

فصل ۱

آمار و احتمال

بنویسید، زیرا شما نمی‌توانید جز با نگارش دانش را حفظ و از

آن نگهداری کنید. امام صادق (ع)

تمرین ۱: فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روانشناسی یا تعلیم و تربیت مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

حل: واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی یا ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند بنابراین تعداد انتخاب ها :

$$30 + 25 = 55$$



تمرین ۲: خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود.

الف) خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟

ب) همه حالت های ممکن را که او می تواند به صورت رایگان یا پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید.

حل الف: واضح است که او می تواند یکی از ۲ راه رایگان یا ۳ راه پرداخت هزینه را انتخاب کند. بنابراین تعداد انتخاب ها:

$$2 + 3 = 5$$

حل ب: { سرویس بیمارستان ، پیاده روی ، تاکسی ، اتوبوس ، مترو }



اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد، طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

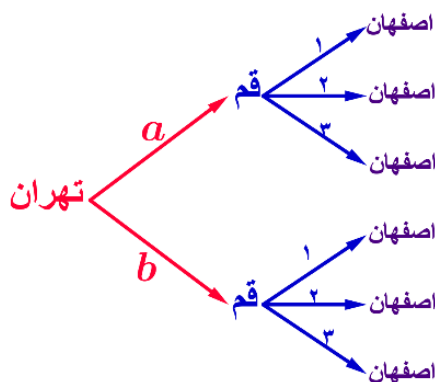
به عبارت دیگر: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

تمرین ۳: شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیمای و ۲ اتوبوس متفاوت برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.

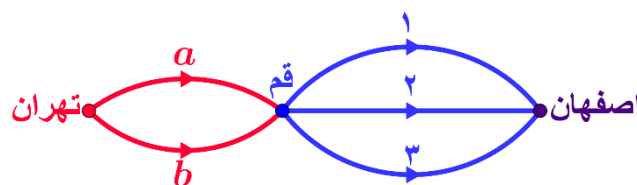
تمرین ۴: امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران یا آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیبه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از ۳ نوع آب میوه هویج، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

تمرین ۵: شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین چهار خودکار با رنگ های مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه روان نویس با رنگ های متمایز انتخاب کنید؟

تمرین ۶: شخصی می خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد که از قم عبور کند. اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر (به نام های a و b) و از قم به اصفهان ۳ مسیر (به نام های ۱ و ۲ و ۳) وجود داشته باشد. این شخص به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان (به شرط گذر از قم) سفر کند؟



حل: به کمک شکل زیر می توان تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان را تعیین

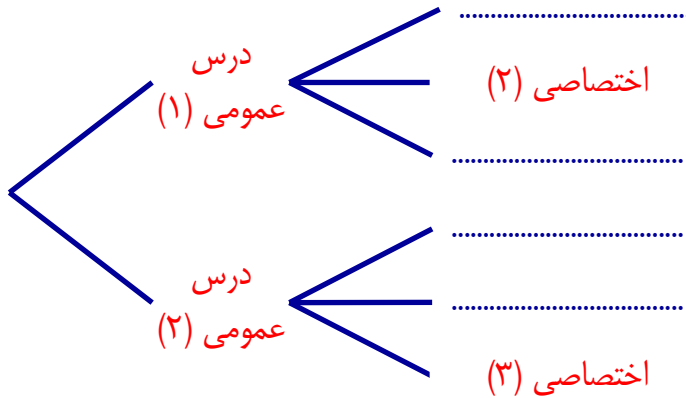


به کمک رسم نمودار زیر می توان این نتیجه را نیز تأیید کرد. پنین نموداری را نمودار درختی می نامند. طبق این نمودار از تهران به اصفهان به شرط گذر از قم ۶ مسیر متفاوت وجود دارد.



تمرین ۷: فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

حل: با کامل کردن نمودار زیر می توان به سؤال بالا پاسخ داد.



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به = × طریق امکان پذیر است.

.....

اصل ضرب: اگر کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله دوم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

به عبارت دیگر: اگر بتوان عملی را طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، و در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است).

.....

تمرین ۸: پشمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: «مریم، گلایل، زنبق و رز». شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: «گردویی، نارگیلی و کشمش». او چند انتخاب دارد؟

تمرین ۹: مدیر عامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیر عامل به چند طریق می تواند فقط از یکی از اعضای این دو گروه مشورت بگیرد؟

ب) اگر مدیر عامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟



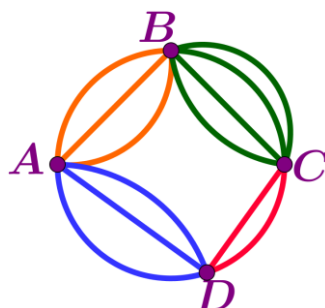
تمرین ۱۰: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل: دو حرف اول و آخر فارسی و حرف وسط فارسی یا دو حرف اول و آخر انگلیسی و حرف وسط فارسی است.

$$\left. \begin{array}{l} 32 \times 26 \times 32 = \dots\dots\dots \\ 26 \times 32 \times 26 = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots + \dots\dots\dots =$$



تمرین ۱۱: مطابق شکل زیر میان چهار شهر A, B, C, D راه هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:



الف) از شهر A به شهر C و B از طریق شهر سفر کرد؟

$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C \quad 3 \times 4 = 12$$

حل:

ب) از شهر A به شهر C شهر سفر کرد؟

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} C \\ A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{2} C \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \times 4 = 12 \\ 3 \times 2 = 6 \end{array} \Rightarrow 3 \times 4 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18$$

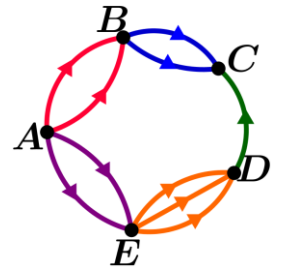
حل:

پ) از شهر B به شهر D شهر سفر کرد؟

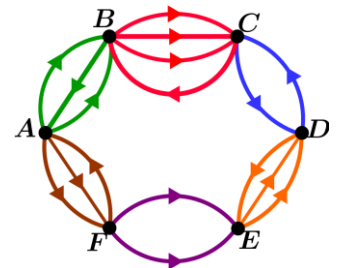
$$\left. \begin{array}{l} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{3} D \\ B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} D \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 2 = 8 \end{array} \Rightarrow 3 \times 3 + 4 \times 2 = 9 + 8 = 17$$

حل:

تمرین ۱۲: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهرهای A, B, C, D, E باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت؟



تمرین ۱۳: اگر شکل زیر نشان دهنده جاده های بین شهرهای A, B, C, D, E, F باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر D رفت؟



تمرین ۱۴: با حروف کلمه « خوزستان » چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

فاکتوریل

فرض کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

اگر $n = 0$ باشد. در این صورت $0! = 1$ اگر $n = 1$ باشد. در این صورت $1! = 1$

اگر $n > 1$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است.

$$n! = n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

یعنی:

تمرین ۱۵: مانند نمونه، هر قسمت را کامل کنید.

الف) $8! = 8 \times \overbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{5!} = 8 \times 5! = 6!$

پ) $10! =$ ت) $n! =$

تمرین ۱۶: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $4! \times 2 = \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{4!} \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{3!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!}} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} =$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} =$

$$\text{ث) } \frac{12!}{8! \times 10} =$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} =$$

تمرین ۱۷: حاصل ضرب های زیر مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$$

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 =$$

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 =$$

$$\text{ت) } 8 =$$

$$\text{ث) } n(n-1) =$$

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیاء می گوئیم.

تمرین ۱۸: اگر افراد A، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

A یا B یا C

یکی از دو نفر باقی مانده

یک نفر باقی مانده

۳

×

۲

×

۱

= ۶

حل:

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک **جایگشت** n تایی از آن n شیء می نامیم، و تعداد این جایگشت ها برابر است با n!.

تمرین ۱۹: ثابت کنید تعداد کل جایگشت های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از سمت چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)$ انتخاب داریم و مکان بعدی $(n-2)$ انتخاب و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

یک انتخاب باقی مانده	...	$(n-2)$ انتخاب	$(n-1)$ انتخاب	n انتخاب
-------------------------	-----	----------------	----------------	------------

$$n! = 1 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$



تمرین ۲۰: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

یک رقم باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۵ باقی مانده
-------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

$$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

حل:



تمرین ۲۱: ۸ نامه مختلف را به چند طریق می توان در ۸ پاکت مختلف قرار داد؟



تمرین ۲۲: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۶۰۰ می توان نوشت؟



تمرین ۲۳: با حروف کلمه «دیرستان» بدون تکرار حروف،

(الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی باشد.

