$$y' = 2x - 2$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \,,\, x = 3$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -3$$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y'			$-$				0		$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	-4 مینیمم	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



x	y
$y' = 0 \{1$	-4
-1	0
3	
0	-3
$\pm\infty$	$+\infty$

۲) $$y=x^3+3x^2-4$$

حل. $$y'=3x^2+6x$$

$$y'=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

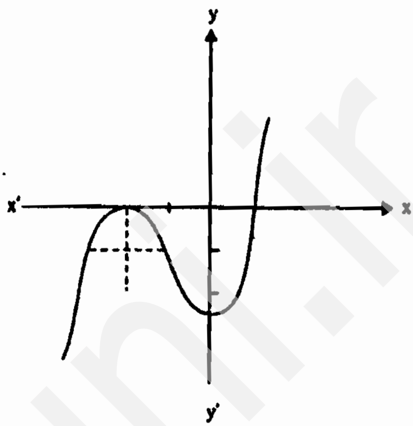
$$x=0 \Rightarrow y=-4$$

$$x=-2 \Rightarrow y=-8+12-4=0$$

$y=0 \Rightarrow x^3+3x^2-4=0 \Rightarrow x=1$ یک ریشه

$(x-1)(x^2+4x+4)=0 \Rightarrow x=1\,,\,x=-2$ ریشه مضاعف

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 ماکزیمم	$\searrow$	-4 مینیمم	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



	x	y
$y'=$	0	-4
	-2	0
	1	0
	-2	
	$\pm\infty$	$\pm\infty$

۳) $$y=x^4-4x^2+3$$

حل. $$y'=4x^3-8x$$

$$y'=0 \Rightarrow 4x^3-8x=0 \Rightarrow 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$x = \text{۰} \Rightarrow y = \text{۳}$$

$$x = \sqrt{\text{۲}} \Rightarrow y = \text{۴} - \text{۸} + \text{۳} = -\text{۱}$$

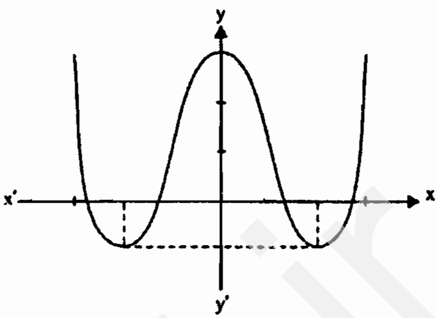
$$x = -\sqrt{\text{۲}} \Rightarrow y = \text{۴} - \text{۸} + \text{۳} = -\text{۱}$$

$$y = \text{۰} \Rightarrow x^{\text{۴}} - \text{۴}x^{\text{۲}} + \text{۳} = \text{۰} \Rightarrow (x^{\text{۲}} - \text{۱})(x^{\text{۲}} - \text{۳}) = \text{۰}$$

$$x^{\text{۲}} - \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow x^{\text{۲}} = \text{۱} \Rightarrow x = \pm\text{۱}$$

$$x^{\text{۲}} - \text{۳} = \text{۰} \Rightarrow x^{\text{۲}} = \text{۳} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\text{۳}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\text{۳}}$		$-\sqrt{\text{۲}}$		$-\text{۱}$		۰		۱		$\sqrt{\text{۲}}$		$\sqrt{\text{۳}}$		$+\infty$
y′			−		۰		+		۰		−		۰		+		
جهت تغیر	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\text{۱}$	↗	۰	↗	۳	↘	۰	↘	$-\text{۱}$	↗	۰	↗	$+\infty$
					مینیمم				ماکزیمم				مینیمم				



	x	y
$y' = \text{۰}$	۰	۳
	$\sqrt{\text{۲}}$	$-\text{۱}$
	$-\sqrt{\text{۳}}$	$-\text{۱}$
	$\pm\text{۱}$, $\pm\sqrt{\text{۳}}$	۰
	$\pm\infty$	$+\infty$

۴) $$y = \frac{x + \text{۱}}{\text{۲}x + \text{۱}}$$

حل. $$y' = \frac{\text{۱} - \text{۲}}{(\text{۲}x + \text{۱})^{\text{۲}}} = \frac{-\text{۱}}{(\text{۲}x + \text{۱})^{\text{۲}}} < \text{۰}$$ تابع نزولی است

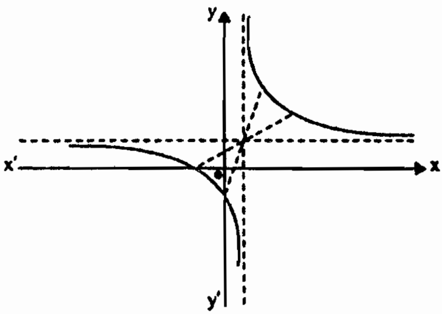
$$x = \text{۰} \Rightarrow y = \frac{-\text{۱}}{\text{۱}} = -\text{۱}$$

$$y = \text{۰} \Rightarrow x + \text{۱} = \text{۰} \Rightarrow x = -\text{۱}$$

مجانب افقی $x \to \pm\infty \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

مجانب قائم $y \to \pm\infty \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	||	$-$	
y	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	-1 ↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$



x	y
$y' < 0$	↘
0	-1
-1	0
$\pm\infty$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\pm\infty$

۵) $$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, \quad D_f = R - \{1\}$$

حل. $$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

جواب ندارد $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$

مجانب قائم $y \to \pm\infty \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

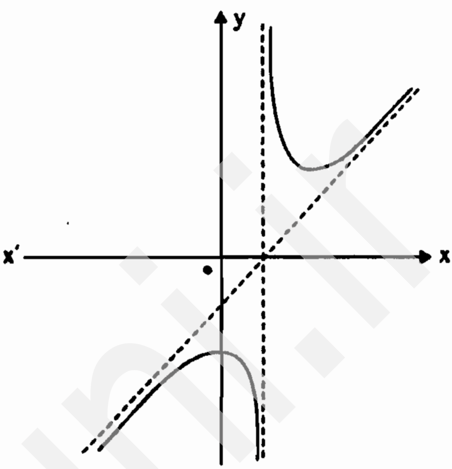
$$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \pm\infty$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-2x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-1 \\ \underline{-\quad +} & \\ -x+2 & \\ -x+1 & \\ \underline{+\quad -} & \\ \quad 1 & \end{array}$$

$y=x-1$ مجانب مایل

x	0	1
y	-1	0

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$



x	y'
$y'=0\begin{cases}0\\2\end{cases}$	$\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}$
x	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$
1	$\pm\infty$

۶)
$$y=\frac{-6x+6}{x^2+3}$$

حل.
$$y'=\frac{-6(x^2+3)-2x(-6x+6)}{(x^2+3)^2}=\frac{6x^2-12x-18}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۶x^۲ - ۱۲x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -۱ \\ x = ۳ \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = ۳ \\ y = -۱ \end{array} \right.$$

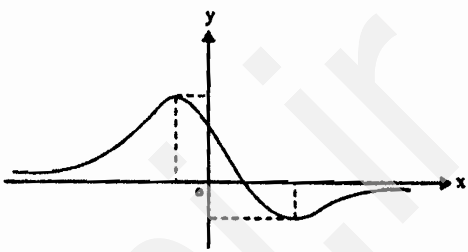
$$y = ۰ \Rightarrow -۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۶}{۳} = ۲$$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y = ۰$ مجانب افقی

$y \to \pm\infty \Rightarrow x^۲ + ۳ = ۰$ مجانب قائم ندارد

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۳		$+\infty$
y'		+	۰		—				۰	+	
y	۰	↗	۳	↘	۲	↘	۰	↘	-۱	↗	۰
			ماکزیمم						مینیمم		



x	y
$y' = ۰ \begin{cases} -۱ \\ ۳ \end{cases}$	۳ -۱
۱	۰
۰	۲
$\pm\infty$ x	۰ $\pm\infty$

۷) $$y = \frac{x^۲ - ۱}{(x - ۲)^۲}$$

حل.

$$y' = \frac{۲x(x-۲)^۲ - ۲(x-۲)(x^۲-۱)}{(x-۲)^۴} = \frac{۲(x-۲)(x^۲ - ۲x - x^۲ + ۱)}{(x-۲)^۴}$$

$$y' = \frac{۲(-۲x+۱)}{(x-۲)^۳}$$

$$y' = ۰ \Rightarrow -۲x+۱=۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}$$

$$y' \to \pm\infty \Rightarrow x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

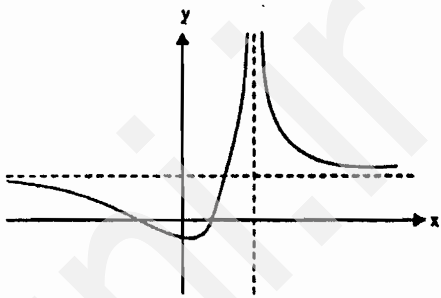
$$x=۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴}$$

$$y=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y=۱$ مجانب افقی

$y \to \pm\infty \Rightarrow x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$ مجانب افقی

x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		$+\infty$
y'			−				۰		+		‖	−	
y	۱	↘	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↘	$-\frac{۱}{۳}$	↗	۰	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۱
							مینیمم						



x	y
$y'=۰ \left\{ \frac{۱}{۲} \right.$	$-\frac{۱}{۳}$
۰	$-\frac{۱}{۴}$
±۱	۰
$\pm\infty$	۱
۲	∞

۴-۶ چند کاربرد ماکزیمم و مینیمم.

در این قسمت با برخی از کاربردهای ماکزیمم و مینیمم در مسائل نظری و عملی آشنا می‌شویم.

۴-۶-۱ مثال.

۱) مجموع دو عدد مثبت ۱۲ است، ماکزیمم مطلق حاصلضرب آنها را بیابید.

حل. فرض کنید دو عدد x و y باشند:

$$\begin{cases} x+y=۱۲ \\ \underset{x,y>۰}{P}=xy=Max \end{cases}$$

$$x+y=۱۲ \;\Rightarrow\; y=۱۲-x$$

$$P=x(۱۲-x)=۱۲x-x^۲ \;\Rightarrow\; P'=۱۲-۲x$$

$$P'=۰ \;\Rightarrow\; ۱۲-۲x=۰ \;\Rightarrow\; x=۶ \;\Rightarrow\; y=۶$$

$$P_{Max}=(۶)(۶)=۳۶$$

۲) کمترین فاصله مبدأ مختصات را از نقاط منحنی به معادله $y^۲=۴x+۹$ تعیین کنید.

حل. اگر $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه دلخواهی از منحنی باشد، فاصله آن تا مبدأ مختصات:

$$d=OM=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+۴x+۹}\;,\;\; D_f=R$$

$$d'=\frac{۲x+۴}{۲\sqrt{x^۲+۴x+۹}}=۰ \;\Rightarrow\; ۲x+۴=۰ \;\Rightarrow\; x=-۲$$

$$\Rightarrow\;\; Min(d)=\sqrt{۴-۸+۹}=\sqrt{۵}$$

۳) اگر $۳x+۴y=۶۰$ باشد کمترین مقدار $x^۲+y^۲$ را پیدا کنید.

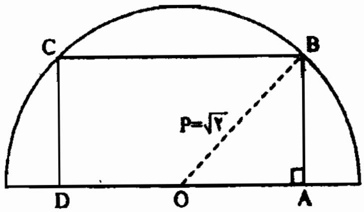
حل. $۳x+۴y=۶۰ \;\Rightarrow\; ۴y=۶۰-۳x \;\Rightarrow\; y=۱۵-\frac{۳}{۴}x$

$$P=x^۲+y^۲=x^۲+(۱۵-\frac{۳}{۴}x)^۲=\frac{۲۵}{۱۶}x^۲-\frac{۴۵}{۲}x+۲۲۵$$

$$P' = \frac{۲۵}{۸}x - \frac{۴۵}{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳۶}{۵} \\ y = \frac{۴۸}{۵} \end{cases}$$

$$Min(x^۲ + y^۲) = (\frac{۳۶}{۵})^۲ + (\frac{۴۸}{۵})^۲ = \frac{۱۲۹۶}{۲۵} + \frac{۲۳۰۴}{۲۵} = \frac{۳۶۰۰}{۲۵} = ۱۴۴$$

۴) در نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ مستطیلی مطابق شکل محاط می‌کنیم. پیدا کنید بیشترین مقدار محیط مستطیل را.



حل. فرض کنید $AB = x$ باشد:

$$\overset{\Delta}{OAB} : OA^۲ + AB^۲ = OB^۲ \Rightarrow OA^۲ + x^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow OA^۲ = ۲ - x^۲$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{۲-x^۲} \Rightarrow AD = ۲OA = ۲\sqrt{۲-x^۲} \Rightarrow (۲-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq \sqrt{۲})$$

$$\text{محیط} = ۲P = ۲x + ۴\sqrt{۲-x^۲} \Rightarrow P = x + ۲\sqrt{۲-x^۲}$$

$$\Rightarrow P' = ۱ + ۲(\frac{-x}{\sqrt{۲-x^۲}}) = ۱ - \frac{۲x}{\sqrt{۲-x^۲}}$$

$$P' = \frac{\sqrt{۲-x^۲} - ۲x}{\sqrt{۲-x^۲}} = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x^۲} - ۲x = ۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x^۲} = ۲x$$

$$\Rightarrow ۲ - x^۲ = ۴x^۲ \Rightarrow ۵x^۲ = ۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

باید در عبارت محیط مقادیر $x = ۰$ و $x = \sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و $x = \sqrt{۲}$ را قرار دهیم.

$$x = ۰ \Rightarrow ۲P = ۴\sqrt{۲}$$

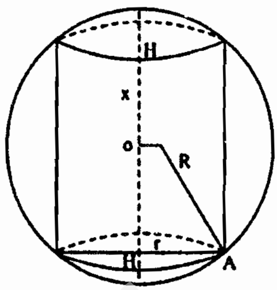
$$x=\sqrt{۲} \Rightarrow ۲P=۲\sqrt{۲}+۰=۲\sqrt{۲}$$

$$x=\sqrt{\frac{۲}{۵}} \Rightarrow ۲P=۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}+۴\sqrt{۲-\frac{۴}{۵}}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}+۴\sqrt{\frac{۶}{۵}}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}+\frac{۴\sqrt{۳۰}}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{Max}(۲P)=\frac{۲\sqrt{۱۰}+۴\sqrt{۳}}{۵}$$

۵) در کره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$، استوانه‌ای به حجم Max محاط کرده‌ایم. مقدار عددی این حجم را بیابید.

حل.



$$\text{ارتفاع استوانه}=h=۲x$$

$$\text{شعاع کره}=R$$

$$\text{شعاع قاعده استوانه}=r$$

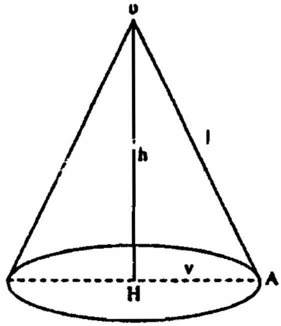
$$x^۲+r^۲=R^۲ \Rightarrow x^۲+r^۲=۳ \Rightarrow r^۲=۳-x^۲$$

$$V_{\text{استوانه}}=\pi r^۲h=\pi(۳-x^۲)(۲x)=\pi(۶x-۲x^۳)$$

$$V'=\pi(۶-۶x^۲)=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=۱$$

$$V_{Max}=\pi(۶-۲)=۴\pi$$

۶) بین مخروطهای به مولدثابت $۳\sqrt{۳}$، ماکزیمم حجم را بیابید.



$$OA = l = ۳\sqrt{۳}$$ طول مولد

$$OH = h$$ ارتفاع

$$H.A = r$$ شعاع قاعده

$$h^{۲} + r^{۲} = l^{۲} \Rightarrow h^{۲} + r^{۲} = (۳\sqrt{۳})^{۲} \Rightarrow r^{۲} = ۲r - h^{۲}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - h^{۲})h$$

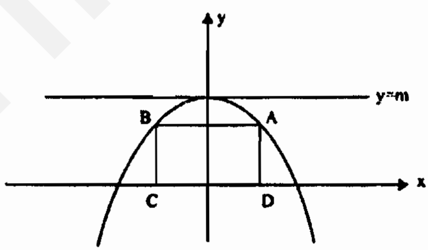
$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷h - h^{۳})$$

$$V' = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - ۳h^{۲}) = ۰ \Rightarrow h^{۲} = ۹ \Rightarrow h = ۳$$

$$V_{Max} = \frac{۱}{۳}\pi(۲۷ - ۹)(۳) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۸)(۳) = ۱۸\pi$$

۷) خط $y = m > ۰$ منحنی تابع به معادله $y = ۱۲ - x^{۲}$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مستطیلی می‌سازیم که یک ضلع آن AB و ضلع دیگر روی محور xها باشد. ماکزیمم مساحت این مستطیل را پیدا کنید.

حل.



$$AB = ۲x \quad , \quad AD = y$$

$$S_{ABCD} = AB \times AD = 2xy$$

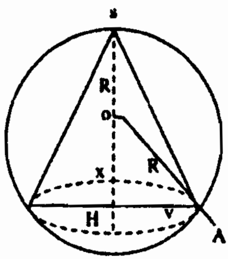
$$S = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$S' = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$Max(S) = 4(12 - 4) = 32$$

۸) اگر در داخل کره‌ای به شعاع $R = 3$ مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم، حجم مخروط را حساب کنید.

حل.



$$x + R = h = \text{ارتفاع مخروط}$$

$$r = \text{شعاع قاعده مخروط}$$

$$R = \text{شعاع کره}$$

$$x^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = 9 - x^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2)(x + 3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi[-2x(x+3) + (9 - x^2)]$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi(-2x^2 - 6x + 9 - x^2)$$

$$V' = \pi(-x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{قابل قبول} \\ x = -3 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$V_{Max} = \frac{1}{3}\pi(9 - 1)(1 + 3) = \frac{32\pi}{3}$$

فصل پنجم

ضدّ مشتق

هدفهای رفتاری

دانشجو بعد از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. مفهوم ضدّ مشتق توابع جبری را بداند و آنها را حل کند.

۲. مفهوم ضدّ مشتق توابع مثلثاتی را بداند و آنها را حل کند.

۳. مفهوم تغییر متغیّر در محاسبه ضدّ مشتق توابع را بیان کرده و کاربرد آن را بداند.

۴. دستورهای محاسبه ضدّ مشتق توابع را بیان نموده و از آنها در محاسبه ضدّ مشتق بتواند استفاده نماید.

۵-۱ ضدّ مشتق

۵-۱-۱ مقدمه. ارتباط قابل توجهی بین مشتق و ضدّ مشتق وجود دارد که در این فصل به آن اشاره می‌کنیم. رابطهٔ بین این دو فرآیند به نوعی شبیه به ارتباطی است که جذر گرفتن و مجذور کردن با هم دارند. اگر عدد مثبتی را مربع کرده و سپس از آن جذر مثبت بگیریم دوباره همان عدد اول را به دست می‌آوریم. به طور مشابه اگر ضدّ مشتق تابع پیوسته f را محاسبه کنیم، به تابع جدیدی می‌رسیم که اگر از آن مشتق بگیریم به تابع اول f بازمی‌گردیم. به عنوان مثال هرگاه $f(x) = ۲x$ تابع مفروضی باشد اساساً

ضدّ مشتق f تابع $x^{۲}$ باید منظور گردد زیرا $(x^{۲})' = ۲x$. حال با این مقدمه تعریف زیر را می‌آوریم:

۵-۱-۲ تعریف. فرض کنید تابع f بر یک بازه مانند I پیوسته باشد، تابع f را ضدّ مشتق تابع f بر I می‌نامیم، هرگاه:

$$\forall x \in I \ , \ F'(x) = f(x)$$

۵-۱-۳ مثال. تابع $f(x) = ۲x - ۷$ را در نظر بگیرید. بدیهی است تابع $F(x) = x^{۲} - ۷x$ ضدّ مشتق $f(x)$ است.

اگر $G(x) = x^{۲} - ۷x + C$ که C عددی است دلخواه و ثابت، G نیز ضدّ مشتق f است زیرا:

$$G'(x) = ۲x - ۷$$

به طور کلی داریم:

۵-۱-۴ قضیه. اگر F و G ضدّ مشتق تابع f بر بازهٔ I باشند، آنگاه $G(x) = F(x) + C$ که در آن C عدد دلخواه و ثابت است.

اثبات. با توجه به فرض:

$$\forall x \in I \ , \ F'(x) = G'(x) = f$$

بنابراین فرض کنید $h(x) = G(x) - F(x)$، پس:

$$\forall x \in I \ , \ h'(x) = ۰$$

لذا $h(x)$ برای هر x متعلق به I ثابت است یعنی:

$$\forall x \in I \ , \ h(x) = C$$

بنابراین $G(x) - F(x) = C$، پس داریم:

$$G(x) = F(x) + C$$

۵-۱-۵ نتیجه. اگر F ضدّ مشتق f بر روی فاصله I باشد، صورت کلی تمام ضدّ مشتق‌های f روی I به فرم $F(x)+C$ می‌باشد که در آن c ثابت و دلخواه است.

۵-۱-۶ تذکر. اگر F تابع اولیه f در فاصله I باشد داریم:

$$\forall x \in I \ , \ F'(x)=f(x)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\frac{d\big(F(x)\big)}{dx}=f(x) \tag{۱}$$

۵-۱-۷ معرفی نماد. نماد $\int$ را که به عنوان نمایش عمل ضدّ مشتق‌گیری معرفی می‌کنیم و در واقع این علامت معکوس علامت دیفرانسیل می‌باشد. با توجه به رابطه (۱) و نماد $\int$ می‌توان نوشت:

$$\int d\big(F(x)\big)=\int f(x)\,dx$$

و یا داریم:

$$\bullet \int f(x)\,dx=F(x)+C \tag{۲}$$

در حقیقت رابطه (۲) را با گزارهٔ دوشرطی زیر بیان نمود:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \ \Leftrightarrow \ F'(x)=f(x) \tag{۳}$$

۵-۱-۸ مثال. فرض کنید $\int f(x)\,dx=\sin^{۲}x-۴x^{۳}+۸$. $f(x)$ را بیابید.

حل. به سادگی با توجه به تعریف ضدّ مشتق داریم:

$$f(x)=\frac{d}{dx}(\sin^{۲}x-۴x^{۳}+۸)$$

$$f(x)=\sin ۲x-۱۲x^{۲}$$

۵-۱-۹ تذکر. چون ضدّ مشتق، (ضدّ دیفرانسیل‌گیری) عمل معکوس مشتق‌گیری (دیفرانسیل‌گیری) است، لذا با توجه به تعریف مشتق و قضایای مشتق به سادگی قضایای زیر را می‌توان اثبات نمود. در زیر آنها را بیان می‌کنیم و اثبات آنها را به خواننده محول می‌کنیم.

۵-۱-۱۰ قضیه. اگر $(1 \leq i \leq n)$, $\alpha_i \in R$ ، f_1 ، $f_2, \ldots, f_n$ بر بازه I تعریف شده باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)dx$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\int(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))dx$$

$$= \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)dx$$

۵-۱-۱۱ قضیه.

الف) $\int dx = x + C$

ب) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad (n \in Q), (n \neq -1)$

در (ب) مفهوم کلمه ضدّ مشتق به خوبی قابل بیان است زیرا که داریم:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

۵-۱-۱۲ مثال. $\int(2x-3)dx$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به (۵-۱-۹) داریم:

$$\int(2x-3)dx = x^2 - 3x + C$$

۵-۱-۱۳ مثال. $\int(\sqrt{x}+2x^2-8)dx$ را حساب کنید.

حل. با توجه به ۵-۱-۹ و ۵-۱-۱۰ به سادگی داریم:

$$\int(x^{\frac{1}{2}}+2x^2-8)=\int x^{\frac{1}{2}}dx+2\int x^2dx-8\int dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^3-8x+C$$

۵-۱-۱۴ تذکر. در حل مثالهایی که تاکنون دیده‌ایم موفق بوده‌ایم. زیرا با توجه به تجربیاتی که در مشتق داریم توانستیم به سادگی مثالها را حل کنیم. ولی همیشه نمی‌توان به طور مستقیم مثالها را حل نمود. لذا روش‌های مختلفی برای محاسبه ضدّ مشتق بیان خواهیم نمود. در این قسمت یک روش را ارائه می‌دهیم، روش‌های دیگر را در بخش‌های آتی بیان خواهیم کرد.

۵-۲ روش تعویض متغیر برای محاسبهٔ ضدّ مشتق توابع

۵-۲-۱. اغلب می‌توان با تعویض متغیّر ضدّ مشتق یک تابع را در صورت وجود تعیین نمود. روش انجام دادن این عمل را روش تعویض متغیر گویند. نخست چگونگی به‌کارگیری این روش و سپس علت مفید بودن آن را نشان می‌دهیم. موضوع را با بررسی یک مثال آغاز می‌کنیم.

۵-۲-۲ مثال. برای محاسبه $\int(x^4-1)^2\cdot 4x^3dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. فرض کنید $u=x^4-1$ (مرحله تعویض متغیر) لذا داریم $du=4x^3dx$. بنابراین:

$$\int(x^4-1)^2\cdot 4x^3dx=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C$$

۲. حال تغییر متغیر را معکوس می‌کنیم تا نتیجه مطلوب حاصل شود:

$$=\frac{1}{3}(x^4-1)^3+C$$

۳. این روش مفید است زیرا:

$$۴x^۳ = \frac{d}{dx}(x^۴ - ۱) = \frac{du}{dx}$$

که آن بخشی از تابع زیر $\int$ است به کمک قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\int (x^۴ - ۱)^۲ \, ۴x^۳ \, dx = \int (x^۴ - ۱)^۲ \frac{d}{dx}(x^۴ - ۱)\, dx$$

$$= \int \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^۴ - ۱)^۳}{۳}\right] dx = \frac{(x^۴ - ۱)^۳}{۳} + C$$

۵-۲-۳ قرارداد. به‌جای کلمه ضدّ مشتق، کلمه انتگرال را نیز می‌توان به‌کار برد، لذا اگر هدف محاسبه انتگرال $\int f(x)dx$ باشد، منظور آن است که ضدّ مشتق f را می‌خواهیم محاسبه کنیم.

دستورالعملی را که در مثال ۵-۲-۲ از آن استفاده نمودیم، با قضیه زیر توجیه می‌کنیم که مشابه قاعدهٔ زنجیره‌ای در مشتق توابع است و لذا آن را قاعدهٔ زنجیری برای ضدّ مشتق‌گیری می‌نامیم.

۵-۲-۴ قضیه. (قاعدهٔ زنجیری برای ضدّ مشتق‌گیری)

فرض کنید g تابعی مشتق‌پذیر از x و برد g بازهٔ I باشد و فرض کنید f بر I تعریف شده و F ضدّ مشتق f بر I باشد. اگر $u = g(x)$، آنگاه:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

اثبات. با توجه به فرض داریم:

$$\frac{dF(u)}{du} = f(u) \qquad (۱)$$

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \qquad (۲)$$

همچنین:

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{dx} \qquad (۳)$$

با در نظر گرفتن قاعده زنجیری در مشتق و اِعمال آن در سمت راست تساوی (۳) داریم:

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (۴)$$

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = f(u) \cdot \frac{du}{dx} = f(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (۵)$$

بنابراین داریم:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \qquad (۶)$$

$$= F(u) + C \qquad (۷)$$

با مقایسه روابط (۲) و (۶) و (۷) داریم:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

۵-۲-۵ قضیه. قاعده زنجیره‌ای بُرای ضدّ مشتق‌گیری، روش تغییر متغیر برای محاسبه انتگرال را بیان می‌کند و به کمک آن می‌توان اغلب انتگرال‌ها را حل نمود. در هر صورت ما نسخه خاصی در این مورد پیشنهاد نمی‌کنیم، دانشجو زمانی مسلّط بر این روش خواهد بود که تمرینات مختلف را حل نماید.

۵-۲-۶ مثال. اگر g تابع مشتق‌پذیری از x باشد و $u = g(x)$، آنگاه:

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad (n \neq -1)$$

۵-۲-۷ مثال. انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int (x-1)^{20} x\,dx$$

حل. با فرض $z = x-1$ داریم $dz = dx$ و $x = 1+z$. بنابراین داریم:

$$\int (x-1)^{20} x\,dx = \int (1+z) z^{20} dz = \int (z^{20}+z^{21})dz$$

$$= \frac{1}{21}z^{21} + \frac{1}{22}z^{22} + C = \frac{1}{21}(x-1)^{21} + \frac{1}{22}(x-1)^{22} + C$$

۵-۲-۸ مثال. انتگرال $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ را حل کنید.

حل. روش تغییر متغیر را می‌توان به عنوان یک ابزار اکتشافی به‌کار برد. پیچیده‌ترین بخش تابع زیر انتگرال را (انتگرالده) انتخاب می‌کنیم. در این مثال فرض کنید:

$$u = \sqrt{x-1}$$

بنابراین $u^2 = x-1$ و $2u\,du = dx$ و داریم:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (1+u^2)u \cdot 2u\,du = \int (2u^2 + 2u^4)du$$

$$= \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 + C = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + \frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + C$$

حال فرض کنید $u = x-1$ و مثال را حل کنید و ملاحظه کنید نتیجه یکسان است.

در حقیقت برای تغییر متغیر موفق، ممکن است چندین روش موجود باشد.

۵-۲-۹ تمرین. ۱. هر یک از انتگرال‌های زیر را حل کنید:

الف) $\int (3x-2)^4 dx$

ب) $\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}dx$

ج) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

د) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

هـ) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

و) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$

ز) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

ح) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$

ط) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$

ی) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx$

ل) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$

م) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$

ن) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

۲. فرض کنید $f(x)=|x|$ و تابع F به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

نشان دهید F یک ضدّ مشتق f روی $(-\infty,+\infty)$ است.

۵-۳ ضدّ مشتق‌گیری از توابع مثلثاتی

۵-۳-۱. با توجه به تعریف ضدّ مشتق و با در نظر گرفتن مشتق توابع مثلثاتی، به سادگی دستورهای زیر را می‌توان بیان نمود.

الف) با توجه به $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$، داریم: $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

ب) با در نظر گرفتن $\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$، داریم: $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$.

ج) با در نظر گرفتن $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)=\sec^2 x$، داریم: $\int \sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C$.

د) و با توجه به $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cotg} x)=\csc^2 x$، داریم:

$$\int \csc^2 x\,dx=-\operatorname{cotg} x+C$$

۵-۳-۲. با در نظر گرفتن $u=f(x)$ و با توجه به قاعدهٔ زنجیری در مشتق‌گیری، می‌توان روابط بالا را در حالت کلّی بیان نمود:

$$\int \cos u\cdot du=\int u'\cdot \cos u\cdot dx=\sin u+C \qquad (I)$$

$$\int \sin u\cdot du=\int u'\cdot \sin u\cdot dx=-\cos u+C \qquad (II)$$

$$\int \sec^2 u\cdot du=\int u'\cdot \sec^2 u\cdot dx=\operatorname{tg} u+C \qquad (III)$$

$$\int \csc^2 u\cdot du=\int u'\cdot \csc^2 u\cdot dx=-\operatorname{cotg} u+C \qquad (IV)$$

۵-۳-۳ مثال. فرض کنید $(x > 0)$، مطلوبست محاسبهٔ $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

حل. داریم:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int 2\cos\sqrt{x}\cdot d(\sqrt{x}) = 2\int \cos\sqrt{x}\cdot d(\sqrt{x}) = 2\sin\sqrt{x} + C$$

این مثال را یک بار دیگر از روش تغییر متغیر (با فرض $\sqrt{x} = u$) حل کنید.

۵-۳-۴ مثال. انتگرال زیر را حل کنید.

$$\int \sin^n x\cdot \cos x\, dx \quad , \quad (n \neq -1)$$

حل. با در نظر گرفتن $t = \sin x$، $dt = \cos x\, dx$ داریم:

$$\int \sin^n x\cdot\cos x\cdot dx = \int t^n\cdot dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C$$

۵-۳-۵ تذکر. حال ضدّ مشتق مربوط به توانهای سینوس و کوسینوس را بررسی می‌کنیم. برای این منظور چند حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: در $\int \sin^n u\cdot du$ یا $\int \cos^n u\cdot du$ وقتی که n عدد صحیح فرد است $(n = 2k+1)$:

در این حالت انتگرال‌ها را به صورت:

$$\int \sin^n u\cdot du = \int \sin^{2k} u\cdot \sin u\, du = \int (1-\cos^2 u)^k \sin u\, du$$

$$\int \cos^n u\, du = \int \cos^{2k} u\cdot\cos u\cdot du = \int (1-\sin^2 u)^k\cdot \cos u\, du$$

در نظر می‌گیریم و با تغییر متغیرهای مناسب انتگرال‌ها به سادگی قابل حل می‌باشند.

۵-۳-۶ مثال. انتگرال $\int \cos^5 x\,dx$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^2\,dx$$

با در نظر گرفتن $t=\sin x$ ، $dt=\cos x\,dx$ داریم:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-t^2)^2\,dt = t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

۵-۳-۷ حالت دوم. محاسبه انتگرال: $\int \sin^n u\cdot du$ ، $\int \cos^n u \cdot du$ ، n زوج است.

در این حالت روش استفاده از حالت اول مفید نیست. در این صورت با در نظر گرفتن $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ در جریان حل انتگرال می‌توان انتگرالها را حل نمود.

۵-۳-۸ مثال. انتگرال $\int \cos^4 x\,dx$ را حل کنید.

حل. با توجه به ۷-۳-۵ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

۵-۳-۹ حالت سوم. محاسبه انتگرال $\int \sin^n x\cdot \cos^m x\,dx$: حداقل یکی از توانها فرد باشد.

حل این نوع انتگرال‌ها مشابه راه‌حلی است که در حالت اول بیان نمودیم.

۵-۳-۱۰ مثال. انتگرال $\int \sin^۲ x \cdot \cos^۳ x\,dx$ را حل کنید.

حل.
$$\int \sin^۲ x \cdot \cos^۳ x\,dx = \int \sin^۲ x \cdot (۱-\sin^۲ x)\cdot \cos x\,dx$$

با فرض $z = \sin x$ داریم $dz = \cos x\,dx$. بنابراین:

$$\int \sin^۲ x \cdot (۱-\sin^۲ x)\cos x\,dx = \int z^۲(۱-z^۲)\,dz = \frac{۱}{۳}z^۳ - \frac{۱}{۵}z^۵ + C$$

$$= \frac{۱}{۳}\sin^۳ x - \frac{۱}{۵}\sin^۵ x + C$$

۵-۳-۱۱ حالت چهارم. محاسبه انتگرال $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$ وقتی که m و n هر دو زوج باشند.

روش حل این حالت مشابه حالت (۲) است ولی می‌توان تغییر متغیرهای مناسب دیگری نیز در نظر گرفت.

۵-۳-۱۲ مثال. انتگرال $\int \sin^۲ x \cdot \cos^۴ x\,dx$ را حل کنید.

حل.
$$\int \sin^۲ x \cdot \cos^۴ x\,dx = \int \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \cdot \left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)^۲ dx$$

$$= \frac{۱}{۸}\int (۱-\cos ۲x)(۱+۲\cos ۲x+\cos^۲ ۲x)\,dx$$

$$= \frac{۱}{۸}x + \frac{۱}{۱۶}\sin ۲x - \frac{۱}{۸}\int \frac{۱+\cos ۴x}{۲}\,dx - \frac{۱}{۸}\int (۱-\sin^۲ ۲x)\cos ۲x\,dx$$

$$= \frac{۱}{۱۶}x + \frac{۱}{۴۸}\sin^۳ ۲x - \frac{۱}{۶۴}\sin ۴x + C$$

۵-۳-۱۳ تمرین. انتگرال $\int \frac{dx}{\sin^۲ x \cos^۴ x}$ را حل کنید.

۵-۳-۱۴ حالت پنجم. محاسبه انتگرال $\int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx$ ، یا $\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx$ ، و یا $\int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx$. با توجه به دستورهای زیر حل می‌کنیم:

الف) $2\sin\alpha x\cos\beta x = \sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x$

ب) $2\sin\alpha x\sin\beta x = \cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x$

ج) $2\cos\alpha x\cos\beta x = \cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x$

۵-۳-۱۵ مثال. انتگرال $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$ را حل کنید.

حل.

$$\int \sin 5x\cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 2x + \sin 8x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$$

۵-۳-۱۶ حالت ششم. محاسبه انتگرال $\int \sec^n x\cdot tg^m x\, dx$ یا $\int \csc^n x\cdot cotg^m x\, dx$ ، در حالتی که n زوج باشد. عامل $\sec^2 x$ (یا $\csc^2 x$) را جدا کرده و سایر عبارات را برحسب $tg\,x$ (یا $cotg\,x$) مرتب می‌کنیم و با در نظر گرفتن تغییر متغیر $u = tg\,x$ (یا $u = cotg\,x$) انتگرال را حل می‌کنیم.

۵-۳-۱۷ مثال. انتگرال $I = \int \sec^4 x\cdot tg^5 x\, dx$ را حل کنید.

حل.

$$I = \int \sec^2 x\cdot\sec^2 x\cdot tg^5 x\, dx = \int (1+tg^2 x)\, tg^5 x\cdot \sec^2 x\, dx$$

حال با فرض $u = tg\,x$، داریم $\sec^2 x\, dx = du$.

$$I = \int (1+u^2)u^5\, du = \frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{8}u^8 + C = \frac{1}{6}tg^6 x + \frac{1}{8}tg^8 x + C$$

۵-۳-۱۸ حالت هفتم. محاسبه انتگرال $\int \sec^n x \cdot tg^m x\, dx$ یا $\int \csc^n x \cdot cotg^m x\, dx$ که در آن m فرد است.

عامل $\sec x \cdot tg x$ (یا $\csc x \cdot cotg x$)، را جدا می‌کنیم و سایر عوامل را برحسب $\sec x$ $(\csc x)$ مرتب می‌کنیم. با تغییر متغیری نظیر $u = \sec x$ $(u = \csc x)$ انتگرال حل می‌شود.

۵-۳-۱۹ مثال. انتگرال $J = \int \sec^۷ x \cdot tg^۵ x \cdot dx$ را حل کنید.

حل.

$$J = \int \sec^۶ x \cdot tg^۴ x (\sec x\, tg x) dx$$

با در نظر گرفتن $u = \sec x$، داریم $du = dec x \cdot tg x\, dx$.

بنابراین:

$$J = \int \sec^۶ x \cdot (\sec^۲ x - ۱)^۲ \cdot (\sec x \cdot tg x) dx$$

$$J = \int u^۶ (u^۲ - ۱)^۲ du = \frac{۱}{۱۱} u^{۱۱} - \frac{۲}{۹} u^۹ + \frac{۱}{۷} u^۷ + C$$

$$J = \frac{۱}{۱۱} \sec^{۱۱} x - \frac{۲}{۹} \sec^۹ x + \frac{۱}{۷} \sec^۷ x + C$$

۵-۳-۲۰ تمرین. ۱) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int tg^۴ x\, dx$ ۲) $\int tg^۶ x\, dx$

۳) $\int \frac{\cos^۳ x}{\sin^۹ x} dx$ ۴) $\int \sec^۴ x \cdot cotg^۶ x\, dx$

۵) $\int \frac{\sin^۳ x}{\cos^۹ x} dx$ ۶) $\int \csc^۴ x \cdot cotg^۷ x\, dx$

۷) $\int \cos x \sec^{2} x (\sin x) dx$ ۸) $\int \sin^{3} 2x \cdot \cos^{5} 2x\, dx$

۹) $\int \frac{tg\, x(1+tg\, x)^{10}}{\cos^{2} x} dx$ ۱۰) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^{2} x+2\cos x+1}$

۲) فرض کنید $(n>1)$, $I_n = \int tg^{n} x\, dx$. یک فرمول بازگشتی برای محاسبه I_n بیابید، سپس I_4 و I_6 را محاسبه کنید.

۳) معادله دسته منحنی‌هایی را بیابید که ضریب زاویه خطوط مماس در هر نقطه (x,y) از آن برابر $-\frac{x}{y}$ باشد.

۴) معادله منحنی را بیابید که از نقطهٔ $(2,9)$ گذشته و معادله ضریب زاویه مماس بر منحنی $3x^{2}$ باشد.

۵) معادله $y' - 2x = 0$ را (معادله دیفرانسیل) حل کنید.

۶) مشتق تابعی برابر $\sqrt{x+3}$ است. هرگاه مقدار تابع به ازای $x=1$ برابر ۱ باشد، تابع را بیابید.

۷) هر یک از انتگرالهای زیر را حل کنید:

۱) $\int \frac{\sin x\, dx}{(1+\cos x)^{2}}$

۲) $\int \cos^{6} x\, dx$

۳) $\int \sin^{5} x \cos^{2} x\, dx$

۴) $\int \frac{\cos^{3} 2x}{\sqrt[3]{\sin 2x}} dx$

۵) $\int \sin 3y \cos 3y\, dy$

۶) $\int \cos t \cos 3t\, dt$

۷) $\int \sin x \sin ۳x \sin ۵x \, dx$

۸) $\int \sin^۴ x \cos^۴ x \, dx$

۹) $\int \sqrt{۱+\sin^۲(x-۱)} \cdot \sin(x-۱)\cos(x-۱)\, dx$

۱۰) $\int \frac{dx}{\cos^۲ x \cdot \sin^۲ x}$

۱۱) $\int \cos x \cdot \cos ۲x \cdot \cos ۵x \, dx$

۱۲) $\int \frac{۱+\sin ۳x}{\cos^۲ ۳x} dx$

۱۳) $\int \frac{(\sin x+\cos x)dx}{(\sin x-\cos x)^{\frac{۱}{۳}}}$

۱۴) $\int x^{n-۱} \sin x^n \, dx \quad , \quad (n \neq ۰)$

۱۵) $\int \frac{\sin^۳ x}{\sqrt[۵]{\cos^۳ x}}$

۱۶) $\int \frac{\sin x \, dx}{(۱+\cos x)^۲}$

۱۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^۲ \sqrt{x}}$

۱۸) $\int \frac{x}{\cos^۲ x^۲} dx$

۱۹) $\int \sin x (۱+\cos x)^۵ \, dx$

۲۰) $\int \sin ۲x \sqrt{۱+\sin^۲ x} \, dx$

فصل ششم

انتگرال معیّن

هدفهای رفتاری

دانشجو، پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. تعریف انتگرال معین را بداند.

۲. خواص انتگرال معین را بیان کند.

۳. قضیه‌های مربوط به انتگرال معین را بیان کند و به کار برد.

۴. قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیان و اثبات کند.

۵. مفهوم انتگرال نامعین را بداند.

۶. روش انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر را در محاسبهٔ انتگرال‌های معین و نامعین را بداند.

۶-۱ انتگرال معیّن

۶-۱-۱ مقدمه. انتگرال و مشتق دو مفهوم اساسی ریاضیات عمومی است، به طوری که این شاخه از ریاضیات را به خاطر اهمیت خاص این دو مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامند. انتگرال معین در این بخش به صورت حد یک مجموع خاص به نام مجموع انتگرال تعریف می‌شود. این مفهوم در تاریخ حتی قبل از مشتق مورد توجه و بررسی ریاضیدانان قرار گرفته است.

در این فصل ما ساده‌ترین و طبیعی‌ترین نوع انتگرال را برای ساده‌ترین نوع تابع‌ها یعنی توابع حقیقی یک‌متغیره در روی فاصله $[a,b]$ تعریف و خواص آن را بررسی خواهیم نمود. در ریاضی (۲) یا در ریاضی (۳) این تعریف را برای توابع دیگر بسط خواهیم داد.

۶-۱-۲ تعریف انتگرال معیّن. فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. بازه $[a,b]$ را به وسیله نقاط x_0، x_1، ... و x_n به n زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i=1,2,\ldots,n$ تقسیم می‌کنیم. مجموعهٔ نقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ را یک افراز بازهٔ $[a,b]$ می‌گویند.

طول زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ را با نماد Δx_i نمایش می‌دهیم. اگر ξ_i یک نقطه دلخواه از $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، مجموع $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ را یک مجموع انتگرال f می‌گویند.

اگر به ازای هر افراز $[a,b]$ و هر انتخاب ξ_i، حد $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ وقتی $\operatorname{Max}\Delta x_i \to 0$ موجود باشد، آنگاه حد فوق را انتگرال معین تابع f بر $[a,b]$ می‌نامیم و آن را با نمادهای $\int_a^b f(x)dx$ ، $\int_{[a,b]} f(x)dx$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\operatorname{Max}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

۶-۱-۳ تعریف. انتگرال معین تابع f بر $[a,b]$ را به طرق مختلف می‌توان بیان نمود. در تعریف ۶-۱-۲ فرض کنید بازهٔ $[a,b]$ به n قسمت مساوی در نقاط $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ افراز شود. در این صورت $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$، حال اگر $n \to +\infty$ آنگاه $\Delta x_i \to 0$ بنابراین تعریف انتگرال معین به صورت زیر بیان می‌شود:

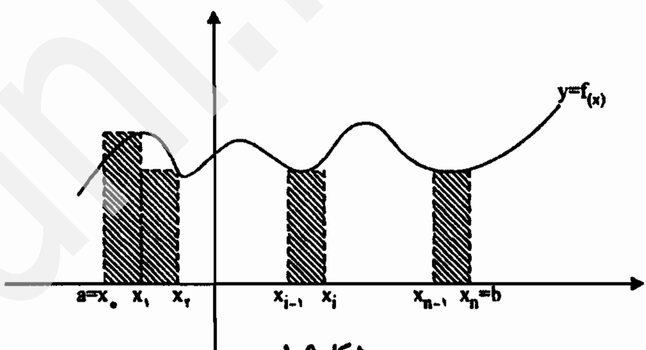
$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$$

حال چون $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ دلخواه است پس می‌توان فرض نمود $\xi_i = x_i$ بنابراین:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+i(\frac{b-a}{n})\right)$$

۶-۱-۴ تعریف. فرض کنید f بر بازه $[a,b]$ نامنفی باشد در این صورت $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ عبارت است از مجموع مساحتهای مستطیل‌هایی که یک ضلع آنها Δx_i و ضلع دیگرشان $f(x_i)$ است. بدیهی است مجموع این مساحت‌ها به طور تقریبی با مساحت زیر منحنی در فاصله $[a,b]$ برابر است. هر اندازه تعداد مستطیل‌ها زیاد باشد یعنی افراز $[a,b]$ باریک‌تر باشد این مجموع به مساحت زیر منحنی نزدیک‌تر می‌شود.

خصوصاً اگر $\text{Max}\,\Delta x_i \to 0$ $(n \to +\infty)$، آنگاه این حد دقیقاً مطابق تعریف برابر مساحت زیر منحنی تابع f در فاصله $[a,b]$ می‌باشد. این بدان معنی است که $\int_a^b f(x)dx$ از نظر هندسی با مساحت زیر منحنی f قابل توجیه است (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱

۶-۱-۵ نکته. بدیهی است با توجه به تعریف انتگرال معین و با توجه به منحصر به فردی حد توابع، انتگرال معیّن یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد است.

۶-۱-۶ مثال. تابع $f(x)=\frac{1}{2}x$ را در بازهٔ $[0,1]$ در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه $\int_{[0,1]}\frac{1}{2}x\,dx$.

حل. ابتدا نمودار تابع را رسم کنید، سپس بازهٔ $[0,1]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنید. بدیهی است:

$$f(x)=\frac{1}{2}x \quad , \quad \Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_i=\cdots=\frac{1-0}{n}$$

$$x_n=\frac{n}{n}\ ,\ \ldots\ ,\ x_2=\frac{2}{n}\ ,\ x_1=\frac{1}{n}\ ,\ x_0=0$$

بنابراین مطابق تعریف داریم:

$$\int_0^1\frac{1}{2}x\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\frac{i}{n}=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}$$

۶-۱-۷ تمرین. با استناد تعریف حد، انتگرال تابع $f(x)=x^2$ را در فاصله $[0,1]$ محاسبه کنید.

۶-۱-۸ قضیه. اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.
از اثبات این قضیه صرف‌نظر می‌کنیم. علاقمندان به اثبات آن می‌توانند به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه نمایند و یک بار اثبات آن را ملاحظه نمایند.

۶-۱-۹ تذکر. یک تابع انتگرال‌پذیر در $[a,b]$ لزوماً در $[a,b]$ پیوسته نیست.

به عنوان مثال فرض کنید $[a,b]$ بازه‌ای شامل $x=0$ باشد و تابع ناپیوستهٔ

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

و مجموع $\alpha=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ را در نظر بگیرید. اگر هیچکدام از ξ_iها صفر نباشند مطابق تعریف $f(\xi_i)=0$ بنابراین $\alpha=0$. حال اگر $\xi_j=0$ و $|\alpha|=|x_j-x_{j-1}|=|\Delta x_j|$، با در نظر گرفتن $k=\text{Max}\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1\,,\,\dots\,,\,x_n-x_{n-1}\}$، می‌توان نوشت $|\alpha|<k$. بنابراین:

$$\lim_{\text{Max}\,\Delta x_i\to 0}\alpha=0$$

این بدان معنی است با وجود آن که تابع f در $[a,b]$ پیوسته نیست.

ولی $\int_a^b f(x)dx=0$.

۶-۱-۱۰ **مثال.** تابع $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in R-Q\end{cases}$ که موسوم به تابع دیریکله است را در نظر می‌گیریم، تابع D در بازهٔ دلخواه $[a,b]$ ناپیوسته است. ثابت کنید تابع D در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست.

در واقع با فرض $\xi_i\in Q$، $\alpha=1$ و اگر $\xi_i\in R-Q$ باشد $\alpha=0$.

این موضوع بدون توجه به اندازهٔ α صحیح است، بنابراین عددی مانند I موجود نیست که بتوان $|\alpha-I|$ را به ازای kی به قدر کافی کوچک به دلخواه کوچک کرد.

به عبارتی $D(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۶-۱-۱۱ **مثال.** تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در هر بازه متناهی $[a,b]$ که شامل $x=0$ نباشد پیوسته است، بنابراین انتگرال‌پذیر است.

۶-۲ خواص انتگرالهای معیّن

تاکنون محاسبهٔ انتگرال معین را با استفاده از تعریف حد بیان کردیم و به نظر می‌رسد محاسبهٔ انتگرال بدین طریق کاری نسبتاً مشکل و گاهی غیرممکن باشد. برای آن که بتوان انتگرال معیّن را با روش‌های ساده‌تری محاسبه کرد. بعضی از خواص آن را بیان می‌کنیم.

۶-۲-۱ قضیه. فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته و $\alpha \in R$ در این صورت:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

اثبات. فرض کنید $h = \alpha f + g$. مطابق تعریف می‌توان نوشت:

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha f + g)(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i$$

$$= \alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

۶-۲-۲ تمرین. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ب) $\int_a^a f(x)dx = 0$

۶-۲-۳ قضیه. فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و c یک نقطه درونی $[a,b]$ باشد. در این صورت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , \quad (a<c<b)$$

اثبات. بازه $[a,c]$ و $[c,b]$ را با اختیار نقاط تقسیم $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ و $x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}$ افراز می‌کنیم به طوری که،

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

و مجموع‌های:

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i \quad , \quad \alpha'' = \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

را که در آن‌ها $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و ξ_i نقطهٔ دلخواه از $[x_{i-1}, x_i]$ است تشکیل می‌دهیم. در این صورت:

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

فرض کنید λ_1 ماکزیمم طول بازه‌های جزء باشند که $[a,c]$ را می‌سازند و λ_2 ماکزیمم طول بازه‌هایی که $[c,b]$ را می‌سازند باشند. بنابراین:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\lambda_1 \to 0} \alpha' + \lim_{\lambda_2 \to 0} \alpha'' = \lim_{\lambda \to 0} \alpha = \int_a^b f(x)dx$$

که در آن $\lambda = \mathrm{Max}\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

۶-۲-۴ قضیه. فرض کنید f در بازه‌ای شامل نقاط a، b و c پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

۶-۲-۵ تمرین. قضیه ۶-۲-۴ را اثبات کنید.

۶-۲-۶ قضیه. فرض کنید توابع f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند و برای هر x در فاصله $[a,b]$، $f(x) \geq g(x)$. آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

اثبات. به عنوان تمرین به عهده دانشجو محول می‌گردد.

۶-۲-۷ تمرین. ۱) قضیه ۶-۲-۵ را ثابت کنید.

۲) اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و برای هر x در فاصله $[a,b]$، $f(x) \geq 0$، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

۳) اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر x در فاصله $[a,b]$، $f(x) \leq 0$، آنگاه .

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

۶-۲-۸ قضیه. (مقدار میانگین برای انتگرالها). اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای نظیر $c \in [a,b]$ وجود دارد. به طوری که:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

اثبات. با توجه به پیوستگی f در $[a,b]$، تابع f ماکزیمم و مینیمم خود را بر بازه $[a,b]$ اختیار می‌کند. فرض می‌کنیم M ماکزیمم و m مینیمم f در $[a,b]$ باشد.

حال مجموع $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که:

$$m \cdot \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M \cdot \Delta x_i$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n} m \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M \cdot \Delta x_i$$

پس $m(b-a) \le \alpha \le M(b-a)$. با در نظر گرفتن حد طرفین نامساوی وقتی که $n \to +\infty$ می‌توان نوشت:

$$(b-a)m < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)M$$

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx < M$$

به عبارت دیگر:

$$N = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

با توجه به قضیهٔ میانی در پیوستگی نتیجه می‌شود نقطه‌ای نظیر c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(c) = N = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

که در این صورت:

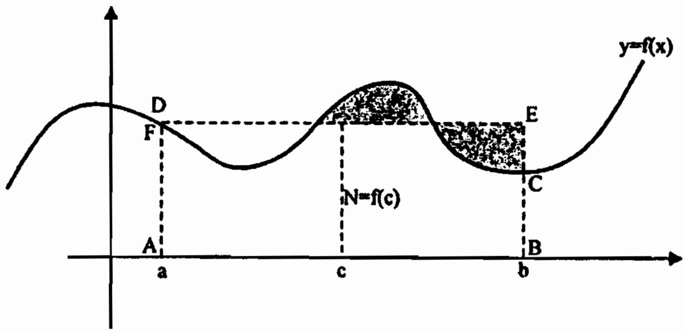
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

۶-۲-۹ تذکر ۱. قضیه ۸-۲-۷ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. شکل (۶-۲) را در نظر بگیرید. $(f(x) \ge 0)$، در این صورت مساحت ABCD محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x و خطوط $x = a$ و $x = b$ مساوی است با:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

از طرفی بنا بر ۶-۲-۷ نقطه‌ای مانند $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که مستطیل به قاعده $b-a = |AB|$ و ارتفاع $h = f(c)$ همان مساحت ABCD را دارد.

اینکه چرا این‌طور است در شکل (۶-۲) نمایش داده شده است که در آن قسمت هاشورخورده ABCD قسمت هاشورخورده مستطیل ABEF را جبران کرده است.



شکل ۶-۲

تذکر ۲. عدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ را مقدار میانگین یا متوسط تابع f روی $[a,b]$ می‌نامند.

۶-۲-۱۰ مثال. مقدار متوسط تابع $f(x)=\cos^2 x$ را با فرض اینکه $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ باشد روی فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ به دست آورید.

حل.

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

$$f(c)=\frac{1}{2}$$

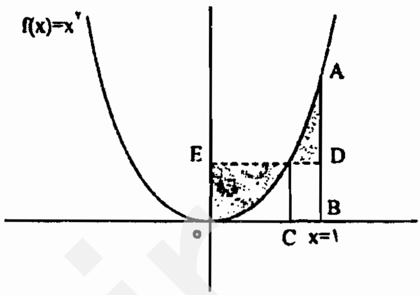
۶-۲-۱۱ مثال. مقدار متوسط $f(x)=x^{۲}$ را روی فاصله $[۰,۱]$ به دست آورید. سپس تعبیر هندسی آن را بیان کنید.

حل. با توجه به تمرین ۶-۱-۷ داریم $\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,dx=\frac{۱}{۳}$. بنابراین:

$$f(c)=\frac{۱}{b-a}\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,dx$$

$$f(c)=\frac{۱}{۳}$$

$$c^{۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow c=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=۰/۵۷$$



بنابراین مساحت زیر منحنی تابع $f(x)=x^{۲}$ در فاصله $[۰,۱]$ با مساحت مستطیل OEDB برابر است.

۶-۲-۱۲ تمرین.

۱. حد $\lim\limits_{m\to+\infty} ۸\left(\frac{۱^{۲}}{n^{۳}}+\frac{۲^{۲}}{n^{۳}}+\cdots+\frac{n^{۲}}{n^{۳}}\right)$ را به‌صورت یک انتگرال معیّن بنویسید.

۲. حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{i^{۲}}$ را به صورت انتگرال معین بنویسید.

۳. با استناد تعریف هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $I = \int_{-1}^{1} |x| dx$ ب) $J = \int_{4}^{5} [x] dx$

۴. اگر تابع f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، ثابت کنید که:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

۵. فاصله‌ای را معیّن کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرند.

الف) $\int_{-2}^{0} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$ ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$

ج) $\int_1^4 |x-2| dx$ د) $\int_{-5}^{2} \frac{x+5}{x-3} dx$

۶. بدون محاسبه انتگرال معین نشان دهید که $\int_0^1 x \ge \int_0^1 x^2 dx$ و $\int_1^2 x\,dx \le \int_1^2 x^2\,dx$.

۷. اگر f روی فاصله $[-1,2]$ پیوسته باشد، نشان دهید:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 0$$

۸. اگر f بر $[a,b]$ پیوسته و $\int_a^b f(x)dx = 0$، نشان دهید حداقل عددی نظیر α در فاصله $[a,b]$ قرار دارد به طوری که $f(\alpha) = 0$.

۹. مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها

الف) برقرار نباشد. ب) برقرار باشد.

۱۰. اگر تابع f روی $[-1,4]$ انتگرال‌پذیر باشد و مقدار متوسط تابع f روی $[-1,4]$ برابر ۳ باشد، مقدار $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ را به دست آورید.

۶-۳ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

در این بخش قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، که ارتباط بین ضدّ مشتق و انتگرال معیّن را نشان می‌دهد بیان و اثبات می‌کنیم. برای معرفی قضیه فوق آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

۶-۳-۱ اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. هرگاه $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، تابع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ یک ضدّ مشتق $f(x)$ در $[a,b]$ است که در آن x یک نقطهٔ متغیر در $[a,b]$ است.

اثبات. در واقع ثابت می‌کنیم $F'(x)=f(x)$، مطابق تعریف می‌توان نوشت:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$$

مطابق قضیهٔ میانگین در انتگرال، داریم:

$$\exists c\in(x\,,\,x+h)\ni\ :\ \int_x^{x+h}f(t)dt=f(c)(x+h-x)$$

بنابراین:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$$

حال با توجه به حدود c، $x<c<x+h$ داریم:

$$\lim_{h\to 0}c=x$$

و بنا بر قاعدهٔ زنجیری در حد داریم:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f \lim_{h\to 0} c = f(x)$$

بنابراین به سادگی نتیجه $F'(x) = f(x)$ حاصل می‌شود و این بدان معنی است که F ضدّمشتق f است.

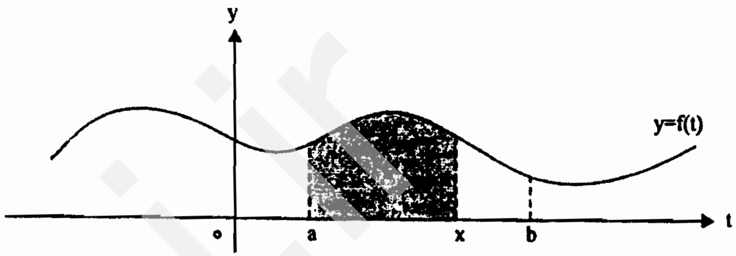
۶-۳-۲ تذکر. در ۶-۳-۲، $F'(a)$ و $F'(b)$ به صورتهای زیر تعریف می‌شوند:

$$F'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$F'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{F(b+h)-F(b)}{h}$$

زیرا F در خارج $[a,b]$ تعریف نشده است.

تعبیر هندسی $F(x)$ در شکل ۶-۳ بیان شده است.



شکل ۶-۳

۶-۳-۳ تذکر و قرارداد. برحسب قرارداد $\int_a^t f(x)\,dx$ را انتگرال نامعیّن f می‌نامیم و از a و t صرف‌نظر کرده و آن را به صورت $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

در واقع مفهوم ضدّمشتق و انتگرال نامعین در این قسمت با هم یکی می‌شوند. و روش‌های محاسبهٔ ضدّ مشتق و انتگرال نامعین به یک صورت انجام می‌گیرد.

۶-۳-۴ مسئله. فرض کنید توابع f و g بر I پیوسته و مشتق‌پذیر باشد به طوری که $\forall x \in I \; ; \; f'(x) = g'(x)$ در این صورت $f(x) - g(x) = C$ که C عددی است ثابت.

حل. فرض کنید $h(x) = f(x) - g(x)$ بنابراین برای هر x در I داریم $h'(x) = 0$. پس مطابق قضیه میانگین در مشتق تابع h در I ثابت است و آن بدین معنی است که:

$$f(x) - g(x) = h(x) = C$$

«حال در موقعیّتی قرار داریم که اساسی‌ترین قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیان و اثبات کنیم».

۶-۳-۵ دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و G در $[a,b]$ ضدّمشتق f باشد. در این صورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

اثبات. فرض کنید $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ مطابق اوّلین قضیهٔ اساسی داریم:

$$F'(x) = f(x)$$

از طرفی $G'(x) = f(x)$. بنا بر ۶-۳-۵:

$$\forall x \in [a,b] \implies F(x) - G(x) = C$$

فرض کنید $x = a$ باشد، داریم:

$$F(a) - G(a) = C$$

$$-G(a) = C$$

بنابراین:

$$F(x) - G(x) = -G(a)$$

حال با در نظر گرفتن $x = b$ در رابطه اخیر داریم:

$$F(b) - G(b) = -G(a)$$

بنابراین:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) - G(a)$$

۶-۳-۶ مثال. فرض کنید جسمی در امتداد یک خط مستقیم در حرکت است، و $x(t)$ و $V(t)$ موضع و سرعت آن در لحظه t باشند. در این صورت مسافت L پیموده شده به وسیله جسم از لحظهٔ $t = a$ تا لحظهٔ $t = b$ را حساب کنید.

حل.

$$L = \int_a^b V(t)\,dt = \int_a^b \frac{dx(t)}{dt}\cdot dt = \int_a^b dx(t)$$

$$L = x(t)\Big|_{t=a}^{t=b} = x(b) - x(a)$$

۶-۳-۷ مثال. انتگرال $I = \int_{-۱}^{۳} \frac{dx}{(x+۲)^۳}$ را محاسبه کنید.

حل. $$I = \int_{-۱}^{۳} (x+۲)^{-۳}dx = -\frac{۱}{۲(x+۲)^۲}\Big|_{x=-۱}^{x=۳} = \frac{۱۲}{۲۵}$$

۶-۳-۸ تذکر. تاکنون ثابت کردیم انتگرال معین تابع f از طریق حد مجموع قابل محاسبه است. بدیهی است عکس این مطلب نیز همواره صحیح است. بدین معنی که می‌توان حد یک مجموع را با در نظر گرفتن دومین قضیه اساسی محاسبه نمود.

۶-۳-۹ مثال. حد زیر را محاسبه نمایید.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

حل. حد فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

حال با در نظر گرفتن $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0,1]$، و با فرض $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ و با توجه به تعریف انتگرال معین ملاحظه می‌کنید که:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-0}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

۶-۳-۱۰ قضیه (تغییر متغیر در انتگرالهای معیّن). فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $u=h(x)$ روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد ، طوری که $f(x)dx=g(u)du$. اگر g روی برد تابع h پیوسته و یک تابع اولیه g باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{h(a)}^{h(b)}g(u)\,du=G\big(h(b)\big)-G\big(h(a)\big)$$

اثبات. چون تابع $F(x)=G\big(h(x)\big)$ یک تابع اولیه f است، لذا:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = G\big(h(b)\big)-G\big(h(a)\big)$$

از طرفی داریم:

$$G\big(h(b)\big)-G\big(h(a)\big)=\int_{h(a)}^{h(b)} g(u)\,du$$

بنابراین:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u)\,du$$

۶-۳-۱۱ قضیه. ٦-۳-۱۰ روش تغییر متغیر در انتگرالهای معین را روشن می‌کند.

۶-۳-۱۲ مثال. انتگرال معین زیر را حل کنید:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$$

حل.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx$$

حال با فرض $u=\cos x$ داریم: $du=-\sin x\,dx$ از طرفی با توجه به تغییر متغیر فوق بازه $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ به بازهٔ $0\le u\le 1$ تبدیل می‌شود. بنابراین:

$$I=\int_1^0 (1-u^2)(-du)=\int_0^1(1-u^2)\,du=u-\frac{1}{3}u^3\,\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۶-۳-۱۳ تمرین.

۱. فرض کنید f بر $[-a,a]$ پیوسته و فرد باشد، ثابت کنید:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

۲. در تمرین ۱، اگر f زوج باشد، ثابت کنید که:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

۳. انتگرالهای زیر را حل کنید:

الف) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m} x}{\sin^{m} x+\cos^{m} x}dx$

۴. مشتق توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $F(t)=\int_{-2}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{1+x^{2}}}dx$

ب) $F(t)=\int_{a}^{g(t)} f(x)dx$

ج) $\int_{-x}^{x} |t|dt$

د) $\int_{-x}^{x} \frac{dt}{3+t^{4}}$

۵. حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{0}^{x^{2}} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^{3}}$$

۶. در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید:

الف) $\int_{0}^{y} \cos^{2} t\,dt+\int_{0}^{x^{2}} \sin^{2} t\,dt=0$

ب) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{3-2\sin^{2} z}\,dz+\int_{0}^{y} \cos t\,dt=0$

۷. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^{2} x}dx$$

۸. فرض کنید k عددی صحیح باشد ثابت کنید که:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = 0$$

۹. اگر در انتگرال $I = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 2\cos x}$ تغییر متغیر $x = 2t$ را به‌کار ببریم داریم:

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 2\cos x} = \int_{0}^{0} \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(5 - 2\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)} = 0$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا $\frac{1}{5 - 2\cos x} > 0$، لذا انتگرال آن نمی‌تواند صفر باشد، مورد اشتباه را بیابید.

۱۰. فرض کنید $f(x)$ دلخواه باشد، ثابت کنید:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]dx$$

۱۱. انتگرال $I = \int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\, dx$ را با تغییر متغیر $\sin x = t$ تغییر دهید.

۱۲. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$

ب) $\int_{0}^{t} f(x)g(t-x)dx = \int_{0}^{t} g(x)f(t-x)dx$

ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx$

۱۳. با توجه به مسئله ۱۱ (ج) انتگرال‌های $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ و $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ را محاسبه کنید.

۱۴. درستی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $$\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)dx$$

ب) $$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)dx$$

۱۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{۱+\cos ۲x}{۲}}\,dx$$

۱۶. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi}{l}x\,dx$ ب) $\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$

ج) $\int_{-l}^{l} \cos m\frac{\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$ د) $\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi}{l}x \sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$

۱۷. اگر $F(x) = \int_{0}^{x} u\,du$ و $G(x) = \int_{۱}^{x} t\,dt$، ثابت کنید که:

$$F(x) - G(x) = \frac{۱}{۲}$$

۱۸. درستی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n-۱}{n^۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

ب) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^۲+۱^۲}+\frac{n}{n^۲+۲^۲}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲}\right) = \int_{0}^{۱}\frac{dx}{۱+x^۲}$$

ج) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{۲\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-۱)\pi}{n}\right) = \frac{۲}{\pi}$$

۱۹. فرض کنید $B(m,n)=\int_{0}^{1}x^{m}(1-x)^{n}\,dx$ اولاً تساوی $B(m,n)=B(n,m)$ را ثابت کنید، ثانیاً ثابت کنید که $B(m,n)=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\cos^{2n+1}x\,dx$.

۲۰. فرض کنید $x=6\cos\theta$ و $y=2\sin\theta$، مطلوبست محاسبه $I=\int_{3}^{6}x\,y\,dx$.

فصل هفتم

توابع غیرجبری

هدف کلی

مفاهیم این بخش برای مطالب بخش‌های بعدی پیش‌نیاز است.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. وارون مثلثاتی را تعریف کند، مشتق و مفهوم انتگرال را در مورد آن‌ها به‌کار برد.

۲. وارون توابع لگاریتم، تعریف لگاریتم طبیعی و روابط موجود بین آن‌ها را بداند و مفهوم مشتق و ضدّمشتق را برای اینگونه توابع بیان نماید.

۳. توابع هذلولی و وارون توابع هذلولی را تعریف و اتحادهای هذلولی را بداند. مفهوم مشتق و ضدّمشتق را برای توابع هذلولی و وارون آن‌ها بیان نماید.

۴. به‌طور کلی رسم توابع غیرجبری را نیز انجام دهد.

۷-۱ وارون یک تابع

در بخش توابع دیدیم که تابع $f: A \to B$ را وارون‌پذیر گفتیم هرگاه تابع f دوسو باشد، در این صورت $f^{-1}: B \to A$ به عنوان وارون f، تابع است. از طرفی داریم:

$$f(x) = \alpha \iff f^{-1}(\alpha) = x$$

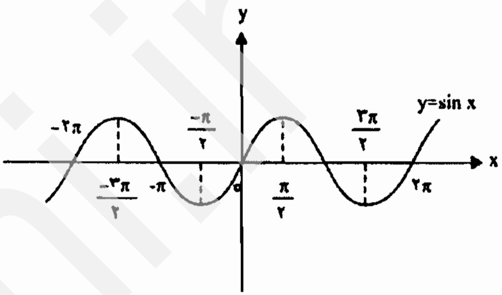
در بخش حاضر در تعریف وارون تابع، از مفهوم اخیر استفاده خواهیم نمود.

۷-۱-۱ تذکر. اگر تابعی معکوس داشته باشد، آنگاه نمودارهای تابع و وارونش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) قرینه هستند.

۷-۲ معکوس توابع مثلثاتی

فرآیند معکوس‌سازی را می‌توان در مورد توابع مثلثاتی به‌کار برد. فرض کنید با تابع سینوس شروع کرده باشیم حال اگر بخواهیم معکوس آن تابع باشد، سینوس را روی بازه‌ای در نظر بگیریم که در آن یکنوا باشد. البته با توجه به نمودار (۷-۱) از این بازه‌ها زیادند، مثلاً $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$، $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ و غیره، واقعاً اینکه کدام را اختیار کنیم اهمیتی ندارد. معمولاً بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ را انتخاب کرده و تابع جدید f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f:[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}] \longrightarrow [-۱,۱]$$



شکل ۷-۱

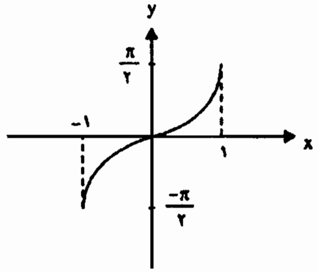
تابع f که به این صورت تعریف شده بر بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ دوسویی است و هر مقدار بین ۱− و ۱+ را دقیقاً یک بار می‌گیرد. از این‌رو تابع منحصر به فردی نظیر g

که بر $[-۱,۱]$ تعریف شده وجود دارد که به هر عدد y در $[-۱,۱]$ آن xی را در $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ نسبت می‌دهد که $y=\sin x$ این تابع g را معکوس سینوس می‌خوانند و مقدارش در y با $\sin^{-۱}y$ نموده می‌شود. بنابراین:

$$\sin^{-۱}:[-۱,۱] \longrightarrow [-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$$

$$-\frac{\pi}{۲}\le U\le\frac{\pi}{۲} \quad , \quad -۱\le u\le ۱ \quad , \quad U=\sin^{-۱}u$$

نمودار $y=\sin^{-۱}x$ در شکل ۷-۲ نشان داده شده است.



$y=\sin^{-۱}x$

شکل ۷-۲

۷-۲-۱ تذکر. $(\sin x)^{-۱}$ را با $\sin^{-۱}x$ اشتباه نکنید در واقع توجه کنید که:

$$\sin^{-۱}x \ne \frac{۱}{\sin x}$$

۷-۲-۲ مشتق و ضدّمشتق $\sin^{-۱}$. چون تابع $\sin^{-۱}$ در دامنه‌اش پیوسته و یکنواست لذا $\sin^{-۱}$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-۱}x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

اثبات. با توجه به $y=\sin^{-1}x$، داریم $x=\sin y$. بنا بر مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$1=\frac{dy}{dx}\cdot\cos y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

چون $-\frac{\pi}{2}\leq y=\sin^{-1}x\leq\frac{\pi}{2}$ لذا $\cos y\geq 0$. در نتیجه:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۷-۲-۳ نتیجه. به سادگی با توجه به تعریف ضدمشتق داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C$$

۷-۲-۴ مثال. ثابت کنید که $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+C$.

حل. با فرض $\frac{x}{a}=t$ داریم $dx=a\,dt$. بنابراین:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

بنا بر ۷-۲-۳:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}t+C=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+C$$

۷-۲-۵ مثال. انتگرال $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$ را حل کنید.

حل. فرض کنید $t=x^2$ بنابراین $x\,dx=\frac{1}{2}dt$ و در نتیجه:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{t}{3})+C=\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{x^2}{3})+C$$

۷-۲-۶ مثال. انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ را حل کنید.

حل.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}=\sin^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\sin^{-1}(2x-1)+C$$

۷-۲-۷ تمرین. مشابه آنچه که در تعریف $\sin^{-1}$ بیان شد، تابع $\cos^{-1}$ را تعریف و سپس ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۷-۲-۸ مثال. ثابت کنید $\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{10}})+\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{\pi}{4}$.

حل. فرض کنید $\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}=\alpha$ و $\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{5}})=\beta$. بنابراین:

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\quad,\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

بنابراین:

$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \quad , \quad \sin\beta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

و در نتیجه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

چون $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$, $۰<\beta<\frac{\pi}{۲}$، بنابراین:

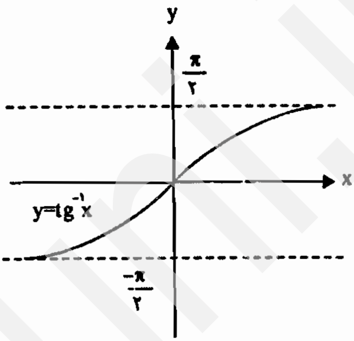
$$۰<\alpha+\beta<\pi$$

پس $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$.

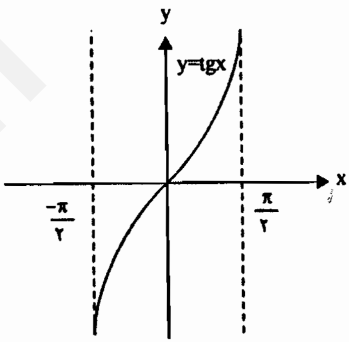
۷-۲-۹ تابع $tg^{-۱}$. استدلالی که در به دست آوردن $\sin^{-۱}$ مورد استفاده قرار گرفت می‌تواند در مورد $tg^{-۱}$ نیز به‌کار رود، و $tg^{-۱}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$tg^{-۱}: R \longrightarrow (-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$$

$$y=tg^{-۱}x \iff x=tg\,y$$



شکل ۷-۴



شکل ۷-۳

در شکل‌های ۷-۳ و ۷-۴ نمودار توابع tg و $tg^{-۱}$ را ملاحظه کنید.

۷-۲-۱۰ قضیه. ثابت کنید $\frac{d}{dx}(tg^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$.

اثبات. چون tg^{-1} در دامنه‌اش پیوسته و یکنواست، لذا مشتق‌پذیر است. از طرفی فرض کنید $y=tg^{-1}x$، بنابراین $x=tg\,y$ و می‌توان نوشت:

$$1=(1+tg^2y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+tg^2y}=\frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dx}(tg^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

۷-۲-۱۱ نتیجه. با توجه به مفهوم ضدّمشتق نتایج زیر بدیهی است:

$$\text{(I)}\quad \int\frac{dx}{1+x^2}=tg^{-1}x+C$$

$$\text{(II)}\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

۷-۲-۱۲ مثال. انتگرال $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$ را حل کنید.

حل.

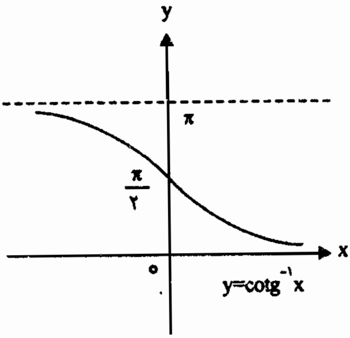
$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\,tg^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

۷-۲-۱۳ . با توجه به آنچه که در معرفی tg^{-1} گذشت، تابع $\cot g^{-1}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

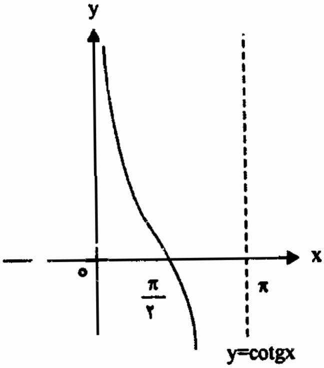
$$\cot g^{-1}:R\longrightarrow(0,\pi)$$

$$\cot g^{-1}x = y \iff x = \cot g\, y$$

نمودار $\cot g$ و $\cot g^{-1}$ را در شکل‌های ۷-۵ و ۷-۶ ملاحظه کنید.



شکل ۷-۶



شکل ۷-۵

۷-۲-۱۴ **مثال.** مطلوبست محاسبهٔ $\sin(2tg^{-1}\frac{1}{3})$.

حل. فرض کنید $tg^{-1}\frac{1}{3} = \alpha$ بنابراین $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$. لذا داریم:

$$\sin(2tg^{-1}\frac{1}{3}) = \sin 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{5}$$

۷-۲-۱۵ **مثال.** ثابت کنید $\frac{d}{dx}(\cot g^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

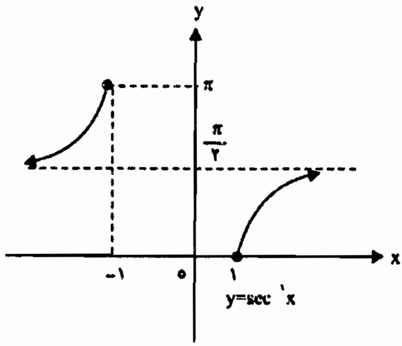
حل. ساده است (اثبات را انجام دهید).

۷-۲-۱۶ $\sec^{-1}$. تابع $\sec^{-1}$ به صورت $|x| \geq 1$, $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(\frac{1}{x})$ تعریف می‌شود.

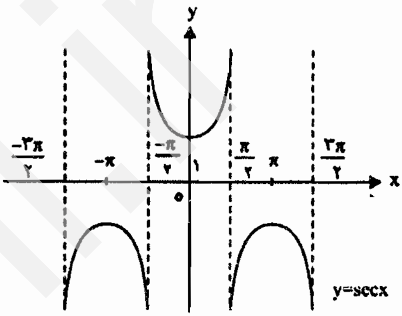
$$\sec^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$y = \sec^{-1} x \iff x = \sec y$$

نمودار تابع $y = \sec x$ و $y = \sec^{-1} x$ در شکل‌های ۷-۷ و ۷-۸ نمایش داده شده‌اند:



شکل ۷-۷



شکل ۷-۸

۷-۲-۱۷ مشتق $\sec^{-1}$. اگر $y = \sec^{-1} x$ باشد، آنگاه $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$.

اثبات.

$$y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\cos y=\frac{1}{x}$$

$$x\cos y=1$$

$$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{x\sin y}=\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

۷-۲-۱۸ مثال. مقدار $\sec^{-1}(-1)$ را تعیین کنید.

حل.

$$y=\sec^{-1}(-1)=\cos^{-1}(-1)\quad,\quad y\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$$

لذا:

$$y=\cos^{-1}(-1)\iff\cos y=-1\iff y=\pi$$

۷-۲-۱۹ مثال. فرض کنید $y=\sec^{-1}(5x)$، $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}(5x)\right)=\frac{5}{|5x|\sqrt{(5x)^2-1}}=\frac{1}{|x|\sqrt{25x^2-1}}$$

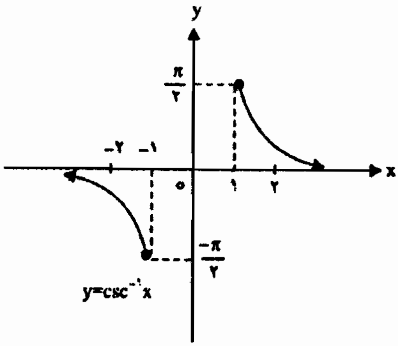
۷-۲-۲۰. با توجه به ۷-۲-۱۷ داریم:

$$\int\frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}x+C$$

۷-۲-۲۱ $\csc^{-1}$. تابع $\csc^{-1}: (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

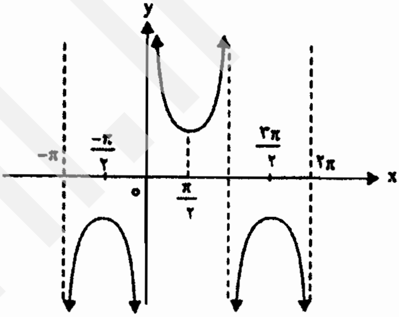
$$\csc^{-1}x = \sin^{-1}(\frac{1}{x}) \quad , \quad |x| \geq 1$$

نمودار تابع $y = \csc x$ و $y = \csc^{-1}x$ را در شکل‌های ۷-۹ و ۷-۱۰ نشان داده‌ایم.



$y = \csc x^{-1}$

شکل ۷-۹



$y = \csc x$

شکل ۷-۱۰

۷-۲-۲۲ مثال. ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1}x)=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^{2}-1}}$$

حل. ساده است (آن را انجام دهید).

۷-۲-۲۳ تمرین. درستی‌های زیر با توجه به تعریف مشتق بدیهی‌اند (آن‌ها را ثابت کنید).

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=-\csc^{-1}|x|+C \qquad \text{(I)}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\sec^{-1}|x|+C \qquad \text{(II)}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C \qquad \text{(III)}$$

۷-۲-۲۴ مثال. انتگرال $\int\frac{dx}{4x\sqrt{x^{2}-16}}$ را حل کنید.

$$I=\int\frac{dx}{4x\sqrt{x^{2}-16}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-16}}$$

لذا مطابق (III) در ۷-۲-۲۳ داریم:

$$I=\frac{1}{16}\sec^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

۷-۲-۲۵ تمرین.

۱. ثابت کنید که هرگاه $0\le x\le 1$ ، $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$، در مورد $-1\le x\le 0$ تساوی بالا چگونه بیان می‌شود؟

۲. $y=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ مفروض است. مطلوبست:

$$\csc y \;,\; \sec y \;,\; \cot g\, y \;,\; tg\, y \;,\; \cos y$$

۳. در تمرین‌های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

الف) $tg\left(\sec^{-1}(\frac{5}{3})+\csc^{-1}(-\frac{13}{12})\right)$

ب) $\sin\left[\cos^{-1}(-\frac{2}{3})+2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})\right]$

ج) $\cos\left[\sin^{-1}(-\frac{1}{2})+\sin^{-1}(-\frac{1}{4})\right]$

۴. مشتق توابع را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=x^2\sin^{-1}(x^2)$

ب) $f(x)=\sin^{-1}(\cos x)$

ج) $f(x)=\sqrt{x}\cos^{-1}x^2+\sin^{-1}\sqrt{x}$

د) $f(x)=3\sec^{-1}\frac{2}{x}+\csc^{-1}2x$

هـ) $f(x)=x(\sec^{-1}2x)^2$

و) $f(x)=\csc^{-1}\sqrt{x^2+1}$

۵. درستی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ که در آن:

$$\left|\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\right|\le\frac{\pi}{2}$$

ب) $\mathrm{tg}^{-1}x+\mathrm{tg}^{-1}y=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ که در آن:

$$\left|\mathrm{tg}^{-1}x+\mathrm{tg}^{-1}y\right|<\frac{\pi}{2}$$

۶. مقادیر زیر را با توجه به ۵ تعیین کنید.

الف) $\sin^{-1}\frac{4}{5}-\sin^{-1}\frac{3}{5}$ ب) $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{4}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{2}{9}$

۷. نشان دهید که:

$$\mathrm{tg}^{-1}x+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1-x}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & x>-1\\[2mm] -\dfrac{3\pi}{4} & x<-1\end{cases}$$

۸. عبارت $\cot g^{-1}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$ را ساده کنید.

۹. تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ را رسم و نشان دهید دورهٔ تناوب آن 2π است.

۱۰. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

۱) $I=\displaystyle\int_{-\frac{3}{7}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$ ۲) $\displaystyle\int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}}$

۳) $\displaystyle\int\frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}$ ۴) $\displaystyle\int\frac{\sec^2x\,dx}{9+\mathrm{tg}^2x}$

۵) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۱. فرض کنید $x > -1$. ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{\pi}{4}$$

۱۲. نشان دهید که هرگاه $|x| > 1$ آنگاه:

$$\sin^{-1}x = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

۱۳. نشان دهید که:

$$\operatorname{tg}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad \forall x$$

۷-۳ تابع لگاریتم طبیعی

قبل از تعریف لگاریتم طبیعی، تعریف لگاریتم و روابط موجود در لگاریتم را یادآوری می‌کنیم. اگر a یک عدد مثبت و $a \neq 1$ و b یک عدد مثبت دلخواه باشد، قرار دهید:

$$\log_a b = x \iff b = a^x$$

عدد a را پایه لگاریتم می‌گویند. نتایجی که از تعریف بالا به دست می‌آید، عبارت است از:

الف) $\log_a 1 = 0$

ب) $\log_a \alpha\beta = \log_a \alpha + \log_a \beta \ ; \ \alpha,\beta > 0$

ج) $\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta \ ; \ \alpha,\beta > 0$

د) $\log_a \alpha^n = n\log_a \alpha \ ; \ \alpha > 0$ اگر n زوج باشد.

هـ) $\log_a a = 1$

۷-۳-۱ تذکر. تعریفی که برای لگاریتم اشاره شد، در جبر مقدماتی عرضه می‌شود و حالت خاص آن حالتی است که a عدد صحیح مثبت و مخالف ۱ است.

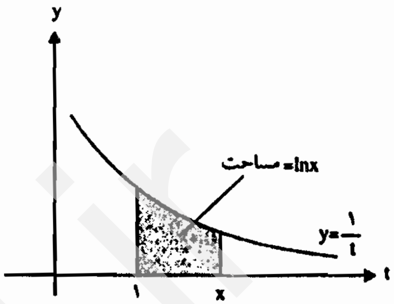
۷-۳-۲ تذکر. وقتی که x عددی گنگ باشد مانند $۳^{\sqrt{۵}}$، به سادگی نمی‌توان a^x را تعریف نمود. هدف ما در این فصل آن است که ابتدا تابعی لگاریتم طبیعی و سپس تابع نمائی a^x را تعریف کنیم که در آن $a > ۰$ و x عدد حقیقی دلخواه باشد.

۷-۳-۳ تعریف تابع لگاریتم طبیعی. تابع فوق را با نماد Ln نمایش و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ln} : (۰,+\infty) \longrightarrow \mathrm{R}$$

$$\mathrm{Ln}\, x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t} dt$$

وقتی $x > ۱$، $\mathrm{Ln}(x)$ را می‌توان به عنوان مساحت ناحیه سایه‌دار در شکل ۷-۱۱ تعبیر هندسی نمود.



شکل ۷-۱۱

۷-۳-۴ قضیه. تابع $y = \mathrm{Ln}\, x$ دارای خواص زیر است:

الف) $\mathrm{Ln}(۱) = ۰$ و برای $۰ < x < ۱$ داریم $\mathrm{Ln}\, x < ۰$ (لذا برای $x > ۱$ نیز $\mathrm{Ln}\, x > ۰$).

ب) به ازای هر $x > ۰$، $\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}(x)) = \frac{۱}{x}$.