ب) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی نباشد.

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به شرط آنکه حرف اول ی و حرف آخر ت باشد.



تمرین ۲۴ : با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

الف) چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می توان نوشت؟

حل:

یکی از رقم ۵ که صفر نیست	یکی از رقم ۵ باقی مانده	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده
-----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \times 4! = 600$$

ب) چند عدد پنج رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

حل:

یکی از رقم ۴ که صفر نیست	یکی از رقم ۴ باقی مانده	یکی از رقم ۳ باقی مانده	یکی از رقم ۲ باقی مانده	یکی از رقم ۳ فرد
-----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------

$$4 \times 3 \times 2 \times 3 = 288$$

پ) چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

حل:

روش اول (غیر مستقیم): تعداد اعداد پنج رقمی زوج - تعداد ارقام پنج رقمی = تعداد اعداد پنج رقمی زوج

$$600 - 288 = 312 = \text{تعداد اعداد پنج رقمی زوج}$$

روش دوم (مستقیم): اعداد زوج را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم آنهایی که یکانشان صفر است و آنهایی که یکانشان اعداد زوج غیر صفر است.

یکان صفر باشد	یکی از ۲ رقم باقی مانده	یکی از ۳ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم باقی مانده	یکی از ۵ رقم که صفر نیست
---------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

یکی از ۲ رقم زوج غیر صفر	یکی از ۲ رقم باقی مانده	یکی از ۳ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم باقی مانده	یکی از ۴ رقم که صفر نیست
--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------

$$2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 = 192$$

۳۱۲ عدد زوج می‌توان ساخت

$$(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2) = 120 + 192 = 312$$

پ) چند عدد پنج رقمی و مضرب پنج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

فصل ۱

.....

تمرین ۲۵ : با ارقام ۷, ۹, ۶, ۰

الف) چند عدد سه رقمی (با تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۱۳

ت) چند عدد سه رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

تمرین ۲۶: با ارقام ۱ تا ۷ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

تمرین ۲۷: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تمرین ۲۸: به چند طریق می توانیم ۳ شیء متمایز را از بین n شیء متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

حل: برای مکان اول از سمت چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)$ انتخاب داریم و مکان بعدی $(n-2)$ انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

n انتخاب

$n-1$ انتخاب

$n-2$ انتخاب

$$n \times (n-1) \times (n-2) = n \times (n-1) \times (n-2)$$

حال می توانیم جواب $n \times (n-1) \times (n-2)$ را طبق تمرین های قبلی به صورت زیر بنویسیم:

$$n \times (n-1) \times (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

تمرین ۲۹: در حالت کلی نشان دهید تعداد انتخاب های r شیء متمایز را از بین n شیء متمایز ($r \leq n$)، که جا به جایی

شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$

حل: برای مکان اول از سمت چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)$ انتخاب داریم و مکان بعدی $(n-2)$ انتخاب و ... و آخرین مکان $(n-r+1)$ داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است با:

$$\boxed{n \text{ انتخاب}} \times \boxed{(n-1) \text{ انتخاب}} \times \boxed{(n-2) \text{ انتخاب}} \times \dots \times \boxed{(n-r+1) \text{ انتخاب}}$$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$$

حال می توانیم جواب $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$ را طبق تمرین های قبلی به صورت زیر بنویسیم:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

جایگشت r شیء از n شیء

تعداد جایگشت های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء متمایز را که ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم باشد، با $P(n, r)$ نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

زیر محاسبه می شود:

تمرین ۳۰: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چین این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

۱۵ حل:

تمرین ۳۱: با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

.....

تمرین ۳۲: چند کلمه پنج حرفی با حروف عبارت «خوزستان پیروز» تشکیل می شود؟

.....

تمرین ۳۳: از ۱۲ نفر کارمند یک اداره، به چند طریق می توان یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

.....

تمرین ۳۴: با استفاده از ۵ نقطه چند بردار می توان ساخت؟

.....

تمرین ۳۵: تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی از مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6\}$ را به دست آورید.

حل: فرض کنید بفواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ سه رقم را انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، با به جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی را تولید نمی کند. و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت های سه تایی از ۴ رقم را بر ۶ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱, ۲, ۴	۱, ۲, ۶	۱, ۴, ۶	۲, ۴, ۶
جایگشت های سه رقم انتخاب شده	۱, ۲, ۴	۱, ۲, ۶	۱, ۴, ۶	۲, ۴, ۶
	۱, ۴, ۲	۱, ۶, ۲	۱, ۶, ۴	۲, ۶, ۴
	۲, ۴, ۱	۲, ۶, ۱	۶, ۱, ۴	۶, ۲, ۴
	۲, ۱, ۴	۲, ۱, ۶	۶, ۴, ۱	۶, ۴, ۲
	۴, ۲, ۱	۶, ۲, ۱	۴, ۱, ۶	۴, ۲, ۶
	۴, ۱, ۲	۶, ۱, ۲	۴, ۶, ۱	۴, ۶, ۲
	$A = \{1, 2, 4\}$	$A = \{1, 2, 6\}$	$A = \{1, 4, 6\}$	$A = \{2, 4, 6\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از n شیء متمایز را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

تمرین ۳۶: به چند طریق می توانیم سه کتاب از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوست خود هدیه بدهیم؟

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{3! \times \cancel{4!}} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 35$$

حل:

تمرین ۳۷: به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

.....

تمرین ۳۸: مجموعه ۸ عضوی $A = \{a, b, c, d, e, p, m, h\}$ چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

.....

تمرین ۳۹: به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹ عددی پنج رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست).

.....

تمرین ۴۰: در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

.....

تمرین ۴۱: در یک مسابقه شطرنج، ۵ شطرنج باز شرکت کرده اند. قرار است هر دو شطرنج باز یک بار با هم مسابقه بدهند. تعداد کل بازی ها چند تا است؟

تمرین ۴۲ : ۷ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارد:

(الف) چند پاره خط مختلف می توان کشید که رئوس آن ها از بین ۷ نقطه انتخاب شده باشد؟

(ب) چند مثلث می توان کشید که رئوس آن ها از بین ۷ نقطه انتخاب شده باشد؟



تمرین ۴۳ : به چند طریق می توان یک گروه ۷ نفری از بین ۵ زن و ۶ مرد تشکیل داد بطوری که :

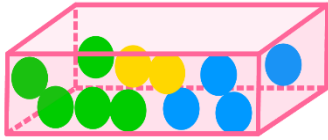
(الف) تعداد زن ها و مرد ها مهم نباشد.

(ب) شامل ۴ زن و ۳ مرد باشد.

فصل ۱

۱۹

تمرین ۴۴ : از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم. مطلوب است احتمال آن که :

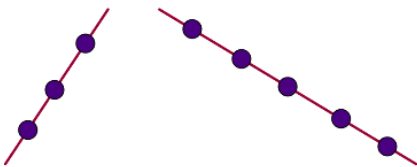


الف) هر ۳ مهره سبز باشند.

ب) هر ۳ مهره هم رنگ باشند.

پ) فقط ۲ مهره آبی باشد.

تمرین ۴۵ : هشت نقطه مطابق شکل روی دو خط قرار دارند. با این نقاط چند مثلث می توان رسم کرد.



پدیده هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت های ممکن در آنها اطلاع داریم.

تمرین ۴۶ :

- (الف) اگر تاسی را یک بار به هوا پرتاب کنیم پس از این که به زمین افتاد اعداد را می بینیم .
- (ب) اگر سکه ای را یک بار به هوا پرتاب کنیم پس از این که به زمین افتاد یا سکه را می بینیم .
- (پ) قبل از تولد یک نوزاد برای جنسیت آن دو حالت و وجود دارد .

به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می گویند.

در پدیده های تصادفی از همه نتیجه های ممکن اطلاع داریم اما اینکه کدام حالت قطعاً رخ می دهد، اطمینان نداریم.

به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می گوئیم.

تمرین ۴۷ : چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

حل: نتیجه یک مسابقه فوتبال، نتیجه یک امتحان، نتیجه یک پناختی، نتیجه یک قرعه کشی

به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.