ج) به ازای هر a و b مثبت، $\mathrm{Ln}(ab) = \mathrm{Ln}\, a + \mathrm{Ln}\, b$.

اثبات. الف) با توجه به تعریف بدیهی است.

ب) با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بدیهی است.

ج) از خاصیت جمع‌پذیری انتگرال نتیجه می‌شود که:

$$\mathrm{Ln}(ab)=\int_{1}^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_{1}^{a}\frac{1}{t}dt+\int_{a}^{ab}\frac{1}{t}dt=\mathrm{Ln}(a)+\int_{a}^{ab}\frac{1}{t}dt$$

حال در انتگرال دوم قرار دهید $u=\frac{t}{a}$. داریم:

$$\mathrm{Ln}(ab)=\mathrm{Ln}\,a+\int_{1}^{b}\frac{du}{u}=\mathrm{Ln}\,a+\mathrm{Ln}\,b$$

۷-۳-۵ مثال. نشان دهید $\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}|x|=\frac{1}{x}$، $x\neq 0$ بنابراین $\int\frac{1}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل. برای $x>0$ مطابق ۷-۳-۴ داریم:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}|x|=\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}\,x=\frac{1}{x}$$

حال فرض کنید $x<0$. بنابراین مطابق قاعدهٔ زنجیری دو مشتق داریم:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}|x|=\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}(-x)=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

بنابراین:

$$\int\frac{du}{u}=\mathrm{Ln}|u|+C$$

۷-۳-۶ نتیجه.

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Ln}|u|=\frac{u'}{u}$$

۷-۳-۷ مثال. مشتق توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $\mathrm{Ln}|\cos x|$ ب) $\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^{2}+1})$

حل.

الف) $$\frac{d}{dx}\text{Ln}|\cos x| = \frac{۱}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\text{tg}\, x$$

ب)

$$\frac{d}{dx}\text{Ln}(x+\sqrt{x^۲+۱}) = \frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

۷-۳-۸ مثال. فرض کنید توابع f و g بر بازه I مشتق‌پذیر بوده و برای هر x در I $f'(x)=g'(x)$. در این صورت برای عدد ثابت C داریم $f(x)-g(x)=C$.

حل. فرض کنید $h(x)=f(x)-g(x)$ بنابراین $h'(x)=۰\ ;\ \forall x$. پس مطابق نتیجه قضیهٔ میانگین دو مشتق، $h(x)=C$ و این بدان معنی است که:

$$f(x)-g(x)=C$$

۷-۳-۹ قضیه (خواص تابع لگاریتم طبیعی). فرض کنید a و b دو عدد مثبت دلخواه و r عددی گویا باشد، در این صورت خواص زیر برقرارند:

الف) $\text{Ln}\,ab=\text{Ln}\,a+\text{Ln}\,b$ ب) $\text{Ln}\frac{a}{b}=\text{Ln}\,a-\text{Ln}\,b$

ج) $\text{Ln}\,a^r = r\,\text{Ln}\,a$

اثبات. الف) با توجه به آن که $\frac{d}{dx}\text{Ln}\,x=\frac{d}{dx}\text{Ln}\,ax=\frac{۱}{x}$.

بنا بر ۹-۳-۸ داریم:

$$\text{Ln}\,ax-\text{Ln}\,x=C \quad , \quad (x>۰)$$

فرض کنید $x=۱$، داریم:

$$\text{Ln}\,a=\text{Ln}\,a-\text{Ln}۱=C$$

بنابراین:

$$\mathrm{Ln}\,ax - \mathrm{Ln}\,x = \mathrm{Ln}\,a$$

با فرض $x = b$ داریم:

$$\mathrm{Ln}\,ab = \mathrm{Ln}\,a + \mathrm{Ln}\,b$$

ب) با توجه به $a = \frac{a}{b} \cdot b$ داریم:

$$\mathrm{Ln}\,a = \mathrm{Ln}(\frac{a}{b} \cdot b) = \mathrm{Ln}\frac{a}{b} + \mathrm{Ln}\,b$$

بنابراین:

$$\mathrm{Ln}\frac{a}{b} = \mathrm{Ln}\,a - \mathrm{Ln}\,b$$

ج) اگر r عددی گویا و $x > ۰$ باشد، آنگاه:

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\,x^r) = r x^{r-۱} \times \frac{۱}{x^r} = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r\,\mathrm{Ln}\,x)$$

بنابراین با توجه به ۹-۳-۸ عددی ثابت نظیر C موجود است به طوری که:

$$\mathrm{Ln}\,x^r - r\,\mathrm{Ln}\,x = C$$

حال قرار دهید $x = ۱$. بنابراین:

$$\mathrm{Ln}\,۱ - r\,\mathrm{Ln}\,۱ = C$$

لذا $C = ۰$، بنابراین:

$$\mathrm{Ln}\,x^r = r\,\mathrm{Ln}\,x$$

با فرض $x = a > ۰$ داریم:

$$\mathrm{Ln}\,a^r = r\,\mathrm{Ln}\,a$$

۷-۳-۱۰ مثال. مشتق تابع $y = \frac{x^۳ + ۲x}{\sqrt[۵]{x^۷ + ۱}}$ را محاسبه کنید.

حل. ابتدا قدرمطلق طرفین معادله را در نظر بگیرید. سپس از طرفین معادله جدید لگاریتم بگیرید. داریم:

$$|y| = \frac{|x^{3}+2x|}{\left|\sqrt[5]{x^{7}+1}\right|}$$

$$\mathrm{Ln}|y| = \mathrm{Ln}|x^{3}+2x| - \mathrm{Ln}\left|\sqrt[5]{x^{7}+1}\right|$$

حال مشتق طرفین را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{3x^{2}+2}{x^{3}+2x} - \frac{7x^{6}}{5(x^{7}+1)}$$

بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3}+2x}{\sqrt[5]{x^{7}+1}}\left(\frac{3x^{2}+2}{x^{3}+2x} - \frac{7x^{6}}{5(x^{7}+1)}\right)$$

۷-۳-۱۱ تذکر. روشی که در مثال ۷-۳-۱۰ به‌کار گرفته شد، به مشتق‌گیری لگاریتمی موسوم است. این روش در سال ۱۶۹۷ توسط یوهان برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷) ارائه شد.

۷-۳-۱۲ مثال. دامنه و مشتق دو تابع زیر را تعیین کنید.

$$g(x) = 2\mathrm{Ln}(x-1) \quad , \quad f(x) = \mathrm{Ln}(x-1)^{2}$$

حل.

$$D_f = \{x \mid (x-1)^{2} > 0\} = R - \{1\}$$

$$D_g = \{x \mid x-1 > 0\} = (1, +\infty)$$

از طرفی داریم:

$$f(x) = \mathrm{Ln}(x-1)^{2} = 2\mathrm{Ln}(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} = g'(x)$$

بنابراین مشتق دو تابع یکسان است در حالی که دامنه دو تابع کاملاً متفاوت است. بنابراین هنگامی که از خواص تابع لگاریتمی طبیعی استفاده می‌شود، باید کاملاً محتاط بود.

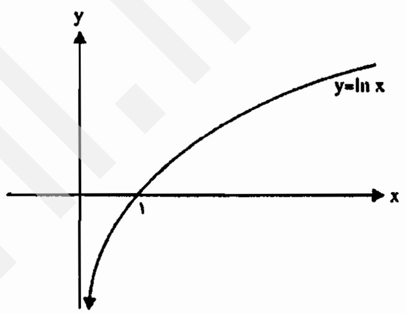
۷-۳-۱۳ تذکر. با توجه به تعریف مشتق تابع لگاریتم طبیعی که در آن $\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\,x)=\frac{1}{x}$ و $\frac{d^2(\mathrm{Ln}\,x)}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$ نتیجه می‌شود تابع Ln در $(0,+\infty)$ صعودی و محدب است.

۷-۳-۱۴ قضیه. ثابت کنید که:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{Ln}\,x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{Ln}\,x)=-\infty$

اثبات. به عنوان تمرین حل کنید.

۷-۳-۱۵ مثال. با توجه به ۷-۳-۱۳ و ۷-۳-۱۴ می‌توان نمودار $y=\mathrm{Ln}\,x$ را به صورت زیر رسم نمود. (جزئیات اثبات را بررسی کنید.) شکل ۷-۱۲ را ملاحظه کنید.

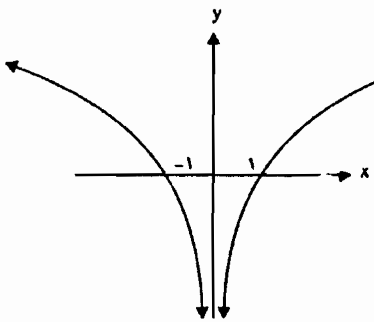


۷-۳-۱۶ مثال. نمودار $y=f(x)=\mathrm{Ln}|x|$ را رسم کنید.

حل.
$$D_f = \{x \mid x \neq 0\} = R - \{0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Ln} x & x > 0 \\ \operatorname{Ln}(-x) & x < 0 \end{cases}$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



۷-۳-۱۷ مثال. انتگرال نامعین زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+\sin\sqrt{x})}\,dx$$

حل. فرض کنید $\sin\sqrt{x} = t$، بنابراین $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$ و داریم:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+\sin\sqrt{x})}\,dx = \int \frac{2dt}{(1+t)} = 2\operatorname{Ln}|1+t| + C$$

$$= \operatorname{Ln}(1+t)^2 + C = \operatorname{Ln}(1+\sin\sqrt{x})^2 + C$$

۷-۳-۱۸ تمرین.

۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^{2} \operatorname{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$$

۲. مشتق چهارم $x^{2}\operatorname{Ln}x$ را محاسبه کنید.

۳. مشتق پنجم $\frac{\operatorname{Ln}x}{x}$ را محاسبه کنید.

۴. با به‌کارگیری از قضیهٔ مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر $0 < a < b$،
آنگاه:

$$\frac{b-a}{b} < \operatorname{Ln}\frac{b}{a} < \frac{b-a}{b}$$

۵. نشان دهید به ازای هر $x > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x-\frac{1}{2}x^{2} < \operatorname{Ln}(1+x) < x$$

۶. انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

۱) $I=\int_{e^{2}}^{e^{4}}\frac{dx}{x\operatorname{Ln}x(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x))}$

۲) $\int_{0}^{\pi}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

۳) $\int_{4}^{9}\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

۴) $\int_{-3}^{0}\frac{dy}{y^{2}+3y-4}$

۵) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{2}-5x+6}$

۷. انتگرال‌های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

۱) $\int\frac{1+\operatorname{Ln}x}{5+x\operatorname{Ln}x}dx$

۲) $J=\int\frac{4\operatorname{Ln}^{3}x+3}{x(\operatorname{Ln}^{4}x+3\operatorname{Ln}x)}dx$

۳) $\int\frac{2x^{3}}{x^{2}-4}dx$

۸. ثابت کنید به ازای هر $x > 0$ و $x \neq 1$ داریم:

$$x - 1 - \operatorname{Ln} x > 0 \quad , \quad 1 - \operatorname{Ln} x - \frac{1}{x} < 0$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که:

$$1 - \frac{1}{x} < \operatorname{Ln} x < x - 1$$

۹. ثابت کنید $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x} = 1$ (بدون استفاده از قضیه هوپیتال).

۱۰. ثابت کنید $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{x} = 0$ (بدون استفادهٔ از قضیهٔ هوپیتال).

۱۱. حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

۱۲. مشتق توابع داده شده را تعیین کنید:

۱) $y = (x + \sqrt{\operatorname{Ln} x})^3$

۲) $y = (\frac{1}{x})^{\operatorname{Ln} x}$

۳) $y = \dfrac{(x^4 + 1)\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 + 4x}}$

۴) $y = \operatorname{Ln}(\sec x + \csc x)$

۷-۴ وارون لگاریتم طبیعی

در ۷-۳ ملاحظه شد که تابع $\operatorname{Ln}:(0,+\infty) \longrightarrow R$ در تمام دامنه‌اش، پیوسته و صعودی است. بنابراین معکوس دارد و معکوس آن هم پیوسته و هم صعودی است بنابراین Ln^{-1} را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

۷-۴-۱ تعریف. معکوس تابع لگاریتم طبیعی را به صورت:

$$Ln^{-1} : R \longrightarrow (0,+\infty)$$

تعریف می‌کنیم که ضابطهٔ آن به شکل زیر است:

$$Ln^{-1}x = y \Leftrightarrow Ln\, y = x$$

۷-۴-۲ نکته. با توجه به خاصیت وارون توابع داریم:

$$Ln^{-1}(Ln\, x) = x$$

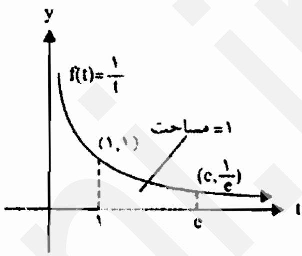
از طرفی به ازای هر x داریم:

$$Ln^{-1}x > 0$$

۷-۴-۳ تعریف. عدد $Ln^{-1}(1)$ را با e نشان می‌دهیم، یعنی داریم:

$$Ln^{-1}1 = e \Leftrightarrow Ln\, e = 1$$

بنابراین عدد e نقطه‌ای است روی محور t، به طوری که مساحت زیر منحنی $f(t) = \frac{1}{t}$ در بازهٔ $[1,e]$ برابر یک باشد. شکل ۷-۱۲ تعریف e را نشان می‌دهد.



$$\int_1^e \frac{1}{t}dt = Ln\, e = 1$$

شکل ۷-۱۲. تعریف e

عدد e یکی از اعداد مهم در ریاضیات است (نظیر عدد π) که آن عددیست اصمّ و صفر چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست. چنین اعدادی را اعداد متعالی می‌نامیم.

- مقدار e بین ۲ و ۳ قرار دارد که $e = 2/718281828459045...$.

وقتی که در ریاضی (۲) سری تیلور را مطالعه می‌کنیم خواهیم دید که:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

لذا با توجه به رابطه بالا، e را تا هر رقم می‌توان تقریب زد. (عدد e به نام عدد نپرین معروف است).

۷-۴-۴ تعریف. تابع معکوس $\operatorname{Ln}x$ را با $\exp(x)$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$y=\exp(x) \iff x=\operatorname{Ln}y$$

بنابراین e^x برای جمیع مقادیر x تعریف می‌شود. چون در این تابع، نما متغیر است، آن را تابع نمائی می‌نامند. گاهی آن را با $\exp(x)$ نیز نشان می‌دهند.

بنابراین به ازای هر x، $e^x>0$، e^x و $\operatorname{Ln}x$ وارون یکدیگرند. در واقع داریم:

$$\forall x\in(0,+\infty)\ ;\ e^{\operatorname{Ln}x}=\operatorname{Ln}^{-1}(\operatorname{Ln}x)=x$$

۷-۴-۵ قضیه. (خواص تابع نمائی e^x) تابع نمائی e^x دارای خواص زیر است:

الف) $(e^a)^b=e^{ab}$ ب) $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$

ج) $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ د) $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$

اثبات. الف) اگر در معادله $e^{\operatorname{Ln}x}=x$ به‌جای x مقدار $(e^a)^b$ را قرار دهیم داریم:

$$e^{\operatorname{Ln}(e^a)^b}=(e^a)^b$$

از طرفی داریم:

$$e^{\operatorname{Ln}(e^a)^b}=e^{b\operatorname{Ln}e^a}=e^{ab\operatorname{Ln}e}=e^{ab}$$

بنابراین:

$$e^{ab}=(e^a)^b$$

ب) فرض کنید $\alpha = e^{a}$ و $\beta = e^{b}$، بنابراین $\text{Ln}\,\alpha = a$ و $\text{Ln}\,\beta = b$. داریم:

$$\text{Ln}(\alpha\beta) = \text{Ln}\,\alpha + \text{Ln}\,\beta = a + b$$

بنابراین:

$$e^{a}e^{b} = \alpha\beta = e^{a+b}$$

ج) در (ب) قرار دهید $b = -a$. داریم:

$$1 = e^{a+(-a)} = e^{a} \cdot e^{-a}$$

بنابراین:

$$e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$$

د) به سادگی به دست می‌آید.

۷-۴-۶ قضیه. ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ ب) $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

۷-۴-۷ تمرین. قضیه ۷-۴-۶ را اثبات کنید.

۷-۴-۸ قضیه. ثابت کنید $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$.

اثبات. از فرض $y = e^{x} = \text{Ln}^{-1}x$ داریم: $\text{Ln}\,y = x$.

بنابراین:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dx}(e^{x}) = y = e^{x}$$

۷-۴-۹ نتیجه. با توجه به ۷-۴-۸ نتایج زیر بدیهی‌اند:

الف) $\frac{d}{dx}\cdot e^u = u'\cdot e^u \qquad u=\varphi(x)$

ب) $\int e^x\,dx = e^x + C$

ج) $\int e^u\,du = \int u'\cdot e^u\,dx = e^u + C$

۷-۴-۱۰ مثال. فرض کنید $f(t)=e^{at}$. در این صورت:

a) $f^{(n)}(t)$ b) $\int f(t)dt$ را محاسبه کنید.

حل. a)

$$f^{(1)}(t)=a\,e^{at} \quad , \quad f^{(2)}(t)=a^2 e^{at} \quad ,\ldots, \quad f^{(n)}(t)=a^n e^{at}$$

b) $\int f(t)dt = \int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at}+C$. بدیهی است که:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\cdot e^{at}\right)=e^{at}$$

۷-۴-۱۱ مثال. مشتق‌های زیر را تعیین کنید.

الف) e^{x^2-3x} ب) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

حل.

الف) $\frac{d}{dx}(e^{x^2-3x}) = e^{x^2-3x}\cdot(2x-3)$

ب)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

۷-۴-۱۲ مثال. انتگرال $I=\int \frac{dx}{e^x+1}$ را حل کنید.

حل.
$$I=\int \frac{dx}{e^x+1}=\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

با فرض $t=1+e^{-x}$ داریم $dt=-e^{-x}dx$. بنابراین:

$$I=\int \frac{-dt}{t}=-Ln|t|+C=-Ln(1+e^{-x})+C$$

$$I=Ln(\frac{1}{1+e^{-x}})+C=Ln(\frac{ex}{1+e^x})+C$$

۷-۴-۱۳ مثال. y را از معادله $(x>\sqrt{3})$, $\frac{dy}{dx}=2xe^{-y}$ با شرط آن که نمودار y از نقطه $p_0(2,0)$ عبور کند، پیدا کنید.

حل.
$$\frac{dy}{dx}=2xe^{-y}$$

$$e^y\frac{dy}{dx}=2x$$

حال انتگرال طرفین رابطه اخیر را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$e^y=x^2+C$$

با توجه به فرض:

$$e^0=4+C \Rightarrow C=-3$$

بنابراین $e^y=x^2-3$، لذا $y=Ln(x^2-3)$ جواب موردنظر است.

۷-۵ توابع نمایی ویژه و لگاریتم در مبنای a

با توجه به تعریف e^x که در آن x عدد حقیقی دلخواه است می‌توان a^x را $(a>0)$ برای هر x حقیقی تعریف نمود. اگر r عدد گویا باشد آنگاه $Lna^r=rLna$ بنابراین $a^r=e^{rLna}$.

با توجه به اینکه $e^{x\,\mathrm{Ln}\,a}$ برای هر x حقیقی تعریف می‌شود، لذا با استفاده از آن a^x را بدون هیچ تناقضی تعریف می‌کنیم.

۷-۵-۱ تعریف. فرض کنید $a > 0$ و x عدد حقیقی دلخواه باشد. تابع $y = a^x$ را تابع نمائی و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^x = e^{x\,\mathrm{Ln}\,a}$$

۷-۵-۲ مثال. e^{π} و π^{e} را با یکدیگر مقایسه کنید (با استفاده از ماشین حساب).

حل.

$$e^{\pi} = e^{3/14159\ldots} = 23/14069\ldots$$

$$\pi^{e} = e^{e\,\mathrm{Ln}\,\pi} = e^{(2/71828\ldots)(1/14472\ldots)} = e^{3/11169\ldots} = 22/45915$$

بنابراین:

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$

۷-۵-۳ تذکر. در تعریف ۷-۵-۱ اگر $a = 1$ فرض شود آنگاه به ازای هر x حقیقی داریم:

$$1^x = e^{x\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{0} = 1$$

بنابراین در تعریف a^x می‌توان a را هر عدد حقیقی مثبت به‌جز یک فرض نمود. در صورتی که $a = e$ فرض شود، داریم:

$$a^x = e^{x\,\mathrm{Ln}\,a} = e^{x\,\mathrm{Ln}\,e} = e^x$$

۷-۵-۴ نکته. با توجه به تعریف a^x می‌توان ملاحظه نمود که a^x همان ویژگیهای e^x را دارد.

(۱) $$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

(۲) $$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (۳)$$

$$(ab)^x = a^x b^x \qquad (۴)$$

$$a^0 = 1 \qquad (۵)$$

۷-۵-۵ قضیه. ثابت کنید $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \text{Ln}\, a$ و از آن نتیجه بگیرید که:

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\text{Ln}\, a} \cdot a^x + C \qquad (\text{I})$$

$$\int a^u \, du = \frac{1}{\text{Ln}\, a} \cdot a^u + C \qquad (\text{II})$$
که در آن $u = \varphi(x)$.

۷-۵-۶ تمرین. قضیه ۷-۴-۵ را اثبات کنید.

۷-۵-۷ مثال. $\frac{dy}{dx}$ را در معادلات زیر تعیین کنید.

۱) $y = 2^{5x} \times 3^{4x^2}$ ۲) $y^2 4^y = x 2^x$

حل. ۱)

$$y' = 2^{5x} \times 3^{4x^2} \times 5\,\text{Ln}\, 2 + 2^{5x} \times 3^{4x^2} \times 8x\,\text{Ln}\, 3$$

$$y' = 2^{5x} \cdot 3^{4x^2} (5\,\text{Ln}\, 2 + 8x\,\text{Ln}\, 3)$$

۲) با توجه به قاعده ضمنی در مشتق داریم:

$$2y 4^y \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 4^y \cdot \frac{dy}{dx} \text{Ln}\, 4 = 2^x + x 2^x\, \text{Ln}\, 2$$

بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^x + x 2^x\, \text{Ln}\, 2}{2y 4^y + y^2 \cdot 4^y\, \text{Ln}\, 4}$$

۷–۵–۸ مثال. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

۲) $\int x^{۲}\cdot ۲^{x^{۳}}\,dx$ ۲) $\int ۲^{x}\cdot e^{x}\,dx$

۳) $\int e^{x}\cdot ۶^{e^{x}}\,dx$ ۴) $\int_{۱}^{۸}\dfrac{x^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۴}{۳}}+۴}\,dx$

۷–۵–۹ مثال. مشتق $y=x^{x}$ را تعیین کنید $(x>۰)$.

حل.

$$y=x^{x}=e^{x\,Ln\,x}$$

$$y'=(۱+Ln\,x)e^{x\,Ln\,x}=(۱+Ln\,x)x^{x}$$

۷–۵–۱۰ مثال. نمودار $y=a^{x}$ را رسم کنید.

حل. دو حالت در نظر بگیرید:

الف) $۰<a<۱$، در این صورت $Ln\,a<۰$ بنابراین:

$$\frac{dy}{dx}=a^{x}\cdot Ln\,a<۰$$

یعنی $y=a^{x}$ نزولی است. از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}a^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\,Ln\,a}=۰$$

به ازای $x=۰$ نیز داریم $a^{۰}=۱$.

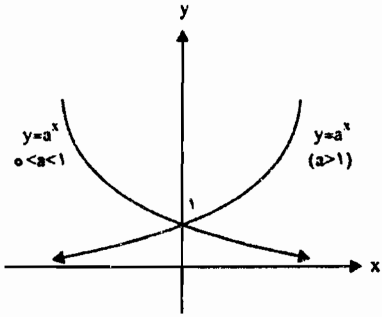
ب) فرض کنید $a>۱$ در این صورت $Ln\,a>۰$. لذا:

$$\frac{dy}{dx}=a^{x}\,Ln\,a>۰$$

بنابراین در این حالت $y=a^{x}$ صعودی است. از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}a^{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{x\,Ln\,a}=۰\ ,\ a^{۰}=۱$$

در شکل ۹-۱۴ نمودار $y = a^x$ در حالتهای (الف) و (ب) رسم شده‌اند.



۷-۵-۱۱ تعریف. اگر a عدد مثبت دلخواهی باشد و $a \neq ۱$، تابع لگاریتمی در پایه a که معکوس تابع نمائی در پایه a است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

۷-۵-۱۲ تعریف. تابع لگاریتمی در پایه a به ازای هر عدد حقیقی y دارای معنی است.

۷-۵-۱۳. اگر $a = e$ باشد، تابع لگاریتم طبیعی همان تابع لگاریتمی در پایه e است.

۷-۵-۱۴. تابع لگاریتمی در پایه a تمام ویژگیهای تابع لگاریتمی طبیعی را دارد. (چرا؟)

۷-۵-۱۵ مثال. فرض کنید $y = \log_a x$. در این صورت رابطه بین لگاریتم طبیعی و تابع لگاریتمی در پایه a را بیان کنید.

حل. از $y = \log_a x$ داریم:

$$a^y = x$$

در نتیجه:

$$Ln a^{y} = Ln x$$

$$y Ln a = Ln x$$

$$y = \frac{۱}{Ln a} \cdot Ln x$$

۷-۵-۱۶ تذکر. حال با توجه به رابطه $\log_a x = \frac{۱}{Ln a} Ln x$ می‌توان ویژگیهای تابع لگاریتمی را بیان و اثبات نمود (آن‌ها را بیان و ثابت کنید).

۷-۵-۱۷ مثال. فرض کنید $y = \log_a u$ که $u = \varphi(x)$. $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

حل.

$$y = \log_a u = \frac{۱}{Ln a} Ln u$$

بنابراین مطابق قاعده زنجیری در مشتق داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{۱}{Ln a} \cdot \frac{۱}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

۷-۵-۱۸ تمرین.

۱. نشان دهید نمودار $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ در $x = \pi$ دارای شیب منفی است.

۲. نقاط بحرانی $y = x^{x}$ را تعیین کنید.

۳. مشتق‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $Ln y = x \sin x$ ب) $y = \int_{۰}^{Ln x} \sin e^{t} dt \quad , \quad (x > ۰)$

ج) $tg y = e^{x} + Ln x$ د) $y = x^{۳} e^{-۲x} \cos ۵x$

هـ) $y = ۲^{x} \cdot Ln x$ و) $y = (\sin x)^{tg x} \quad , \quad (x > ۰)$

۴. انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

الف) $\int 3^{x^2+3x}(x^2+1)dx$ ب) $\int \frac{3^{\ln x}}{x}dx$

ج) $\int 5^{x\ln x}(1+\ln x)dx$ د) $\int 2^{\sec x}\cdot \sec x\cdot \operatorname{tg} x\,dx$

۵. انتگرال‌های معین زیر را حل کنید.

الف) $I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ ب) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

ج) $\int_{-\ln(a+1)}^{0} e^{-x}\,dx$ د) $\int_{-1}^{1}(\frac{1}{10})^x\,dx$

۶. اگر $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ و $g(x)=\sin^2 x$، آنگاه $f^{-1}(g(x))$ را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید $x^y=y^x$، $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

۸. مشتق تابع $y=x^{\ln x}$ را در $x=e$ محاسبه کنید.

۹. نقاط عطف تابع $f(x)=x^x$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۱۰. نقطه عطف تابع $f(x)=e^{\operatorname{tg}^{-1}x}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۷-۶ توابع هیپربولیک (توابع هذلولی)

توابع e^x و e^{-x} را در بخش‌های قبل معرفی نمودیم. حال از ترکیب آنها توابع خاصی به نام توابع هذلولی به دست می‌آوریم که خواصی مشابه توابع مثلثاتی دارند. از این توابع در حل مسائل ریاضی مهندسی استفاده می‌کنند. حال این توابع را تعریف می‌کنیم.

۷-۶-۱ تعریف (تابع کسینوس هذلولی). تابع کسینوس هذلولی را با نماد ch معرفی و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ch : R \longrightarrow R$$

$$ch\,x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$$

۷-۶-۲ تذکر. برد تابع ch بازهٔ $[۱, +\infty)$ است. زیرا با توجه به $(e^x - ۱)^۲ \geq ۰$، داریم $e^x + \frac{۱}{e^x} \geq ۲$.

در نتیجه $e^x + e^{-x} \geq ۲$، بنابراین:

$$\forall x \;\; ; \;\; ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \geq ۱$$

۷-۶-۳ تعریف (سینوس هذلولی). تابع سینوس هذلولی را با نماد sh نمایش و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$sh : R \longrightarrow R$$

$$sh\,x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$$

۷-۶-۴ تعریف (تانژانت، کوتانژانت، سکانت، کسکانت هذلولی). تابع تانژانت هذلولی را با نماد th و کتانژانت هذلولی را با نماد cth و سکانت هذلولی را با نماد sech و کسکانت هذلولی را با نماد csch نمایش و آنها را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$th : R \longrightarrow R$$

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x}$$

$$\mathrm{cth} : R - \{0\} \longrightarrow R$$

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$$

$$\mathrm{sech} : R \longrightarrow R$$

$$\mathrm{sech}\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}$$

$$\mathrm{csch} : R - \{0\} \longrightarrow R$$

$$\mathrm{csch}\, x = \frac{1}{\mathrm{sh}\, x}$$

۷-۶-۵ مثال. درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

الف) $\mathrm{ch}\, 0 = 1$ ب) $\mathrm{sh}\, 0 = 0$

ج) $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

حل. الف)

$$\mathrm{ch}\, 0 = \frac{1}{2}(e^{0} + e^{-0}) = 1$$

ب)

$$\mathrm{sh}\, 0 = \frac{1}{2}(e^{0} - e^{-0}) = 0$$

ج)

$$\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

۷-۶-۶ مثال. مطلوبست محاسبهٔ $\mathrm{cth}(\mathrm{Ln}\sqrt{2})$.

حل. با توجه به (ج) در ۷-۵-۴ داریم:

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

بنابراین:

$$\operatorname{cth}(\operatorname{Ln}\sqrt{۲}) = \frac{e^{۲\operatorname{Ln}\sqrt{۲}}+۱}{e^{۲\operatorname{Ln}\sqrt{۲}}-۱} = \frac{e^{\operatorname{Ln}۲}+۱}{e^{\operatorname{Ln}۲}-۱} = \frac{۲+۱}{۲-۱} = ۳$$

۷-۶-۷ تذکر. اغلب اتحادهایی که برای توابع مثلثاتی وجود دارند، با کمی اختلاف برای توابع هیپربولیک نیز برقرار می‌باشند. آنها را بیان می‌کنیم و اثبات بعضی از آنها را انجام می‌دهیم. اثبات بقیه اتحادها را به عهده دانشجویان محول می‌کنیم:

۱. $(\forall x \in R)\ \operatorname{ch}^۲x - \operatorname{sh}^۲x = ۱$

۲. $\operatorname{sech}^۲x + \operatorname{th}^۲x = ۱$

۳. $\operatorname{cth}^۲x - \operatorname{csch}^۲x = ۱$

۴. $\operatorname{th}x \cdot \operatorname{cth}x = ۱$

۵. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y$

۶. $\operatorname{sh}۲x = ۲\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}x$

۷. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$

۸. $\operatorname{ch}۲x = \operatorname{ch}^۲x + \operatorname{sh}^۲x$

۹. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th}x \pm \operatorname{th}y}{۱ \pm \operatorname{th}x \cdot \operatorname{th}y}$

۱۰. $\operatorname{th}۲x = \dfrac{۲\operatorname{th}x}{۱+\operatorname{th}^۲x}$

۱۱. $\operatorname{sh}^۲x = \dfrac{\operatorname{ch}۲x - ۱}{۲}$

۱۲. $\operatorname{ch}^۲x = \dfrac{\operatorname{ch}۲x + ۱}{۲}$

۱۳. $(\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x)^n = \operatorname{ch}nx + \operatorname{sh}nx = e^{nx}$

اثبات. به عنوان نمونه (۱) و (۹) و (۱۱) و (۱۳) را اثبات می‌کنیم.

اثبات (۱).

$$\mathrm{ch}^۲x-\mathrm{sh}^۲x=\frac{۱}{۴}(e^x+e^{-x})^۲-\frac{۱}{۴}(e^x-e^{-x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۴}(e^{۲x}+۲+e^{-۲x}-e^{۲x}-e^{-۲x}+۲)=\frac{۴}{۴}=۱$$

اثبات (۹).

$$\mathrm{th}(x+y)=\frac{\mathrm{sh}(x+y)}{\mathrm{ch}(x+y)}=\frac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sh}\,y}$$

با توجه به آن که $\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y\neq ۰$، لذا صورت و مخرج کسر را بر $\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\mathrm{th}(x+y)=\frac{\mathrm{th}\,x+\mathrm{th}\,y}{۱+\mathrm{th}\,x\cdot\mathrm{th}\,y}$$

اثبات (۱۱).

با توجه به (۸) و (۱) داریم:

$$\mathrm{ch}\,۲x=\mathrm{ch}^۲x+\mathrm{sh}^۲x=(۱+\mathrm{sh}^۲x)+\mathrm{sh}^۲x=۱+۲\mathrm{sh}^۲x$$

بنابراین:

$$\mathrm{sh}^۲x=\frac{\mathrm{ch}\,۲x-۱}{۲}$$

اثبات (۱۳).

$$(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)^n=\left(\frac{۱}{۲}(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})\right)^n=e^{nx}$$

$$\mathrm{ch}\,nx+\mathrm{sh}\,nx=\frac{۱}{۲}(e^{nx}+e^{-nx}+e^{nx}-e^{-nx})=e^{nx}$$

بنابراین:

$$(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)^n=\mathrm{ch}\,nx+\mathrm{sh}\,nx=e^{nx}$$

۷-۶-۸ تمرین. درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

۱) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$

۲) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$

۳) $\forall x \;;\; x \operatorname{sh} x \geq ۰$

۴) $\operatorname{th}(\operatorname{Ln} x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$

۵) $\operatorname{sh} ۳x = ۳\operatorname{sh} x + ۴\operatorname{sh}^۳ x$

۶) $\operatorname{ch} ۳x = ۴\operatorname{ch}^۳ x - ۳\operatorname{ch} x$

۷) $\dfrac{۱}{۲}\operatorname{Ln}\dfrac{۱ + \operatorname{th} x}{۱ - \operatorname{th} x} = x$

۷-۶-۹ قضیه (مشتق و انتگرال توابع هذلولی). فرض کنید $y = \operatorname{ch} x$، در این صورت $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sh} x$.

اثبات. با توجه به تعریف $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$ به سادگی داریم $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sh} x$.

۷-۶-۱۰ نتیجه. فرض کنید $u = \varphi(x)$ باشد، مطابق قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u \cdot \frac{du}{dx}$$

۷-۶-۱۱ نتیجه. با توجه به تعریف انتگرال داریم:

$$\int \operatorname{sh} u \cdot du = \operatorname{ch} u + C$$

۷-۶-۱۲ تمرین. درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

الف) $$\frac{d}{dx}\operatorname{sh}u = \operatorname{ch}u \cdot \frac{du}{dx}$$

ب) $$\frac{d}{dx}(\operatorname{th}u) = (1-\operatorname{th}^2 u)\frac{du}{dx}$$

ج) $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cth}u) = (1-\operatorname{cth}^2 u)\cdot\frac{du}{dx}$$

۷-۶-۱۳. با توجه به ۷-۵-۱۱ نتایج زیر بدیهی‌اند.

$$\int \operatorname{ch}u\cdot du = \operatorname{sh}u + C \qquad (1)$$

$$\int (1-\operatorname{th}^2 u)du = \operatorname{th}u + C \qquad (2)$$

$$\int (1-\operatorname{cth}^2 u)du = \operatorname{cth}u + C \qquad (3)$$

۷-۶-۱۴ مثال. مشتق توابع داده شده را محاسبه کنید.

الف) $$f(x) = e^x \operatorname{sh}x$$

ب) $$g(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{th}x)$$

ج) $$h(x) = \sin^{-1}(\operatorname{th}x^2)$$

حل.

الف) $$f'(x) = e^x\operatorname{sh}x + e^x\operatorname{ch}x = e^x(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x) = e^{2x}$$

ب) $$g'(x) = \frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th}x} = \frac{2}{2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x} = \frac{2}{\operatorname{sh}2x}$$

ج) $$h'(x) = \frac{2x(1-\operatorname{th}^2 x^2)}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x^2}} = 2x\operatorname{sech}x^2$$

۷-۶-۱۵ مثال. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ب) $\int x\,\operatorname{th}(\frac{x^{۲}}{۲})dx$

ج) $\int \operatorname{th}x \cdot \operatorname{Ln}(\operatorname{ch}x)dx$ د) $\int \operatorname{sech}^{۴}۳x\,dx$

حل. الف) فرض کنید $t=\sqrt{x}$، بنابراین $dt=\frac{dx}{۲\sqrt{x}}$ و

$$\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int ۲\operatorname{sh}t\cdot dt=۲\operatorname{ch}t+C=۲\operatorname{ch}\sqrt{x}+C$$

ب) با فرض $u=\frac{x^{۲}}{۲}$، داریم $x\,dx=du$. لذا:

$$\int x\,\operatorname{th}\frac{x^{۲}}{۲}dx=\int \operatorname{th}u\,du=\operatorname{Ln}|\operatorname{ch}u|+C=\operatorname{Ln}\left|\operatorname{ch}\frac{x^{۲}}{۲}\right|+C$$

ج) فرض کنید $t=\operatorname{Ln}(\operatorname{ch}x)$، بنابراین $dt=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}dx$.

بنابراین:

$$\int \operatorname{th}x\operatorname{Ln}(\operatorname{ch}x)dx=\int t\,dt=\frac{۱}{۲}t^{۲}+C=\frac{۱}{۲}\operatorname{Ln}^{۲}(\operatorname{ch}x)+C$$

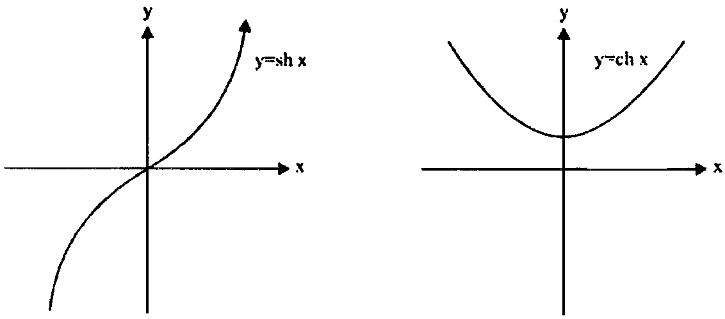
د)
$$\int \operatorname{sech}^{۴}۳x\,dx=\int \operatorname{sech}^{۲}۳x\cdot\operatorname{sech}^{۲}۳x\,dx$$

$$=\int (۱-\operatorname{th}^{۲}۳x)\operatorname{sech}^{۲}۳x\,dx$$

$$=\int \operatorname{sech}^{۲}۳x\,dx-\int \operatorname{th}^{۲}۳x\cdot\operatorname{sech}^{۲}۳x\,dx$$

$$=\frac{۱}{۳}\operatorname{th}۳x-\frac{۱}{۹}\operatorname{sech}^{۳}۳x+C$$

۷-۶-۱۶ تذکر. با توجه به مشتق توابع هذلولی نمودار توابع $y=\operatorname{ch}x$ و $y=\operatorname{sh}x$ را در شکل ۷-۱۳ ملاحظه کنید.



شکل ۷-۱۳. نمودارهای توابع ch و sh

۷-۶-۱۷ تمرین.

۱. انتگرال‌های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}{(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)^{10}}dx$ ب) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}^2 x}$

ج) $\int e^x \operatorname{ch}^4(e^x)dx$ د) $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt{\operatorname{ch}x}}dx$

هـ) $\int \sqrt{\operatorname{ch}x-1}\,dx$ و) $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$

ز) $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$

۲. نمودار تابع $y=\operatorname{th}x$ را رسم کنید.

۳. نمودار تابع $y=\operatorname{cth}x$ را رسم کنید.

۴. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sh}x}$ ب) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{th}x)^{\operatorname{tg}x}$

ج) $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sh}x)^{\operatorname{csch}x}$

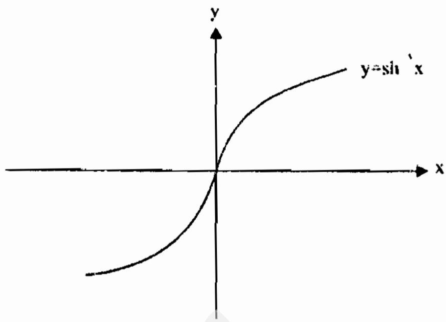
۷-۷ معکوس توابع هذلولی

۱-۷-۷ وارون sh (sh^{-1}). چون تابع $sh : R \longrightarrow R$ در تمام دامنه‌اش پیوسته و صعودی است لذا sh^{-1} موجود است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$sh^{-1} : R \longrightarrow R$$

$$y = sh^{-1}x \iff sh\,y = x$$

نمودار تابع sh^{-1} در شکل ۹-۱۴ رسم شده است.



شکل ۷-۱۴

۲-۷-۷ مثال. فرض کنید $y = sh^{-1}x$، در این صورت:

الف) آن را به صورت لگاریتم طبیعی نمایش دهید.

ب) $\frac{d}{dx}(sh^{-1}x)$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به فرض می‌توان نوشت:

$$x = sh\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{۲}$$

بنابراین:

$$e^y - e^{-y} = ۲x$$

$$e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

$$e^{y} = \frac{x \pm \sqrt{x^{2}+1}}{1}$$

بنا بر آن که $e^{y} > 0$، لذا $Ln^{-1}y = e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1}$ و در نتیجه:

$$y = sh^{-1}x = Ln(x + \sqrt{x^{2}+1})$$

ب) با توجه به $x = sh\,y$ و مشتق ضمنی می‌توان نوشت:

$$1 = ch\,y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ch\,y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+x^{2}}}$$

بنا بر آن که به ازای هر y حقیقی $ch\,y \geq 1 > 0$، لذا داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

نتیجه زیر خلاصه بحث‌های فوق است.

۷-۷-۳ نتیجه. فرض کنید $u = \varphi(x)$ در این صورت:

$$\frac{d}{dx}(sh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^{2}}} \cdot \frac{du}{dx} \tag{I}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^{2}}} = Ln(u + \sqrt{1+u^{2}}) + C \tag{II}$$

۷-۷-۴ مثال. ثابت کنید $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}} = Ln(x + \sqrt{a^{2}+x^{2}}) + C$.

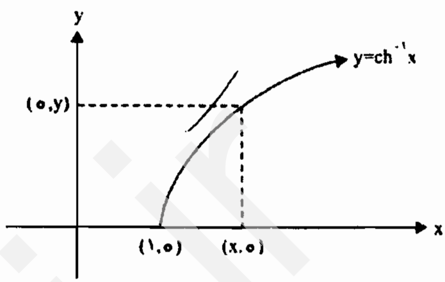
حل. فرض کنید $x = at$، لذا $dx = a\,dt$. حال با توجه به (II) ۷–۷–۳ انتگرال به سادگی حل می‌گردد (آن را ادامه دهید).

۷–۷–۵ تابع معکوس کسینوس هذلولی (ch^{-1}). فرض کنید $x_1 = -1$, $x_2 = 1$، بنابراین به دلیل اینکه $ch(1) = ch(-1)$، لذا ch تابع یک به یک نیست. بنابراین فرض کنید $ch:[0,+\infty) \to [1,+\infty)$، در این صورت ch^{-1} موجود است. (چرا؟) آن را به صورت زیر تعریف کنید:

$$ch^{-1}:[1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

$$y = ch^{-1}x \iff x = ch\,y$$

لذا نمودار تابع $y = ch^{-1}x$ را می‌توان در شکل ۷–۱۵ نمایش داد.