تمرین ۴۸ : چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

حل: طلوع خورشید در پایان یک شب ، آمدن فصل بهار بعد از زمستان ، افتادن سیب بعد از جدا شدن از درخت



تمرین ۴۹ : کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

پ) مشاهده دو مهره سفید پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟



تمرین ۵۰ : از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

(اشیای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.)



فضای نمونه ای

مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن **فضای نمونه ای** می گوئیم و آن را با S نمایش می دهند.

مثال: در پرتاب یک تاس بعد از آن که به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت،



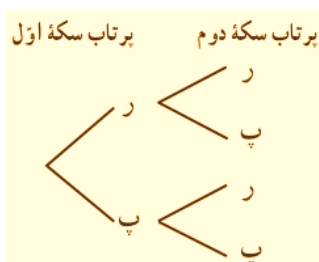
بنابراین، در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

تمرین ۵۱: فضای نمونه ای هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را بنویسید.



الف) پرتاب یک سکه

حل: $n(S) = 2 \rightarrow S = \{ر, پ\}$



ب) پرتاب دو سکه هم زمان (یا یک سکه دو بار)

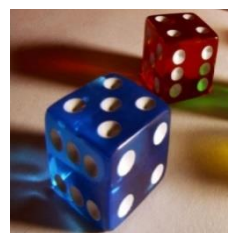
پ) پرتاب سه سکه هم زمان (یا یک سکه سه بار)



ت) پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان

تمرین ۵۲: برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)				
۳	(۳, ۱)		(۳, ۳)			
۴	(۴, ۱)			(۴, ۴)		
۵	(۵, ۱)				(۵, ۵)	
۶	(۶, ۱)					(۶, ۶)



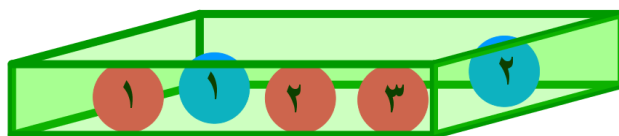
$$S = \{(1,1), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (3,6), (4,1), \dots, (4,6), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$$

$$\rightarrow n(s) = 6 \times 6 = 36$$

تمرین ۵۳: سه دوست با نام های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

تمرین ۵۴: در جعبه ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره های ۱ و ۲) وجود دارد. تعداد حالت های ممکن در انتخاب ۳ مهره را حساب کنید. و فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

$$S = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$



حل:

$$S = \{(B_1, B_2, R_1), (B_1, B_2, R_2), (B_1, B_2, R_3), (B_1, R_1, R_2), (B_1, R_1, R_3), (B_1, R_2, R_3), (B_2, B_1, R_1), (B_2, B_1, R_2), (B_2, B_1, R_3), (B_2, R_1, R_2), (B_2, R_1, R_3), (B_2, R_2, R_3), (R_1, R_2, R_3)\}$$

تمرین ۵۵: در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.



پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیر مجموعه در کلاس نهم آشنا شده اید. مجموعه A را زیر مجموعه B می گوئیم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد؛ در این صورت می نویسیم: $A \subseteq B$.

برای مثال: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

و می دانیم $A \subseteq A$ یعنی هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است و $\emptyset \subseteq A$ یعنی مجموعه تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها است.

تمرین ۵۶: تمام زیر مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

$$A_1 = \{ \} \quad A_2 = \{a\} \quad A_3 = \{b\} \quad A_4 = \{c\}$$

$$A_5 = \{a, b\} \quad A_6 = \{a, c\} \quad A_7 = \{b, c\} \quad A_8 = \{a, b, c\}$$

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای (S) را **پیشامد تصادفی** می نامند و آنرا با یک حرف بزرگ لاتین مانند A نمایش می دهند.

از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ ، پس $\emptyset$ یک پیشامد روی S است و آن را **پیشامد غیر ممکن (نشدنی)** می نامیم.

از آنجا که $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را **پیشامد حتمی** می نامیم.

تمرین ۵۷: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد بزرگ تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد کوچک تر از ۷ ظاهر شود.

حل الف: $A = \{ \}$ حل ب: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

تمرین ۵۸: سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم؛ می دانیم $\{ر، پ\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

تمرین ۵۹: مریم، ملیکا و سوگند پول هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیر مجموعه های یک عضوی S را مشخص کنید.

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

تمرین ۶۰: تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده اند؟

الف) $A = \{3, 2, 5\}$

ب) $B = \{2\}$

پ) $C = \{2, 4, 6\}$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع پیوندد.

تمرین ۶۱: دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

(ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۷ باشد.

(پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

(ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

فصل ۱

تمرین ۶۲: یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

(الف) فضای نمونه ای آن را بنویسید این مجموعه چند عضو دارد؟

(ب) پیشامد آنکه « هر دو سکه رو و تاس زوج باشد » را تشکیل دهید.

۲۷

پ) پیشامد آنکه « هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید » را تشکیل دهید.



تمرین ۶۳ : از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

الف) هر ۳ مهره سبز باشند.

ب) هر ۳ مهره همرنگ باشند.

پ) فقط ۲ مهره آبی باشد.

ت) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

ث) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

تمرین ۶۴: در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

(ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

(پ) ۳ دانش آموز هم پایه باشند.



تمرین ۶۵: از یک سبد محتوی ۵ سیب سالم و ۲ سیب فاسد، ۴ سیب به طور تصادفی بیرون می آوریم. تعداد عضوهای پیشامد «هر ۴ سیب سالم باشند» را مشخص کنید.



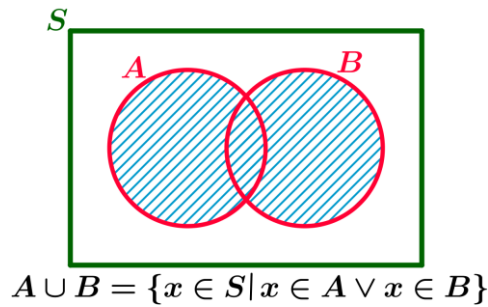
تمرین ۶۶: چهار لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشند، انتخاب می کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) هیچکدام معیوب نباشند.

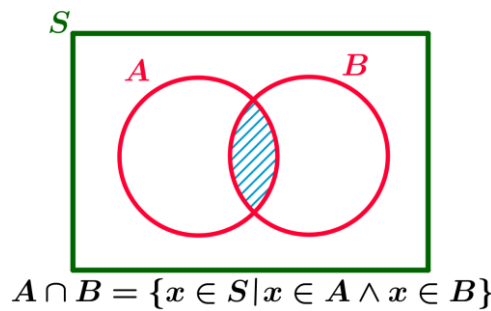
اعمال روی پیشامدها

فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند:

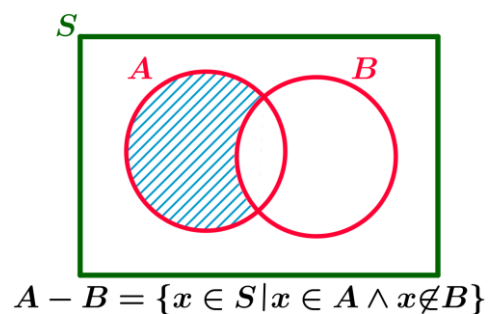
اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A یا B یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد).



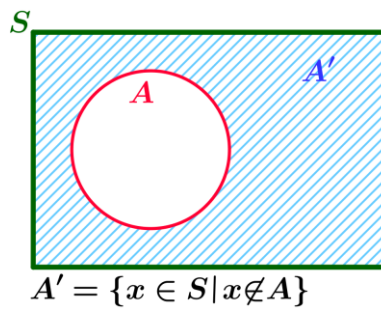
اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A و B با هم رخ دهند.



تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.



متمم یک پیشامد: پیشامد A' زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.



A و A' را دو پیشامد متمم می گوئیم و همواره داریم: $A \cup A' = S$, $A \cap A' = \emptyset$



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S (یعنی $A, B \subseteq S$) باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت پیشامدهای A و B را دو پیشامد **ناسازگار** می گوئیم.

برای مثال ، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن عدد روی تاس ، ناسازگارند.

اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $B - A = B$, $A - B = A$



فصل ۱

تمرین ۶۷: دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن را مشخص کنید، طوری که یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$$

حل:

$$B = \{(5,1), (1,5), (2,4), (4,2), (3,3)\} \Rightarrow A \cap B = \{(5,1), (1,5)\}$$

تمرین ۶۸: دو تاس را پرتاب می کنیم پیشامد آن را مشخص کنید، طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

حل:

$$B = \{(3,1), (1,3), (2,2)\} \Rightarrow A \cup B = \{(3,1), (1,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

۳۱

تمرین ۶۹: تاسی را پرتاب می کنیم، هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

(الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

(ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

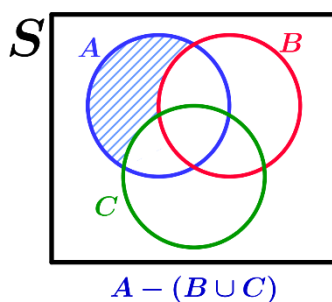
(پ) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

(ت) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

(ث) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

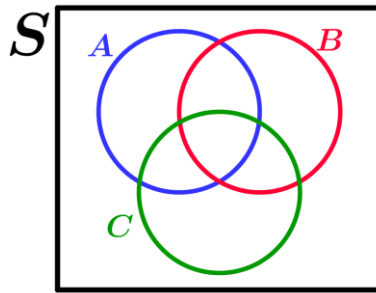
تمرین ۷۰: فرض کنید A ، B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه

بزنید. سپس عبارت مجموعه ای مربوط به پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

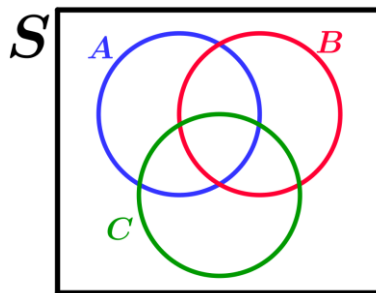


(الف) فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.

ب) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



پ) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



فصل ۱

تمرین ۷۱ : خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

پ) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

۳۳

با توجه به پیشامدهای A ، B و C به سوالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

تمرین ۷۲: دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی بنویسید.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه یک پدیده تصادفی باشد. اگر S ، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد. در این صورت **احتمال وقوع** پیشامد تصادفی A را بانماد $P(A)$ نمایش می دهیم و مقدار آن طبق دستور روبرو محاسبه می کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تمرین ۷۳: از ۱۰۴ بار گزارش هوا شناسی ۲۶ بار پیش بینی هوا نادرست بوده است. احتمال نادرستی پیش بینی هوا را حساب کنید.

تمرین ۷۴: چنانچه پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$. در این صورت مقدار $P(A)$ محاسبه کنید.

تمرین ۷۵: چنانچه پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A=S$. در این صورت مقدار $P(A)$ محاسبه کنید.

تمرین ۷۶: هرگاه $A \subseteq B$ باشد، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

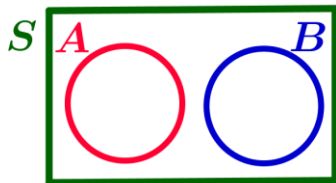
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \boxed{} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

با توجه به تمرین های ۷۴، ۷۵ و ۷۶ نتیجه می گیریم

اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد. در این صورت داریم: $0 \leq P(A) \leq 1$

تمرین ۷۷: هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + \boxed{} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{\boxed{}}{n(S)} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \Rightarrow P(A \cup B) = \boxed{} + \boxed{}$$



$$A \cap B = \phi \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

تمرین ۷۸: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) تاس زوج بیاید.

حل: $S = \{(1,r), (2,r), (3,r), (4,r), (5,r), (6,r), (1,p), (2,p), (3,p), (4,p), (5,p), (6,p)\}$

$$A = \{(2,r), (4,r), (6,r), (2,p), (4,p), (6,p)\} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.



تمرین ۷۹: یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

حل: $n(A) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$, $n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

حل: $n(B) = 12 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 12$, $n(S) = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$

پ) تولد هیچ دو تایی آنها در یک ماه نباشند.

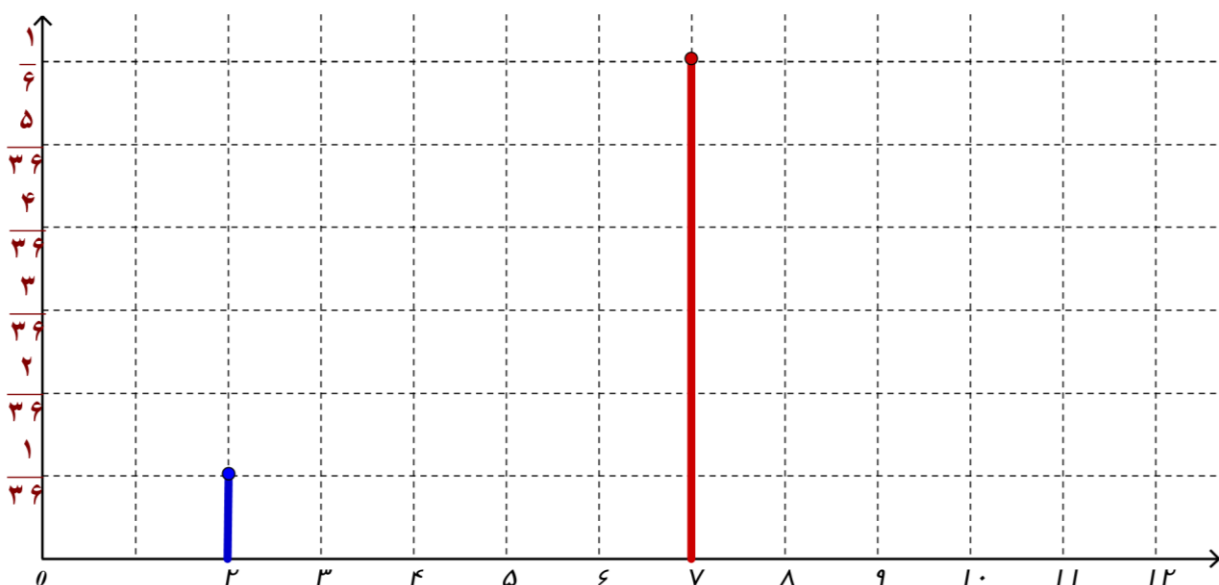
تمرین ۸۰: در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲, ۳, ۴, ..., ۱۱, ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره از همه کمتر است؟

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



تمرین ۸۱: در جعبه ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.

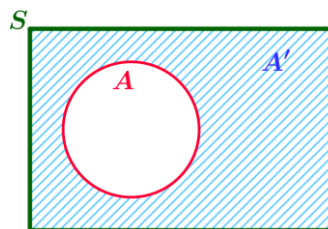
ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد نباشد؛ $P(A')$.

ت) پاسخ های قسمت های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پیشامد متمم می گوئیم.



تمرین ۸۲ : احتمال اینکه فردا بارانی باشد $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

تمرین ۸۳ : احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با 0.1 است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

تمرین ۸۴ : احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

تمرین ۸۵ : در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}.$$

حل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{120} + \frac{4}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن از متفاوت باشند، محاسبه کنید.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 4 \times 2}{120} = \frac{16}{120} = \frac{4}{15}$$

حل:

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

حل:

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 36 + 60 + 20 = 116 \Rightarrow$$

حل:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشند، محاسبه کنید.

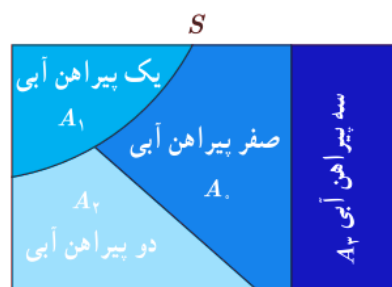
$$n(F) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

حل:

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

ج) جواب های قسمت های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می گیرید؟

حل:



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(S) = 1$$

دنایای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش های مختلف زندگی با آنها رو به رو می شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می خواهیم از شکل گیری یک مسئله در محیط زندگی مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.



دانش آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن های هوشمند اختصاص می دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش آموزان به تلفن های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان چگونگی استفاده دانش آموزان از تلفن های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: « دانش آموزان پایه های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟ »



گروه اجرا کننده این پروژه، پرسش نامه ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش آموزان خواستند که این پرسش نامه را تکمیل کنند:

الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می کنید؟

ب) از میان گزینه های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه ها با تلفن هوشمند خود انجام می دهید، علامت بزنید.