شکل ۷–۱۵

۷–۷–۶ تمرین. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $y = ch^{-1}x = Ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $(x \geq 1)$

ب) $\dfrac{d}{dx}(ch^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

۷-۷-۷ نتیجه. با توجه به ۷-۶-۷ نتایج زیر بدیهی‌اند:

$$\frac{d}{dx}(ch^{-۱}u)=\frac{۱}{\sqrt{u^۲-۱}}\cdot\frac{du}{dx}\quad (u=\varphi(x)) \qquad \text{(I)}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-۱}}=Ln(u+\sqrt{u^۲-۱})+C \qquad \text{(II)}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}=Ln(u+\sqrt{u^۲-a^۲})+C \qquad \text{(III)}$$

۸-۷-۷ مثال. انتگرال $\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۴x+۱}}$ را حل کنید.

حل.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۴x+۱}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-۲)^۲-۳}}$$

فرض کنید $x-۲=t$، بنابراین داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۴x+۱}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^۲-۳}}$$

حال بنا بر III در ۹-۶-۸ داریم:

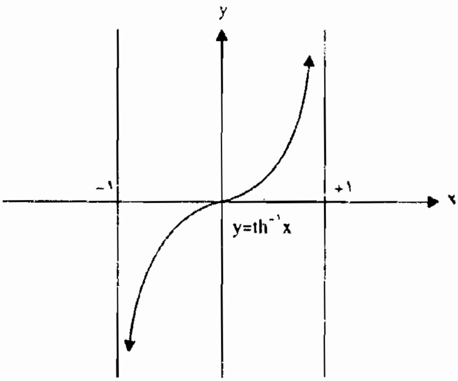
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۴x+۱}}=Ln(t+\sqrt{t^۲-۳})+C$$

$$=Ln(x-۲+\sqrt{x^۲-۴x+۱})+C$$

۹-۷-۷ تعریف ($th^{-۱}$). تابع $th:R\longrightarrow(-۱,۱)$ دوسو است لذا تابع $th^{-۱}$ دارای معنی است. آن را به صورت $th^{-۱}:(-۱,۱)\longrightarrow R$ تعریف می‌کنیم که در آن داریم:

$$(|x|<۱)\ ;\ y=th^{-۱}x \iff x=th\,y$$

۷-۷-۱۰ نمودار. $y = th^{-1}x$ در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل ۷-۱۶

۷-۷-۱۱ تمرین. درستی‌های زیر را تحقیق کنید.

$$y = th^{-1}x = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{d}{dx}(th^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{(II)}$$

۷-۷-۱۲ نتیجه. با توجه به (I) و (II) در ۷-۶-۱۲ نتایج زیر بدیهی است:

الف) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

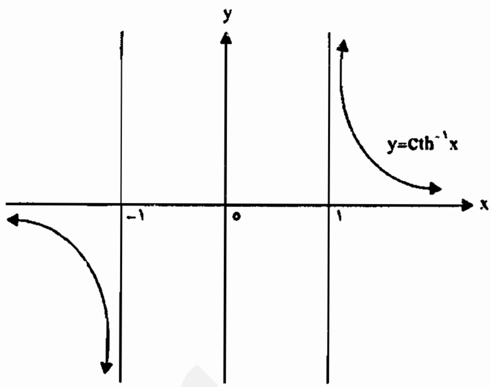
ب) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

۷-۷-۱۳ تعریف (cth^{-1}). به آسانی دیده می‌شود تابع $cth : R \rightarrow (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ دوسو است، لذا می‌توان cth^{-1} را به صورت زیر تعریف نمود:

$$cth^{-1} : (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \longrightarrow R$$

$$y = cth^{-1}x \Leftrightarrow x = cth\, y$$

نمودار $y = cth^{-1}x$ در شکل ۷-۱۷ رسم شده است.



شکل ۷-۱۷

۷-۷-۱۴ تمرین. نشان دهید برای هر x، $|x| > 1$ داریم:

$$cth^{-1}x = \frac{1}{2} Ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

۷-۷-۱۵ تمرین.

۱. مشتق توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $y = th^{-1}(\sec e^{x})$ ب) $y = ch^{-1}(\csc x)$

ج) $y = cth^{-1}x$ د) $y = cth^{-1}u(x)$

۲. اگر $f(x) = \operatorname{sh} x$ باشد، مقدار $f^{-1}(\frac{3}{4})$ را محاسبه کنید.

۳. اگر $y = \operatorname{ch}^{-1}(\frac{3}{x^2})$، مقدار $\frac{dy}{dx}(1)$ را محاسبه کنید.

۴. انتگرالهای زیر را حل کنید:

الف) $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 5}}$ ب) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

ج) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$ د) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{36 + x^2}}$

فصل هشتم

روش‌های انتگرال‌گیری

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. روش جزء به جزء در انتگرال را اثبات و آن را در حلّ انتگرالها به‌کار ببرد.

۲. روش انتگرال‌گیری به طریق تجزیه کسر را بداند.

۳. تغییر متغیرهای مختلف را برای حل انتگرالها بداند.

۴. حل تمرین‌ها را بتواند انجام دهد.

مقدمه

در بخش حاضر دانشجویان را با روش‌های گوناگون انتگرال‌گیری آشنا می‌کنیم. هرچند که علیرغم روش‌های گوناگونی که ارائه می‌دهیم، بسیاری از انتگرال‌های نامعیّن را نمی‌توان حل نمود. ولی سعی بر آن است که روشهایی را بیشتر مورد توجه قرار دهیم که جنبه کلی داشته باشند تا بتوانیم بعضی از انتگرالها را حل کنیم.

۸-۱ روش انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

فرض کنید u و v توابعی دیفرانسیل‌پذیر باشند بنابراین می‌توان نوشت:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

و یا:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

و از آنجا:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (*)$$

رابطه (*) را دستور جزء به جزء برای حل انتگرالها می‌نامیم.

لازم است بدانیم روش جزء به جزء عموماً برای محاسبهٔ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(x)g(x)dx$ به‌کار می‌رود که در آن $f(x)g(x)$ قابل ضرب کردن در هم نمی‌باشد.

۸-۱-۱ تذکر. در محاسبهٔ v از عبارت dv مقدار ثابت c را منظور نکردیم، زیرا این مقدار ثابت در نتیجهٔ نهایی بی‌اثر است.

۸-۱-۲ تذکر. در انتخاب du و v توصیه بر این است، دانشجو بیشتر تمرین حل نماید تا مهارت لازم را در انتخاب آنها کسب نماید.

۸-۱-۳ مثال. انتگرال $\int x\sin x\,dx$ را به روش جزء به جزء حل کنید.

حل. با فرض $u = x$ و $dv = \sin x\,dx$، ملاحظه می‌کنید که $du = dx$ و $v = -\cos x$. بنابراین داریم:

$$\int x\sin x\,dx = \int u \cdot dv = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

۸-۱-۴ مثال. انتگرال $\int x^2\cos x\,dx$ را حل کنید.

حل. فرض کنید $u = x^2$ و $dv = \cos x\,dx$. بنابراین $du = 2x\,dx$ و $v = \sin x$. پس:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$

حال مجدداً انتگرال $\int x\sin x\,dx$ را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم، اما بنا بر ۸-۱-۳ داریم:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int x^{2}\cos x\,dx = x^{2}\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

۸-۱-۵ مثال. انتگرال $\int e^{x}\cos x\,dx$ را حل کنید.

حل. فرض کنید $I = \int e^{x}\cos x\,dx$ و $u = \cos x$ و $dv = e^{x}dx$، بنابراین $du = -\sin x\,dx$ و $v = e^{x}$. پس داریم:

$$I = e^{x}\cos x + \int e^{x}\sin x\,dx$$

مجدداً با فرض $u = \sin x$ و $dv = e^{x}dx$ داریم $du = \cos x\,dx$ و $v = e^{x}$. بنابراین:

$$I = e^{x}\cos x + (e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x\,dx) + C$$

$$I = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x - I + C$$

$$2I = e^{x}(\cos x + \sin x) + C$$

$$I = \frac{1}{2}e^{x}(\cos x + \sin x) + A$$

۸-۱-۶ مثال. انتگرال $\int tg^{-1}x\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنید $u = tg^{-1}x$ و $dv = dx$، بنابراین $du = \frac{dx}{1+x^{2}}$ و $v = x$. بنابراین:

$$\int tg^{-1}x\,dx = x\,tg^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^{2}}dx = x\,tg^{-1}x - Ln\sqrt{1+x^{2}} + C$$

۸-۱-۷ تمرین. انتگرال $(n \in N)$, $\int x^n \operatorname{Ln} x\, dx$ را حل کنید.

۸-۱-۸ مثال. انتگرال $\int \sec^3 x\, dx$ را حل کنید.

حل. فرض کنید $I = \int \sec^3 x\, dx$، قرار دهید $u = \sec x$ و $dv = \sec^2 x\, dx$،
بنابراین $du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$ و $v = \operatorname{tg} x$ و داریم:

$$I = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$I = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

بنابراین:

$$2I = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x\, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$$

۸-۱-۹ تمرین. یک فرمول بازگشتی برای $(n > 1)$, $I_n = \int \cos^n x\, dx$ پیدا کنید و به کمک آن $\int \cos^4 x\, dx$ را محاسبه کنید.

۸-۲ جدول انتگرال‌گیری

فرض کنید $p(x)$ تابعی باشد که n بار مشتق‌پذیر است و $p^{(n+1)}(x) = 0$، و $f(x)$ تابعی باشد که ضدمشتق آن را، $n + 1$ دفعه می‌توان محاسبه نمود.

حال فرض کنید $F^{(1)}(x)$، $F^{(2)}(x)$، ... و $F^{(n+1)}(x)$ به ترتیب ضدّمشتق مرتبه اول، دوم، ... و $n+1$ام تابع $f(x)$ باشند. در این صورت انتگرال $\int p(x)f(x)dx$ را می‌توان با توجه به جدول زیر (به نام جدول انتگرال) محاسبه نمود.

$p(x)$	$f(x)$
$p^{(1)}(x)$	$+\ F^{(1)}(x)$
$p^{(2)}(x)$	$-\ F^{(2)}(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$p^{(n)}(x)$	$F^{(n)}(x)$
0	$(-1)^n\ F^{(n+1)}(x)$

بنابراین می‌توان با توجه به جدول بالا $\int p(x)f(x)dx$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\int p(x)f(x)dx = p(x)F^{(1)}(x) - p^{(1)}(x)F^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)F^{(n+1)}(x)$$

به عبارت دیگر:

$$\int p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{i}(x)F^{(i+1)}(x)$$

۸-۲-۱ مثال. انتگرال $\int x^2 \cos x dx$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به جدول انتگرال به صورت زیر داریم:

x^2		$\cos x$
$2x$	$+$	$\sin x$
2	$-$	$-\cos x$
0	$+$	$-\sin x$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

۸-۲-۲ مثال. انتگرال $\int (x^3 + x) \operatorname{sh} x \, dx$ را محاسبه کنید.

حل. با در نظر گرفتن جدول انتگرال، داریم:

$$\int (x^3 + x) \operatorname{sh} x \, dx = (x^3 + x) \operatorname{ch} x - (3x^2 + 1) \operatorname{sh} x + 6x \operatorname{ch} x - 6 \operatorname{sh} x + C$$

۸-۲-۳ تذکر. آنچه در ۸-۲ بیان شد، در مورد توابع خاصی قابل اِعمال است، لذا باید کاملاً جانب احتیاط را در این مورد رعایت نمود، زیرا اغلب انتگرال‌ها از این روش حل نمی‌شوند. به عنوان مثال، انتگرال‌های $\int x \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$ ، $\int x \operatorname{Ln} x \, dx$ ، $\int x^n \sin^{-1} x \, dx$ و ... از روش فوق قابل محاسبه نیستند زیرا ضدمشتق توابع $\operatorname{tg}^{-1} x$ ، $\operatorname{Ln} x$ ، $\sin^{-1} x$ و... به سادگی جدول فوق در دسترس قرار ندارند.

همچنین انتگرالهای $\int \cos x \cdot e^x \, dx$ ، $\int \operatorname{sh} x \cdot e^{dx} \, dx$ و... از این روش قابل حل نیستند زیرا هیچکدام از عبارات فوق دارای مشتق nام صفر نیستند.

۸-۲-۴ تذکر. عموماً از جدول انتگرال، در محاسبات مهندسی، که حل انتگرال از اعمال فرعی محاسبه می‌شود استفاده می‌کنند. تا در محاسبات، دچار اتلاف وقت نشوند.

۸-۲-۵ تمرین.

۱. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int e^{x}\big(f(x)+f'(x)\big)dx$

۲) $\int \frac{x e^{x}}{(1+x)^{2}}dx$

۳) $\int \mathrm{Ln}(a^{2}+x^{2})dx$

۴) $\int x^{3}e^{-x^{2}}dx$

۵) $\int x^{5}e^{x}dx$

۶) $\int \sin(\mathrm{Ln}\,x)dx$

۷) $\int x\,\mathrm{tg}^{-1}x\,dx$

۸) $\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$

۹) $\int (x^{3}+x)\,\mathrm{ch}\,x\,dx$

۱۰) $\int \mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^{2}})dx$

۱۱) $\int x\,\mathrm{Ln}(\frac{1+x}{1-x})dx$

۱۲) $\int x^{2}\,\mathrm{Ln}(\frac{1-x}{1+x})dx$

۱۳) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

۱۴) $\int \frac{\mathrm{tg}^{-1}e^{x}}{e^{x}}dx$

۱۵) $\int (\sin^{-1}x)^{2}dx$

۱۶) $\int (\frac{\mathrm{Ln}\,x}{x})^{2}dx$

۱۷) $\int \frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{2(x+1)}dx$

۱۸) $\int_{0}^{\frac{\pi^{2}}{2}} \cos\sqrt{2x}\,dx$

۱۹) $\int_{1}^{4} \sec^{-1}\sqrt{x}\,dx$

۲۰) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\,\mathrm{cotg}\,x\cdot\csc x\,dx$

۲۱) $\int_{0}^{\frac{\pi^{2}}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$

۲۲) $B(m,n)=\int_{0}^{1} x^{m}(1-x)^{n}dx \quad , \quad (m,n\geq 0)$

۸-۳ انتگرال از توابع کسری

در بخش حاضر به بررسی انتگرال کسرها می‌پردازیم. برای بررسی اینگونه انتگرالها سعی می‌کنیم کسر $\frac{p(x)}{Q(x)}$ را به کسرهای ساده تبدیل کرده و سپس انتگرال آنها را محاسبه کنیم.

۸-۳-۱ قضیه. هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی قابل تجزیه به عوامل درجه اول و عوامل درجه دوم (تجزیه‌ناپذیر) با ضرایب حقیقی می‌باشند.

۸-۳-۲ محاسبه انتگرال $\int \frac{p(x)}{Q(x)}dx$. برای بررسی $\int \frac{p(x)}{Q(x)}dx$، در حالتی که درجه کثیرالجمله $p(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است. (در غیر این صورت $p(x)$ را بر $Q(x)$ تقسیم می‌کنیم و آن را به صورت $q(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$ که در آن درجهٔ $r(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است تبدیل می‌کنیم.) تجزیهٔ $\frac{p(x)}{Q(x)}$ را به کسرهای ساده بررسی می‌کنیم.

می‌توان چند حالت را که در تجزیه $Q(x)$ پیش می‌آید مسئله را بررسی نمود.

حالت اول. فرض کنید $Q(x)$ به عوامل اول تجزیه شود و ریشه‌های تکراری نباشند یعنی:

$$Q(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \quad , \quad (\alpha_i \neq \alpha_j)$$

حال برای تجزیهٔ $\frac{p(x)}{Q(x)}$ به کسرهای ساده، قرار می‌دهیم:

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\dots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

حال با توجه به تساوی اخیر، ضرایب A_1، A_2، ... و A_n را تعیین می‌کنیم.

۸-۳-۳ مثال. انتگرال $\int \frac{x+۲}{x^۳-x}dx$ را حل کنید.

حل.
$$\frac{x+۲}{x^۳-x}=\frac{x+۲}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{x+۱}$$

لذا به ازای هر x داریم:

$$x+۲=A(x-۱)(x+۱)+Bx(x+۱)+Cx(x-۱)$$

در تساوی بالا به ازای $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$ داریم:

$$۲=-A \quad \Rightarrow \quad A=-۲$$
$$۳=۲B \quad \Rightarrow \quad B=\frac{۳}{۲}$$
$$۱=۲C \quad \Rightarrow \quad C=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\int\frac{x+۲}{x^۳-x}dx=\int\frac{-۲}{x}dx+\frac{۳}{۲}\int\frac{dx}{x-۱}+\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{x+۱}$$

$$=-\mathrm{Ln}\, x^۲+\frac{۳}{۲}\mathrm{Ln}|x-۱|+\mathrm{Ln}\sqrt{x+۱}+\mathrm{Ln}\, C$$

$$=\mathrm{Ln}\frac{C\sqrt{x+۱}\,(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}}{x^۲}$$

۸-۳-۴ حالت دوم. اگر $Q(x)$ به عوامل درجه اول تجزیه شود ولی بعضی از آنها تکراری باشند، در این صورت کسر $\frac{p(x)}{Q(x)}$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{p(x)}{(x-a_i)^k}=\frac{A_۱}{x-a_i}+\frac{A_۲}{(x-a_i)^۲}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a_i)^k}$$

۸-۳-۵ مثال. انتگرال $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$ را حل کنید.

حل.
$$\frac{1}{x^3+3x^2}=\frac{1}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$$

بنابراین:

$$1=Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2$$

به ازای $x=0$ داریم:

$$B=\frac{1}{2}$$

به ازای $x=-2$ داریم:

$$C=\frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$1=Ax(x+2)+\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{4}x^2$$

با در نظر گرفتن $x=1$ داریم:

$$1=3A+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$$

بنابراین $A=-\frac{1}{4}$، لذا:

$$\int\frac{dx}{x^3+3x^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|x|-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|x+2|+C$$

۸-۳-۶ حالت سوم $\int\frac{p(x)}{Q(x)}dx$. اگر در تجزیه $Q(x)$ علاوه بر عوامل درجه اول (تکراری یا بدون تکرار)، عوامل درجه دوم بدون تکرار موجود باشد به طوری که عامل

درجه دوم قابل تجزیه به عوامل درجه اول نباشد بدین معنی که فرض کنید:

$$Q(x)=(x-a)^k h(x)$$

که در آن $h(x)$ عامل درجه دوم وغیرقابل تجزیه به عوامل درجه اول باشد، در این صورت کسر $\frac{p(x)}{Q(x)}$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{Bh'(x)}{h(x)}+\frac{C}{h(x)}$$

حال با تعیین ضرایب A_i و B و C انتگرال کسر به سادگی قابل حل است.

۸-۳-۷ مثال. انتگرال $\int\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx$ را حل کنید.

حل.

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B(2x)}{x^2+1}+\frac{C}{x^2+1}$$

$$A=2\ ,\ B=-\frac{1}{2}\ ,\ C=3$$

بنابراین:

$$\int\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx=2\mathrm{Ln}|x|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+1)+3\,\mathrm{tg}^{-1}+C$$

۸-۳-۸ حالت چهارم $\int\frac{p(x)}{Q(x)}dx$. اگر در تجزیه $Q(x)$ عوامل درجه دوم تکراری موجود باشند، آنگاه برای هر عبارت به صورت $Q(x)=(x^2+ax+b)^k$, $(\Delta<0)$ تجزیه $\frac{p(x)}{Q(x)}$ به فرم زیر خواهد بود:

$$\frac{p(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+ax+b)^k}.$$

۸-۳-۹ مثال. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$$

حل.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

بنابراین.

$$A=0 \quad , \quad B=2 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=1$$

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\,\mathrm{tg}^{-1}x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

حال با فرض $x=\mathrm{tg}\,\theta$، نتیجه حاصل به فرم زیر است:

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \frac{5}{2}\mathrm{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C$$

(جزئیات حل انتگرال $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ را خودتان ادامه دهید).

۸-۳-۱۰ تمرین. هر یک از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

۱) $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

۲) $\int \frac{(\sec^2 x+1)\cdot\sec^2 x}{1+\mathrm{tg}^3 x}dx$

۳) $\int \frac{x^2+2x-1}{27x^3-1}dx$

۴) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

۵) $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

۶) $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}$

۷) $\displaystyle\int\frac{t\,dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$

۸) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^3+8}dx$

۹) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-3x^2}$

۱۰) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx$

۱۱) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^2}$

۱۲) $\displaystyle\int_0^4\frac{x^2\,dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$

۱۳) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\,dx}{x^3+2x^2+x+2}$

۱۴) $\displaystyle\int_1^0\frac{x^2\,dx}{(2x^2+2x+1)^2}$

۸-۴ چند تغییر متغیر مناسب برای حل انتگرال‌ها

۸-۴-۱ انتگرال‌گیری با تغییر متغیرهای مثلثاتی

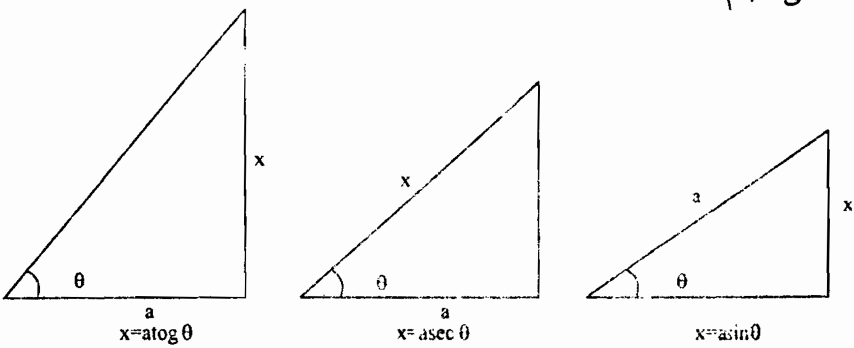
۸-۴-۲ نکته. در محاسبه انتگرال‌هایی که تابع انتگرال شامل عبارتهایی نظیر $\sqrt{a^2-x^2}$، $\sqrt{x^2-a^2}$ و $\sqrt{a^2+x^2}$ هستند که در آن a عدد ثابت مثبت است، با در نظر گرفتن تغییر متغیرهایی به ترتیب زیر:

$$x=a\sin\theta\quad,\quad x=a\sec\theta\quad,\quad x=a\,\mathrm{tg}\,\theta$$

می‌توان انتگرال‌ها را به سادگی حل نمود.

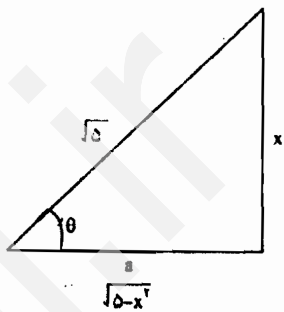
۸-۴-۳ نکته. بدیهی است با توجه به تغییر متغیرهای بالا در پایان محاسبات با عبارات مثلثاتی سروکار خواهیم داشت و لذا نیاز به محاسبات مثلثاتی داریم. برای سادگی محاسبات با در نظر گرفتن مثلث‌های قائم‌الزاویه به ترتیب زیر می‌توان محاسبات را به

سادگی انجام داد:



۸-۴-۴ مثال. انتگرال $A = \int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنید $x = \sqrt{5}\sin\theta$، بنابراین $dx = \sqrt{5}\cos\theta d\theta$ و با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه زیر حل انتگرال را ادامه می‌دهیم:



$$A = \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta d\theta}{5^{\frac{3}{2}}\cos^3\theta} = \frac{1}{5}\int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{5}\operatorname{tg}\theta + C$$

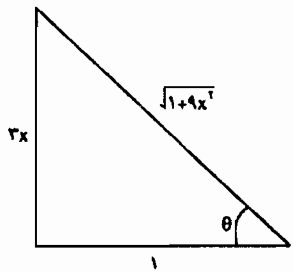
حال با توجه به شکل بالا $\operatorname{tg}\theta$ به سادگی محاسبه می‌شود:

$$A = \frac{1}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C$$

۸-۴-۵ مثال. انتگرال $I=\int\frac{dx}{(۱+۹x^۲)^۲}$ را حل کنید.

حل. فرض کنید $۳x=tg\theta$، بنابراین $۳dx=\sec^۲\theta d\theta$ و $۱+۹x^۲=\sec^۲\theta$.

از طرفی مثلث قائم‌الزاویه را رسم کنید. داریم:



$$I=\frac{۱}{۳}\int\frac{\sec^۲\theta d\theta}{\sec^۴\theta}=\frac{۱}{۳}\int\cos^۲\theta d\theta$$

$$I=\frac{۱}{۶}\int(۱+\cos ۲\theta)d\theta$$

بنابراین:

$$I=\frac{۱}{۶}\theta+\frac{۱}{۶}\sin\theta\cos\theta+C$$

حال با توجه به فرض و مثلث داریم:

$$I=\frac{۱}{۶}tg^{-۱}(۳x)+\frac{۱}{۶}\cdot\frac{۳x}{\sqrt{۱+۹x^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+۹x^۲}}+C$$

$$I=\frac{۱}{۶}tg^{-۱}(۳x)+\frac{x}{۲(۱+۹x^۲)}+C$$

۸-۴-۶ محاسبه $\int f(\sin x,\cos x)dx$. در محاسبه انتگرال‌هایی که تابع زیر انتگرال به صورت $\frac{۱}{f(\sin x,\cos x)}$ تعریف می‌شود، با در نظر گرفتن روابط مثلثاتی

$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ و $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ و با تغییر متغیر $\operatorname{tg} x = t$ می‌توان انتگرال را حل نمود.

۸-۴-۷ مثال. انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$I = \int \sec x \, dx \quad , \quad J = \int \frac{dx}{1+\sin 2x}$$

حل.

$$I = \int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx.$$

با فرض $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ داریم $(1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx = 2dt$. بنابراین:

$$I = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \operatorname{Ln}\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \operatorname{Ln}\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$$

$$I = \operatorname{Ln}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$J = \int \frac{dx}{1+\sin 2x} = \int \frac{dx}{1+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)dx}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$$

با فرض $t = \operatorname{tg} x$ داریم:

$$J = \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C$$

۸-۴-۸. تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را حل کنید.

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۲) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

۳) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

۴) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

۵) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

۶) $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

۷) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$

۸) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

۹) $\int_{-\ln 2}^{0} e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

۱۰) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

۱۱) $\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{\frac{5}{2}}}$

۱۲) $\int \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

۱۳) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

۱۴) $\int \frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$

۱۵) $\int \sec^3 x\,dx$

۱۶) $\int \csc x\,dx$

۱۷) $\int x\sin^{-1}x\,dx$

۱۸) $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$

۱۹) $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx$

۲۰) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

۲۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

۲۲) $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}$

فصل نهم

مختصات قطبی و منحنی‌های قطبی

هدف کلی

مفاهیم این فصل پیش‌نیازی برای درس‌های ریاضی عمومی (۲) و (۳) است.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. دستگاه مختصات قطبی را بشناسد و بتواند موضع هر نقطه را در مختصات قطبی تعیین کند.

۲. رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی را بیان کند.

۳. تقارن توابع به صورت $f(r,\theta)=0$ را تعیین نماید.

۴. نمودار تابع به فرم $f(r,\theta)=0$ را در مختصات قطبی یا دکارتی رسم نماید.

۵. تقاطع نمودارهای قطبی را تعیین نماید.

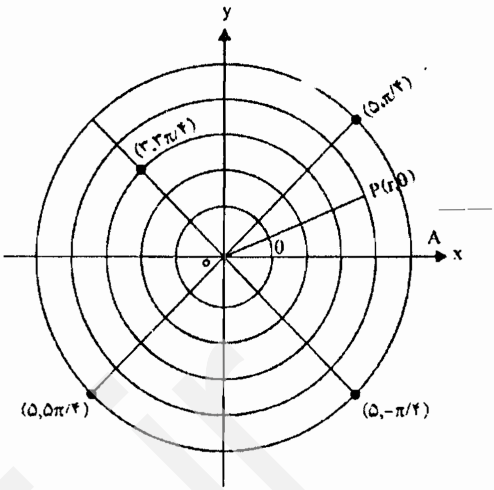
۶. شیب خطوط مماس بر منحنی‌های قطبی را در نقاط مفروض تعیین کند.

۹-۱ مختصات قطبی

تاکنون برای نشان دادن محل یک نقطه در صفحه، از مختصات دکارتی استفاده می‌کردیم. حال می‌خواهیم طریق دیگری را برای نشان دادن محل یک نقطه معرفی کنیم.

۹-۱-۱ تعریف. ابتدا یک مبدأ به نام O انتخاب می‌کنیم و خطی افقی از O رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر OA را محور قطبی می‌نامیم مختصات هر نقطه P در این دستگاه، عبارت است از زوج مرتب (r,θ) که در آن $r>\circ$ و r فاصله جهت‌دار O از P و θ زاویه جهت‌دار از OA تا OP است. جهت مثبت زاویه θ در جهت مثلثاتی و از O به سر پیکانی که زاویهٔ θ را نشان می‌دهد وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا جهت مثبت برای r تعیین شود. جهت منفی برای r در خلاف جهت فوق می‌باشد.

در شکل (۹-۱) موضع چند نقطه را در مختصات قطبی نشان داده‌ایم:



شکل ۹-۱

۹-۱-۲ مثال. در شکل ۹-۱ مختصات قطبی سایر نقاط را تعیین کنید.

۹-۱-۳ تذکر. برخلاف مختصات دکارتی، مختصات قطبی یک نقطه منحصر به فرد نیست مثلاً نقاط (r_1,θ_1) و (r_2,θ_2) معرف یک نقطه هستند هرگاه:

$$\theta_2 = 2n\pi + \theta_1 \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

به عنوان مثال نقاط $(۱,\frac{\pi}{۴})$ و $(۱,۹\frac{\pi}{۴})$ و $(۱,-۷\frac{\pi}{۴})$ نمایش یک موضع در مختصات قطبی هستند.

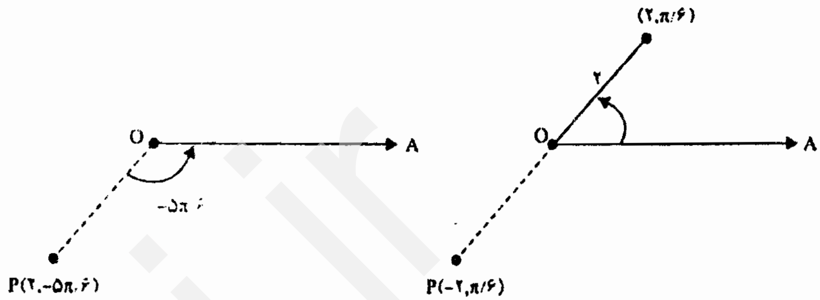
۹-۱-۴ مثال. مختصات نقطهٔ P داده شده، محل آن را در مختصات قطبی تعیین کنید.

الف) $P(۲,\frac{\pi}{۶})$ ب) $P(-۲,\frac{\pi}{۶})$

ج) $P(-۲,۷\frac{\pi}{۶})$ د) $P(۲,-۵\frac{\pi}{۶})$

هـ) $P(۲,۱۳\frac{\pi}{۶})$

حل. به عنوان نمونه (ب) و (د) را نمایش و بقیه را به عهدهٔ دانشجو محول می‌کنیم.

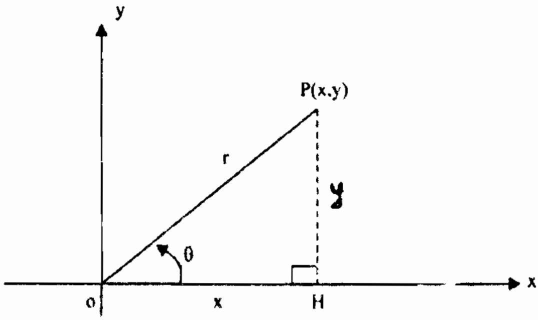


شکل ۹-۲

۹-۲ رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی

فرض کنید (x,y) مختصات دکارتی نقطه P و (r,θ) نیز مختصات قطبی نقطهٔ P باشد. با توجه به شکل (۹-۳) به سادگی رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی نقطه P معلوم می‌شود. بدین ترتیب با توجه به مثلث قائم‌الزاویه OHP داریم:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$



شکل ۹-۳

بنابراین با معلوم بودن r و θ مختصات دکارتی P به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

از طرفی دیگر با توجه به قرار گرفتن θ در ربع‌های مختلف و با توجه به $r \geq ٠$ می‌توان نوشت:

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \quad , \quad \hat{\theta} = \begin{cases} tg^{-۱}\dfrac{y}{x} & x > ٠ \\ \pi + tg^{-۱}\dfrac{y}{x} & x < ٠ \end{cases}$$

بنابراین:

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

۹-۲-۱ مثال. مختصات قطبی نقاط زیر را تعیین کنید.

$$P_۲(۱,-۱) \quad , \quad P_۱(-۱,۱)$$

حل. به سادگی داریم: $r=\sqrt{2}\ ,\ (r>0)$ از طرفی اگر (r,α) مختصات قطبی P_1 باشد داریم:

$$\alpha=\pi+tg^{-1}(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

بنابراین $(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$ مختصات قطبی P_1 است. حال اگر (r,θ) مختصات قطبی P_2 باشد، داریم:

$$\hat{\theta}=tg^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

بنابراین $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$ مختصات قطبی نقطه P_2 است.

۹-۲-۲ مثال. معادله خط راست $2x-3y=5$ را در مختصات قطبی بنویسید.

حل. با توجه به روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$2r\cos\theta-3r\sin\theta=5$$

$r=\dfrac{5}{2\cos\theta-3\sin\theta}$ معادلهٔ قطبی خط فوق است.

۹-۲-۳ مثال. معادلهٔ دایره $x^2+y^2=a^2$ را در مختصات قطبی بنویسید.

حل.

$$x^2+y^2=a^2$$

$$r^2=a^2$$

$$r=\pm a$$

نمودارهای $r=a$ و $r=-a$ مشابه هستند لذا معادله دایره به صورت $r=|a|$ بیان می‌شود.

۹-۲-۴ تمرین. ۱- برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان نقطه را پیدا کنید که در یکی $r>0$ و در دیگری $r<0$ باشد.

الف) $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$ ب) $(-2,\frac{4\pi}{3})$ ج) $(-3,-\pi)$

۲- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط $r>0$ و $0\le\theta\le 2\pi$ تعیین کنید.

الف) $(2,-2)$ ب) $(-1,-\sqrt{3})$ ج) $(1,\sqrt{3})$

۳- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $x^3=4y^2$ ب) $xy=1$ ج) $x^2-4x+y^2=0$

۴- معادله دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $r=2\sin 3\theta$ ب) $r=\dfrac{4}{3-2\cos\theta}$ ج) $r^2=\theta$

۹-۳ منحنی‌های قطبی

اگر $r=f(\theta)$ معادله قطبی یک منحنی باشد برای رسم آن باید نکات زیر را رعایت نمود:

الف) بررسی تقارن منحنی $r=f(\theta)$.

ب) آیا منحنی از قطب $(r=0)$ عبور می‌کند؟

ج) اگر منحنی از قطب می‌گذرد، معادلات خطوط مماس بر منحنی در قطب را تعیین می‌کنیم.

د) تعیین نقاطی که r دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی است.

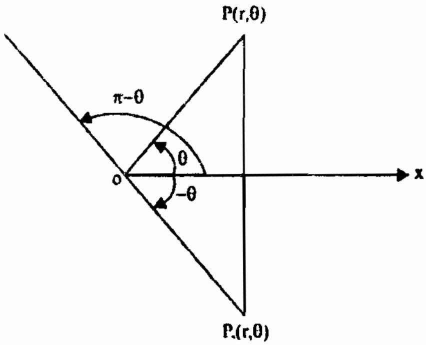
۹-۳-۱ بررسی تقارن $r=f(\theta)$.

۱. تقارن نسبت به محور xها (محور قطبی). اگر با تبدیل (r,θ) به $(r,2n\pi-\theta)$ و یا $(-r,\pi-\theta+2n\pi)$ معادله تغییر نکند، نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است.

در واقع محور xها محور تقارن منحنی $f(r,\theta)=0$ است هرگاه:

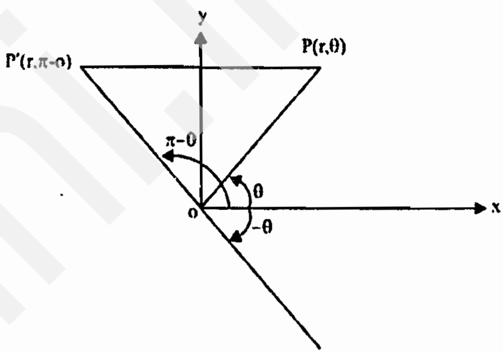
$$0 = f(r,\theta) = f(r\,,\,2n\pi-\theta) = f(-r\,,\,\pi-\theta+2n\pi)$$

به شکل ۹-۴ توجه کنید:



شکل ۹-۴

۲. تقارن نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ (محور yها). اگر با تبدیل (r,θ) به $(r\,,\,\pi-\theta+2n\pi)$ و یا $(-r\,,\,\pi-2n\pi-\theta)$ معادله تغییر نکند، نمودار نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است. شکل ۹-۵ را ملاحظه کنید.



شکل ۹-۵

۳. تقارن نسبت به قطب. اگر با تبدیل (r,θ) به $(-r,2n\pi+\theta)$ و یا $(r,\pi+\theta+2n\pi)$ معادله تغییر نکند معادله نسبت به قطب متقارن است. شکل (۹-۵) را ملاحظه کنید.

۴. تقارن نسبت به قطب و محور قطبی و محور $\frac{\pi}{2}$. اگر نمودار $r=f(\theta)$ نسبت به محور قطبی متقارن و قطب مرکز تقارن آن باشد در این صورت محور $\frac{\pi}{2}$ نیز محور متقارن آن است.

و همچنین اگر محور $\frac{\pi}{2}$ و قطب مرکز متقارن منحنی باشد محور قطبی نیز محور تقارن آن است.

۹-۳-۲. برای تحقیق اینکه آیا منحنی شامل قطب است یا نه، کافی است قرار دهیم $r=0$ اگر $f(\theta)=0$ باشد در این صورت منحنی از قطب می‌گذرد (مقدار θ مهم نیست زیرا به طور کلّی زاویه θ هرچه باشد $r=0$ قطب را نشان می‌دهد). مثلاً $r=5-4\sin\theta$ از قطب عبور نمی‌کند، زیرا اگر قرار دهیم $r=0$، آنگاه $\sin\theta=\frac{5}{4}>1$ ولی $r=4-5\sin\theta$ از قطب عبور می‌کند.

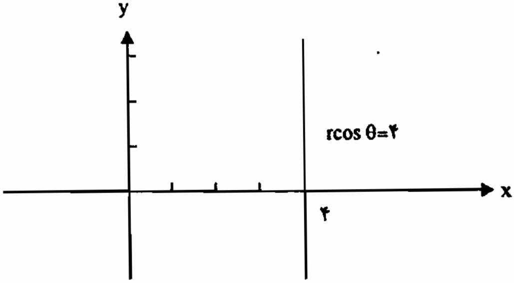
۹-۳-۳. برای بررسی معادلات خطوط مماس در قطب، جوابهایی برای θ که از حل $f(\theta)=0$ به دست می‌آید مانند $\theta=\theta_0$، معادله خط مماس بر منحنی در قطب می‌باشد ($\theta=\theta_0$ معادله خط راستی است که از قطب می‌گذرد).

۹-۳-۴. تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی. r را در رسم نمودارها بیان خواهیم نمود.

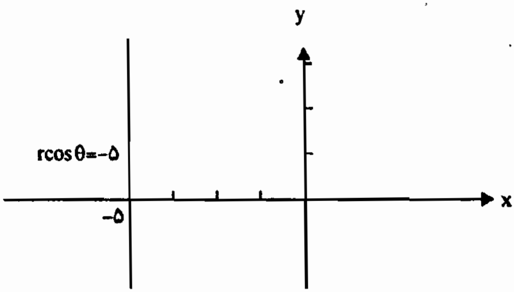
۹-۳-۵ مثال. نمودار معادلات داده شده را رسم کنید.

الف) $r\cos\theta=4$ ب) $r\cos\theta=-5$

حل. الف) $r\cos\theta = ۴$ معادله خطی است موازی محور yها و به فاصله ۴ از مبدأ.



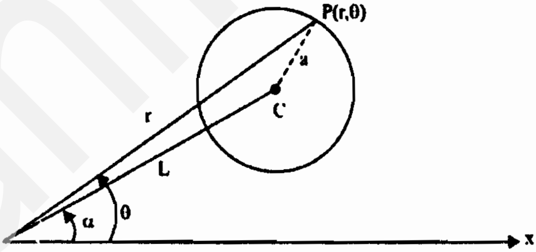
ب) $r\cos\theta = -۵$ معادله خطی است موازی محور yها به فاصله ۵- از مبدأ.



۹-۳-۶ مثال. معادله دایره‌ای را بنویسید که $C(L,\alpha)$ مرکز آن و a شعاع دایره باشد.

حل. فرض کنید $P(r,\theta)$ نقطهٔ دلخواه روی دایره باشد (شکل ۹-۶). در مثلث OCP داریم:

$$a^{۲} = r^{۲} + L^{۲} - ۲rL\cos(\theta - \alpha)$$



شکل ۹-۶

در حالت خاص اگر دایره از مبدأ بگذرد، آنگاه $a = L$ و معادله دایره به صورت $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$ خواهد بود. و اگر دایره در مبدأ بر محور yها مماس باشد، آنگاه $\alpha = 0$ و یا $\alpha = \pi$، و لذا معادله دایره به صورتهای زیر است:

$$r = 2a\sin\theta \quad \text{یا} \quad r = -2a\sin\theta$$

بالاخره اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد، $L = 0$ و در نتیجه معادله دایره به صورت $r = a$ خواهد بود.

۹-۳-۷ مثال. نمودار هر یک از معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $r = +4$ ب) $r = -4\sin\theta$ ج) $r = 4\cos(\theta - 30)$

حل. الف) $r = +4$ معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ٤ می‌باشد، آن را رسم کنید.

ب) $r = -4\sin\theta$ معادله دایره‌ای به مرکز $(2, \frac{3\pi}{2})$ و شعاع ۲ است، آن را رسم کنید.

ج) $r = 4\cos(\theta - 30)$ دایره به مرکز $(2, \frac{\pi}{6})$ و به شعاع ۲ است، آن را رسم کنید.

۹-۳-۸ مثال. نمودار $r = 2 + \cos\theta$ را رسم کنید.

حل. اگر در معادلهٔ فوق به‌جای θ، $-\theta$ قرار دهیم معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$r = 2 + \cos(-\theta) = 2 + \cos\theta$$

لذا محور xها محور تقارن نمودار است.

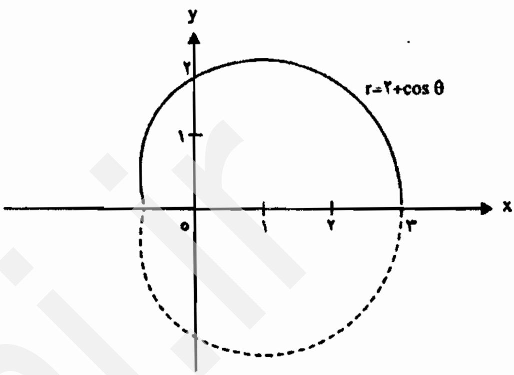
حال اگر $r=۰$، آنگاه $\cos\theta=-۲$ پس نمودار از قطب عبور نمی‌کند. چون محور xها محور تقارن نمودار تابع است لذا نمودار آن را در فاصله $[۰,\pi]$ رسم سپس نمودار را با توجه به تقارن آن تکمیل می‌کنیم.

از طرفی $r=۲+\cos\theta$ بنابراین $-۱\leq r-۲=\cos\theta\leq ۱$.

بنابراین $۱\leq r\leq ۳$ در نتیجه بیشترین مقدار r برابر ۳ است که به ازای $\theta=۰$ به دست می‌آید و کمترین مقدار آن $r=۱$ است که به ازای $\theta=\pi$ به دست می‌آید.

حال برای رسم شکل چند نقطه از نمودار را پیدا می‌کنیم (مطابق جدول زیر).

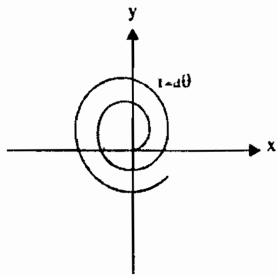
θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	۳	$۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۲+\frac{۱}{۲}$	۲	$\frac{۳}{۲}$	$۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۲-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱



۹-۳-۹ مثال. نمودار $r=a\theta$ (مارپیچ ارشمیدس) را رسم کنید.

حل. ملاحظه می‌شود که $f(r,\theta)=f(-r,-\theta)$ لذا محور yها محور تقارن نمودار $r=a\theta$ است. از طرفی اگر $r=۰$، آنگاه $\theta=۰$، پس نمودار در قطب بر محور قطبی مماس است.

با ازدیاد θ برحسب رادیان، r بزرگ می‌شود و وقتی $\theta = k\pi$، نمودار محور قطبی را قطع می‌کند و وقتی $\theta = \frac{k\pi}{۲}$ باشد، نمودار مجور $\frac{\pi}{۲}$ را قطع می‌کند (k عدد صحیح است). لذا نمودار $r = a\theta$ به شکل زیر است:



۹-۳-۱۰ تمرین.

۱. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $r^۲ = ۹\sin ۲\theta$ ب) $r^۲ = ۱۶\cos ۲\theta$

ج) $r = ۳\cos ۳\theta$ د) $r = ۴\sin ۲\theta$

هـ) $r = ۳\sin ۳\theta$ و) $r = ۱ + ۲\sin\theta$

ز) $r = ۴(۱ - \cos\theta)$ ح) $r = ۳(۱ - \sin\theta)$

ط) $r = a e^{k\theta}$ ی) $r\cos\frac{\theta}{۲} = ۲$

ک) $r = ۱ - ۲\sin ۳\theta$ ل) $r = \frac{۱}{۱ + \cos\theta}$

م) $r = \frac{۱}{۱ + \cos\theta}$ ن) $r = ۳\sin\frac{\theta}{۲}$

۲. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط $dx + by - c = ۰$ عمود باشد، مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعیین کنید.

۳. مسئله ۲ را در مورد خط $\sqrt{۳}x + y = ۶$ حل کنید.

۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $r = 2\sin\theta$ ب) $r = 2\sin(\theta + 45^\circ)$

۵. ناحیه‌های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید (ناحیه‌ها را رسم و هاشور بزنید).

الف) $D = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

ب) $R = \{(r,\theta) \mid r \ge 0 \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

ج) $P = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2\cos\theta \ , \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

د) $T = \{(r,\theta) \mid -3 \le r \le 2 \ , \ \theta = \frac{\pi}{4}\}$

هـ) $K = \{(r,\theta) \mid r \le 0 \ , \ \theta = \frac{\pi}{4}\}$

۹-۴ تقاطع نمودارها در مختصات قطبی

۹-۴-۱. برای تعیین نقاط تقاطع دو منحنی در دستگاه دکارتی، دو معادله را با هم حل می‌کنیم و در این مورد مشکلی نداریم.

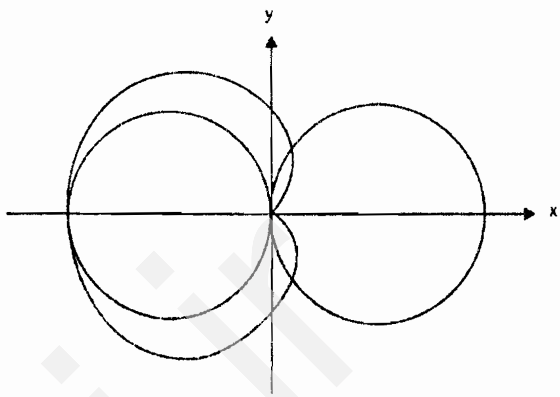
اما در دستگاه مختصات قطبی با توجه به اینکه یک نقطه دارای مختصات متفاوت است لذا تعیین محل تقاطع نمودارهای قطبی به سادگی مختصات دکارتی نیست و باید دقت بیشتری داشته باشیم. به عنوان مثال نقطه $(2,\pi)$ در معادله $r^2 = 4\cos\theta$ صدق نمی‌کند. در حالی که اگر همین نقطه را با $(-2,0)$ نشان دهیم در معادله بالا صدق می‌کند.

نقطه $(2,\pi)$ در معادله $r = 1-\cos\theta$ صدق می‌کند، لذا روی نمودار آن نیز صدق می‌کند بنابراین $(2,\pi)$ جزء نقاط تقاطع منحنی‌های $r^2 = 4\cos\theta$ و $r = 1-\cos\theta$ می‌باشد.

اگر معادلات اخیر را با هم حل کنیم به معادله $r^{2}+4r-4=0$ می‌رسیم و $r=2\pm2\sqrt{2}$ لذا $(2,\pi)$ به عنوان نقطه تقاطع به دست نمی‌آید.

علت واضح است. زیرا نقطه فوق، در یک لحظه روی دو منحنی نیست به عنوان مثال با در نظر گرفتن مسیر حرکت دو اتومبیل، با وجود آن که هر دو از یک چهارراه عبور می‌کنند ولی چون در زمان‌های مختلف این اتفاق رخ می‌دهد، تصادفی رخ نمی‌دهد هرچند مسیرهایشان یکدیگر را قطع می‌کند.

از طرفی ملاحظه کردیم از حل دو معادله $r=1-\cos\theta$ و $r^{2}=4\cos\theta$ فقط دو نقطه به دست می‌آید، ولی اگر به شکل آنها در مختصات قطبی توجه کنیم، دو نمودار یکدیگر را در چهار نقطه قطع می‌کنند (شکل ۹-۷).



شکل ۹-۷

۹-۴-۲. به طور کلی برای تعیین تمام نقاط تقاطع دو منحنی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف) معادلات دو منحنی را با هم قطع می‌دهیم، تا تعدادی از نقاط تقاطع تعیین شوند.

ب) بررسی می‌کنیم که آیا دو منحنی از قطب عبور می‌کنند، بدین منظور در هر دو معادله $r=0$ قرار می‌دهیم.

ج) منحنی‌های مشابه با منحنی‌های داده شده را به دست می‌آوریم و نقاط تقاطع آنها را نیز تعیین می‌کنیم. به طور کلی منحنی $r = f(\theta)$ با منحنی $(-۱)^n r = f(\theta + n\pi)$ مشابه است.

۹-۴-۳ مثال. نقاط تقاطع $r = ۱ - \cos\theta$ و $r^۲ = ۴\cos\theta$ را تعیین کنید.

حل. دو نقطه تقاطع را ۹-۳-۱ به دست آوردیم. حال دو نقطه تقاطع دیگر را به دست می‌آوریم:

در $r = ۱ - \cos\theta$ قرار دهید $r = ۰$ لذا $\theta = \frac{\pi}{۲}$ حال اگر در $r^۲ = ۴\cos\theta$، به‌جای $\theta = \frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم داریم $r = ۰$، لذا هر دو منحنی از قطب می‌گذرند (توجه کنید لازم نیست که مقدار θ در هر دو یکی باشد).

حال مشابه معادلات فوق را به دست می‌آوریم:

$$n = ۱ \ \Rightarrow \ (-۱)^۱ r^۲ = ۴\cos(\theta + \pi)$$

بنابراین $r^۲ = ۴\cos\theta$ مشابه $r^۲ = ۴\cos\theta$ است (به ازای $n = ۱$).

از طرف دیگر برای $n = ۲$ داریم:

$$(-۱)^۲ r^۲ = ۴\cos(\theta + ۲\pi)$$

$$r^۲ = ۴\cos\theta$$

لذا برای هر n مشابه $r^۲ = ۴\cos\theta$ به صورت $r^۲ = ۴\cos\theta$ است.

حال همین روش را برای $r = ۱ - \cos\theta$ اعمال می‌کنیم:

$$n = ۱ \ \Rightarrow \ (-۱)^۱ r = ۱ - \cos(\pi + \theta)$$

$$-r = ۱ + \cos\theta$$

برای $n = ۲$ داریم:

$$(-۱)^۲ r = ۱ - \cos(\theta + ۲\pi)$$

$$r = ۱ - \cos\theta$$

لذا $r=1-\cos\theta$ برای nهای زوج مشابه خودش است و برای nهای فرد مشابه $-r=1+\cos\theta$ است. لذا محل تقاطع $\begin{cases}-r=1+\cos\theta\\ r^2=4\cos\theta\end{cases}$ را تعیین می‌کنیم. داریم $r^2+4r+4=0$ و $(-2,0)$ هم یک نقطه تلاقی است که همان نقطه $(2,\pi)$ است.

۹-۴-۴ تمرین.

۱. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید (در صورت امکان نمودارها را رسم کنید).

الف) $r=\cos 2\theta \quad , \quad r=1-\sin\theta$

ب) $r=2\sin\theta \quad , \quad r=2\cos 2\theta$

ج) $r^2=2\cos\theta \quad , \quad r=1$

د) $r=4(1+\sin\theta) \quad , \quad r(1-\sin\theta)=3$

۲. نمودار معادله $r=\sin\frac{3}{2}\theta$، خودش را قطع می‌کند. نقاط تقاطع را تعیین کنید.

۹-۵ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی قطبی

۹-۵-۱. فرض کنید $f(r,\theta)=0$ معادلهٔ قطبی یک منحنی باشد. می‌خواهیم ضریب زاویه خط مماس بر منحنی را در نقطه (r,θ) به دست آوریم.

حال با توجه به $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta \quad , \quad dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$$

بنابراین:

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\cdot\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\cdot\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta$$

اگر اندازه زاویه میل خط مماس برابر α رادیان باشد، داریم:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta}$$

و اگر $\cos\theta \neq 0$ آنگاه:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{tg}\theta} \qquad (*)$$

برای تعیین ضریب زاویه خط مماس در قطب، کافی است در رابطه بالا قرار دهیم $r = 0$. در این صورت داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta$$

و مقادیری از θ، $(0 \leq \theta \leq \pi)$ که از حل معادله فوق به دست می‌آیند زاویه‌های میل خط مماس بر منحنی در قطب می‌باشند. لذا اگر θ_1، θ_2، ... و θ_n جواب معادله $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta$ باشد، آنگاه خطوط $\theta = \theta_1$، $\theta = \theta_2$، ... و $\theta = \theta_n$ در قطب بر منحنی مماس هستند.

۹-۵-۲ مثال. معادلهٔ قطبی خطوط مماس بر منحنی $r = 2 + 4\cos\theta$ را در قطب پیدا کنید.

حل. قرار دهید $r = 0$. داریم:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

لذا $\theta = \frac{2\pi}{3}$ و $\theta = \frac{4\pi}{3}$ معادله خطوط مماس بر منحنی فوق در قطب هستند.

۹-۵-۳ مثال. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = ۴$ را در $(۴, \frac{\pi}{۴})$ تعیین کنید.

حل. با توجه به رابطهٔ

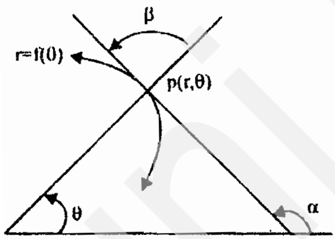
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{۴} = ۱ \quad , \quad r = ۴ \quad , \quad m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{tg}\theta}$$

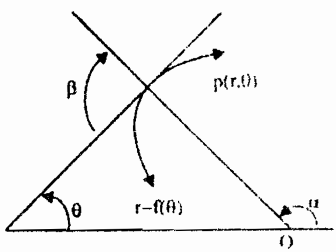
و $\frac{dr}{d\theta} = ۰$ داریم:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{۱ \times ۰ + ۴}{۰ - ۴ \times ۱} = -۱$$

۹-۵-۴ مثال. فرض کنید β زاویه بین شعاع حامل و خط مماس باشد، جهت β در شکل‌های زیر نشان داده شده است (از خط OP تا خط مماس در جهت مثلثاتی) و $۰ \leq \beta \leq \pi$.

اگر $\theta \leq \alpha$ باشد، $\beta = \alpha - \theta$ و اگر $\theta > \alpha$ باشد، $\beta = \pi - (\theta - \alpha)$.





و در هر دو حالت داریم:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{۱ + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta}$$

با قرار دادن $tg\,a$ از (*) در رابطه بالا داریم:

$$tg\beta=\frac{tg\theta\cdot\frac{dr}{d\theta}+r-tg\theta\cdot\frac{dr}{d\theta}+r\,tg^{۲}\theta}{\frac{dr}{d\theta}-r\,tg\theta+tg^{۲}\theta\frac{dr}{d\theta}+r\,tg\theta}=\frac{r(۱+tg^{۲}\theta)}{\frac{dr}{d\theta}(۱+tg^{۲}\theta)}$$

لذا:

$$tg\beta=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

۹–۵–۵ مثال. اندازهٔ زاویه β را در نقطه داده شده به دست آورید.

$$P(\sqrt{۲}\,,-\frac{\pi}{۸})\quad,\quad r=\sec ۲\theta$$

حل.

$$tg\beta=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sec(-\frac{\pi}{۴})\,tg(-\frac{\pi}{۴})}$$

$$tg\beta=-\frac{۱}{۲}$$

و داریم:

$$\hat{\beta}\simeq ۱۵۳^{\circ}$$

۹–۵–۶ تمرین.

۱. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r=۱+\sin\theta$ را در نقطه $(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,,\frac{\pi}{۳})$ به دست آورید.

۲. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی‌های زیر را در نقاط مفروض به دست آورید.

الف) $r^{۲} = ۴\cos ۲\theta \quad , \quad P(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۶})$

ب) $r = ۳(۱-\sin\theta) \quad , \quad P(۳,\pi)$

۳. مطلوبست اندازهٔ زاویه کوچکتر بین خطهای مماس بر نقطه تقاطع داده شده دو منحنی.

$$r = ۴\cos\theta \quad , \quad r = ۴\cos^{۲}\theta - ۳ \quad , \quad P(-۲, \frac{۲\pi}{۳})$$

۴. دلنمای $r = ۲(۱-\cos\theta)$ مفروض است ثابت کنید $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{۲}$.

۵- ثابت کنید به ازای هر a و b، خطوط مماس در هر یک از نقاط تقاطع دلنمای زیر متعامدند.

$$r = b(۱-\sin\theta) \quad , \quad r = a(۱+\sin\theta)$$

فصل دهم

کاربردهای انتگرال معیّن

هدف کلی

کاربردهای انتگرال در علوم تجربی بررسی می‌شود.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. مساحت زیر منحنی‌ها را محاسبه نماید.

۲. حجم جسم دوّار را حساب کند.

۳. طول منحنی را محاسبه کند.

۴. مساحت زیر منحنی در مختصات قطبی را محاسبه کند.

۵. طول منحنی در مختصات قطبی را محاسبه کند.

۶. مقدار کار انجام شده را محاسبه کند.

۷. گشتاور نیروها و مرکز جرم ناحیه‌ای را محاسبه نماید.

۱۰-۱ محاسبه مساحت ناحیهٔ بینِ نواحی مختلف در صفحه $R^۲$.

دیدیم که انتگرال $f:[a,b] \longrightarrow R$ در بازه $[a,b]$، حد مجموع $\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ وقتی که $\Delta x_i \to ۰$، تعریف می‌شود. حال اگر به Δx_iها و تابع $y=f(x)$ معنی خاصی بدهیم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ تعبیر خاصی پیدا می‌کند. در رشته‌های مختلف علمی با تعبیرهای متفاوت برای Δx_i و تابع f موارد متعددی از کاربرد انتگرالها پیش می‌آید. در این قسمت ابتدا محاسبه سطح را می‌آوریم.

۱۰-۱-۱ مساحت ناحیه بین دو منحنی. فرض کنید دو تابع g و f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند و برای هر x در این بازه $f(x) \geq g(x)$، حال سطح محدود به منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در فاصله $a \leq x \leq b$ محاسبه می‌کنیم.

ابتدا بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی و به n زیربازه به طول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ افراز کنید حال فرض کنید ΔA مساحت ناحیه‌ای باشد که در بازه $[x_{k-۱}, x_k]$ بین دو منحنی توابع f و g محدود شده است. بدیهی است:

$$\Delta A = \left(f(t_k) - g(t_k)\right) \cdot \Delta x_k$$

که در آن:

$$t_k \in [x_{k-۱}, x_k]$$

(می‌توان t_k را x_k نیز فرض نمود).

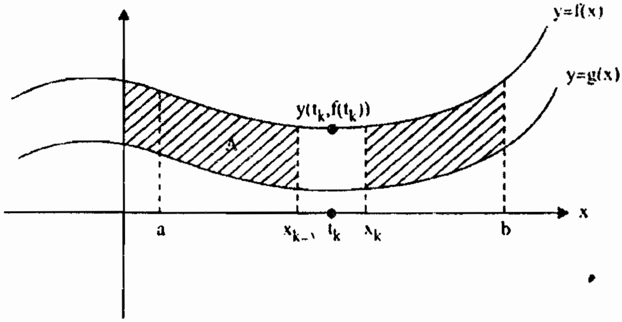
بنابراین اگر A مساحت بین دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در فاصله $[a,b]$ باشد، بدیهی است $A \approx \sum_a^b \Delta A$. لذا مقدار دقیق A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=۱}^{n} \left(f(t_k) - g(t_k)\right)\Delta x_k$$

بنابراین مطابق تعریف انتگرال می‌توان مساحت A را به صورت انتگرال معین بیان نمود.

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

شکل ۱۰-۱ را ملاحظه کنید.



شکل ۱۰-۱

۱۰-۱-۲ نکته: نکات زیر در تعیین مقدار مساحت به ما کمک می‌کند.

الف) در حالتی که $y = g(x) = 0$ در این صورت سطح محصور به نمودار $y = f(x)$ و $\left(f(x) \geq 0\right)$ و محور xها $(y = 0)$ با توجه به ۱۰-۱-۱ از دستور $A = \int_a^b f(x)dx$ محاسبه می‌شود.

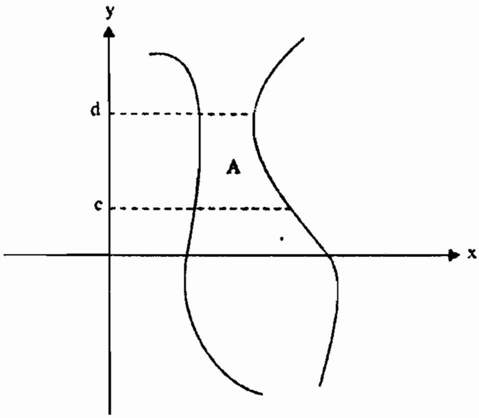
ب) اگر در فاصله $[a,b]$، $\left(f(x) \leq 0\right)$ باشد در این صورت:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

(در این بخش با توجه به اینکه برای محاسبه A می‌توان از دستور $A = \int_a^b |f(x)|dx$ استفاده کرد ولی کاربرد آن را توصیه نمی‌کنیم).

ج) اگر $x_1 = g(y)$ و $x_2 = f(y)$، مشابه آنچه که در ۱۰-۱-۱ بیان شد مساحت محصور به نمودارهای x_1 و x_2 را که $x_1 \geq x_2$ در فاصله $c \leq y \leq d$ می‌توان از دستور $A = \int_c^d \left(g(y) - f(y)\right)dy$ محاسبه نمود.

شکل ۱۰-۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۱۰-۲

د) استفاده از تقارن در محاسبه سطح محاسبات را آسان خواهد نمود.

هـ) اگر $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$، به طوری که $\forall i \neq j \; ; \; A_i \cap A_j = \phi$، در این صورت $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

۱۰-۱-۳ مثال. مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

حل. ابتدا محل برخورد دو منحنی را مشخص می‌کنیم.

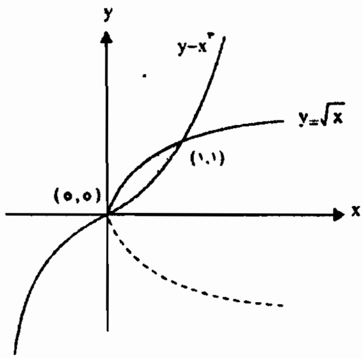
مختصات تلاقی از حل دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

از حل آن داریم $x = 0$ و $x = 1$ بنابراین کافی است که مساحت محصور بین دو منحنی را در بازه $[0,1]$ به دست آوریم از طرفی می‌توان به سادگی ملاحظه نمود که در فاصله $[0,1]$، $\sqrt{x} \geq x^3$ (مثلاً فرض کنید $x = \frac{1}{4}$) لذا:

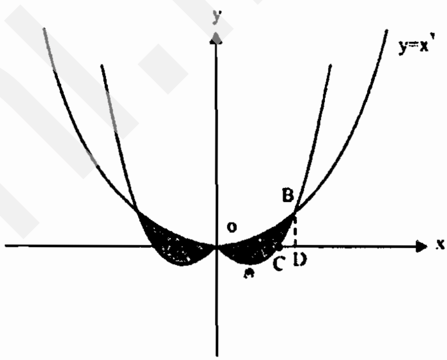
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^1 = \frac{5}{12}$$

نمودار توابع را در شکل ۱۰-۳ رسم کرده‌ایم:



شکل ۱۰-۳

۱۰-۱-۴ مثال. مساحت محصور به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^4 - x^2$ را محاسبه کنید (نمودار در شکل (۱۰-۴) رسم شده است).



شکل ۱۰-۴

حل. با توجه به تقارن مساحت قسمتی از ناحیه که در طرف راست محور yها است، نصف مساحت مورد نظر است. آن را A_1 می‌نامیم لذا $A = 2A_1$ از طرفی:

$$A_1 = A_{OBD} - A_{CBD} + A_{OAC}$$

از طرفی فرض کنید $x = 0$ لذا در $y = x^4 - x^2$ داریم:

$$x^4 - x^2 = 0 \quad , \quad x = 0 \; , \; x = 1 \qquad (\text{طول } c = 1)$$

برای محاسبه طول D دو نمودار را قطع می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 - x^2 \end{cases}$$

$$x^4 = 2x^2 \;\Rightarrow\; x = 0 \; , \; x = \sqrt{2} = x_D$$

بنابراین:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} (x^4 - x^2)\,dx + \int_0^1 (-x^4 + x^2)\,dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

$$A = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

۱۰-۱-۵ تمرین.

۱. سطح محصور به نمودار توابع $x = y^2$ و $x = 2y^2 - y - 2$ را محاسبه کنید.

۲. سطح محصور به نمودار توابع $x - y = 7$ و $2y^2 - y + 3 - x = 0$ را محاسبه کنید.

۳. سطح محصور به نمودار توابع $y = \cos x$ و $y = \sin x$ را در فاصله $0 \le x \le 2\pi$ محاسبه کنید.

۴. سطح محصور به نمودار توابع $y = x^2 - 2x$ و $y = 4 - x^2$ را محاسبه کنید.

۵. مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=0$، $x=2$ و منحنی‌های $y=2x-x^2$ و $y=2^x$.

۶. سطح محصور به نمودار توابع $x=1-3y^2$ و $x=+2y^2$ را محاسبه کنید.

۷. مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $x^2=4y$ و منحنی $y=\frac{8}{x^2+4}$.

۸. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2+y^2=3$ و محدود به سهمی‌های $y^2=2x$ و $x^2=2y$ می‌باشد، حساب کنید.

۹. مساحت ناحیه‌ای را حساب کنید که به خطوط $y=\cos x$ و $y=x+1$ و محور xها محدود است.

۱۰. مطلوبست محاسبه مساحت بین منحنی $y^2=x^3-x^2$ و $x=2$.

۱۱. مساحت بین منحنی‌های $y=16-x^2$ و $y=(x-4)^2$ و محور xها را حساب کنید.

۱۲. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $y=x^4-2x^3+x^2+3$ و محور xها که بین عرض‌های نقاط مینیمم $y(x)$ واقع است.

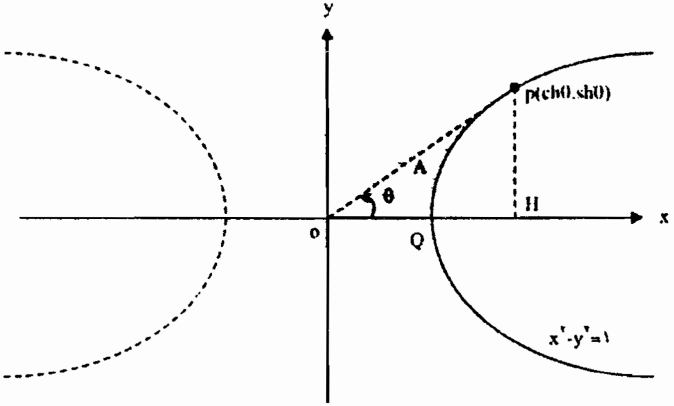
۱۳. مساحت محدود به نمودار توابع $x=2(y-1)^2$ و $(y-1)^2=x-1$ را محاسبه کنید.

۱۴. سطح محصور به نمودار $y=\operatorname{ch}x$ و خط $x=1$ و محور xها را حساب کنید.

۱۵. مساحت‌های دو ناحیه‌ای را که سهمی $y=\frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2+y^2=8$ تقسیم می‌کند محاسبه کنید.

۱۶. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند $(0<a<1)$. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که محدود به دو قرص می‌باشد.

۱۷. مساحت قطاع هذلولی POQ را در شکل زیر محاسبه کنید. $(A = ?)$



۱۸. اگر $f(x) = \alpha x$ و $g(x) = x^3$ $(\alpha > 0$ ثابت$)$ آنگاه مساحت سطح محصور به دو منحنی را حساب کنید.

۱۹. مساحت محدود به نمودار $x^2y + 4y - 12 = 0$ و محور مختصات و خط $x = 2$ را محاسبه کنید.

۲۰. سطح محصور به نمودار توابع $x + y = 2$، $y = x^2$ و $x = y^2$ را محاسبه کنید.

۱۰-۲ محاسبه مساحت وقتی که معادلات پارامتری منحنی معلوم باشد.

۱۰-۲-۱ تعریف. فرض کنید معادلات پارامتری منحنی c در دستگاه قائم به صورت $C:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ باشد. برای محاسبه ناحیه بین منحنی c و محور xها و دو خط $x = a$ و $x = b$ فرض می‌کنیم:

$$f(\beta) = b \quad , \quad f(\alpha) = a$$

اگر معادله صریح منحنی C به صورت $y=F(x)$ باشد و در $[a,b]$، $F(x)\geq 0$ مساحت سطح موردنظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b y\,dx$$

با تغییر از x به t داریم:

$$y=g(t)\quad,\quad dx=f'(t)dt\quad,\quad x=f(t)$$

بنابراین:

$$A=\left|\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt\right|$$

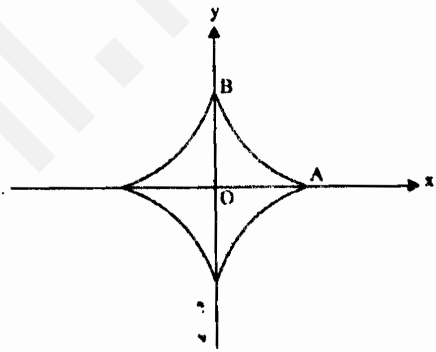
به علت تقارن رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$A=\left|\int_\alpha^\beta g'(t)f(t)dt\right|$$

۱۰-۲-۲ مثال. سطح محصور به وسیله آستروئید به معادلات پارامتری زیر را تعیین کنید.

$$C:\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\quad,\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

حل. با توجه به نمودار C (شکل ۱۰-۵) مساحت OAB را محاسبه و چهار برابر آن مساحت موردنظر است.



شکل ۱۰-۵

$$A=\left|4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot(\cos^3 t)'\,dt\right|$$

$$A=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}-3\sin^4 t\cos^2 t\, t^2\,dt\right|=\frac{3\pi}{8}$$

۱۰-۲-۳ تمرین. در تمرینات زیر سطح محصور به منحنی‌ها را محاسبه کنید.

۱.

$$-1\le t\le 1\quad,\quad C:\begin{cases}x=t^2-1\\ y=t^3-t\end{cases}$$

۲.

$$0\le t\le 2\pi\quad,\quad C:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\cos^2 t\end{cases}$$

۳. مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را محاسبه کنید.

۴. مساحت محدود به $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را محاسبه کنید.

۵. مساحت محدودبه یک قوس از سیکلوئید زیر را به دست آورید:

$$C:\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

۱۰-۳ مساحت مناطق قطبی

۱۰-۳-۱ تعریف. فرض کنید $r=f(\theta)$ معادله منحنی C در مختصات قطبی باشد و این تابع در بازه $[\alpha,\beta]$ پیوسته باشد. برای محاسبه مساحت سطح محصور به دو شعاع

حامل، $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ و قسمتی از منحنی نمایش تابع فوق یعنی شکل OAB به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

ناحیه موردنظر را به وسیله شعاع‌های حامل $\theta=\theta_0=\alpha$، $\theta=\theta_1$، ...، $\theta=\theta_n$ به n ناحیه جزء تقسیم می‌کنیم. زاویه بین $\theta=\theta_{i-1}$ و $\theta=\theta_i$ را با $\Delta\theta_i$ نشان می‌دهیم $(1\leq i\leq n)$. فرض کنید ξ_i یک زاویه اختیاری بین θ_{i-1} و θ_i باشد، مساحت ناحیه جزء محصور به دو منحنی و دو شعاع حامل $\theta=\theta_{i-1}$ و $\theta=\theta_i$ تقریباً برابر مساحت قطعه‌ای از دایره به مرکز O و شعاع $f(\xi_i)$ به زاویه مرکزی $\Delta\theta_i$، مساحت این قطعه از دایره مذکور برابر است با:

$$\Delta A_i=\frac{1}{2}\left[f(\xi_i)\right]^2\Delta\theta_i$$

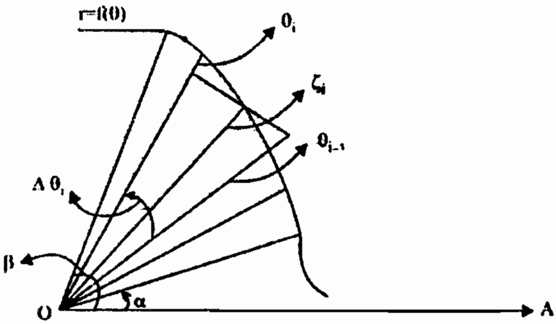
اگر این عمل را در هر یک از ناحیه‌های جزء تکرار کرده و با هم جمع کنیم در این صورت مساحت بین منحنی $r=f(\theta)$ در فاصله $[\alpha,\beta]$ به طور تقریبی برابر مجموع $A\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)\right]^2\Delta\theta_i$ خواهد بود. و به طور دقیق:

$$A=\lim_{\max\Delta\theta_i\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)\right]^2\Delta\theta_i$$

مطابق تعریف انتگرال معیّن می‌توان نوشت:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta$$

شکل ۱۰-۶ را ملاحظه کنید:



شکل ۱۰-۶

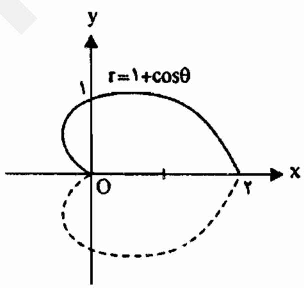
۱۰-۳-۲ تعیین مساحت بین دو منحنی. مساحت محدود به منحنی نمودارهای $r_1 = f(\theta)$ و $r_2 = f(\theta)$ در فاصله $[\alpha,\beta]$ از دستور $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_1^2 - r_2^2)\,d\theta \;,\; (r_1 \ge r_2)$ محاسبه می‌شود.

۱۰-۳-۳ مثال. مساحت محصور به دلنمای $r = 1+\cos\theta$ را به دست آورید.

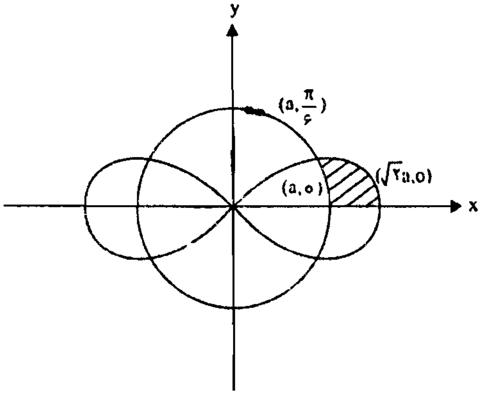
حل. با توجه به آن که محور xها محور تقارن تابع $r = 1+\cos\theta$ است، بنابراین:

$$A = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\theta = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$A = \frac{3}{2}\pi$$



۱۰-۳-۴ تمرین. مطلوبست محاسبهٔ مساحت ناحیه واقع در داخل پروانه $r^{2} = 2a^{2}\cos 2\theta$ و خارج دایره $r = a$ (مطابق شکل زیر).



۱۰-۳-۵ تمرین.

۱. مساحت ناحیه‌ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس $r = a\theta$ واقع است پیدا کنید $(a < 0)$.

۲. مطلوبست محاسبه سطح محدود به منحنی $r = \sin 2\theta$.

۳. مساحت ناحیه داخل دایره $r = 3\cos\theta$ و خارج دلنمای $r = 1 + \cos\theta$ را محاسبه کنید.

۴. مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه محصور بین $r = e^{2\theta}$ و خطوط $\theta = 0$ و $\theta = 2\pi$.

۵. مطلوبست محاسبه مساحت داخل دایره $r = 1$ و خارج دلنمای $r = 1 - \cos\theta$.

۶. مطلوبست مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی $r = \cos 2\theta$ و $r = \sin 2\theta$.

۷. مساحت ناحیه مشترک بین منحنی‌های $r = 6\cos\theta$ و $r = 6\sin\theta$ را محاسبه کنید.

۸. مساحت ناحیه داخل $r^{2} = a^{2}\cos 2\theta$ را به دست آورید.

۹. مساحت ناحیه $r=1+\sin\theta$ را محاسبه کنید.

۱۰. مساحت محدود به درون $r^2=\sin 2\theta$ و دایره $r=\sqrt{2}\sin\theta$ را محاسبه کنید.

۱۰-۴ طول کمان یک منحنی

۱۰-۴-۱ تعریف. تابع f را روی فاصله I هموار می‌نامیم هرگاه f' روی I پیوسته باشد.

اگر تابع f روی فاصله بسته $[a,b]$ هموار باشد، ممکن است اندازه‌ای برای طول منحنی نمودار f بین $A\big(a\,,\,f(a)\big)$ و $B\big(b\,,\,f(b)\big)$ پیدا کرد.

۱۰-۴-۲ محاسبه طول منحنی در مختصات دکارتی. فرض کنید تابع $y=f(x)$ در $[a,b]$ هموار باشد و کمان $\widehat{AB}$ از منحنی نمایش $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ باشد. می‌خواهیم طول کمان $\widehat{AB}=S$ را محاسبه کنیم.

بدین منظور کمان $\widehat{AB}$ را به وسیله نقاط $A, M_1, \ldots, M_n=B$ به n کمان جزء $\widehat{AM_1}$، $\widehat{M_1M_2}$، ... و $\widehat{M_{n-1}B}$ افراز می‌کنیم (شکل ۱۰-۸).

بنا به تعریف طول کمان $\widehat{AB}$ عبارت است از حد طول خط شکستهٔ $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$ وقتی که طول بزرگترین ضلع از این خط شکسته به صفر میل کند. طول وتر $M_{i-1}M_i$ را با ΔS_i نمایش دهید. بنابراین $\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$، مطابق تعریف داریم:

$$\Delta S_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}\cdot\Delta x_i$$

تابع f در بازهٔ $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ در شرایط قضیه میانگین در مشتق صدق می‌کند، لذا نقطه‌ای نظیر ξ_i در $(x_{i-1}\,,\,x_i)$ وجود دارد. به طوری که:

$$\Delta y_i=\Delta x_i\, f(\xi_i)$$

بنابراین:

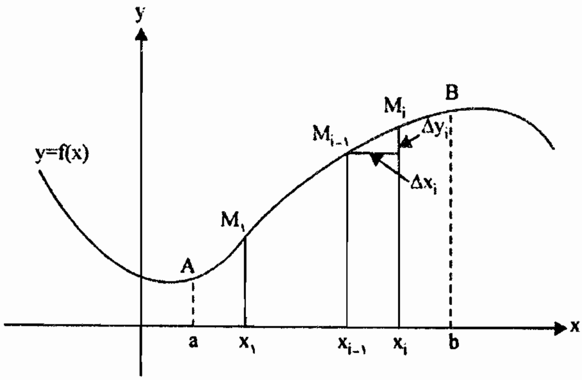
$$\Delta S_i=\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\cdot\Delta x_i$$

اگر طول کمان $\overline{AB}$ را با S نمایش دهیم داریم:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

مطابق تعریف انتگرال معین، محاسبهٔ S انجام می‌گیرد:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



شکل ۱۰-۸

۱۰-۴-۳ مثال. طول کمانی از منحنی نمایش $y = -\mathrm{Ln}(1 - x^2)$ را که بین دو خط $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ قرار دارد حساب کنید.

حل. به وضوح $y' = \frac{2x}{1 - x^2}$ در $[0, \frac{1}{2}]$ پیوسته است.

بنابراین:

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \mathrm{Ln}\, 3 - \frac{1}{2}$$

۱۰-۴-۴ محاسبه طول کمان وقتی که معادلات منحنی به صورت پارامتری بیان می‌شود.

فرض کنید معادلات پارامتری منحنی C به صورت $C:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ در دست باشد.

فرض کنید f و g در بازه $[\alpha,\beta]$ مشتقات پیوسته داشته باشند و به ازای $t = \alpha$ نقطهٔ A و به ازای $t = \beta$ نقطه B از منحنی به دست آید. برای محاسبه طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ کافی است فرض کنیم $y = F(x)$ معادله صریح منحنی است. در این صورت داریم:

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad , \quad dx = f'(t)\,dt$$

بنابراین طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ در فاصله $\alpha \le t \le \beta$ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^{۲}(t) + g'^{۲}(t)}\, dt$$

۱۰-۴-۵ تذکر. رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^{۲} + (dy)^{۲}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^{۲}}\, dx$$

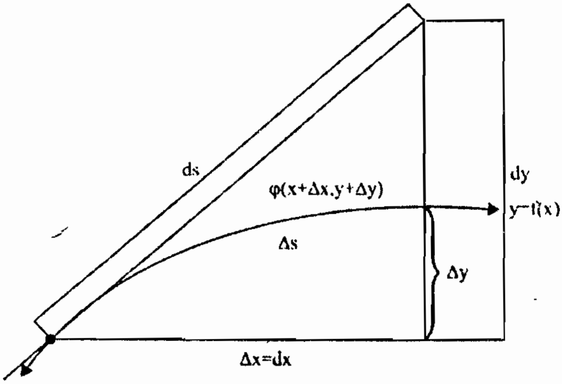
حال با مشتق‌گیری از طرفین تساوی بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^{۲}} \cdot dx$$

در نتیجه اگر طرفین رابطه فوق را به توان ۲ برسانیم، رابطه طول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(dS)^{۲} = (dx)^{۲} + (dy)^{۲}$$

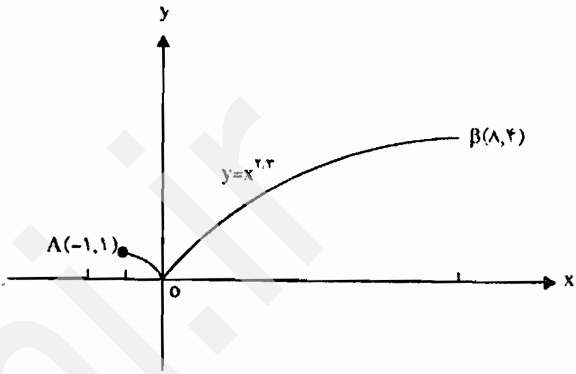
تعبیر هندسی رابطه $(dS)^{۲} = (dx)^{۲} + (dy)^{۲}$ در شکل ۱۰-۹ نمایش داده شده است.



شکل ۱۰-۹

۱۰-۴-۶ مثال. طول منحنی $y=x^{\frac{۲}{۳}}$ را بین $x=-۱$ و $x=۸$ محاسبه کنید.

حل. نمودار $y^۳=x^۲$ در شکل زیر رسم شده است:



با توجه به $\frac{dy}{dx}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$ ملاحظه می‌شود تابع $y=f(x)$ در $x=۰$ هموار نیست. از طرف دیگر $۰\in[-۱,۸]$ و $\frac{dx}{dy}=-\frac{۳}{۲}\sqrt{y}$ لذا در محاسبه طول S، dx را محاسبه و در این صورت داریم:

$$(dS)^۲=(dx)^۲+(dy)^۲=(-\frac{۳}{۲}\sqrt{y}\,dy)^۲+(dy)^۲$$

$$(dS)^۲ = (dy)^۲ (۱ + \frac{۹}{۴} y)$$

$$dS = \sqrt{۱ + \frac{۹}{۴} y}\, dy$$

حال فرض کنید $S = S_۱ + S_۲$ که در آن:

$$S_۱ = \int_۰^۱ \sqrt{\frac{۹}{۴} y + ۱}\, dy$$

$$S_۲ = \int_۰^۴ \sqrt{\frac{۹}{۴} y + ۱}\, dy$$

$S_۱$ و $S_۲$ را محاسبه کنید و ثابت کنید $S = ۱۰/۵$.

۱۰-۴-۷ تذکر. در مثال ۱۰-۴-۶ ملاحظه کنید که منحنی در $x = ۰$ تیزی دارد لذا قضیه میانگین در بازهٔ $[-۱,۸]$ برقرار نبود لذا بازهٔ فوق را به دو قسمت افراز نمودیم و در هر بازه طول را محاسبه نمودیم. بنابراین در این نوع مسائل می‌توان به همین روش اقدام به محاسبه طول منحنی نمود.

۱۰-۴-۸ محاسبه طول کمان در مختصات قطبی. با توجه به دستور $(dS)^۲ = (dx)^۲ + (dy)^۲$ و با توجه به روابط $x = f(r,\theta) = r\cos\theta$ و $y = g(r,\theta) = r\sin\theta$ در مختصات قطبی داریم:

$$(dy)^۲ = (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^۲ \quad \text{و} \quad (dx)^۲ = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^۲$$

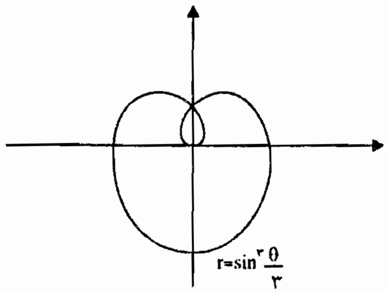
پس:

$$(dS)^۲ = (dr)^۲ + r^۲ (d\theta)^۲$$

بنابراین:

$$dS = \sqrt{(dr)^۲ + r^۲ (d\theta)^۲}$$

۱۰-۴-۹ مثال. طول منحنی نمایش تابع $r = \sin^{۳}\frac{\theta}{۳}$ را حساب کنید.



حل. فاصله تغییرات θ بازه $[۰,۳\pi]$ است و تابع r و مشتق آن در بازهٔ فوق پیوسته است بنابراین:

$$S = \int_{۰}^{۳\pi} \sqrt{(dr)^{۲} + r^{۲}(d\theta)^{۲}} = \int_{۰}^{۳\pi} \sin^{۲}\frac{\theta}{۳}d\theta = \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۰-۴-۱۰ مثال. طول دلوار $r = ۱+\cos\theta$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به آن که منحنی نمایش r نسبت به محور xها متقارن است لذا:

$$S = ۲\int_{۰}^{\pi} \sqrt{(dr)^{۲} + r^{۲}(d\theta)^{۲}}$$

و:

$$S = ۲\int_{۰}^{\pi} ۲\cos\frac{\theta}{۲}d\theta = ۸$$

۱۰-۴-۱۱ تمرین.

۱. طول منحنی $r = a\sin^{۳}\frac{\theta}{۳}$ را در فاصلهٔ $۰ \le \theta \le \pi$ محاسبه کنید.

۲. مطلوبست طول قوس منحنی $r = ۲a\cos^{۲}\theta$ در فاصلهٔ $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$.

۳. طول دلوار $r = a(۱-\cos\theta)$ را محاسبه نمایید.

۴. طول منحنی‌های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $x = \cos 2t \quad , \quad y = \sin 2t \quad , \quad 0 \le t \le 2$

ب) $x = a\cos^3\theta \quad , \quad y = a\sin^3\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

۵. طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بین نقاط $(0,0)$ و $(4,8)$ واقع است محاسبه کنید.