☐ عکاسی

☐ شبکه های اجتماعی

☐ خواندن کتاب الکترونیک

☐ بازی

☐ تماس تلفنی

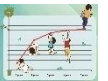
☐ تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میان و دامنه میان چارکی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت ها را به صورت نمودار میله ای نمایش دهند.

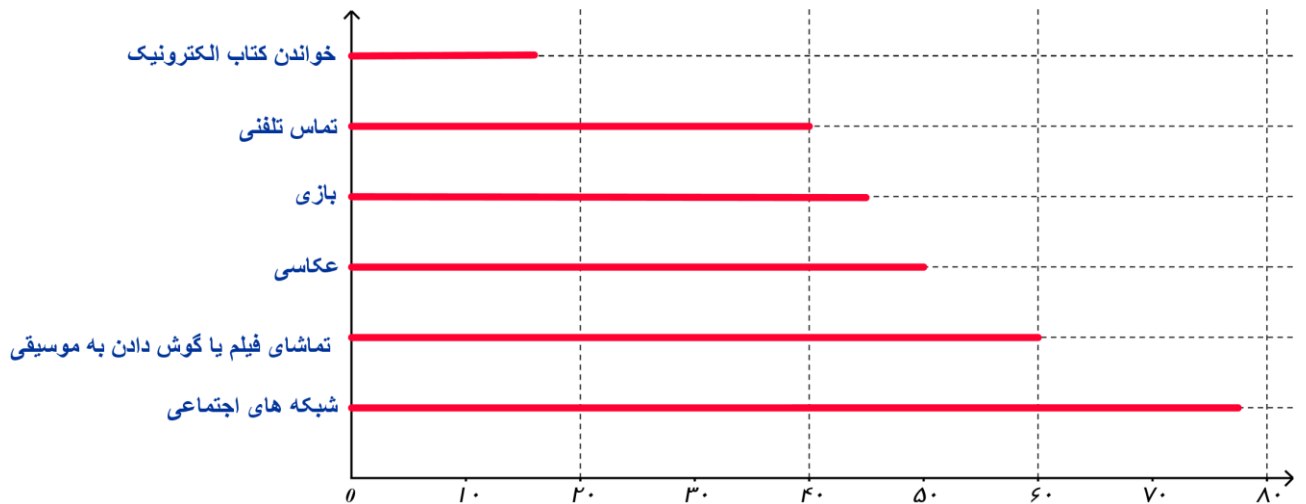
- حدس می زنید دانش آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟

داده ها پس از گردآوری در نرم افزار وارد شدند. اشتباه های تایپی تا حد ممکن رفع و درستی داده های دور افتاده بررسی شد. پرسش نامه هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

- در این پرسشنامه لازم نیست افراد نام خود را بنویسند. حفظ محرمانگی اطلاعات، چگونه مکم می کند داده های گردآوری شده به واقعیت نزدیک تر باشند؟ مثال دیگری بزنید که حفظ محرمانگی اطلاعات هنگام گردآوری داده ها مهم باشند.



نتایج این نظر سنجی درباره فعالیت های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه میان چارکی آن ۳۵ ($Q_3 = 100, Q_1 = 65$) دقیقه بود.



- با توجه به چارک های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می کنند؟

- چرا در این نمودار میله ای، مجموع درصد فراوانی ها از ۱۰۰ بیشتر می شود؟



باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه های این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

- با توجه به نمودار میله ای صفحه پیش، دانش آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می کنند؟

- از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن های هوشمند چه نتیجه ای می گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می کنید؟



مشاوران آموزشی، به کمک دانش آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی های دانش آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که :

(۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه های اجتماعی می تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم ها و دانش آموزان را بهبود بخشد.

(۲) معلم ها می توانند با تهیه فیلم های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش آموزان قرار دهند و دانش آموزان در ساعاتی از شبانه روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم ها را تماشا کنند و پرسش هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم ها در میان بگذارند.

(۳) با برگزاری دوره های آموزشی و نمایشگاهی از آثار دانش آموزان ، می توان علاقه دانش آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن های هوشمند را هدفمند کرد.



اکنون که مطلع شدیم دانش آموزان در طول روز به طور متوسط چه مقدار با تلفن هایشان کار می کنند و به چه فعالیت هایی مشغول هستند، می خواهیم برنامه ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش آموزان بهتر شود. بدین منظور در یک نظر سنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش آموزان صرف کارهای مختلف می کنند، به تفکیک این فعالیت ها بدانیم.



همان طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله های مرتبط با آمار به صورت چرخه ای کامل شامل گام های زیر است: (۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه ریزی (۳) گرد آوری و پاک سازی داده ها (۴) تحلیل داده ها (۵) بحث و نتیجه گیری



تمرین ۸۶ : در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسید.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
		راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.
		نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.
		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته ایم، نتایج را متناسب با هدف های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.
		داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.

گام های چرخه آمار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرآیند حل مسئله را چرخه می نامیم.»

گام های مختلف حل مسئله به ما کمک می کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام ها با روشن تر شدن ابعاد مختلف مسئله و بر اساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق تر شکل می گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازبینی می شود.

۱ بیان مسئله

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

مثال: فرض کنید می خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم.

پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش های پهلوانی و ...) یا توانایی ها و ناتوانی های جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

بدین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میان پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

اندازه گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه گیری، در واقع سعی می کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تاحد ممکن به اطلاعات کمی تبدیل کنیم.

انتخاب معیار اندازه گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می توانیم توصیف هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه گیری همیشه این قدر آسان نیست. فرض کنید در مطالعه ای می خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه گیری کنیم. چه پرسش هایی می تواند برای اندازه گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه گیری دارایی ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و ... لزوماً مشخص می کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست.

با توجه به اهمیت اندازه گیری می توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه گیری یا پرسش نامه ها را طوری طراحی می کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم.

بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه گیری و همچنین شیوه تحلیل داده ها تصمیم گیری می شود.

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامیم.

هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ تری نیاز داریم.

تمرین ۸۷: برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ تری نیاز است؟ توضیح دهید.

☐ سن دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

☐ معدل سال گذشته دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید.

تمرین ۸۹: علی و امید در یک پروژه دانش آموزی می خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت هایی مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند».

علی پیشنهاد می کند: «برای نمونه گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها پرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند».

امید پیشنهاد می کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش آموز پرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است».

موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است؟ یا امید؟

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.

پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم از نوجوانان پرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگ تر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی روند در نظر گرفته نشده اند.

.....

تمرین ۹۰: دو اشکال دیگر را که به نمونه علی وارد است، مطرح کنید.

.....

تمرین ۹۱: برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور دارند؟ چرا؟

الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها

ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه گیری ، یا ثبت داده ها و یا وارد کردن داده ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از این اشتباه ها را تصحیح کرد.



تمرین ۹۲: آنچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده های گردآوری شده در یک پروژه دانش آموزی پیش از بر طرف کردن اشتباهات است. چون برخی نرم افزارها نمی توانند داده های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می کنیم؛ مثلاً در این داده ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر « ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال ، والیبال ، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ تعیین شده است. در این داده ها هر سطر نشان دهنده یک فرد و هر ستون نشان دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش آموزی	ردیف
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱۴	۱
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۵	۲
۱۵	۳	۲	۱	۱۴	۱	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴۵	۴
۱۷	۴۴	۲	۲	۵۱	۲	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۱۷	۶
	۱۹	۷	۳	۱۵	۱۹	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۳۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۵۲	۹
۱۰	۰	۲	۱	۱۴	۱۲	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۷	۱۱
۱۴	۲	۱	۲	۱۴	۳۵	۱۲
۲۰	۷	۴	۱	۱۵	۲۶	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۲۱	۱۴

با توجه به جدول داده ها

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه شده است؟

ب) در داده های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده های متغیرهای یعدی (ورزش مورد علاقه ، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جا به جا شده اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست، نمره ادبیات او چند است؟

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟

ت) در متغیر «متوسط ساعت های مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده های دیگر تفاوت دارد؟

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه گیری متفاوتی ثبت شده است؟



۴ تحلیل داده ها

در این مرحله، داده ها را تحلیل می کنیم و نتایج را ارائه می دهیم.