۶. طول منحنی $y = Ln|\cos x|$ را در فاصله $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.

۷. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{2}x^2$ از نقطه $A(0,0)$ تا نقطه $B(1,\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۸. طول قوس منحنی $y^3 = 8x^2$ از نقطه $(1,2)$ تا نقطه $(27,18)$ را به دست آورید.

۹. طول قوس منحنی $6xy = y^4 + 3$ را در فاصله $1 \le y \le 2$ به دست آورید.

۱۰. طول قوس قسمتی از منحنی $9y^2 = 4(1+x^2)^3$ که در ربع اول از $x = 0$ تا $x = 2\sqrt{2}$ واقع است تعیین کنید.

۱۱. طول قوس منحنی C را به دست آورید:

$$C:\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 4$$

۱۲. طول قوس منحنی C را به دست آورید:

$$C:\begin{cases} x = Ln\sqrt{1+t^2} \\ y = tg^{-1} t \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

۱۳. طول قوس $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \le x \le 3$ محاسبه کنید.

۱۴. طول قوس $y = Ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ را در فاصله $2 \le x \le 3$ تعیین کنید.

۱۵. طول قوس منحنی $x=\frac{۱}{۳}(۲t+۳)^{\frac{۳}{۲}}$، $y=\frac{۱}{۳}t^{۲}+t$ را در فاصله $۰\leq t\leq ۳$ محاسبه کنید.

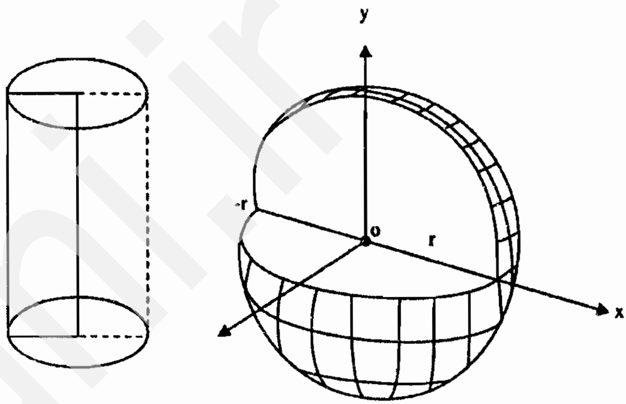
۱۶. طول منحنی $y=x^{۴}+\frac{۱}{۳۲x^{۲}}$ را در فاصله $۱\leq x\leq ۱۰$ محاسبه کنید.

۱۰-۵ محاسبه حجم جسم دوّار

یکی از کاربردهای انتگرال معین محاسبه حجم جسم دوّار است. جسم دوّار، جسمی است که از دوران ناحیه‌ای از صفحه حول یک محور نظیر $y=۰$ یا $x=۰$ در صفحه xy پدید می‌آید (ناحیه موردنظر عموماً محور $y=۰$ یا $x=۰$ را قطع نمی‌کند، می‌تواند بر آن مماس باشد).

اغلب با جسم‌های دوّار آشنا هستیم، مثلاً از دوران نیم‌دایره به شعاع r حول قطر آن کره‌ای به دست می‌آید که حجم آن برابر $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است.

یا مثلاً از دوران یک مستطیل حول عرض یا طول آن استوانه پدید می‌آید. شکل‌های ۱۰-۶ را ملاحظه کنید.



شکل ۱۰-۶

همانطور که در مثال‌های بالا بیان شد محاسبه حجم بعضی از اجسام به سادگی انجام می‌شود. در این بخش نواحی ناشناخته‌ای نظیر R را در نظر می‌گیریم و آن را حول محور موازی با محورهای مختصات دوران می‌دهیم و حجم حادث را محاسبه می‌کنیم (اگر محور موازی محورهای مختصات نباشد مبدأ مختصات را به نقطه‌ای منتقل می‌کنیم تا محورها، موازی محور دوران باشد).

حال دو روش زیر را برای محاسبهٔ حجم جسم دوّار در نظر می‌گیریم:

۱۰-۵-۱ روش برشی. فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و R ناحیه محدود به نمودار $y=f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ باشد. ناحیه R را حول خط $y=\rho$ دوران می‌دهیم، می‌خواهیم حجم جسم حاصل را محاسبه کنیم. بدین منظور بازهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی $b=x_n, \dots, x_2, x_1, x_0=a$ افراز می‌کنیم، شکل (۱۰-۱۱). حجم قسمتی از جسم دوّار که در بازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ واقع است را ΔV_k می‌نامیم و آن را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\Delta V_k = \pi\left(f(t_k)-\rho\right)^2 \cdot \Delta x_k$$

بنابراین اگر حجم جسم دوّار را V بنامیم، داریم:

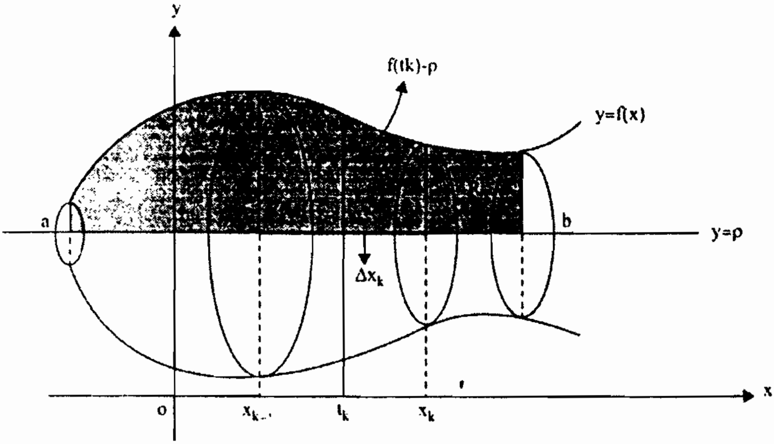
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(t_k)-\rho\right)^2 \cdot \Delta x_k$$

بنابراین:

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi\left(f(t_k)-\rho\right)^2 \cdot \Delta x_k$$

مطابق تعریف انتگرال معین می‌توان نوشت:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)-\rho\right)^2 dx$$



شکل ۱۰-۱۱

۱۰-۵-۲ نتیجه.

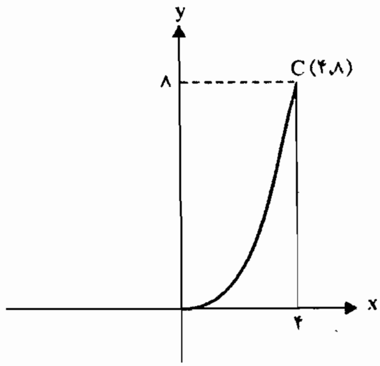
۱. اگر ناحیه R حول محور xها $(y=0)$ دوران کند، حجم جسم حاصل از دستور $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ محاسبه می‌شود.

۲. اگر ناحیه R ناحیه محدود به نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$، $(f\geq g)$ در فاصله $[a,b]$ باشد، در این صورت اگر آن را حول محور xها دوران دهیم، حجم جسم حاصل از دستور $V=\pi\int_a^b\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$ محاسبه می‌شود.

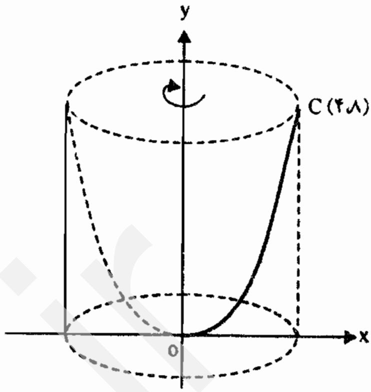
۳. اگر R ناحیه محدود به $x=\varphi(y)$ در فاصله $c\leq y\leq d$ باشد، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه R حول خط $x=\alpha$ را از دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$V=\pi\int_c^d(\varphi(y)-\alpha)^2\,dy$$

۱۰-۵-۳ مثال. حجم جسم دوّاری را پیدا کنید که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y^2=x^3$، محور xها و خطوط $x=0$ و $x=4$، حول محور yها پدید آید.



حل. ناحیه R در شکل زیر نشان داده شده است:

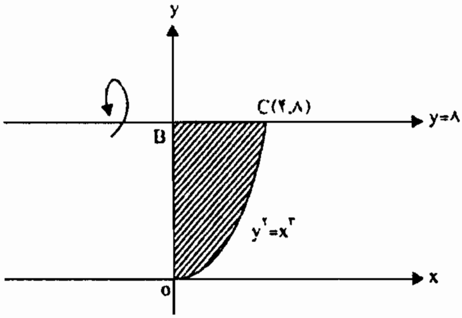


$$V = \pi \int_{۰}^{۸} \left(۴^{۲} - \left(y^{\frac{۲}{۳}} \right)^{۲} \right) dy = \pi \int_{۰}^{۸} (۱۶ - y^{\frac{۴}{۳}}) dy$$

$$V = \frac{۵۱۲}{۷} \pi$$

۱۰-۵-۴ تمرین.

۱. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.



۲. مطلوبست حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = 4x$ و خط $y = x$ حول خط $x = 4$.

۳. حجم مخروط مستدیری به ارتفاع h و شعاع قاعده a را تعیین کنید.

۴. قطر یک مخزن نفت کروی‌شکل ۶۰ سانتی‌متر است. اگر عمق موجود در مخزن ۲۵ سانتی‌متر باشد، مقدار نفت موجود در مخزن چقدر است؟

۵. مطلوبست حجم حادث از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = x$ و محور yها و خط $y = 1$، حول خط $y = 2$.

۶. حجم حادث از دوران ناحیه محدود به $x = 2y - y^2$ حول محور yها را تعیین کنید.

۷. ناحیه A محصور به منحنی $y = x^2$، $y = 1$، $y = 4$، $x = 0$ حول محور xها دوران می‌کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

۸. منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟

۹. حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $y = x^2$، $y^2 = 8x$ حول محور xها را محاسبه کنید.

۱۰. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

۱۱. ناحیه واقع بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور عرض‌ها و خط $y = ۱$ را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

۱۲. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{۱}{۴}x^۲ + ۲$ و خط $۵x - ۸y + ۱۴ = ۰$ حول محور xها را به دست آورید.

۱۳. طاق $y = \sin x$، $۰ \le x \le \pi$ حول خط $y = C$ دوران می‌کند و جسمی را به وجود می‌آورد. مقدار c را طوری بیابید که حجم جسم به وجود آمده مینیمم باشد.

۱۰-۵-۵ روش لایه‌های استوانه‌ای. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد و R ناحیه محدود به منحنی تابع $y = f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ باشد. حال ناحیه R را حول خط $x = ۰$ دوران می‌دهیم، حجم جسم پدید آمده را محاسبه می‌کنیم. بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

نقطه‌ای مانند x در یک زیربازه دلخواه در نظر بگیرید. مستطیلی به عرض Δx و طول $f(x)$ رسم می‌کنیم. از دوران این مستطیل حول محور yها لایه استوانه‌ای شکل تولید می‌شود، فرض کنید $r_۱$ شعاع داخلی و $r_۲$ شعاع خارجی آن باشد و ΔV حجم آن فرض شود. قاعدهٔ این لایهٔ استوانه‌ای (شبیه قوطی کنسرو) متشکل است از یک حلقه محدود بین دو دایره هم‌مرکز. مساحت این حلقه برابر است با:

$$\Delta A = \pi(r_۲{}^۲ - r_۱{}^۲) = ۲\pi(\frac{r_۱ + r_۲}{۲})(r_۲ - r_۱) = ۲\pi r\Delta x$$

که در آن $r = \frac{r_۱ + r_۲}{۲}$ عبارتست از شعاع دایره‌ای که در وسط دایره خارجی و دایره داخلی واقع است و $۲\pi r$ محیط دایره فوق است (شکل ۱۰-۱۲) را ملاحظه کنید. ΔV حجم این پوسته استوانه‌ای شکل عبارت است از:

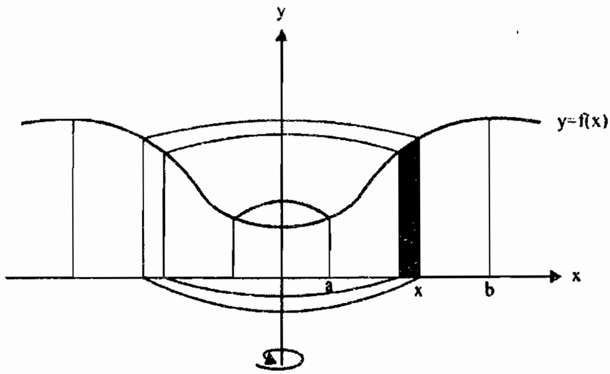
$$\Delta V = f(x)\Delta A = ۲\pi r f(x)\Delta x$$

بنابراین حجم تقریبی جسم دوار (یعنی V) برابر است با:

$$V \approx \sum_a^b \Delta V = \sum_a^b ۲\pi r f(x)\Delta x$$

بنابراین:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} 2\pi x f(x)\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

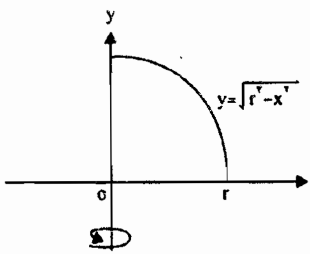


شکل ۱۰-۱۲

۱۰-۵-۶ مثال. با استفاده از روش لایه‌های استوانه‌ای نشان دهید که حجم کره به شعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ است.

حل. دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را در ربع اول در نظر بگیرید و ناحیه محدود به آن را در ربع اول حول محور yها دوران دهید. در این صورت حجم کره، دو برابر حجم حاصل است لذا:

$$V = 2\int_0^r 2\pi x \sqrt{r^2 - x^2}\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$

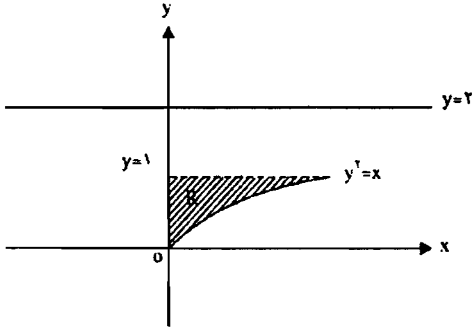


۱۰-۵-۷ مثال. مطلوبست حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی $y^۲ = x$ و خطوط $x = ۰$، $y = ۱$ حول خط $y = ۲$.

حل. چون محور دوران موازی محور xها است بنابراین:

$$V = ۲\pi \int_۰^۱ (۲-y)\,y^۲\,dy$$

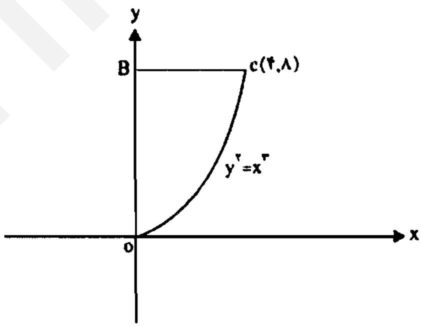
$$V = ۲\pi \left(\frac{۲}{۳}y^۳ - \frac{۱}{۴}y^۴\right)\Big]_۰^۱ = \frac{۶}{۵}\pi$$



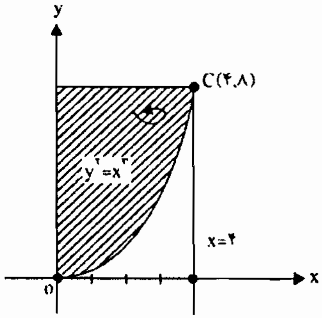
۱۰-۵-۸ تمرین.

۱. در یک جسم کروی‌شکل به شعاع ۵ سانتی‌متر، حفره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر ایجاد می‌کنیم. محور حفره یک قطر کره است. حجم قسمت باقیمانده جسم را به دست آورید.

۲. مطلوبست حجم حادث از دوران ناحیه OBC محصور به منحنی $y^۲ = x^۳$ محور xها و خطوط $y = ۰$، $y = ۸$، حول محور xها (شکل زیر).



۳. مطلوبست حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی $y^2 = x^3$، خط $x = 4$ و محور xها حول خط AC (مطابق شکل زیر).



۴. مطلوبست حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $y^2 = x$ و $y = x^2$ حول خط $x = -2$.

۵. ناحیه‌ای که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود و در ربع اول است، حول محور yها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

۶. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ حول خط $x = 2$ ایجاد می‌شود.

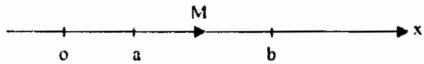
۷. یک دیسک به شعاع a و به مرکز $(b,0)$ که $b > a > 0$ حول محور yها دوران می‌کند و یک چنبره تولید می‌کند. حجم آن را تعیین کنید.

۸. ناحیه مثلثی $y = x$، $y = 0$، $x = a > 0$ حول خط $x = b > a$ دوران می‌کند و جسمی پدید می‌آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

۱۰-۶ محاسبه کار

فرض کنید نقطه مادی M روی خط $x'x$ تحت تأثیر نیروی F که در امتداد همین خط است از نقطه a تا نقطه b حرکت می‌کند. اگر نیروی F ثابت باشد، بنا به تعریف کار انجام شده توسط نیروی F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W = (b-a)F$$



حال فرض می‌کنیم نیروی F تابعی پیوسته از موضع M یعنی x باشد. می‌خواهیم کار انجام شده توسط نیروی F را با انتگرال معین نمایش دهیم. لذا فرض می‌کنیم بازهٔ $[a,b]$ به وسیله نقاط $a = x_\circ$ و $x_۱ , \dots , x_n = b$ افراز شود. و ξ_i نقطه‌ای دلخواه در بازهٔ $[x_{i-۱} , x_i]$ باشد. کار انجام شده در بازهٔ $[x_{i-۱} , x_i]$ در اثر نیروی $F(\xi_i)$ به صورت:

$$\Delta W_i = (x_i - x_{i-۱}) F(\xi_i) = F(\xi_i) \Delta x_i$$

بیان می‌شود. بنابراین مقدار تقریبی کل کار انجام شده برای موضع M از نقطه $x_\circ = a$ تا $x_n = b$ به صورت $W \approx \sum_{i=۱}^{n} F(\xi_i) \Delta x_i$ و به طور دقیق به صورت $W = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=۱}^{n} F(\xi_i) \Delta x_i$ محاسبه می‌شود لذا با توجه به تعریف انتگرال معین کار انجام شده توسط موضع M تحت نیروی F در بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

۱۰-۶-۱ مثال. بنا به قانون هوک kx کیلوگرم نیرو لازم است برای این که فنری را به اندازهٔ x متر بکشد که در آن k ضریب ثابت کشش فنر است. مقدار کار انجام شده را پیدا کنید به طوری که فنری با ضریب کشش ۸۰ به اندازه ۱۰ سانتی‌متر کشیده شود.

حل. بازه $[\circ, ۰/۱]$ $(a = \circ$ و $b = ۰/۱)$ را در نظر بگیرید. از طرفی $F(x) = ۸۰x$، بنابراین:

$$W = \int_\circ^{۰/۱} ۸۰x \, dx = ۰/۴ \text{ کیلوگرم متر}$$

۱۰-۶-۲ تمرین. هرگاه جسمی روی خط مستقیم تحت تأثیر نیروی پیوسته $F(x) = ۳x^۲ + ۵$ از نقطه $x = ۱$ تا $x = ۳$ قرار گیرد، کار انجام شده توسط آن را محاسبه کنید.

۱۰-۷ گشتاورها و مرکز جرم

۱۰-۷-۱ تعریف. فرض کنید ذره‌ای به جرم m روی میله افقی که از وزن و ضخامت آن صرف‌نظر می‌شود، قرار گرفته است. اگر میله را بر محور x منطبق بگیریم و فاصله ذره را از مبدأ x فرض کنیم، M گشتاور جرم ذره نسبت به مبدأ را برابر mx تعریف بنابراین: (شکل ۱۰-۱۳)

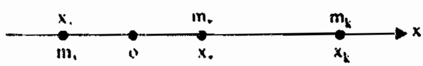
$$M = mx$$

شکل ۱۰-۱۳

۱۰-۷-۲ محاسبه جرم. فرض کنید n ذره به جرم‌های $m_۱$، $m_۲$،... و m_n روی یک میله افقی که از وزن و ضخامت آن صرف‌نظر می‌شود واقع باشند. اگر این میله بر محور x قرار گیرد و ذرهٔ kام $k = ۱,۲,\ldots,n$ در فاصله جهت‌دار x_k از مبدأ قرار داشته باشد. جرم کل دستگاه برابر $m = \sum_{k=۱}^{n} m_k$.

گشتاور جرم این دستگاه را برابر مجموع گشتاورهای جرم همه ذرات تعریف می‌کنیم، لذا اگر M گشتاور جرم دستگاه نسبت به مبدأ باشد، داریم: (شکل ۱۰-۱٤).

$$m = \sum_{k=۱}^{n} m_k x_k$$



شکل ۱۰-۱۴

۱۰-۷-۳ تعریف (مرکز جرم). حال می‌خواهیم نقطه‌ای نظیر $\bar{x}$ را روی محور x در شکل (۱۴-۱۱) طوری بیابیم که اگر کل جرم دستگاه درآن نقطه متمرکز شود، گشتاور جرم آن نسبت به مبدأ برابر گشتاور جرم دستگاه نسبت به مبدأ باشد. در واقع:

$$\bar{x}\sum_{k=۱}^{n} m_k = \sum_{k=۱}^{n} m_k x_k$$

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=۱}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=۱}^{n} m_k} = \frac{M}{m}$$

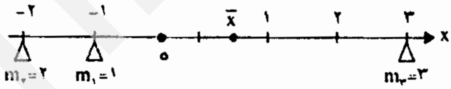
مطابق تعریف نقطه $\bar{x}$ را مرکز جرم دستگاه می‌نامیم. مرکز جرم دستگاه، نقطه‌ای است که جسم در آن نقطه در حال تعادل است (مرکز ثقل دستگاه).

۱۰-۷-۴ مثال. فرض کنید سه ذره به جرم‌های ۱، ۲، ۳ کیلوگرم بر محور x به ترتیب در نقاطی به طول ۱-، ۲-، ۳ برحسب متر قرار دارند، مرکز جرم این دستگاه را به دست آورید.

حل.

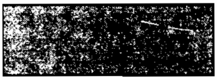
$$\bar{x} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳}$$

$$\bar{x} = \frac{-۱-۴+۹}{۱+۲+۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$



۱۰-۷-۵ تعریف (چگالی خطی). جرم در واحد طول را چگالی خطی می‌نامیم و آن را با نماد ρ نمایش می‌دهیم، اگر جرم میله با طول آن نسبت مستقیم داشته باشد میله را همگن، در غیر آن صورت آن را ناهمگن می‌نامیم.

میلهٔ ناهمگن



میلهٔ همگن

۱۰-۷-۶ تذکر. فرض کنید میله نازکی به طول L دارای چگالی خطی ثابت باشد (همگن) در این صورت جرم میله برابر است با $m = \rho L$.

یا اگر قسمت کوچکی از میله به طول Δx_i را در نظر بگیریم، جرم این قسمت برابر است با $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta x_i$ (بدیهی است اگر میله همگن نباشد در این صورت ρ تابعی برحسب x است).

۱۰-۷-۷ محاسبه جرم میله. میله به طول L را در نظر بگیرید (فرض کنید میله ناهمگن باشد و در نقطه x، $\rho(x)$ چگالی میله فرض شود). آن را بر روی محور xها طوری قرار می‌دهیم که ابتدای میله به نقطه O منطبق شود، فرض کنید $\rho(x)$ بر $[0, L]$ پیوسته باشد.

حال بازه $[0, L]$ را به n قسمت $x_0 = 0\ , x_1\ , \dots\ , x_n = L$ افراز کنید، فرض کنید t_k نقطه‌ای دلخواه در بازه $[x_{k-1}\ , x_k]$ باشد. اگر Δm_k جرم میله در این بازه باشد، داریم:

$$\Delta m_k = \rho(t_k)\Delta x_k$$

لذا جرم کل میله به طور تقریبی برابر است با:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(t_k)\Delta x_k$$

بنابراین:

$$m = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho(t_k)\Delta x_k = \int_0^L \rho(x)dx$$

۱۰–۷–۸ تذکر. به سادگی ثابت می‌شود که گشتاور جرم میله نسبت به مبدأ برابر است با:

$$M = \int_{\circ}^{L} x\rho(x)dx$$

بنابراین با توجه به ۱۰–۷–۷ و ۱۰–۷–۸ مرکز جرم میله به طول L به صورت

$\bar{x} = \dfrac{\int_{\circ}^{L} x\rho(x)dx}{\int_{\circ}^{L}\rho(x)dx}$ تعریف می‌شود.

۱۰–۷–۹ مثال. چگالی میله‌ای به طول ۳ متر (از ضخامت آن صرف‌نظر می‌کنیم) در هر نقطه به صورت $\rho(x) = ۱ + ۲x$ است. جرم کل، گشتاور و مرکز جرم آن را تعیین کنید.

$$m = \int_{\circ}^{۳}\rho(x)dx = \int_{\circ}^{۳}(۱+۲x)dx = ۱۲ \text{ kg}$$

$$M = \int_{\circ}^{۳} x(۱+۲x)dx = ۲۲/۵ \text{ kgm}$$

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{۱۵}{۸} \text{ m}$$

۱۰–۷–۱۰ مرکز ناحیه‌ای. فرض کنید R ناحیه‌ای مسطح در صفحه xoy باشد. می‌خواهیم مرکز جرم این ناحیه را در صفحه مشخص کنیم، بدیهی است مرکز جرم نقطه‌ای است نظیر $C(\bar{x},\bar{y})$ که در هر صورت $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مختصات مرکز ثقل (مرکز ناحیه‌ای) R را معلوم می‌کند.

فرض کنید n ذره به جرم‌های $m_۱$، $m_۲$، ... و m_n به ترتیب در نقاط $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$، ... و (x_n,y_n) در صفحه xy قرار دارند. می‌خواهیم مرکز جرم این دستگاه را تعیین کنیم (از وزن و ضخامت ذرات صرف‌نظر می‌کنیم). مرکز جرم این دستگاه نقطه‌ای است که در آن صفحه در حال تعادل است. اگر ذرهٔ k به جرم m_k در نقطه

(x_k, y_k) قرار داشته باشد، فاصله آن تا محور yها برابر x_k و تا محور xها برابر y_k است، لذا گشتاور جرم این ذره نسبت به محور yها و محور xها به ترتیب برابر است با:

$$M'_x = m_k y_k \quad , \quad M'_y = m_k x_k$$

بنابراین اگر M_y گشتاور n ذرهٔ نسبت به محور yها و M_x گشتاور n ذره نسبت به محور xها باشند، داریم:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \quad , \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$$

بنابراین مرکز جرم به صورت $(\bar{x} = \frac{M_y}{m} \ , \ \bar{y} = \frac{M_x}{m})$ بیان می‌شوند.

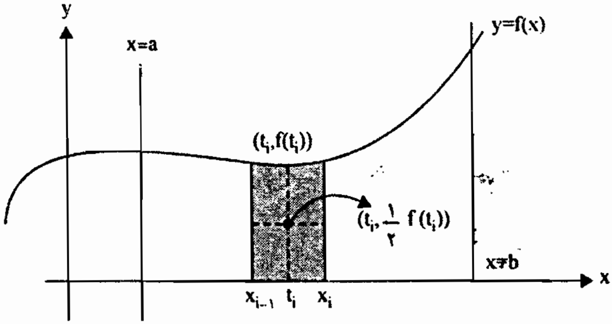
۱۰-۷-۱۱ تذکر. یک ناحیه مسطح در صفحه را ورقه خواهیم نامید. فرض کنید A سطح ورقه L و $\sigma(x)$ چگالی سطح باشد. در این صورت جرم ورقه به صورت $m = \sigma(x)A$ تعریف می‌شود. در این بخش فرض می‌کنیم چگالی سطحی یک ورقه ثابت است (در واقع ورقه را همگن فرض می‌کنیم)، لذا داریم $m = \sigma \cdot A$.

۱۰-۷-۱۲ محاسبه مرکز ناحیه‌ای. فرض کنید L ورقه همگن با چگالی سطحی ثابت σ که به وسیله منحنی $y = f(x)$، محور xها و خطوط $x = a$، $x = b$ محصور شده باشد و f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

مطابق شکل ۱۰-۱۵ بازهٔ $[a,b]$ را به n نقطه $x_0 = a$ و $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ افراز می‌کنیم. فرض کنید t_i نقطه‌ای میانی در $[x_{i-1}, x_i]$ باشد لذا در هر زیربازه یک ورقه مستطیل‌شکل به عرض Δx_i و به طول $f(t_i)$ با چگالی سطحی k و مرکز جرم $\left(t_i , \frac{1}{2} f(t_i)\right)$ داریم. مساحت ورقه مستطیلی برابر با $f(t_i)\Delta x_i$ است. بنابراین جرم

ورقه مستطیلی عبارت است از $\Delta m_i = \sigma f(t_i)\Delta x_i$. و یک اندازه تقریبی برای جرم ورقه به صورت زیر است:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho f(t_i)\Delta x_i$$



شکل ۱۰-۱۵

از طرفی گشتاور جرم نسبت به یک محور برابر است با ضرب جرم در فاصله مرکز جرم تا آن محور. اگر گشتاور جرم ورقه مستطیلی واقع در بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ نسبت به محور yها با نماد ΔM_{y_i} نشان دهیم، داریم:

$$\Delta M_{y_i} = k\, t_i\, f(t_i)\Delta x_i$$

و یک اندازه تقریبی برای این گشتاور جرم به صورت:

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} k\, t_i\, f(t_i)\Delta x_i$$

بنابراین:

$$M_y = \lim \sum_{i=1}^{n} k\, t_i\, f(t_i)\Delta x_i = \int_a^b k\, x f(x)\,dx$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد (ثابت کنید):

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b k f^2(x)\,dx$$

۱۰-۷-۱۳ نتیجه. فرض کنید L ورقه همگن با چگالی سطحی ثابت ρ و محصور به $y=f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ باشد، و تابع f در $[a,b]$ نامنفی و پیوسته باشد. در این صورت اگر $(\bar{x}, \bar{y})$ مرکز ناحیه‌ای برای ورقه L فرض شود داریم:

$$\bar{x}=\frac{k\int_a^b x f(x)dx}{k\int_a^b f(x)dx} \quad , \quad \bar{y}=\frac{\frac{۱}{۲}k\int_a^b f^{۲}(x)dx}{k\int_a^b f(x)dx}$$

۱۰-۷-۱۴ تذکر. در حالت کلی مختصات مرکز جرم و مختصات مرکز ثقل ناحیه با هم برابر نیستند مگر آن که ورقه همگن باشد.

۱۰-۷-۱۵ تذکر. اگر ناحیه L دارای محور تقارن باشد، مرکز ثقل و مرکز ناحیه‌ای روی محور تقارن قرار دارد.

۱۰-۷-۱۶ محاسبه مرکز جرم. اگر R ناحیه مطابق شکل (۱۰-۱۵) محصور به منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ باشد و $f(x) \ge g(x)$، در این صورت جرم ورقه مستطیل‌شکل عبارت است از:

$$\Delta m_i = k\big(f(t_i)-g(t_i)\big)\Delta x_i$$

و گشتاور جرم ورقه مستطیلی نسبت به محور xها به صورت:

$$\Delta M_{x_i} = k\frac{۱}{۲}[f(t_i)+g(t_i)]\times[f(t_i)-g(t_i)]\Delta x_i$$

و گشتاور جرم ورقه مستطیلی نسبت به محور yها به صورت:

$$\Delta M_{y_i} = k\,t_i\big(f(t_i)-g(t_i)\big)\Delta x_i$$

می‌باشد.

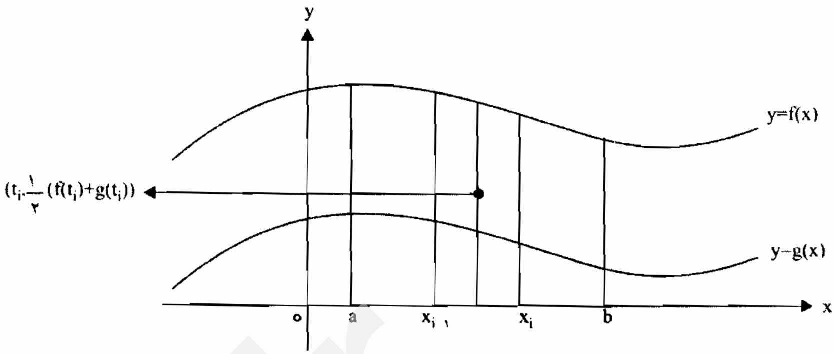
بنابراین:

$$M = k\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$M_x = \frac{۱}{۲}k\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\big(f(x) - g(x)\big)dx$$

$$M_y = k\int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)dx$$

بنابراین $(\bar{x}, \bar{y})$ به سادگی تعریف می‌شوند.



شکل ۱۰-۱۶

۱۰-۷-۱۷ تذکر. اگر L ناحیه‌ای محصور به $x = f(y)$ و $x = g(y)$ در فاصله $c \le y \le d$ باشد و g و f در $[c,d]$ پیوسته و $f \ge g$ باشد، در این صورت داریم:

$$m = k\int_c^d \big(f(y) - g(y)\big)dy$$

$$M_y = \frac{۱}{۲}k\int_c^d \big(f^{۲}(y) - g^{۲}(y)\big)dy$$

$$M_x = k\int_c^d y\big(f(y) - g(y)\big)dy$$

۱۰-۷-۱۸ مثال. مطلوبست مرکز ناحیه بین سهمی $y = ۴ - x^۲$ و محور xها.

حل. فرض کنید $y = ۰$ بنابراین $۴ - x^۲ = ۰$، لذا $x = \pm ۲$.

در نتیجه:

$$m = k \int_{-۲}^{۲} (۴ - x^۲)\, dx = \frac{۳۲}{۳} k$$

$$M_x = \frac{۱}{۲} k \int_{-۲}^{۲} (۴ - x^۲)^۲\, dx = \frac{۲۵۶}{۱۵} k$$

بنابراین $\bar{y} = \frac{۸}{۵}$. از طرفی محور yها محور تقارن منحنی است، لذا مرکز ناحیه‌ای روی محور yها رخ می‌دهد در واقع $\bar{x} = ۰$، بنابراین $(\bar{x}, \bar{y}) = (۰, \frac{۸}{۵})$ مرکز ناحیه‌ای مطلوب است.

۱۰-۷-۱۹ تمرین.

۱. طول میله ۶ واحد اندازه‌گیری و چگالی خطی میله در هر نقطه به فاصله x از یک انتهای میله $۴x + ۱$ می‌باشد. مرکز جرم میله را تعیین کنید.

۲. طول میله‌ای ۱۰ و اندازه چگالی خطی در هر نقطه تابعی خطی از اندازه فاصله نقطه تا انتهای چپ میله است. چگالی خطی در انتهای چپ برابر ۲ و در انتهای راست برابر ۳ است، جرم و مرکز جرم میله را حساب کنید.

۳. طول میله‌ای ۱۰ واحد اندازه‌گیری و اندازه چگالی خطی در هر نقطه آن تابعی خطی از اندازه فاصله نقطه تا وسط میله است. چگالی خطی در هر یک از دو انتهای میله ۵ و در وسط میله ۳/۵ است. مرکز جرم میله را حساب کنید.

۴. جرم کل میله‌ای به طول L برابر m واحد اندازه‌گیری است و اندازه چگالی خطی در هر نقطه از انتهای چپ متناسب با اندازه فاصله نقطه تا انتهای راست میله است. ثابت کنید چگالی خطی نقطه‌ای از میله که به اندازه x از انتهای چپ فاصله دارد برابر $\frac{۲m(L - x)}{L^۲}$ است.

۵. طول میله‌ای L است و مرکز جرم آن در نقطه‌ای است که $\frac{۳}{۴}L$ از انتهای چپ فاصله دارد. اگر اندازه چگالی خطی در انتهای راست آن ۲۰ باشد، چگالی خطی را در نقطه‌ای که به اندازه x از انتهای چپ فاصله دارد پیدا کنید.

۶. مرکز ناحیه‌ای محدود به منحنی $y = x^2$ و محور xها و خط $x = 1$ را به دست آورید.

۷. مرکز ناحیه‌ای محدود به $y = 2\sin 3x$ و خطوط $x = 0$، $x = \frac{\pi}{3}$ و $y = 0$ را به دست آورید.

۸. مرکز ناحیه‌ای محدود به منحنی‌های $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$ را به دست آورید.

۹. مرکز ناحیه‌ای محدود به منحنی‌های $y = \sin x$، $y = \cos x$ و خطوط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \pi$ را محاسبه کنید.

۱۰. مرکز ناحیه‌ای ناحیه بین خطوط $y = 2x + 1$، $x + y = 7$ و $x = 8$ را تعیین کنید.

۱۱. مرکز ناحیه‌ای بین سهمی $x = 2y - y^2$ و محور yها را تعیین کنید.

۱۲. مرکز ناحیه‌ای ناحیه بین منحنی‌های $y = x^3$ و $y = 4x$ واقع در ربع اول را تعیین کنید.

۱۳. اگر مرکز ناحیه‌ای ناحیه محصور به سهمی $y^2 = 4px$ و خط $x = a$، در نقطه $(p, 0)$ واقع باشد، a را تعیین کنید.

۱۴. اگر چگالی سطحی در هر نقطه (x, y) برابر x باشد، مطلوبست مرکز جرم ورقه محصور بین سهمی $2y^2 = 18 - 3x$ و محور yها.

۱۵. ذره‌ای در امتداد محور xها تحت تأثیر نیروی $f(x) = x\sqrt{x+1}$ وقتی که x متر از مبدأ فاصله دارد در حرکت است. مقدار کار انجام شده توسط این نیرو وقتی که ذره‌ای از نقطه $x = 3$ به $x = 8$ می‌رسد، چقدر است؟

۱۶. مخزنی به شکل استوانه مستدیر قائم به عمق ۱۲ متر و شعاع ۴ متر را تا نیمه از روغنی به وزن ۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب پر می‌کنیم. کار لازم برای انتقال روغن تا ارتفاع ۶ متر بالاتر از مخزن را به دست آورید.

۱۷. سطلی به وزن ۲۰ پوند را که حاوی ۶۰ پوند ماسه است به انتهای زنجیری به وزن ۱۰ پوند و طول ۱۰۰ فوت وصل کرده و از چاه عمیقی آویزان کرده‌ایم. ماسه داخل سطل هنگام بالا آوردن سطل با آهنگی ثابت طوری از آن می‌ریزد که وقتی سطل به بالای چاه می‌رسد کاملاً خالی است. کار لازم برای بالا کشیدن سطل به بالای چاه را حساب کنید.

فصل یازدهم

صورتهای مبهم و انتگرال‌های ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. تعریف ابهام را بداند.

۲. قضایای هوپیتال، کشی را بیان و اثبات نماید.

۳. کاربرد قضایا را در رفع ابهام بداند.

۴. انتگرال‌های ناسرهٔ نوع اول و دوم را تعریف کند.

۵. آزمون مقایسه و کاربرد آن را بداند.

۶. همگرائی یا واگرائی انتگرالهای ناسره را تعیین نماید.

مقدمه

در بخش حاضر روش محاسبهٔ حد توابعی را که در ابتدا حالت مبهم دارند محاسبه می‌کنیم. برای این منظور قضایای هوپیتال و کوشی را بیان و اثبات خواهیم نمود.

انتگرال‌های ناسُره (غیرعادی) نوع اول و نوع دوم را تعریف، سپس همگرائی و واگرائی آنها را بررسی می‌کنیم. مفاهیم این فصل پیش‌نیازی برای دروس ریاضی عمومی ۲ و ۳ می‌باشند.

۱۱-۱ صورتهای مبهم

۱۱-۱-۱. توابع f و g را درنظر بگیرید، با درنظر گرفتن جبر توابع می‌توان توابع $f+g$ ،$f-g$ ،$f\cdot g$ ،$\frac{f}{g}$ را تعریف نمود.

اگر در محاسبه حد توابع فوق در $x=a$، حالتهای زیر اتفاق افتد، آنها را مبهم تعریف می‌کنیم:

۱. اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \circ = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، و $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

۲. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

۳. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)-g(x)\right)$.

۴. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \circ$ ، و $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

۵. ∘ یا $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ، و $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$.

۶. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ، و $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$.

برای محاسبه حد عبارات مبهم به چند قضیه اشاره می‌کنیم:

۱۱-۱-۲ قضیه کُشی ـ تعمیم قضیه میانگین. هرگاه f و g توابعی باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) در $[a,b]$ پیوسته باشند.　　ب) در (a,b) مشتق‌پذیر باشند.

ج) به ازای هر x در (a,b)، $g'(x)\neq \circ$.

آنگاه عددی نظیر c در (a,b) وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۱۱-۱-۳ تمرین. قضیه ۱۱-۱-۲ را اثبات کنید.

۱۱-۱-۴ قضیه (قاعده اول هوپیتال). فرض کنید f و g دو تابع باشند، و در بازهٔ I شامل a، مشتق‌پذیر باشند (به‌جز احتمالاً در a) و به ازای هر $x \neq a$ در I، $g'(x) \neq 0$ در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$، آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

اثبات. توابع F و G را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \quad \text{و} \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

فرض کنید b نقطه انتهایی بازه I باشد. چون f و g در تمام نقاط I (به‌جز احتمالاً در a) مشتق‌پذیرند، لذا F و G در $[a,x]$ که $a < x < b$ مشتق‌پذیرند. پس در این فاصله پیوسته‌اند. از طرفی F و G از سمت راست در a پیوسته‌اند. زیرا:

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = F(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^+} G(x) = G(a)$$

لذا F و G در $[a,x]$ پیوسته‌اند و در فاصله $[a,x]$ در شرایط قضیه ۱۱-۱-۲ (کشی) صدق می‌کنند. بنابراین عددی نظیر c در (a,x) وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$$

چون $a < c < x$ لذا وقتی که x از طرف راست به a میل کند، c نیز از سمت راست به a میل می‌کند و داریم:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L \qquad (1)$$

حال فرض کنید d نقطه انتهایی سمت چپ فاصله I باشد. با بحثی مشابه بحث بالا نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^-} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L \tag{۲}$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

۱۱-۱-۵ قضیه (قاعدهٔ دوم هوپیتال). فرض کنید f و g دو تابع باشند به طوری که برای هر $x > a$ (a ثابت و مثبت است) مشتق‌پذیر باشند و برای هر $x > a$، $g'(x) \neq ٠$. در این صورت اگر:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

و یا اگر :

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = ٠$$

باشند، آنگاه اگر $\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

اثبات. فرض کنید $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = ٠$ و برای $x > a$، فرض کنید $x = \frac{١}{y}$.

در این صورت اگر $x \to +\infty$، آنگاه $y \to ٠^+$ و:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to ٠^+} f(\frac{١}{y}) = ٠$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{y\to ٠^+} g(\frac{١}{y}) = ٠$$

لذا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to\circ^+}\frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}=\frac{\circ}{\circ}$$

با توجه به ۱۱-۱-۴ (قاعده اول هوپیتال) داریم:

$$\lim_{y\to\circ^+}\frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}=\lim_{y\to\circ^+}\frac{-\frac{1}{y^2}f'(\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2}g'(\frac{1}{y})}=\lim_{y\to\circ^+}\frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حال در حالتی که $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$، اثبات را دنبال کنید تا مطلب اثبات شود.

۱۱-۱-۶ مثال. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\circ}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$$

حل. فرض کنید $f(x)=x-\operatorname{tg}x$ و $g(x)=x-\sin x$، درمی‌یابیم که $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x}$ اگرچه در این حالت نیز حد به صورت $\frac{\circ}{\circ}$ درمی‌آید، اما در این مرحله می‌توان این ابهام را مرتفع ساخت:

$$1-\sec^2 x=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}$$

لذا:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\left(-\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}\right)=-2$$

۱۱-۱-۷ مثال. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}x}{\sqrt{x}}$$

حل. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Ln}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. بنابراین مطابق قاعده دوم هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{\sqrt{x}}=۰$$

۱۱-۱-۸ تذکر. تاکنون رفع ابهام صورت‌های مبهم $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ را مورد مطالعه قرار دادیم. قواعد هوپیتال را در رفع ابهام صورتهای مبهم $۰\times\infty$ و $\infty-\infty$ و $۰^۰$ و $(\pm\infty)^۰$ و $(۱)^{\pm\infty}$، می‌توان به‌کار برد.

۱۱-۱-۹ (صورت مبهم $۰\times\infty$). فرض کنید $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=۰$، بنابراین $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ به صورت مبهم $۰\times\infty$ تبدیل می‌شود. این صورت مبهم را می‌توان به صورت‌های مبهم $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل، و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به رفع ابهام آن مبادرت کرد.

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{۱}{g(x)}}\quad \text{یا}\quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{۱}{f(x)}}$$

۱۱-۱-۱۰ مثال. حد $\lim\limits_{x\to۰^+}x\operatorname{Ln}(\sin x)$ را محاسبه کنید.

حل. $\lim\limits_{x\to۰^+}x\operatorname{Ln}(\sin x)=۰\times(-\infty)$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{Ln}(\sin x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ln}(\sin x)}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{Ln}(\sin x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot g\, x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} -x^2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}(x\cos x)=-1\times 0=0$$

۱۱-۱-۱۱ (صورت مبهم $\infty-\infty$). فرض کنید $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$، در این صورت با تبدیل $f(x)-g(x)$ به کسر $\frac{h(x)}{k(x)}$ می‌توان با توجه به قاعده هوپیتال آن را رفع ابهام نمود.

۱۱-۱-۱۲ مثال. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

حل. حد فوق به صورت حالت مبهم $\infty-\infty$ تبدیل می‌شود. لذا داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\frac{0}{0}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

۱۱-۱-۱۳ (صورتهای مبهم 0^0، ∞^0، 1^∞). ساده‌ترین روش در رفع ابهام عبارت فوق آن است که لگاریتم تابع موردنظر را محاسبه و با توجه به پیوسته بودن تابع لگاریتم و با توجه به قاعده زنجیری در حد، حد لگاریتم تابع و سپس حد تابع موردنظر را محاسبه نمود. مثال‌های آتی، روش محاسبه حد چنین صورت‌هایی را بیان می‌کند.

مثال. ۱۱-۱-۱۴. حد تابع $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ را محاسبه کنید.

حل. صورت مبهم فوق به فرم 0^0 است. لذا فرض کنید $y = x^x$. داریم،

$$\operatorname{Ln} y = x \operatorname{Ln} x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{Ln} y = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{Ln} x = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1 \quad \text{و} \quad \operatorname{Ln} \lim_{x \to 0^+} y = 0$$

۱۱-۱-۱۵ مثال. حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

حل. در محاسبه حد فوق به صورت مبهم ∞^0 برخورد می‌کنیم. لذا فرض کنید $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ و:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \operatorname{Ln} y = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \cos x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x) = 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x)}{\sec x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\operatorname{Ln} y)=\operatorname{Ln}(\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} y)=0$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}=1$$

۱۱-۱-۱۶ تمرین.

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{\operatorname{tg}^{-1}x}$

۲) $\lim\limits_{t\to\pi}\frac{\sin^2 t}{t-\pi}$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}$

۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}x-x}$

۵) $\lim\limits_{x\to\infty}x(2\operatorname{tg}^{-1}x-\pi)$

۶) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{t}-\frac{1}{te^{at}})$

۷) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\csc x)^{\sin^2 x}$

۸) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{3\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}3t}$

۹) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{Ln}(ex)-1}{\sin\pi x}$

۱۱) $\lim\limits_{r\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{Ln}\sin r}{\cos r}$

۱۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sqrt{x}}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\operatorname{Ln}x})$

۱۴) $\lim\limits_{t\to 0}(\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}}$

۱۵) $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(x+h)-۲f(x)+f(x-h)}{h^۲}$ مشروط بر آن که f دو بار مشتق‌پذیر باشد.

۱۶) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sum\limits_{k=۱}^{n} x^k - n}{x-۱}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x^x - x}{۱-x+\log x}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin^{-۱} ۲x - ۲\sin^{-۱} x}{x^۳}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{x\sqrt{x}}\left(a\,\mathrm{tg}^{-۱}\dfrac{\sqrt{x}}{a} - b\,\mathrm{tg}^{-۱}\dfrac{\sqrt{x}}{b}\right)$

۲۰) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^۲-a^۲}}$

۲. ثابت‌های a و b را طوری تعیین کنید که:

$$\lim \frac{۱}{bx-\sin x}\int_{۰}^{x}\frac{t^۲dt}{\sqrt{a+t}} = ۱$$ (جواب $a=۴$ و $b=۱$)

۳. در یک مدار الکتریکی شدت جریان $I(t)$ در لحظه t از رابطه:

$$I(t) = \frac{E}{R}(۱-e^{-\frac{Rt}{L}})$$

به دست می‌آید، که در آن E و R و L اعداد مثبتی می‌باشند، مقدار حدی $I(t)$ را وقتی $R\to ۰^+$ تعیین کنید.

۱۱-۲ انتگرالهای ناسره

مفهوم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را با این قید که تابع f بر یک بازهٔ متناهی $[a,b]$ تعریف شده و کراندار است معرفی کرده‌ایم. حال اگر به‌جای بازهٔ $[a,b]$ ناحیه انتگرال‌گیری به

یکی از سه صورت $[a,+\infty)$ و $(-\infty,b]$ و $(-\infty,\infty)$ بیان و همچنین اگر $f(x)$ در یک یا چند نقطه از بازه بسته $[a,b]$ ناپیوسته باشد، در این حالتها نیز انتگرال قابل تعریف و محاسبه است که آنها را انتگرالهای ناسُره (غیرعادی) می‌نامند. در زیر این انتگرالها را تعریف و مطالعه می‌کنیم.

در ریاضی (۲) معلوم خواهد شد که میان تعاریف مربوط به انتگرالهای ناسره و تعاریف مربوط به سریهای متناهی شباهت زیادی وجود دارد. بنابراین، این مطلب که بسیاری از قضایای مقدماتی سریها مشابه قضایای انتگرالهای مجازی هستند تعجب‌آور نخواهد بود.

۱۱-۲-۱. فرض کنید f در تمام نقاط بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد. برای هر $t > a$ قرار دهید:

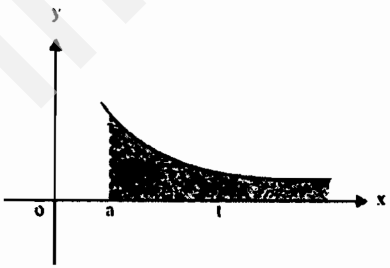
$$I(t)=\int_a^t f(x)dx$$

I تابعی پیوسته از t است. حد $I(t)$ وقتی $t\to+\infty$ را انتگرال تابع $f(x)$ در فاصله $[a,+\infty)$ می‌نامیم، و آن را به صورت $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ می‌نویسیم. پس:

$$\int_a^{+\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

در شکل زیر تعبیر هندسی انتگرال یک تابع مثبت را که محور xها مجانب آن است به صورت مساحت ناحیه زیر منحنی نشان داده‌ایم. در واقع داریم:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$



شکل ۱۰-۱

۱۱-۲-۲ تعریف. تابع I در ۱۱-۲-۱ را یک انتگرال نامتناهی یا یک انتگرال ناسره نوع اول تعریف می‌کنیم و آن را با علامت $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نمایش می‌دهیم. انتگرال ناسره را همگرا می‌نامیم، اگر $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$ موجود و متناهی باشد. در غیر این صورت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ واگرا نام خواهد داشت. چنانچه $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = A$ ، عدد A را مقدار انتگرال نامیده و می‌نویسیم $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$.

۱۱-۲-۳. این تعریف با تعاریفی که در مورد سریهای نامتناهی داده شده‌اند مشابهند.

مقادیر تابعی $I(t)$ نقش «مجموع‌های جزئی» را ایفا می‌کنند و می‌توان آنها را «انتگرال‌های جزئی» نامید.

۱۱-۲-۴ مثال. نوع انتگرال ناسرهٔ $\int_a^{+\infty} \sin x\, dx$ را تعیین کنید.

حل.
$$I(t) = \int_0^t \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^t = 1 - \cos t$$

از طرفی $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (1-\cos t)$ به حدی میل نمی‌کند لذا $\int_a^{+\infty} \sin x\, dx$ واگراست.

۱۱-۲-۵. انتگرال‌های نامتناهی به شکل $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ را نیز انتگرال ناسره نوع اول تعریف می‌کنیم و انتگرال $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ را همگرا می‌نامیم، هرگاه $\lim\limits_{t\to-\infty} J(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ موجود و عدد باشد.

همچنین اگر به ازای cای هر دو انتگرال $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ و $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشند گوییم $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ همگراست و مقدارش مساوی مجموع زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

(به آسانی می‌توان نشان داد که انتخاب c خالی از اهمیت است).

انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ را واگرا خوانند، هرگاه لااقل یکی از انتگرال‌های سمت است در تساوی بالا واگرا باشد.

۱۱-۲-۶ مثال. نوع انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx$ را که در آن $\alpha > 0$ است تعیین کنید.

حل. فرض کنید:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha|x|}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = I_1 + I_2$$

حال نوع I_1 و I_2 را تعیین می‌کنیم:

$$I_1 = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^{\alpha x}dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\alpha}\,(1-e^{\alpha t}) = \frac{1}{\alpha}$$

$$I_2 = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} e^{-\alpha x}dx = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}\,(e^{-\alpha t}-1) = \frac{1}{\alpha}$$

بنابراین I_1 و I_2 همگرا و لذا I همگرا به $\frac{2}{\alpha}$ است.

۱۱-۲-۷. در محاسبه انتگرال‌های ناسرهٔ نوع اول ممکن است از روش‌های مختلف انتگرال‌گیری مانند تغییر متغیر یا جزء به جزء و غیره استفاده نمود. مسلّماً استفاده از این روش‌ها مجاز است و عمل حدگیری وقتی $t \to \pm\infty$ بعد از طی این مراحل و به دست آوردن انتگرال‌های نامعین به صورت تابعی از t انجام خواهد گرفت.

۱۱-۲-۸ مثال. نوع انتگرال $\int_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx$ را تعیین کنید.

حل.

$$\int_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} x\sin x\,dx$$

با توجه به روش جزء به جزء داریم:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\sin x\,dx=\lim_{t\to+\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^t+\int_0^t\cos x\,dx\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(-t\cos t+\sin t)$$

چون حد اخیر موجود نیست، لذا انتگرال واگراست.

۱۱-۲-۹ تذکر. تاکنون انتگرال‌های ناسره را بررسی کردیم که در صورت همگرا بودن مقدار همگرایی نیز قابل محاسبه بود. باید توجه داشت که همواره قادر به محاسبهٔ مقدار همگرائی در انتگرال‌های ناسره که همگرا باشند نیستیم، لذا چند قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم و به کمک آنها نوع انتگرال‌های ناسره را تعیین خواهیم نمود.

۱۱-۲-۱۰ قضیه (آزمون مقایسه). فرض کنید به ازای کلیه xهائی که $x\geq a$ توابع $f(x)$ و $g(x)$ معین و انتگرال‌پذیر باشند، و داشته باشیم $0\leq g(x)\leq f(x)$. در این صورت:

اگر $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ نیز همگراست.

۱۱-۲-۱۱ نتیجه. اگر $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ نیز واگراست.

۱۱-۲-۱۲ قضیه (آزمون مقایسه حدی). فرض کنید هر دو انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ به ازای هر $b\geq a$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $x\geq a$، $f(x)\geq 0$ و $g(x)>0$، هرگاه $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C$، آنگاه:

الف) اگر $C\neq 0$، آنگاه هر دو انتگرال $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ و $\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$ هم‌نوعند (نه هم‌مقدار).

ب) اگر $C=0$، آنگاه همگرائی $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرائی $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ را ایجاب می‌کند.

برهان‌های قضایای ۱۱-۲-۱۰ و ۱۱-۲-۱۱ مشابه اثبات نتایج متناظری است که برای سری‌های عددی وجود دارند و به عنوان تمرین باقی می‌مانند.

۱۱-۲-۱۳ مثال. نوع انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ را مشخص کنید.

حل. به ازای $x \geq 1$ داریم:

$$1+e^x > 1$$

لذا:

$$x^2(1+e^x) > x^2$$

بنابراین:

$$0 < \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

از طرفی داریم:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = -\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}-1\right) = 1$$

بنابراین $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست، و لذا مطابق آزمون مقایسه انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ نیز همگراست.

۱۱-۲-۱۴ مثال. نوع انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ را تعیین کنید.

حل. با توجه به $x \geq 1$ داریم:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

از طرفی:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2 \lim_{t \to +\infty} (\sqrt{t} - 1) = +\infty$$

بنابراین مطابق نتیجه آزمون مقایسه انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ واگراست.

۱۱-۲-۱۵ قضیه. فرض کنید به ازای تمام مقادیر $x \ge a$، تابع $f(x)$ معین باشد. اگر انتگرال ناسره $\int_{a}^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ نیز همگراست.

اثبات. با توجه به نامساوی $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ داریم:

$$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$$

حال با توجه به آزمون مقایسه انتگرال $\int_{a}^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx$ همگراست از طرفی بنا به فرض $\int_{a}^{+\infty} |f(x)| dx$ همگراست لذا:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) dx = \int_{a}^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_{a}^{+\infty} |f(x)| dx$$

همگراست.

(جزئیات اثبات سطر آخر را بررسی و علّت را توضیح دهید.)

۱۱-۲-۱۶ مثال. نوع انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ را تعیین کنید.

حل. با توجه به فرض $x \ge 1$ داریم:

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3}$$

از طرفی انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2}}$ همگراست (چرا؟) بنابراین مطابق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^{2}} \right| dx$ همگراست. پس مطابق قضیه ۱۱-۲-۱۷ انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{2}} dx$ نیز همگراست.

۱۱-۲-۱۸ انتگرال توابع ناپیوسته (انتگرال‌های ناسرهٔ نوع دوم). اگر تابع $f(x)$ در یکی از نقاط a یا b نامعین یا ناپیوسته و یا f در تمام نقاط بازهٔ $[a,b]$ الّا در یک نقطه مانند $a < c < b$ پیوسته باشد، انتگرال $\int_{a}^{b} f(x)dx$ را انتگرال ناسره نوع دوم تعریف می‌کنیم. در هر یک از حالتهای بالا انتگرال را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

الف) تابع f در تمام نقاط $[a,b)$ پیوسته اما در b نامعین یا ناپیوسته باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b^{-}} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

ب) اگر f در $(a,b]$ پیوسته اما در a نامعین یا ناپیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to a^{+}} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

ج) اگر f در (a,b) پیوسته و در a و b نامعین و یا ناپیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to a^{+}} \int_{t}^{c} f(x)dx + \lim_{t \to b^{-}} \int_{c}^{t} f(x)dx$$

که در آن $a < c < b$.

د) اگر f در تمام نقاط بازه $[a,b]$ الّا در یک نقطه نظیر c که $a < c < b$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

در هر چهار حالت اگر حدها و انتگرالهای طرف دوم موجود و متناهی باشند، انتگرالهای طرف چپ (انتگرال‌های ناسره) را همگرا و در غیر این صورت آن‌ها را واگرا می‌نامیم.

۱۱-۲-۱۹ تذکر. مشابه قضیه‌های ۱۱-۲-۱۰، ۱۱-۲-۱۱، ۱۱-۲-۱۵ برای انتگرال‌های ناسره نوع دوم نیز صادق است.

۱۱-۲-۲۰ نکته. اگر تابع f در تمام نقاط بازه $[a,b]$ به غیر از نقاط c_1، c_2،... و c_n از آن پیوسته باشد، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

۱۱-۲-۲۱ مثال. نوع انتگرال $I = \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ را تعیین کنید.

حل. تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در $x = 1$ نامعین است. بنابراین مطابق تعریف داریم:

$$I = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^+} \left[\mathrm{Ln}|x-1|\right]_t^2 = \lim_{t\to 1^+} \left(-\mathrm{Ln}|t-1|\right) = +\infty$$

در نتیجه انتگرال ناسره $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ واگراست.

۱۱-۲-۲۲ تمرین.

۱. تابع f را در بازهٔ $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ را تعیین کنید.

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}$ همگراست، اگر $p>1$ باشد.

۳. مقداری برای n پیدا کنید که به ازای آن انتگرال $\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^{2}+n}\right)dx$ همگرا باشد. و به ازای n به دست آمده مقدار انتگرال را تعیین کنید.

۴. نوع انتگرال $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^{2})^{3}}$ را تعیین کنید.

۵. نوع انتگرال $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sec x\,dx$ را تعیین کنید.

۶. به ازای مقادیر مختلف n نوع انتگرال‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $I=\int_{0}^{1}x^{n}\,dx$ ب) $J=\int_{0}^{1}x^{n}\operatorname{Ln}^{2}x\,dx$

۷. نوع انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+x}}$ ب) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\cos x}$

ج) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2}+\operatorname{Ln}x}$ د) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{3}}}$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ و) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$

۸- فرض کنید $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، در این صورت ثابت کنید:

الف) $\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\pi}$ ب) $\int_{0}^{+\infty}x^{2}e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

۹- تابعی نظیر f طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا ولی $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx=0$.

۱۰- ثابت کنید انتگرال $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{t}\,dx$ به ازای هر t حقیقی همگراست.

۱۱- تابع گاما.

تابع گاما را به صورت $\Gamma(S)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{S-1}\,dt$ تعریف می‌کنیم.

حال ثابت کنید:

الف) تابع $\Gamma(S)$ به ازای هر $S>0$ همگراست؛

ب) نشان دهید $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $(x>0)$؛

ج) $\Gamma(n+1)=n!$, $n=0,1,2,\ldots$؛

تابع Γ اولین‌بار در سال ۱۷۲۹ توسط اویلر معرفی شد. تابع فوق مفهوم فاکتوریل را برای اعداد کسری بیان می‌کند.

د) با توجه به $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (انتگرال پواسن) نشان دهید:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

۱۲- نوع انتگرال‌های زیر را معلوم کنید.

الف) $\int_{1}^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ ب) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^{3}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

هدفهای کلی

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

۱. اعداد مختلط را تعریف نموده و آن را در مختصات مختلط نمایش دهد.

۲. اعمال جبری روی اعداد مختلط و مزدوج آن را تعریف نماید.

۳. وارون عدد مختلط Z را شناسایی و بدین ترتیب عمل تقسیم را معرفی نماید.

۴. طول عدد مختلط و آرگومان اصلی اعداد مختلط و نمایش مثلثاتی عدد مختلط را از فرم جبری آن تعیین نماید.

۵. توان در اعداد مختلط را با توجه به دستور «مرآور» انجام دهد.

۶. ریشه‌های n ام اعداد مختلط را محاسبه نماید.

۷. معادلهٔ دایره و یا خط را در صفحه مختلط بنویسد.

۱۲-۱ تعریف‌ها

۱۲-۱-۱ مثال. معادله درجه دوم $x^2+1=0$ در دستگاه اعداد حقیقی دارای جواب نیست. برای جوابدار کردن این نوع معادلات نوع جدیدی از اعداد را به نام اعداد مختلط معرفی می‌کنیم. در این فصل کوتاه مجموعهٔ اعداد مختلط را شرح داده و اهمیت آن‌ها را در حل معادلات جبری نشان خواهیم داد.

ابتدا نماد i را برای $\sqrt{-1}$ معرفی می‌کنیم و آن را عدد موهومی می‌نامیم، لذا با این قرارداد می‌توان i^2 را برابر ۱-، i^3 را برابر $-i$ و i^4 را برابر عدد ۱ به‌دست آورد.

۱۲-۱-۲ تعریف. مجموعهٔ اعداد مختلط را با نماد $\mathbb{C}$ نمایش و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in R\ ,\ i=\sqrt{-1}\}$$

هر عدد مختلط را به صورت $z=x+iy$ نمایش می‌دهیم، و آن را فرم استاندهٔ عدد z می‌نامیم.

عدد x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z نامیده و نمادهای زیرین را برای نمایش آنها به‌کار می‌بریم.

$$\operatorname{Im}(z)=y \quad , \quad \operatorname{Re}(z)=x$$

۱۲-۱-۳ تعریف. دو عدد z_1 و z_2 مساویند، اگر و فقط اگر:

$$\operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2) \quad , \quad \operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$$

۱۲-۱-۴ نکته. با توجه به تعریف $\mathbb{C}$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$R\subseteq\mathbb{C}$$

۱۲-۱-۵ مثال. فرض کنید $z_1=\frac{a+2i}{6}$ و $z_2=\frac{1+i}{3}$. اگر $z_1=z_2$ باشد، a را تعیین کنید.

حل. ابتدا z_1 و z_2 را به فرم استانده می‌نویسیم:

$$z_1=\frac{a}{6}+\frac{1}{3}i \quad , \quad z_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$$

حال با توجه به ۱۲-۱-۳ به سادگی داریم:

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{3} \text{ یا } a=2$$

۱۲-۱-۶ نکته. چون i را به عنوان عدد (عدد موهومی) در نظر گرفتیم، لهذا در مورد $0i = 0$ یا $1i = i$ بحثی به میان نخواهیم آورد.

۱۲-۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

۱۲-۲-۱ تعریف. فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط باشند، در این صورت جمع z_1 با z_2 را با نماد $z_1 + z_2$ و حاصلضرب z_1 در z_2 را با نماد z_1z_2 نمایش می‌دهیم.

۱۲-۲-۲ تعریف. جمع z_1 با z_2 را به صورت $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ و حاصلضرب آنها را به شکل $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ تعریف می‌کنیم.

۱۲-۲-۳ تعریف. در ۱۲-۲-۲ برای جمع z_1 با z_2 قسمت‌های حقیقی آنها را با هم جمع نموده و آن را نسبت حقیقی $z_1 + z_2$ می‌نامیم. و به همین ترتیب جمع قسمت‌های موهومی، قسمت موهومی $z_1 + z_2$ را تشکیل دادند. در واقع:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$$

و:

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$$

و در ضرب z_1z_2 درواقع مشابه چندجمله‌ای‌ها در اعداد حقیقی، z_1 را در z_2 ضرب و به‌جای i^2 عدد ۱- را قرار می‌دهیم و با درنظر گرفتن $0i = 0$ و $1i = i$ حاصلضرب z_1z_2 را به صورت استانده می‌نویسیم.

۱۲-۲-۴ تمرین. با توجه به ۱۲-۲-۲ و با تعریف $\alpha z = (\alpha x) + i(\alpha y)$ $(\alpha \in R)$ ثابت کنید:

الف) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ب) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$

ج) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ د) $z+(-z)=0$

هـ) $z_1 \times 1 = 1 \times z_1 = z_1$ و) $z_1 z_2 = z_2 z_3$

۱۲-۲-۵ توان در اعداد مختلط. فرض کنید $z \in \mathbb{C}$. در این صورت تعریف زیر را می‌آوریم:

$$z^0 = 1 = 1 + 0i \qquad \text{(I)}$$

$$z^2 = z \times z \qquad \text{(II)}$$

$$z^3 = z^2 \cdot z \qquad \text{(III)}$$

$$z^n = z^{n-1} \cdot z \;\; ; \;\; (n \in N) \qquad \text{(IIII)}$$

۱۲-۳ وارون اعداد مختلط

۱۲-۳-۱ تعریف. عدد $z = a + ib$ را که در آن $z \neq 0$ در نظر بگیرید. وارون z را با نماد z^{-1} نمایش داده، آن عددیست که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1 = 1 + 0i$$

۱۲-۳-۲ تمرین. عدد ناصفر $z = a + ib$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

۱۲-۳-۳ وارون z با معرفی نماد $\frac{1}{z} = z^{-1}$, $(z \neq 0)$ تقسیم اعداد مختلط نیز معنی‌دار می‌شوند.

۱۲-۳-۴ مثال. عبارت‌های $\frac{5+4i}{3-i}$ و $\frac{i^{80}-i+1}{i^4+i}$ را ساده کنید.

حل. با توجه به $z^{-1}=\frac{1}{z}$ و با در نظر گرفتن تمرین ۱۲-۳-۲ داریم:

$$\frac{5+4i}{3-i}=(5+4i)(3-i)^{-1}=(5+4i)(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{6}{5}i-\frac{2}{5}=\frac{11}{5}+\frac{17}{5}i$$

$$=\frac{i^{80}-i+1}{i^{4}+i}=\frac{1-i+1}{1+i}=(2-i)(1+i)^{-1}=(2-i)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=-i$$

۱۲-۳-۵ تمرین.

۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.

$$(4+2i)x+(5-3i)y=13+i$$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $z=\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$ ب) $z=\frac{(1+i)(1+2i)}{1-i}+i$

ج) $\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

۳. جواب دستگاه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases}(1+i)z_1-iz_2=2+i\\(2+i)z_1+(2-i)z_2=2i\end{cases}$$

۱۲-۴ مزدوج اعداد مختلط

۱۲-۴-۱ تعریف. عدد مختلط $z=x+iy$ را در نظر بگیرید. مزدوج z را با نماد $\bar{z}$ نمایش داده و آن را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{z}=x-iy$$

۱۲-۴-۲ مثال. با توجه به تعریف داریم:

$$\overline{1-i}=1+i \quad , \quad \overline{-2i+1}=2i+1$$

۱۲-۴-۳ قضیه. فرض می‌کنیم $z,z_1,z_2,\ldots,z_n$ اعداد مختلط و $\alpha\in R$. در این صورت:

الف) $\bar{\bar{z}}=z$

ب) $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

ج) $\overline{z_1}\,\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$

د) $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots+\overline{z_n}=\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n}$

هـ) $\overline{z_1}\,\overline{z_2}\ldots\overline{z_n}=\overline{z_1z_2\ldots z_n}$

و) $\bar{z}^{n}=\overline{z^n}$

ز) $\overline{\alpha z}=\alpha\cdot\bar{z}$ $(\alpha\in R)$

اثبات. (و، ز) را اثبات می‌کنیم. (الف، ب، ج، د، هـ) را به عهدهٔ دانشجو محول می‌کنیم.

اثبات (و). با توجه به (هـ) و با فرض $z=z_1=z_2=\cdots=z_n$ داریم:

$$\bar{z}\,\bar{z}\ldots\bar{z}=\overline{z\cdot z\ldots z}$$

بنابراین:

$$\bar{z}^{n}=\overline{z^{n}}$$

اثبات (ز). با توجه به تعریف $z=x+iy$ و αz می‌توان نوشت:

$$\alpha z=(\alpha x)+i(\alpha y)$$

لذا:

$$\overline{\alpha z}=(\alpha x)-i(\alpha y)$$

از طرفی:

$$\alpha\bar{z}=\alpha(x-iy)=(\alpha x)-i(\alpha y)$$

بنابراین:

$$\overline{\alpha z}=\alpha\cdot\bar{z}$$

۱۲-۴-۴ تمرین. قضیه ۱۲-۴-۳ را اثبات کنید.

جواب را با [۱۲-۴-۴] مقایسه کنید.

۱۲-۴-۵ مثال. ثابت کنید اگر z یک ریشهٔ معادله $az^{2} + bz + c = 0$ باشد، $\bar{z}$ نیز یک ریشه دیگر آن است $(a,b,c \in R)$.

حل. کافیست ثابت کنیم $a\bar{z}^{2} + b\bar{z} + c = 0$، با توجه به ۱۲-۴-۳ داریم:

$$a\bar{z}^{2} + b\bar{z} + c = a\overline{z^{2}} + b\bar{z} + c = \overline{az^{2}} + \overline{bz} + \bar{c}$$

$$= \overline{az^{2} + bz + c} = \bar{0} = 0$$

۱۲-۴-۶ تمرین. فرض کنید $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + az + a_0 = 0$ که در آن برای $a_i \in R \; ; \; 0 \le i \le n$، ثابت کنید $\bar{z}$ ریشهٔ معادله فوق است.

جواب را با [۱۲-۴-۶] مقایسه کنید.

۱۲-۴-۷ تذکر. برای محاسبه $\frac{z_1}{z_2}$ که در آن $z_2 \neq 0$ می‌توان با ضرب صورت و مخرج عبارت فوق در مزدوج مخرج یعنی $\overline{z_2}$ عمل تقسیم را به سادگی انجام داد.

۱۲-۴-۸ مثال. ثابت کنید $\frac{\sqrt{1+x^{2}} + ix}{x - i\sqrt{1+x^{2}}} = i$.

حل. با توجه به ۳-۴-۷ داریم:

$$\frac{\sqrt{1+x^{2}} + ix}{x - i\sqrt{1+x^{2}}} = \frac{(\sqrt{1+x^{2}} + ix)(x + i\sqrt{1+x^{2}})}{(x - i\sqrt{1+x^{2}})(x + i\sqrt{1+x^{2}})} = \frac{i(2x^{2}+1)}{2x^{2}+1} = i$$

۱۲-۴-۹ تمرین.

۱. فرض کنید $z_1, z_2 \not\subset R$ و $z_2 \neq 0$، ثابت کنید $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

۲. عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$ ب) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

ج) $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

۳. درستی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ ب) $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

۴. با فرض $z = x+iy \neq 0$ نمودار $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}$ را رسم کنید.

۵. در تمرین ۴ نمودار $\mathrm{Im}(z) = 1$ را رسم کنید.

۶. فرض کنید $\sum_{i=0}^{100} i^k = x+iy$. در این صورت x و y را محاسبه کنید.

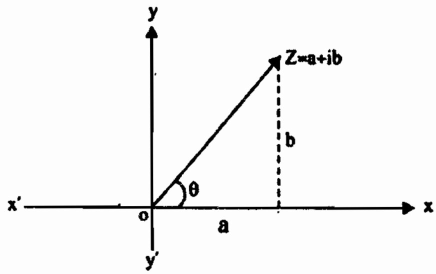
۷. اگر $\dfrac{x+iy}{x-iy} = x-iy$، مقادیر حقیقی x و y را بیابید.

۸. فرض کنید f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

۱۲-۵ نمایش هندسی اعداد مختلط

۱۲-۵-۱ تعریف. دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را در یک صفحه درنظر بگیرید. برای هر عدد مختلط $z = \alpha + ib$ نقطه به مختصات (a,b) را در صفحه نظیر می‌کنیم. این نقطه را نگار عدد z می‌نامیم. برعکس، هر نقطه از این صفحه به مختصات (a,b) می‌تواند نگار عدد مختلط $a+ib$ باشد. به این ترتیب نگار اعداد حقیقی

$a = a + i\circ = (a,\circ)$ بر محور $x'x$ و نگار اعداد ib که $ib = \circ + ib = (\circ,b)$ بر محور $y'y$ واقع است. به این دلیل محور $x'x$ را محور حقیقی و محور $y'y$ را محور موهومی می‌نامند. شکل حاصل از نمایش اعداد موهومی به طریق مذکور را نمودار آرگان (J.R. Argan) می‌نامند. صفحه‌ای که در آن دو محور عمود بر هم با این تعاریف منظور گردد، صفحهٔ مختلط نامیده می‌شود.

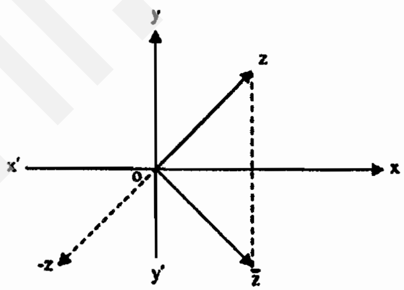


شکل ۱۲-۱

۱۲-۵-۲ نمایش برداری اعداد مختلط. با توجه به ۱۲-۵-۱ هر عدد $z = a + ib$ را با نقطه (a,b) نظیر نمودیم. حال بردار oz را که $(\circ,\circ)$ ابتدا و (a,b) انتهای آن است، در نظر می‌گیریم و عدد مختلط $z = a + ib$ را به عنوان بردار $\overrightarrow{oz}$ نمایش می‌دهیم و بردار $\overrightarrow{oz}$ را نمایش برداری عدد z تعریف می‌کنیم.

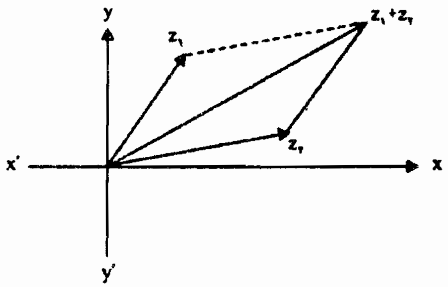
۱۲-۵-۳ مثال. با در نظر گرفتن نمایش برداری اعداد مختلط، $\bar{z}$ و $-z$ و $z_1 + z_2$ را به طریق هندسی در صفحه مختلط نمایش دهید.

حل. با توجه به تعریف $\bar{z}$ و $-z$ داریم:



شکل ۱۲-۲

و برای $z_1 + z_2$ مطابق تعریف جمع برداری داریم:



شکل ۱۲-۳

۱۲-۵-۴ تمرین. فرض کنید $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ با در نظر گرفتن نمایش هندسی اعداد z_1 و z_2، ثابت کنید $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

اثبات را با [۱۲-۵-۴] مقایسه کنید.

۱۲-۵-۵ تعریف. عدد مختلط $z = a + ib$ را در صفحه مختلط در نظر بگیرید (شکل ۱۲-۱).

طول بردار $\overrightarrow{oz}$ را با نماد $r = |z|$ نمایش می‌دهیم و مطابق تعریف آن را طول عدد z می‌نامیم. بدیهی است که $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

از طرفی برای هر عدد مختلط $z \neq 0$ فقط یک θ در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ متناظر است.

حال آن که فاصله دیگری به طول 2π مانند $-\pi < \theta \leq \pi$ را نیز می‌توان به‌کار برد. هر کدام از فاصله‌ها را دامنه یا حوزهٔ اصلی گویند و θ را که در آن فاصله قرار دارد آرگومان اصلی یا مقدار اصلی گویند و آن را با نماد $\hat{\theta} = \operatorname{Arg} z$ نمایش می‌دهیم. در این بخش فرض کنید $0 \leq \theta < 2\pi$.

۱۲-۵-۶ تذکر. با توجه به آنچه که گذشت اگر $z = x + iy$ عدد مختلط مفروضی باشد، می‌توان ثابت کرد که:

$$\hat{\theta} = \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x}) \quad \text{(ب} \qquad\qquad r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad \text{(الف}$$

با توجه به (ب) برای تعیین $\hat{\theta}$ کافیست معادله $tg\theta = \frac{y}{x}$ را حل، و با توجه به محلّ z در صفحه، $\hat{\theta}$ را مشخص نمود.

۱۲-۵-۷ تذکر. با در نظر گرفتن تعریف $|z|$، می‌توان آن را فاصله z تا مبدأ در صفحهٔ مختلط نامید. به همین ترتیب $|z_۱ - z_۲|$ نشان‌دهندهٔ فاصله بین $z_۱$ و $z_۲$ است، لذا با فرض $z_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $z_۲ = (x_۲, y_۲)$ داریم:

$$|z_۱ - z_۲| = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

۱۲-۵-۸ مثال. فرض کنید $z_۱ = -۱ - i\sqrt{۳}$ و $z_۲ = -i$. طول و آرگومان اصلی هر عدد را تعیین کنید.

حل.
$$|z_۱| = \sqrt{۱ + ۳} = ۲ \quad , \quad z_۲ = \sqrt{۱} = ۱$$

$$\theta = \operatorname{Arg} z_۱ \Rightarrow \theta = \pi + \operatorname{Arctg}(\sqrt{۳}) = \frac{۴\pi}{۳} \;\; ; \;\; (x < ۰)$$

فرض کنید $\alpha = \operatorname{Arg} z_۲$. با توجه به محل $z_۲$ در صفحه مختلط $z_۲ = (۰, -۱)$ بدیهی است $\alpha = \frac{۳\pi}{۲}$.

۱۲-۵-۹ مثال. ابتدا ثابت کنید که $|z|^۲ = z \cdot \bar{z}$. سپس تساوی $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$ را به دست آورید.

حل. ابتدا با فرض $z = x + iy$ داریم:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^۲ + y^۲ = |z|^۲$$

حال داریم:

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=(z_1\,z_2)(\overline{z_1}\;\overline{z_2})$$
$$=z_1\,\overline{z_1}\cdot z_2\,\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

بنابراین:

$$|z_1\,z_2|=|z_1||z_2|$$

۱۲-۵-۱۰ مثال. مکان هندسی مجموعهٔ $A=\left\{z\left|\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|\le 2\ ,\ z=x+iy\right.\right\}$ را در صفحه مختلط تعیین کنید.

حل. ابتدا می‌دانیم $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $(z_2\neq 0)$ آن را ثابت کنید.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\frac{|z-i|}{|z+i|}$$

لذا:

$$\frac{|z-i|}{|z+i|}\le 2$$

بنابراین:

$$|z-i|^2\le 4|z+i|^2$$

حال با توجه به $z-i=x+i(y-1)$ و $z+i=x+i(y+1)$ و رابطه بالا داریم:

$$x^2+(y-1)^2\le 4\left(x^2+(y+1)^2\right)$$

از آنجا می‌توان نوشت:

$$x^2+(y+\frac{5}{3})^2\ge\frac{16}{9}$$

بنابراین مجموعهٔ A محیط و خارج دایره به مرکز $C(0,-\frac{5}{3})$ و به شعاع $\frac{4}{3}$ را مشخص می‌کند.

۱۲-۵-۱۱ تمرین.

۱. فرض کنید $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعداد مختلط باشند، در این صورت خواص زیر برقرارند:

الف) $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1||z_2|\cdots|z_m|$

ب) $|z^n| = |z|^n$

ج) $Re(z) \le |z|$

د) $|z| = |\bar{z}|$

هـ) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

و) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + \cdots + |z_n|$

ز) $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ یا $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

ح) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$

۲. اگر $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 3 - 2i$ و $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ اعداد مختلط باشند، هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

الف) $|3z_1 - 4z_2|$

ب) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2$

۳. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $1 - i$

ب) $-1 + i$

ج) 1

د) $2i$

۴. فرض کنید $z = x + iy$ و $|z - 1 + i| = 1$. مکان z را تعیین کنید.

۵. مکان هندسی نقاط $z = x + iy$ را در حالات زیر تعیین کنید.

الف) $|z + 1| = |z - 1|$

ب) $|z + i| = |z - 2|$

۶. نشان دهید که $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

۷. فرض کنید z_1، z_2، z_3 سه عدد مختلط ناصفر باشند به طوری که:

$$z_1+z_2+z_3=0 \quad , \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|$$

ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0$ ب) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

۸. معادله زیر را برحسب تابع مزدوج بیان کنید:

$$2x+y=5$$

۹. هر عددی که ریشهٔ معادله‌ای به فرم زیر باشد:

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+az+a_0=0$$

که در آن $a_i \in R$, $0 \le i \le n$، آن را یک عدد جبری می‌نامیم.

ثابت کنید $z=\sqrt[3]{4}-2i$ جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|z|=1$، آنگاه برای هر دو عدد مختلط a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است داریم:

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$$

۱۱. اگر $z=x+iy$، نشان دهید که:

$$|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le\sqrt{2}|z|$$

۱۲. نشان دهید $|z_1-z_2|=|1-\bar{z}_1 z_2|$ اگر و تنها اگر $|z_1|=1$ یا $|z_2|=1$.

۱۳. فرض کنید $z\neq 0$ عدد مختلط باشد. ثابت کنید $|z|=1$، اگر و فقط اگر $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

۱۴. مکان عدد مختلط z را چنان پیدا کنید که اعداد مختلط z و iz و i همواره بر یک استقامت باشند.

۱۵. اگر A و C اعداد حقیقی و $AC<0$ و $D=\alpha+i\beta$ و $z=x+iy$ و $Az\bar{z}+Dz+\overline{Dz}+c=0$ باشد، نشان دهید مکان z دایره‌ای است به مرکز $(-\frac{\alpha}{A},\frac{\beta}{A})$، و شعاع آن به صورت $R=\sqrt{\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{A^2}+\frac{c}{A}}$ است.

۱۶. معادله خط $Ax+By+C=0$ را به شکل مختلط بنویسید.

۱۷. معادله دایره $x^2+y^2+2x+2y=0$ را به فرم مختلط بنویسید.

۱۸. اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، به طوری که $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$. ثابت کنید اختلاف آرگومان‌های z_1 و z_2 برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

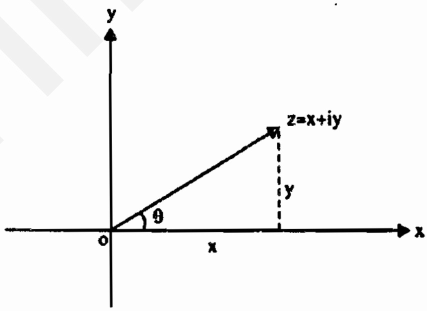
۱۹. فرض کنید $z\in\mathbb{C}$ و a و b دو عدد حقیقی نابرابر باشند. نشان دهید اگر $|z+ai|=|z+bi|$، آنگاه $z-\bar{z}=-(a+b)i$.

۱۲-۶ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

فرض کنید $z=x+iy$ یک عدد مختلط باشد، ابتدا z را در صفحهٔ مختلط معیّن کنید و فرض کنید $\theta=\operatorname{Arg} z$ و $r=|z|$ طول عدد z باشد. با توجه به شکل (۱۲-۴) درستی روابط $x=|z|\cos\theta$ و $y=|z|\sin\theta$ بدیهی است. با قرار دادن $|z|\cos\theta$ و $|z|\sin\theta$ در $z=x+iy$ داریم:

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

فرم اخیر را نمایش مثلثاتی عدد مختلط z می‌نامیم.



شکل ۱۲-۴

۱۲-۶-۱ مثال. اعداد زیر را به فرم مثلثاتی بنویسید:

$$z_1 = ۱ \quad , \quad z_۲ = ۱ - i \quad , \quad z_۳ = -i$$

حل. طول اعداد z_1 و $z_۲$ و $z_۳$ به ترتیب برابر $|z_1| = ۱$، $|z_۲| = \sqrt{۲}$ و $|z_۳| = ۱$ و از طرف دیگر $\operatorname{Arg}(z_1) = ۰$، $\operatorname{Arg}(z_۲) = \frac{۷\pi}{۴}$ و $\operatorname{Arg}(z_۳) = \frac{۳\pi}{۲}$.

بنابراین فرم مثلثاتی اعداد به صورت‌های زیر نوشته می‌شوند:

$$z_1 = \cos ۰ + i \sin ۰$$

$$z_۲ = \sqrt{۲}\left(\cos \frac{۷\pi}{۴} + i \sin \frac{۷\pi}{۴}\right)$$

$$z_۳ = \cos \frac{۳\pi}{۲} + i \sin \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۲-۶-۲ تمرین. اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

الف) $z_1 = -۳ + \sqrt{۳}\, i$ ب) $z_۲ = \frac{(i-۱)^۲}{i}$

ج) $z_۳ = -۱ - \sqrt{۳}\, i$

جواب را با (۱۲-۶-۲) مقایسه کنید.

۱۲-۷ توان در اعداد مختلط

۱۲-۷-۱ قضیه. فرض کنید z_1 و $z_۲$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت ثابت کنید:

الف) $|z_1 z_۲| = |z_1||z_۲|$ ب) $\operatorname{Arg}(z_1 z_۲) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_۲$

ج) اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، ثابت کنید:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \ ; \ (n \in N)$$

اثبات. الف) و ب) فرض می‌کنیم $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_۲ = r_۲(\cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲)$. ضرب $z_1 z_۲$ را در نظر بگیرید، داریم:

$$z_1 z_۲ = r_1 r_۲\left[(\cos\theta_1\cos\theta_۲ - \sin\theta_1\sin\theta_۲) + i(\sin\theta_1\cos\theta_۲ + \cos\theta_۲\sin\theta_1)\right]$$

بنابراین:

$$z_۱z_۲ = r_۱r_۲\left[\cos(\theta_۱+\theta_۲)+i\sin(\theta_۱+\theta_۲)\right]$$

لذا (الف) و (ب) به سادگی با درنظر گرفتن رابطه اخیر به دست می‌آید. زیر:

$$|z_۱ z_۲| = r_۱ r_۲ = |z_۱||z_۲|$$

$$\mathrm{Arg}(z_۱ z_۲) = \theta_۱ + \theta_۲ = \mathrm{Arg}\, z_۱ + \mathrm{Arg}\, z_۲$$

(ج) با توجه به (الف) و (ب) و با فرض $z = z_۱ = z_۲ = \cdots = z_n$ و $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ داریم:

$$z^۲ = z\cdot z = r^۲(\cos ۲\theta + i\sin ۲\theta)$$

$$z^۳ = z^۲\cdot z = r^۳(\cos ۳\theta + i\sin ۳\theta)$$

$$\vdots$$

$$z^n = z^{n-۱}\cdot z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ ;\ (n\in N)$$

۱۲-۷-۲ تذکر. رابطه‌ای که در (ج) اثبات شد، به دستور دِموآور معروف است.