منظور از تحلیل داده ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.



برای توصیف داده های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می کنند بدانیم داده ها در کجا متمرکزند. و معیارهای پراکندگی به ما کمک می کنند بدانیم داده ها چگونه متراکم یا پراکنده شده اند. به یاد دارید که اگر داده دور افتاد داشته باشم ، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده ها نخواهند بود. چرا؟

تمرین ۹۳ : باتوجه به داده ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده ها												معیارهای پراکندگی		
													میانگین	میان	دامنه تغییرات
سن (سال)	۱۷	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۵	۱۹			
میزان تماشای تلویزیون	۴	۲۹	۴	۶	۷	۶/۵	۷	۸	۶	۳۰	۴	۵			

$$\bar{x} = \frac{۱۵+۱۵+۱۵+۱۶+۱۶+۱۷+۱۷+۱۷+۱۸+۱۸+۱۹+۱۹}{۱۲} = \frac{۲۰۲}{۱۲} = ۱۶/۸۳$$

حل:

$$m = \frac{۱۷+۱۷}{۲} = ۱۷ \quad ۱۵-۱۵-۱۵-۱۶-۱۶-۱۷-۱۷-۱۷-۱۸-۱۸-۱۹-۱۹$$

$$Q_1 = \frac{۱۵+۱۶}{۲} = ۱۵/۵ \quad Q_3 = \frac{۱۸+۱۸}{۲} = ۱۸ \quad IQR = ۱۸ - ۱۵/۵ = ۲/۵$$

$$S = \frac{۳(۱۵-۱۷)^2 + ۲(۱۶-۱۷)^2 + ۳(۱۷-۱۷)^2 + ۲(۱۸-۱۷)^2 + ۲(۱۹-۱۷)^2}{۱۲}$$

$$= \frac{۳ \times ۴ + ۲ \times ۱ + ۳ \times ۰ + ۲ \times ۱ + ۲ \times ۴}{۱۲} = \frac{۱۲ + ۲ + ۰ + ۲ + ۸}{۱۲} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$$



تمرین ۹۴ : باتوجه به داده ها جدول تمرین قبل ، به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های متغیر «سن» مناسب اند؟ چرا؟

با توجه به توزیع داده ها، برای متغیر «سن» ، میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند، چون داده دور افتاده مشاهده نمی کنیم.

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» مناسب اند؟ چرا؟

میانه و دامنه میان پارگی، معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دور افتاده وجود دارد.

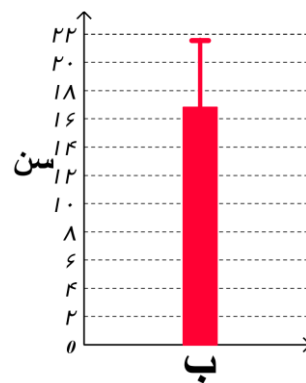
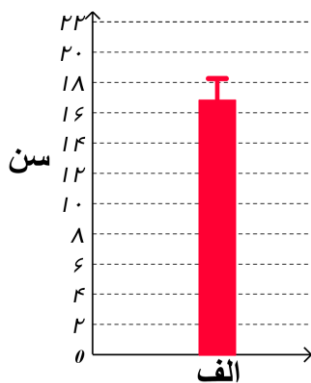
پ) انحراف کدام داده ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟

داده های ۲۹ و ۳۰ فاصله زیادی از میانگین دارند و مجبور این فاصله ها باعث بزرگ شدن واریانس و به تبع آن بزرگ شدن انحراف استاندارد (انحراف معیار) شده است.

ت) اگر برای توصیف داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می شد، خوانندگانی که به داده های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می شدند؟

در واقع میانگین (۹/۷۱)، نماینده مناسبی برای داده های «میزان تماشای تلویزیون» نیست و به سمت داده های دور افتاده رفته است.

ث) با توجه به داده های جدول، کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده میانگین و انحراف معیار سن است. نمودار الف یا ب؟

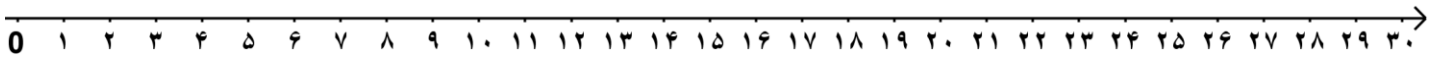


در داده هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص های مناسبی برای توصیف هستند، می توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین و میل خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

اگر داده های دور افتاده داشته باشیم، نمی توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می تواند گمراه کننده باشد در این گونه موارد باید از نمودار جعبه ای استفاده کنیم.



تمرین ۹۵: برای داده های متغیر «ساعت های تماشای تلویزیون» در تمرین ۹۳ نمودار جعبه ای رسم کنید.



(الف) کدام نمودار بهتر نشان می دهد که داده ها کجا متراکم تر و کجا پراکنده ترند؟ نمودار نمایش دهنده میانگین و انحراف معیار با نمودار جعبه ای؟

(ب) اگر از الگوی توزیع داده ها و وجود داده های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن تر است؟



تمرین ۹۶: دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً $\frac{1}{6}$ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می کند.

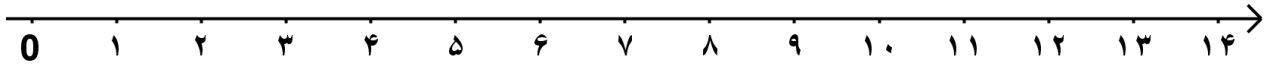
اعظم می گوید: « شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»

مریم می گوید: « به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده ای دارد؟»

آنها تصمیم می گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می کنند.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۱	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	۳	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$
شرکت دوم	$\frac{0}{7}$	۱	۸	$\frac{12}{1}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{8}$

الف) با استفاده از داده های جدول بالا، نمودار جعبه ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را یک روی محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودار قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی هایشان انتخاب کننده شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

.....

تمرین ۹۷: دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه ها و کادر آموزشی شان، وضعیت قبولی دانش آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی های قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است. (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است. (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

ت) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می تواند همراه کننده باشد؟

.....

نکته برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

.....

۵ بحث و نتیجه گیری

پس از تحلیل داده ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت های مطالعه ای که انجام داده ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه گیری، داده ها را به روش های مناسبی تحلیل کرده باشیم،

در بهترین حالت می توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده ایم. نتایج ما قطعی نیستند، چون در نمونه گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

همان طور که دیدی، در تمامی گام های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه با خبر نباشند یا فردی که داده ها را تحلیل می کند، ویژگی های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی شناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه ای انجام می شود که ویژگی های آن را به خوبی نمی شناسیم، در تمام گام ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم.

کیفیت اجرای هر یک از گام های چرخه آمار، گام های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می توانیم چرایی گزارش میانگین یا میان و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه گیری، شیوه اندازه گیری، نوع ورود داده ها و تمامی موارد گام های دیگر چرخه نیز **تردید** و **پرسش** داشته باشیم.

مثالی واقعی از پروژه ای که با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، انجام شده، نشان می دهد که چگونه مشارکت ندادن تمامی اعضای گروه اجرا کننده می تواند ما را از پاسخ مسأله کاملاً دور کند. برای اجرای این پروژه کارشناسان طی جلساتی به طراحی و برنامه ریزی جزئیات کار پرداختند و سپس برای گردآوری داده ها چند نفر را استخدام کردند. آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل گیری مسأله و اهداف این پروژه، برای پرسش نامی ها به منازل مختلف مراجعه کردند. هنگام وارد کردن داده ها در نرم افزار، در چندین پرسش نامی در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته اند: «فوت شده است».

تمرین ۹۹: برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروه متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در آب اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقهٔ احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، دربارهٔ فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

پ) چگونه مشورت با افراد بومی دربارهٔ اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

.....

تمرین ۱۰۰: در هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و برای کدام گام های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجرا کنندگان برداشت های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده های دور افتاده حذف شده اند.

ت) براساس توزیع داده ها ، میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی بود. اما چون مقدار میانه با آنچه انتظار می رفت متفاوت بود، میانگین داده ها گزارش شد.

ث) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده اند.

فصل ۲

آلوهای خطی

خداوند همه چیز مرشود همه کسر را.

به شرط اعتقاد؛ به شرط پاکرد دل؛ به شرط طهارت روح؛

به شرط پرهیز از معامله با ابلیس.