۱۲-۷-۳ تمرین. ثابت کنید دستور دموآور برای $n < ۰$ صحیح نیز برقرار است.
جواب را با [۱۲-۷-۳] مقایسه کنید.

۱۲-۷-۴ تمرین. اگر $z_۱$ و $z_۲$ اعداد مختلط و $z_۲ \neq ۰$، ثابت کنید $\mathrm{Arg}(\frac{z_۱}{z_۲}) = \mathrm{Arg}\, z_۱ - \mathrm{Arg}\, z_۲$ و $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}$.

جواب را با [۱۲-۷-۴] مقایسه کنید.

۱۲-۷-۵ مثال. فرض کنید $z_۱ = ۲(\cos ۴۰ + i\sin ۴۰)$ و $z_۲ = \cos ۸ + i\sin ۸$.
مطلوبست محاسبه $\mathrm{Arg}(\frac{z_۱^۴}{z_۲^{۱۰}})$.

حل. با توجه به دستور دموآور و ۱۲-۷-۴ داریم:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_۱^{۴}}{z_۲^{۱۰}}\right) = \operatorname{Arg} z_۱^{۴} - \operatorname{Arg}(z_۲^{۱۰}) = ۴\operatorname{Arg} z_۱ - ۱۰\operatorname{Arg} z_۲ = ۱۶۰ - ۸۰ = ۸۰$$

۱۲-۷-۶ مثال. عدد $(۱+i\sqrt{۳})^{-۱۰}$ را ساده کنید.

حل. فرض کنید $z = ۱+i\sqrt{۳}$، بنابراین:

$$z = ۲(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳})$$

لذا:

$$z^{-۱۰} = ۲^{-۱۰}(\cos\frac{-۱۰\pi}{۳} + i\sin\frac{-۱۰\pi}{۳})$$

و بنابراین:

$$(۱+i\sqrt{۳})^{-۱۰} = \frac{۱}{۲^{۱۰}}(-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i) = \frac{۱}{۲^{۱۱}}(-۱+\sqrt{۳}i)$$

۱۲-۷-۷ مثال. اعداد حقیقی a و b را چنان تعیین کنید که $z = ۱-i$ ریشهٔ معادله $z^{۷} + az^{۵} + b = ۰$ باشد.

حل. ابتدا $z = ۱-i = \sqrt{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴} + i\sin\frac{۷\pi}{۴})$، حال چون z ریشه معادله است پس:

$$(\sqrt{۲})^{۷}(\cos\frac{۴۹\pi}{۴} + i\sin\frac{۴۹\pi}{۴}) + a(\sqrt{۲})^{۵}(\cos\frac{۳۵\pi}{۴} + i\sin\frac{۳۵\pi}{۴}) + b = ۰$$

در نتیجه:

$$۸\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + ۴a\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + b = ۰$$

$$۸ + ۸i - ۴a + ۴ai + b = ۰$$

$$(۸ - ۴a + b) + (۴a + ۸)i = ۰$$

بنابراین $a = -۲$ و $b = -۱۶$.

۱۲-۷-۸ مثال. با توجه به دستور دموآور، $\cos ۳\theta$ و $\sin ۳\theta$ را به ترتیب برحسب توانهایی از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسید.

۱۲-۷-۹ تمرین.

۱. ثابت کنید:

$$\left(\frac{۱+i\,tg\alpha}{۱-i\,tg\alpha}\right)^n=\frac{۱+i\,tg\,n\alpha}{۱-i\,tg\,n\alpha}\quad ; \quad (n\in N)$$

۲. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل $I=\frac{(۱+i)^n}{(۱-i)^{n-۲}}$ را محاسبه کنید.

۳. عدد مختلط $(۱+i)^n$ را به دو طریق محاسبه و نتیجه را مقایسه کنبد.

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n تساوی زیر درست است:

$$(۱+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(۱+\cos\theta-i\sin\theta)^n=۲^{n+۱}\cos^n\frac{\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}$$

۵. ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin ۴\theta}{\sin\theta}=۲\cos ۳\theta+۶\cos\theta-۴$

ب) $\cos ۴\theta=۸\sin^۴\theta-۸\sin^۲\theta+۱$

۶. مجموع‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\sin x+\sin ۲x+\cdots+\sin nx$

ب) $\cos x+\cos ۲x+\cdots+\cos nx$

۷. مطلوبست محاسبهٔ $(۱+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

۸. ثابت کنید $(\sqrt{۳}-i)^n=۲^n(\cos\frac{n\pi}{۶}-i\sin\frac{n\pi}{۶})$.

۹. هر یک از عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

ب) $[3(\cos 40 + i\sin 40)][2(\cos 80 + i\sin 80)]^{-}$

۱۰. ثابت کنید چندجمله‌ای $f(x) = (\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$ بر x^2+1 بخشپذیر است.

۱۱. ریشه‌های حقیقی $\cos x + i\sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ را بیابید.

۱۲. عدد $\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha - i\sin\alpha}$ را به صورت فرم مثلثاتی نمایش دهید. $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

۱۳. فرض کنید $z = \cos\theta + i\sin\theta$. $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ را برحسب z^n تعریف کنید.

۱۴. اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + 4 = 0$ باشد، ثابت کنید:

$$a^n + b^n = 2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})$$

۱۵. اعداد حقیقی a و b را طوری بیابید که $1+i$ ریشه معادله $z^5 + az^3 + b = 0$ باشد و ریشه دیگر آن را بدون محاسبه تعیین کنید.

۱۲–۸ ریشهٔ اعداد مختلط

۱۲–۸–۱ تعریف. عدد مختلط z را در نظر بگیرید. عدد مختلط w را یک ریشهٔ n ام عدد مختلط z می‌نامیم هرگاه $w^n = z$. در این صورت می‌نویسیم $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

۱۲-۸-۲ تذکر. برخلاف میدان اعداد حقیقی، که در آن بعضی از اعداد برای بعضی از nها ریشهٔ n ام ندارند (مثلاً اعداد منفی در میدان اعداد حقیقی ریشهٔ دوم یا ریشه زوج ندارند)، ثابت خواهیم کرد که در میدان اعداد مختلط هر عدد دارای ریشه n ام، بلکه nتا ریشهٔ n ام است. لذا برای اثبات ادعای خود قضیه زیر را می‌آوریم.

۱۲-۸-۳ قضیه. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد و $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
در این صورت:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right)\right)$$

که در آن:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

اثبات. فرض کنید $w = z^{\frac{1}{n}}$ به طوری که $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ که در آن $\rho = |w|$ و $0 \le \alpha = \operatorname{Arg} w < 2\pi$. بنابراین از فرض داریم:

$$w^n = z$$

مطابق دستور دموآور داریم:

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

از تساوی (۱) می‌توان رابطهٔ $\rho^n = r$ و یا $\rho = \sqrt[n]{r}$ را به سادگی نتیجه گرفت.
از طرفی دیگر با توجه به (۱) معادلات توأم زیر برقرارند:

$$\begin{cases} \cos n\alpha = \cos\theta \\ \sin\alpha = \sin\theta \end{cases} \qquad (2)$$

با حل معادلات مثلثاتی موجود در (۲) داریم:

$$n\alpha = 2k\pi \pm \theta \ , \ \begin{cases} n\alpha = 2k\pi + \theta \\ n\alpha = (2k+1)\pi - \theta \end{cases} \ ; \ (k \in Z)$$

در این صورت $n\alpha = 2k\pi + \theta$ جواب مشترک دستگاه (۲) می‌باشد.

بنابراین $\alpha = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}$. حال با توجه به اینکه $0 \le \alpha \le 2\pi$ برای α، n مقدار زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1) \tag{۳}$$

با جمع‌بندی مطالب بالا داریم:

$$z^{\frac{1}{n}} = w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n})\right)$$

$k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$، لذا اثبات قضیه تمام است.

۱۲-۸-۴ نتیجه. با توجه به قضیه ۱۲-۸-۳ و رابطه (۳) در اثبات آن مقادیر α به صورت‌های زیر بیان می‌شوند:

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{n} \ , \ \alpha_1 = \frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n} \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{n-1} = \frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\theta}{n}$$

در این صورت ریشه‌های n ام z به صورت‌های زیر قابل ارائه است:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n})$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n})\right)$$

$$w_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{4\pi}{n} + \frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{4\pi}{n} + \frac{\theta}{n})\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{2(n-1)\pi}{n} + \frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{2(n-1)\pi}{n} + \frac{\theta}{n})\right)$$

۱۲-۸-۵ نتیجه. با توجه به اینکه نمایش مثلثاتی هر عدد مختلط منحصر به فرد است، لذا $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ تنها ریشه‌های n ام z اند. بنابراین z دارای n ریشه n ام است.

از طرفی بنا به ۳-۸-۴، اگر w_k و w_{k+1} به ترتیب ریشه‌های n ام و متوالی z باشند، داریم:

الف) $|w_k|=|w_{k+1}|=\sqrt[n]{r}$

ب) $$Arg(w_{k+1})-Arg(w_k)=\frac{2(k+1-1)\pi}{n}+\frac{\theta}{n}-\frac{2(k-1)\pi}{n}+\frac{\theta}{n}$$

لذا:

$$Arg(w_{k+1})-Arg(w_k)=\frac{2k\pi}{n}-\frac{2k\pi-2\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}$$

۱۲-۸-۶ مثال. ریشه‌های چهارم عدد ۱ را محاسبه کنید.

حل. در واقع معادله $z^4-1=0$ را حل می‌کنیم.

$$z^4-1=0$$

$$z^4=1\ ,\quad Arg1=0\ ,\quad |1|=1$$

$$z=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[4]{1}\left[\cos(\frac{2k\pi}{4}+\frac{0}{4})+i\sin(\frac{2k\pi}{4}+\frac{0}{4})\right]$$

که در آن $(k=0,1,2,3)$.

$$z=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$k=0\quad w_0=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$k=1\quad w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$k=2\quad w_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$k=3\quad w_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

۱۲-۸-۷ مثال. (معادله دایره در صفحه مختلط) فرض کنید C دایره‌ای در صفحهٔ مختلط به مرکز $z_۰=(x_۰,y_۰)=x_۰+iy_۰$ و به شعاع r باشد. معادله دایره را در صفحه مختلط بنویسید.

حل. فرض کنید $z=(x,y)=x+iy$ نقطه دلخواه روی C باشد، لذا مطابق تعریف:

$$(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲=r^۲$$

از طرفی $|z-z_۰|^۲$ به صورت $|z-z_۰|^۲=(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲$ تعریف می‌شود، لذا معادله دایره به صورت $|z-z_۰|^۲=r^۲$ یا $|z-z_۰|=r$ بیان می‌شود.

۱۲-۸-۸ نتیجه. با توجه به آنچه که در ۱۲-۸-۵ بیان شد، می‌توان نتیجه گرفت که ریشه‌های n ام عدد مختلط روی دایره به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt[n]{r}$ قرار دارند و با توجه به اینکه $Arg(w_{k+۱})-Arg(w_k)=\frac{۲\pi}{n}$، لذا $w_۰,w_۱,\dots,w_{n-۱}$ روی دایره و به فاصله $\frac{۲\pi}{n}$ از یکدیگر قرار دارند.

۱۲-۸-۹ مثال. ریشه‌های دوم عدد $z=۱+i$ را محاسبه کنید، سپس آنها را روی دایره مشخص نمایید.

حل. در واقع معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$z^۲-(۱+i)=۰$$

$$z=\sqrt{۱+i}=\sqrt{\sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})}=\sqrt{\sqrt{۲}}[\cos(\frac{۲k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸})+i\sin(k\pi+\frac{\pi}{۸})]$$

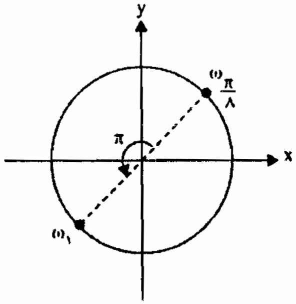
$$z=\sqrt[۴]{۲}\left(\cos(k\pi+\frac{\pi}{۸})+i\sin(k\pi+\frac{\pi}{۸})\right)$$

$$k=۰\ ,\ w_۰=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{\pi}{۸}+i\sin\frac{\pi}{۸})$$

$$k=۱\ ,\ w_۱=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۹\pi}{۸}+i\sin\frac{۹\pi}{۸})$$

ملاحظه می‌شود که $|w_\circ|=|w_۱|=\sqrt[۴]{۲}$. لذا این نقاط روی دایره به شعاع $\sqrt[۴]{۲}$ و به فاصله $\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ از یکدیگر قرار دارند.

توجه کنید که $\operatorname{Arg} w_۱=\pi+\frac{\pi}{۸}$.



۱۲-۸-۱۰ مثال. جوابهای معادله $z^۳-۱=\circ$ را تعیین کنید. از نظر هندسی محلّ ریشه‌های واحد را تعیین کنید.

حل.

$$z^۳-۱=\circ$$

$$z^۳=۱$$

$$z=\sqrt[۳]{۱}=\sqrt[۳]{\cos\circ+i\sin\circ}=۱\left(\cos(\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\circ}{۳})+i\sin(\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\circ}{۳})\right)$$

$$w_\circ=\cos\circ+i\sin\circ=۱$$

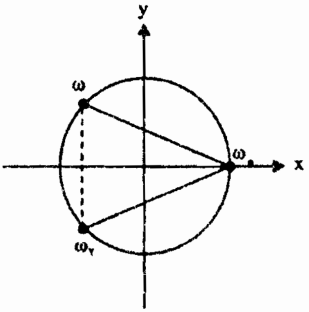
$$w_۱=\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

$$w_۲=\cos\frac{۴\pi}{۳}+i\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

حال فرض کنید $w_0 = 1$ و $w = w_1$ و $w_2 = w^2$. ملاحظه کنید داریم:

$$w_0 + w^1 + w^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$1 + w + w^2 = w_0 + w + w^2 = 0$$



۱۲-۸-۱۱ تمرین.

۱. معادله $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ را حل کنید.

۲. فرض کنید $(z \neq 1)$. در این صورت معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$$

۳. اگر w یکی از ریشه‌های موهومی، n ام واحد باشد، نشان دهید:

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$$

۴. معادله زیر را حل کنید:

$$iz^3 + 8 = 0$$

۵. ریشه‌های هر یک از اعداد زیر را به دست آورید و آنها را روی صفحه مختلط مشخص نمایید:

الف) $(-1 + i)^{\frac{1}{3}}$ ب) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{4}}$

۶. اگر کسر واقعی $\frac{p}{q}$ (p و q به‌جز ۱± مضرب مشترکی ندارند) در معادلهٔ

$$a_۰z^n + a_۱z^{n-۱} + \cdots + a_n = ۰$$

صدق کند، که در آن $a_۰, a_۱, \ldots, a_n$ اعداد صحیح هستند، نشان دهید p و q به ترتیب یکی از مضارب a_n و $a_۰$ هستند.

۷. معادله $۶z^۴ - ۲۵z^۳ + ۳۲z^۲ + ۳z - ۱۰ = ۰$ را حل کنید.

۸. ثابت کنید که مجموع و حاصلضرب تمام ریشه‌های معادلهٔ

$$a_۰z^n + a_۱z^{n-۱} + \cdots + a_n = ۰$$

که در آن $a \neq ۰$، به ترتیب برابر $-\frac{a_۱}{a_۰}$ و $\frac{(-۱)^n a_n}{a_۰}$ می‌باشند.

۹. اگر $n = ۲,۳,۴,\ldots$، ثابت کنید:

الف) $\cos\frac{۲\pi}{n} + \cos\frac{۴\pi}{n} + \cos\frac{۶\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{۲(n-۱)\pi}{n} = -۱$

ب) $\sin\frac{۲\pi}{n} + \sin\frac{۴\pi}{n} + \sin\frac{۶\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n} = ۰$

۱۰. معادله $(۱+z)^۵ = (۱-z)^۵$ را حل کنید. $(z \neq ۱)$

۱۱. هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید

الف) $\sqrt[۶]{\frac{۱-i}{۱+i\sqrt{۳}}}$ ب) $\sqrt[۸]{\frac{۱+i}{\sqrt{۳}-i}}$

ج) $\sqrt[۶]{\frac{۱-i}{\sqrt{۳}+i}}$

۱۲. معادلهٔ $(x+i)^n-(x-i)^n=۰$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

۱۳. منحنی‌ای بیابید که معادله‌اش $|z+c|+|z-c|=۲a$ باشد، که در آن c و a اعداد حقیقی مثبت‌اند به طوری که $a>c$.

۱۴. معادله خط مستقیم $Ax+By+C=۰$ را به شکل مختلط بنویسید.

۱۵. معادله دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطه $۱-i$ و $۲i$ و $۱+i$ می‌گذرد.

۱۶. مکان z را در هر حالت تعیین کنید:

الف) $|z-i|=۱$ ب) $|z-۱-i|=۱$

ج) $|z-۲i|=\frac{۱}{۲}$

منابع و مآخذ

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال، لوئیس لیتهلد

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال، جورج توماس

۳. حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریچارد ا. سیلورمن

۴. حساب دیفرانسیل و انتگرال، رابرت ا. آدامز

۵. حساب دیفرانسیل و انتگرال، ایزاک مارون

۶. حساب دیفرانسیل و انتگرال، دکتر مسعود نیکوکار

۷. حساب دیفرانسیل و انتگرال، مهران اخباریفر ـ ارشک حمیدی

۸. ۱۶ بخش درس ریاضیات بنیادی دانشگاه آزاد ایران سابق

۹. ریاضیات پایه، دکتر محمدرضا رفسنجانی صادقی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آ – الف

آزمون	test
ـ نسبت	- ratio
ـ و خطا	trial - and - error
آمیختن	combine
آرگومان	argument
ارتعاش	vibration
استدلال قیاسی	deductive argument
استقراء	induction
اشتراک	intersection
انتقال	translation
انتگرال	integral
ـ ریمان	- Riemann
ـ ناسره	- Improper
ـ معین	- definite
ـ نامعین	- indefinite
انتگرال‌گیری	indefinite
ـ به روش کسرهای ساده	- by partial fraction
ـ به روش جزء به جزء	- by parts
انحنا	deflection
اندازه‌پذیر	rectifiable
انفصال	discontinuity

ب

بازخور	feedback
بازتاب	reflection
بازه، فاصله	interval
بالقوه	potential
بدوی	initial
برد	range
بردار	vector
بعد	dimension
بیضی	ellipse
بیضی‌گون، بیضی‌وار	ellipsoid
بینهایت	infinity, infinite
بینهایت کوچک	infinitesimal

پ

پایا، ثابت	costant
پایه	basis
پروانه	leminscate
پیچک‌نما	cissoid
پیوستگی	continuity
ـ یکنواخت	- uniform
پیوسته	continuous

ت

تابع	function
ـ اولیه	- primitive
ـ برداری	- vector
ـ بزرگترین عدد صحیح	- greatest integer
ـ پلکانی	- step
ـ جبری	- algebraic
ـ چندجمله‌ای	- polynomial
ـ حقیقی	- real
ـ زوج	- even
ـ صعودی	- increasing
ـ علامت	- signum
ـ غیرجبری یا متعالی	- transcendental
ـ فرد	- odd
ـ گویا	- rational

ـ مرکب	- composite
ـ مختلط	- complex
ـ وارون	- inverse
ـ منفصل یا ناپیوسته	- discontinuous
ـ نزولی	- decreasing
ـ نمایی	- exponential
تبصره	remark
تحویل‌ناپذیر	irreducible
تخمین	estimate
ترکیب خطی	linear combination
تصاعد هندسی	geometric progression
تصویر	image
تغییر متغیر	change of variable
تقریب	approximation
تقارن	symmetry
تقعر	concavity
تک‌مقداری	single valued
تناظر	correspondence
توابع	functions
ـ مقدماتی	- elementary
ـ مستدیر	- circular
ـ هذلولی یا هیپربولیک	- hyperbolic
ج	
جابجایی‌پذیر	commutative
جاذبهٔ ثقلی	gravitational attraction
جسم صلب	rigid body
جفت مرتب، زوج مرتب	ordered pair
جواب	solution
چ	
چرخنما	cycloid
چگالی	density
چندجمله‌ای	polynomial
ح	
حاصلضرب	product
ـ عددی	- scalar
حد	limit
ـ چپ	- left
ـ راست	- right
ـ نهایی	- extremum
حساب انتگرال	integral calculus
حساب دیفرانسیل	differential calculus
حساب دیفرانسیل و انتگرال	calculus
حساس، بحرانی	critical
حلزونی	spiral
خ	
خطا	error
ـ گرد کردن یا سرراست کردن	- round of
خط	line
ـ قاطع	- secant
ـ مرکز	- center
ـ مماس	- tangent
ـ قائم	- normal
خطی	linear
د	
داده‌ها	data
دامنه	extent
دایره	circle
ـ یکه	- until
درونچرخنما	hypocycloid
دستور	formula
دلنما	caedioid
دو به دو رانع	mutually exclusive
دیفرانسیل	differential
ر	
رأس	vertex
رفتار	behavior
رویه، سطح	surface
ریشه	root
ز	
زاویه تابش	angle of incidence

زیرنویس	subscript
س	
سرعت لحظه‌ای	instantaneous velocity
سرعت متوسط	average velocity
سطح دوار	surface of revolution
سوی	direction
سهموی	parabolic
سهمی	parabola
ش	
شرایط اولیه	initial conditions
شعاع	radios
شعاع نخستین	initial rag
شیب، ضریب زاویه	slope
ص	
صدقسمتی	centigrade
صفحه	plane
صورت درجه دوم	quadratic form
ض	
ضدمشتق	anti derivative
ضرب	product
ط	
طول	longitude
طول قوس	arc length
ع	
عاد کردن	to divide
عامل	factor
عدد	number
ـ اصم یا گنگ	- irrational
ـ جبری	- algebraic
ـ حقیقی	- real
ـ گویا	- rational
ـ مختلط	- complex
ـ مطلق	- pure
عمودمنصف	perpendicular bisector
عنصر حجم	volume element

ف	
فاصله	interval
ـ باز	- open
ـ بسته	- closed
فضا	space
ق	
قائم	normal
قاعده	rule
ـ ذوزنقه‌ای	- trapezoidal
ـ زنجیری	- chain
قانون شرکت‌پذیری	associative law
قدر مطلق	absolute value
قسمت، جزء	part
ـ حقیقی	- real
ـ موهومی	- imaginary
قضیه	theorem
ـ مقدار میانگین	- mean value
ـ مقدار میانی	- intermediate value
قطاع	sector
قطعه به قطعه پیوسته	piecewise continuous
قلمرو	domain
قید	restriction (constraint)
ک	
کاربرد	application
کانون	focus
کران‌دار	bounded
ـ از بالا	- above
ـ از پائین	- below
کشش	tension
گ	
گروه	group
گشتاور	moment
ل	
لایه‌های استوانه‌ای	cylindrical shells
لگاریتم طبیعی	natural logarithm

لم	lemma
م	
ماکزیمم	maximum
ـ مطلق	- absolute
ـ نسبی	- relative
مبین	discriminant
متعامد	perpendicular
متغیر	variable
متقارن	symmetric
متوازی	parallel
مجانب	asymptote
مجموع	sum
ـ بالایی	- upper
ـ پایینی	- lower
محدب	convex
محور	axis
مختصات	coordinates
ـ دکارتی	- Cartesian
ـ قطبی	- polar
مرتب	ordered
مرکز جرم	center of mass
مزدوج مختلط	complex conjugate
مساحت سطح	surface area
مسیر	path
مشتق	derivative
ـ چپ	- left
ـ راست	- right
مشتق‌پذیر	differentiable
مشتق‌گیری	differentiation
ـ ضمنی	- implicit
ـ لگاریتمی	- logarithmic
مشتق یک‌طرفه	one sided derivative
معادلات	equations
ـ پارامتری	- parametric
ـ دیفرانسیل معمولی	- ordinary differential
مقدار	value
مقیاس	scale
مکان هندسی	locus
منحصر به فرد	unique
منحنی	curve
مؤلفه	component
موهومی	imaginary
میل، زاویه میل	angle of inclination
مینیمم	minimum
ـ مطلق	- absolute
ـ نسبی	- relative
ن	
ناحیه	region
نامتغیر	invariant
نامتناهی	infinite
نامساوی مثلث	triangle inequality
نتیجه	corollary
نسبت تغییرات	rate of change
نقاط تقاطع با محورهای مختصات	inter cents
نزولی	decreasing
نقطه	point
ـ بحرانی	- critical
ـ درونی یا داخلی	- interior
ـ عطف	- inflection
نگاشت	mapping
نماد	notation
نماد	symbol
نمو	increment
نمودار	graph
نمو متوسط	average rate of increase
نهائی	terminal
نیم‌کره	hemisphere
و	
واگرا	divergent
واگرایی	divergence

هـ

هذلولی، هیپربولیک	hyperbolic
هذلولی	hyperbola
هذلولی یکانی	unit hyperbola
همسایگی	neighborhood
ـ متقارن	- symmetric
ـ محذوف	- deleted
همگرا	convergent
همگرایی	convergence
هم‌تابع	co function
هندسه	geometry

ی

یک‌به‌یک	one-to-one
یگانه، منحصر به فرد	unique
یگانگی	uniqueness

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Abscissa	طول نقطه (در دستگاه مختصات دکارتی)
Absolute	مطلق
- maximum	ـ ماکزیمم
- minimum	ـ مینیمم
- value	ـ قدر
addition	جمع
algebraic function	تابع جبری
algebraic number	عدد جبری
alternating series	سری متناوب
analytic	تحلیلی
- function	ـ تابع
- geometry	ـ هندسه
angle of inclination	زاویه شیب، زاویهٔ میل
antiderivative	تابع اولیه، ضدمشتق
application	کاربرد
approximation	تقریب
arc length	طول قوس
Argument	آرگومان، شناسه
associative law	قانون شرکت‌پذیری
asymptote	مجانب
average	متوسط، میانگین
- rate	ـ نسبت
- rate of increase	ـ نمو
- velocity	ـ سرعت

B

basis	پایه
behavior	رفتار
Binomial theorem	قضیهٔ دوجمله‌ای
bounded	کران‌دار
- above	ـ از بالا
- below	ـ از پایین
boundarg conditions	شرایط مرزی
bracket	کروشه، پرانتز

C

calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
cardioid	دلنما
cartesian coordinates	مختصات دکارتی
center of gravity	مرکز ثقل
center of mass	مرکز جرم
center line	خط مرکز
centigrade	سانتی‌گراد، صدقسمتی
central	مرکزی
centeroid	مرکز، گرانیگاه
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
change of variable	تغییر متغیر
characteristic	مشخصه، سرشت‌نما
circle	دایره
- of convergence	ـ همگرایی
- of curvature	ـ انحنا
circuit	مدار
circular function	توابع مستدیر
closed interval	فاصلهٔ بسته
coefficient	ضریب

ستون	column
آمیختن	combine
جابجایی‌پذیر	commutative
مختلط	complex
ـ مزدوج	- conjugate
ـ تابع	- function
ـ عدد	- number
ـ صفحه	- plane
ـ متغیر	- variable
مؤلفه	component
تابع مرکب	composite function
محدب ـ تقعر به سمت پایین	concave down ward
مقعر ـ تقعر به سمت بالا	concave up ward
تقعر	concavity
مقاطع مخروطی	conic sections
همبند، مرتبط، یکپارچه	connected
ثابت، پایا	constant
قید	cons traint
پیوستگی	continuity
پیوسته	continu ous
همگرا	conver gent
محدب	convex
مختصات	coordinates
نتیجه، پی‌آمد	corollary
تناظر	correspondence
بحرانی، حساس	critical
نقطهٔ انحناء	curvature point
چرخنما، سیکلوئید	cycloid
استوانه‌ای	cylindrical

D

داده‌ها	data
تابع نزولی	decrea sing function
استدلال قیاسی	deductive argument
انتگرال معین	definite integral
انحنا	deflection
همسایگی محذوف	deleted neighborhood
چگالی	density
مشتق	derivative
دترمینان	determinant
مشتق‌پذیر	differentiable
حساب دیفرانسیل	differential calculus
بعد	dimension
زاویهٔ جهت‌دار	directed angle
فاصلهٔ جهت‌دار	directed distance
جهت، سو	direction
مشتق سویی	directional derivative
ناپیوستگی، انفصال	discontinuity
ناپیوسته، منفصل	discontinuous
مبین معادلهٔ درجه دوم	discriminant of a quadratic equation
توزیع، پخش	distribution
واگرایی	divergence
واگرا	divergent
قلمرو، دامنه	domain
دامنهٔ تعریف	domain of definition
قلمرو تابع	domain of a function
متغیر مجازی	dummy variable

E

لبه، کنار، نبش	edge
مؤثر	effective
کارآیی	efficiency
توابع مقدماتی	elementary function
بیضی	ellipse
بیضوی	elliptic
تخمین	estimate
تابع زوج	even function

exact equation — معادلهٔ کامل
exponential function — تابع نمایی
extent — دامنه
Extreme value — مقدار نهایی
extremum — حد نهایی (ماکزیمم یا مینیمم)

F

feed back — بازخور
focus — کانون
formula — دستور، فرمول
fraction — کسر
function — تابع

G

geometric progression — تصاعد هندسی
graph — نمودار، گراف
gravitational attraction — جاذبهٔ ثقلی
greatest integer function — تابع بزرگترین عدد صحیح
group — گروه

H

harmonic — همساز، هماهنگ، موزون
harmonic motion — حرکت هماهنگ
hemisphere — نیم‌کره
homogeneous — متجانس
hyperbola — هذلولی
hyperbolic functions — توابع هذلولی
hyperbolic paraboloid — هذلولی سهمیگون
hyperboloid — هذلولی‌وار، هذلولی‌گون
hypocycloid — هیپوسیکلوئید، درونچرخنما

I

identity function — تابع همانی، تابع بی‌اثر
image — تصویر
imaginary — موهومی
imaginary part — قسمت موهومی
implicit differntiation — مشتق‌گیری ضمنی
implicit function — تابع ضمنی، تابع غیرصریح
improper integral — انتگرال ناسره، انتگرال غیرعادی
increasing — صعودی
increasing function — تابع صعودی
increment — نمو
indefinite integral — انتگرال نامعین
independent variable — متغیر مستقل
induction — استقراء
infinite — نامتناهی، بی‌نهایت
infinitesimal — بی‌نهایت کوچک
infinity — بی‌نهایت، نامتناهی
Inflection point — نقطهٔ عطف
initial — اولیه، بدوی، نخستین
initial conditions — شرایط اولیه
initial ray — شعاع نخستین
instanteneous rate — نسبت لحظه‌ای
instanteneous velocity — سرعت لحظه‌ای
integral calculus — حساب انتگرال
integrating factor — عامل انتگرال‌گیر
integration — انتگرال‌گیری
- by partial fractions — ـ به روش کسرهای ساده
- by parts — ـ به روش جزء به جزء
inter cepts — نقاط تقاطع با محورهای مختصات
interior point — نقطهٔ درونی، نقطهٔ داخلی
intermediate value theorem — قضیه مقدار میانی
inter section — اشتراک، فصل مشترک
interval — فاصله، بازه
invariant — ثابت، پایا
inverse function — تابع معکوس، تابع وارون
irrational number — عدد اصم، عدد گنگ
irreducible — تجزیه‌ناپذیر
iso thermal — همدما، هم‌درجه

K

kilogram — کیلوگرم
kinetic energy — انرژی جنبشی

L

left derivative — مشتق چپ
left-handed — چپ‌گرد
left limit — حد چپ
lemma — لم، قضیه فرعی
leminscate — پروانه، لمینکات
limit — حد
line integral — انتگرال منحنی‌الخط
linear algebra — جبر خطی
linear combination — ترکیب خطی
linear dependence — وابستگی خطی
linear independence — استقلال خطی
linear mapping — نگاشت خطی
linear part — قسمت خطی
linear tran formation — تبدیل خطی
locus — مکان هندسی
logarithmic differentiation — مشتق‌گیری لگاریتمی
longitude — طول
Lower sum — مجموع پایینی

M

major axis — محور بزرگتر
mapping — نگاشت
mean valve theorem — قضیهٔ مقدار میانگین
minor axis — محور کوچکتر
moment of inertia — گشتاور ماند
mutually exclusive — دوبه‌دو ناسازگار، مانعةالجمع

N

natural logarithm — لگاریتم طبیعی
neighborhood — همسایگی
nonempty — ناتهی
nontrivial solution — جواب غیربدیهی
normal — نرمال
normal component — مؤلفه نرمال
normal curve — منحنی نرمال
notation — نماد
Number system — دستگاه اعداد

O

odd function — تابع فرد
one sided derivative — مشتق یک‌طرفه
open interval — فاصلهٔ باز
operator — عملگر، اپراتور
order — مرتبه
ordered n-tuple — n_تائی مرتب
ordered pair — زوج مرتب، دوتایی مرتب
ordinary differential equation — معادلهٔ دیفرانسیل معمولی
ordinate — عرض نقطه (در دستگاه مختصات دکارتی)
orthogonal projection — تصویر عمودی، تصویر قائم

P

parabola — سهمی
parabolic — سهموی
paraboloid — سهمیگون
parallel — متوازی، موازی
parametric equations — معادلات پارامتری
partial derivative — مشتق جزئی (نسبی)
partial fraction — کسر ساده
partial sum — مجموع جزئی
path — مسیر
Perpendicular — متعامد
bisector — عمودمنصف
piecewise-continuous — پاره پیوسته، قطعه به قطعه پیوسته
plane curve — منحنی مسطح
polar coordinates — مختصات قطبی

polar moment of inertia	گشتاور قطبی ماند
polynomial function	تابع چندجمله‌ای
primitive function	تابع اولیه
principal normal	قائم اصلی
principal value	مقدار اصلی
pure number	عدد مطلق

Q

quadratic equation	معادله درجه دوم

R

radius of convergence	شعاع همگرایی
radius of curvature	شعاع انحناء
radius of gyration	شعاع چرخش

S

scalar	عددی، اسکالر
scale	مقیاس
second order derivative	مشتق مرتبهٔ دوم
secant line	خط قاطع
sector	قطاع
Stgnum function	تابع علامت
simultaneovs	همزمان مشترک
single valued	تک‌مقداری
singular point	نقطه منفرد
slope	شیب، ضریب زاویه
smooth	هموار
spherical coordinates	مختصات کروی
spiral	حلزونی
step function	تابع پلکانی
subscript	زیرنویس
surface area	مساحت رویه، مساحت سطح
surface of revolution	سطح دوار
symbol	نماد، سنبل
symmetric neighborhood	همسایگی متقارن
symmetry	تقارن

T

tangent	مماس
tangent line	خط مماس
tongention	مماسی
tongention component	مؤلفه مماسی
tension	کشش
terminal	نهایی
to divide	عاد کردن، شمردن
torus	چنبره
Transcendental function	تابع غیرجبری، تابع متعالی
translation	انتقال
trape zoidal rule	قاعدهٔ ذوزنقه‌ای
trial-and-error	آزمون و خطا
triangle inequality	نامساوی مثلثی
trivial solution	جواب بدیهی
turning point	نقطهٔ برگشت

U

uniform continuity	پیوستگی یکنواخت
unique	منحصر به فرد، یگانه
uniqueness	یگانگی، یکتایی
unit	یکه، یکانی
unit circle	دایره یکانی، دایره‌ای به شعاع ۱
unit hyper bola	هذلولی یکانی
unit vector	بردار یکه
upper sum	مجموع بالایی

V

variable	متغیر
vector	بردار
vertex	رأس
vibration	ارتعاش
volume	حجم
volume element	عنصر حجم

W

width عرض، پهنا

without loss of generality

بدون از دست دادن عمومیت

X

x-axis

محور x ها، محور طولها در دستگاه مختصات

x-component مؤلفهٔ x

xy-plane صفحهٔ xy

Y

y-axix

محور y ها، محور عرضها در دستگاه مختصات

y-coordinate مختص y

y-intercept عرض از مبدأ

Z

zero function تابع صفر

zero polynomial چندجمله‌ای صفر

zone ناحیه، منطقه

خوانندهٔ محترم

این پرسشنامه به منظور ارتقای کیفیت کتابهای درسی و رفع نواقص آنها تهیه شده است. دقت شما در پاسخگویی به این پرسشنامه در پایان هر نیمسال ما را در تحقق این هدف یاری خواهد کرد.

نام کتاب .... نام مؤلف/مترجم .... سال انتشار ....

وضعیت پاسخگو: عضو علمی پیام‌نور ☐ عضو علمی سایر دانشگاهها ☐ رشتهٔ تخصصی .... سابقهٔ تدریس ....

دانشجوی پیام‌نور ☐ دانشجوی سایر دانشگاهها ☐ رشتهٔ تحصیلی .... ورودی سال ....

سؤال	خیلی زیاد	زیاد	کم	بسیار کم
۱.آیا از زمان تحویل و نحوهٔ دسترسی به کتاب راضی بودید؟				
۲.آیا حجم کتاب با توجه به تعداد واحد مناسب بود؟				
۳.آیا راهنماییهای لازم برای مطالعهٔ کتاب منظور شده بود؟				
٤.آیا در ترتیب مطالب کتاب سلسله مراتب شناختی (آسان به مشکل) رعایت شده بود؟				
۵.آیا تقسیم‌بندی مطالب در فصلها یا بخشها متناسب و بجا بود؟				
٦.آیا متن کتاب روان و ساده و جمله‌ها قابل فهم بود؟				
۷.آیا به روز بودن مطالب و آمارها رعایت شده بود؟				
۸.آیا مطالب تکراری داشت؟				
۹.آیا پیوستگی مطالب با درسهای پیش‌نیاز رعایت شده بود؟				
۱۰. آیا مثالها، شکلها، نمودارها، جدولها و ... گویا بودند و درفهم مطلب تأثیر داشتند؟				
۱۱. مطالعهٔ هدفهای کلی، آموزشی/ رفتاری تا چه اندازه به درک بهتر شما کمک کرد؟				
۱۲. آیا خودآزماییهای کتاب به‌گونه‌ای بود که تمام مطالب درسی را شامل شود؟				
۱۳. آیا پاسخ خودآزماییها و تمرینها کامل و گویا بود؟				
١٤. چقدر با غلطهای املایی و اشکالهای چاپی مواجه شدید؟				
۱۵. کیفیت چاپ و صحافی کتاب چگونه بود؟				
١٦. آیا طرح روی جلد کتاب مناسب بود؟				
۱۷. چنانچه از وسایل کمک‌آموزشی از قبیل نوار، فیلم، لوح فشرده و ... استفاده کرده‌اید، آیا به درک بهتر شما کمک کرده است؟				
۱۸. تا چه اندازه این کتاب شما را از حضور در کلاس بی‌نیاز کرد؟				

لطفاً چنانچه با اشکالهای تایپی یا محتوایی و مطالب تکراری مواجه شده‌اید، فهرستی از آنها را با ذکر شمارهٔ صفحه ضمیمه کنید.

در مجموع کتاب را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ عالی ☐ خوب ☐ متوسط ☐ ضعیف ☐

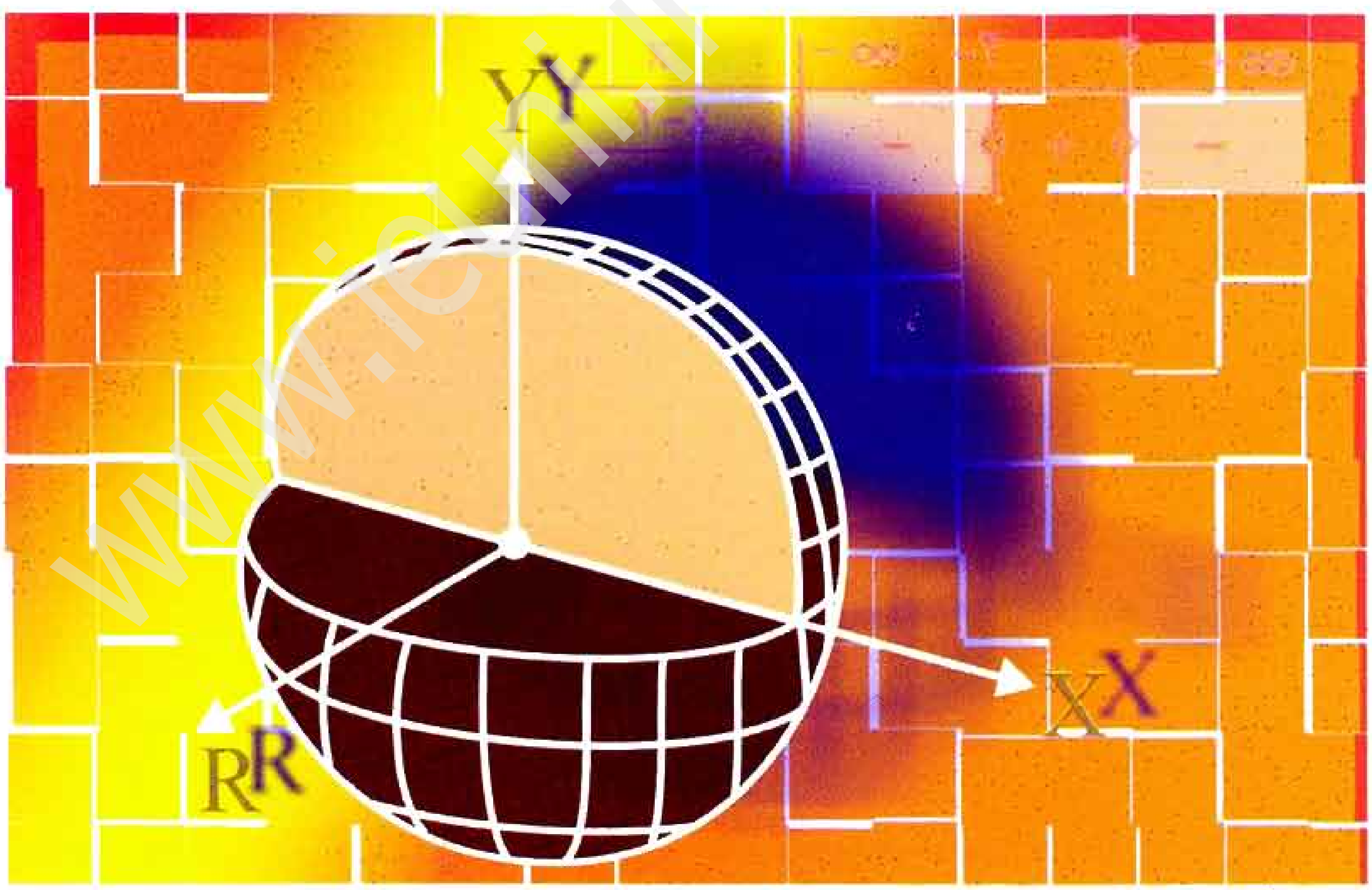
در صورت تمایل سایر پیشنهادهای خود را بنویسید.

این پرسشنامه را پس از تکمیل از کتاب جدا کنید و به قسمت آموزش مرکز تحویل دهید یا مستقیماً به نشانی تهران ۱۹۵٦۹- صندوق پستی ٤٦۹۷-۱۹۳۹۵، مدیریت تدوین کتاب ارسال فرمایید.

با تشکر

مدیریت تدوین کتاب

دانشگاه پیام نور



دانشگاه پیام نور ۱۱۹۴
گروه ریاضی (۱۰۴/د)