بشویید قلبهای خن را از هر اجسام ناروا!

و مغزهای خن را از هر اندیشه خلاف،

و زبانهای خن را از هر گفتار ناپاک،

و دستهای خن را از هر آلودگی در بازار...

و پرهیز از

ناجوانمردیها، ناراستیها، نامردیها!

چنین کنید تا ببینید که خداوند،

چگونه بر سفره مرصع، با کاس پر خوراک و نیکدامنانه می نشیند

مدل سازی

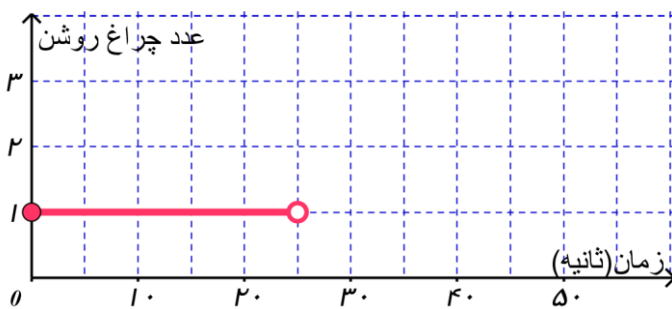
در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم. (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده)



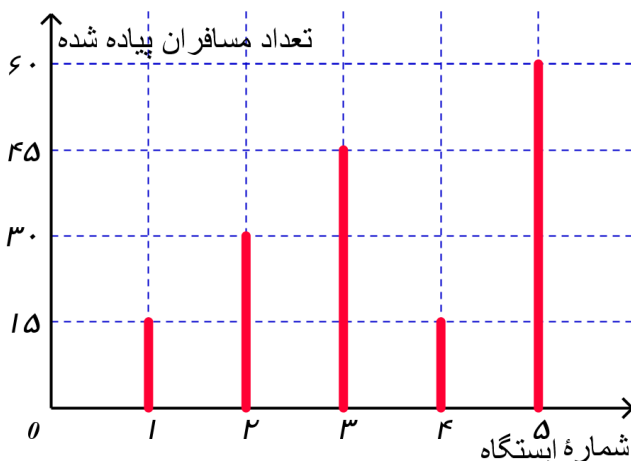
تمرین ۱: یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

حل: اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ، با توجه به فرض:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ \dots\dots\dots & 25 \leq t < 30 \\ 3 & \dots\dots\dots \leq t < \dots\dots\dots \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots \leq t < \dots\dots\dots\} , \quad R_f = \{\dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots\}$$

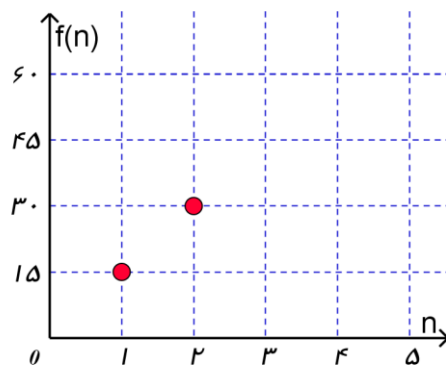


تمرین ۲: نمودار میله ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می دهد. اگر n ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰			

$$f(n) = \begin{cases} \dots\dots\dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$



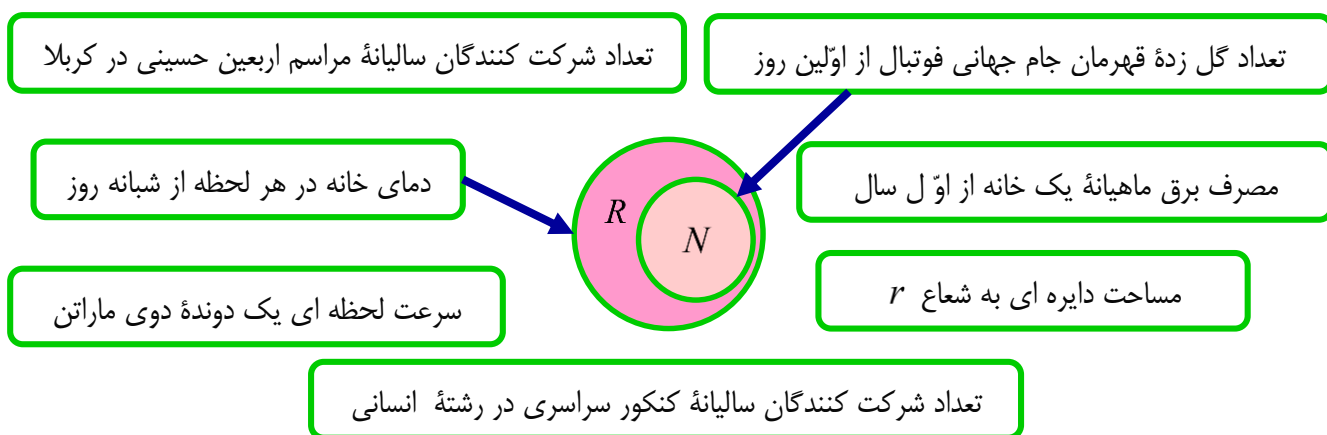
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid \dots\dots \leq n < \dots\dots\}, \quad R_f = \{\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots\}$$



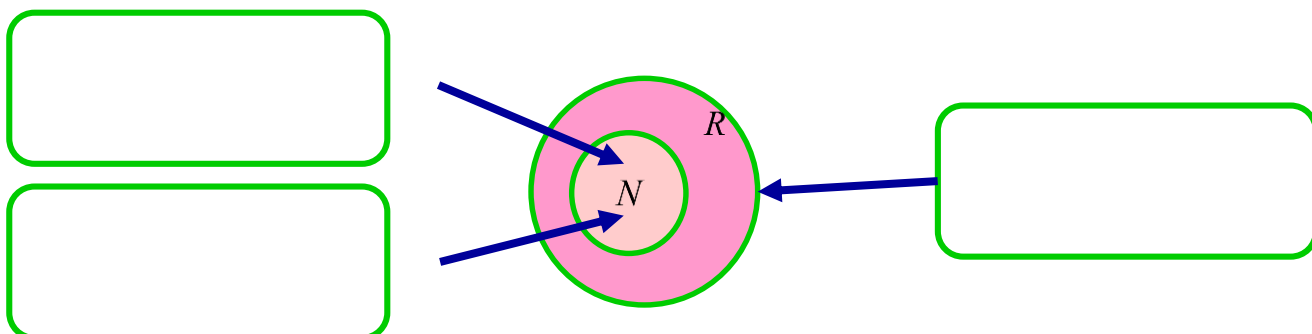
یکی از تفاوت های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنها است. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵ ام است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و ... است. پس دامنه تابع زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی است.

تمرین ۳: اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



تمرین ۴: داخل هر کدام از مستطیل های زیر مسئله ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:



در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می کنیم.

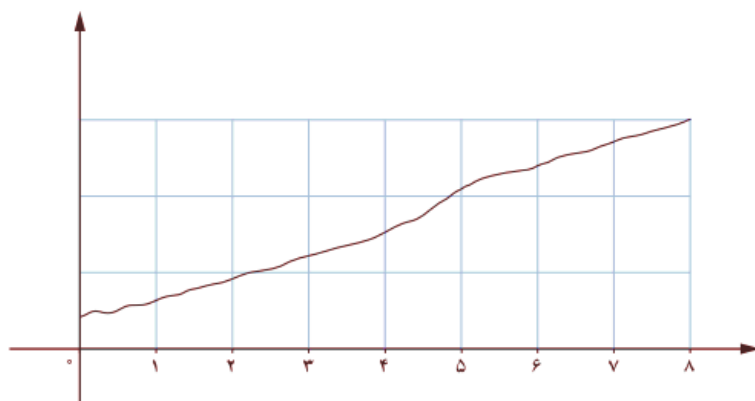
کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر علمی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می کنیم.

برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و ...)

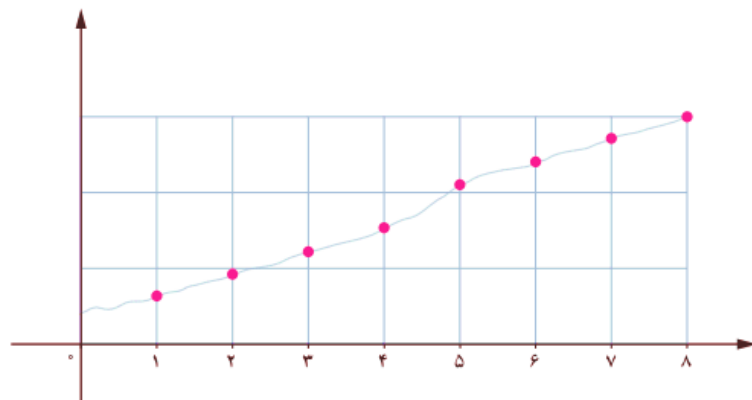
میزان دارو در بدن بیمار (میلی گرم)



نمودار واقعی میزان دارو در بدن بیمار در هشت ساعت اول از زمان بستری شدن

مدت زمان بستری شدن (ساعت)

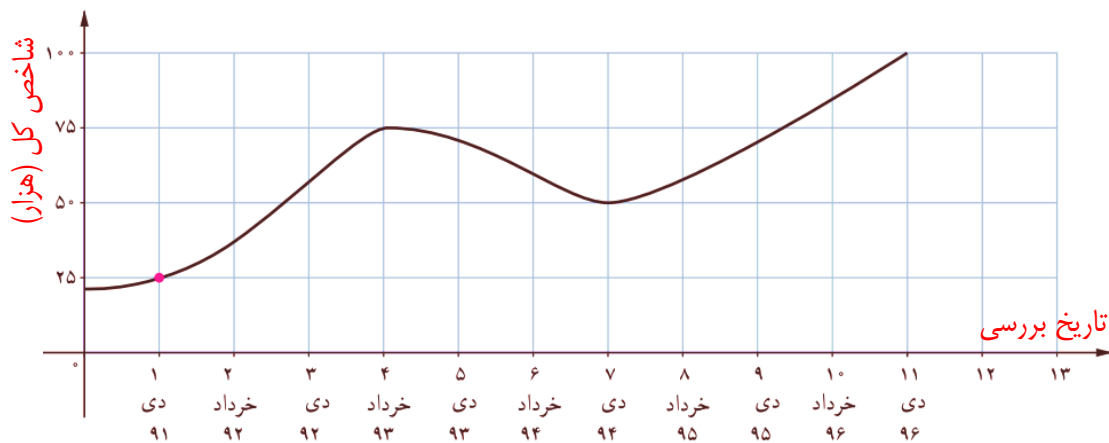
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی گرم)



نمودار میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش

مدت زمان بستری شدن (ساعت)

تمرین ۵: نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ های نوشته شده معلوم کند، در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله ای روند کاهشی و در چه فاصله ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$											
مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵										

پ) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۸۵۰۰۰ (۱) ۱۰۵۰۰۰ (۲) ۱۱۲۵۰۰ (۳) ۱۰۰۰۰۰ (۴) ۱۲۵۰۰۰ (۵)

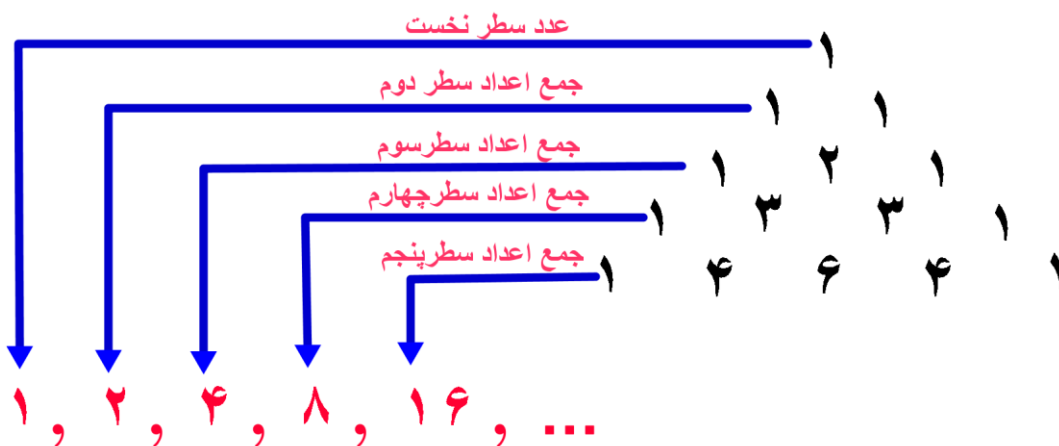
ت) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.



در سال های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. عموماً این الگوها را نیز می توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل سازی کنیم.



تمرین ۶: برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطه میان a_1 و a_2 ، رابطه میان a_2 و a_3 و a_3 و a_4 و نیز a_4 و a_5 می توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

پ) آیا به کمک قسمت ب، می توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می آید؟ چرا؟

(ت) رابطه ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، **رابطه بازگشتی** می نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

(ث) رابطه ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

(ج) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «ت» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «پ» دارد؟



الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سرهم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)

ب) رابطه ای بر حسب n که $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & , & 7 & , & 10 & , & 13 & , & 16 & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 & , & \dots \end{array}$$

برای مثال دنباله

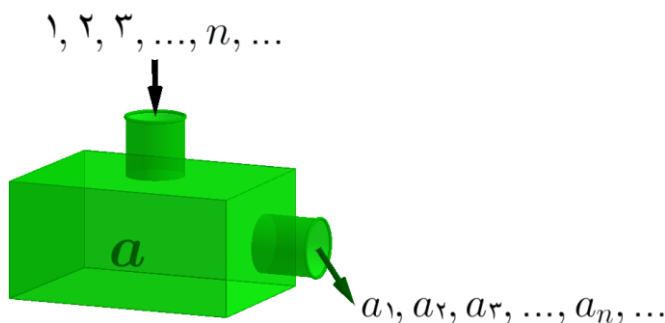
رابطه بازگشتی

رابطه ای بر حسب n

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 = 7 = 4 + 3 &\Rightarrow a_2 = a_1 + 3 \\ a_3 = 10 = 7 + 3 &\Rightarrow a_3 = a_2 + 3 \\ a_4 = 13 = 10 + 3 &\Rightarrow a_4 = a_3 + 3 \\ a_5 = 16 = 13 + 3 &\Rightarrow a_5 = a_4 + 3 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a_n + 3 \quad (n \geq 2, a_1 = 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (3 \times 1) + 1 = 4 \\ a_2 &= (3 \times 2) + 1 = 7 \\ a_3 &= (3 \times 3) + 1 = 10 \\ a_4 &= (3 \times 4) + 1 = 13 \\ a_5 &= (3 \times 5) + 1 = 16 \\ &\vdots \\ a_n &= 3n + 1 \end{aligned}$$

اگر تابعی از باشد اعضای بُرد این تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



تمرین ۷: با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - ۱$	۰, ۳, ۸,, ۲۴
$C_n = \frac{1}{n}$	, $\frac{1}{2}$,,,
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-۱, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3},,$

تمرین ۸: برای جملات دنباله روبرو: ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ...

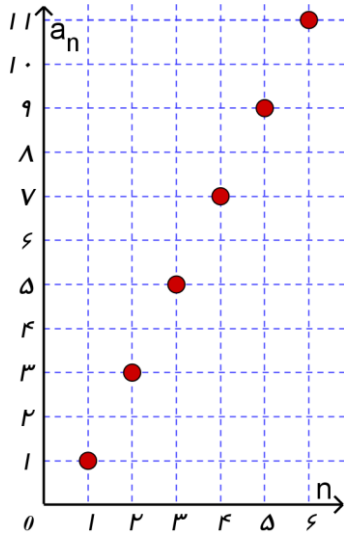
(الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

(ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

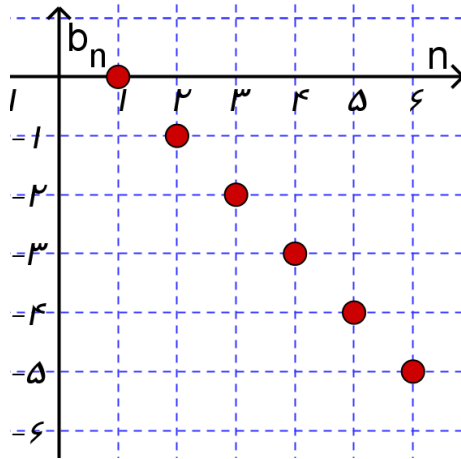
رسم دنباله

تمرین ۹: با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار دنباله های زیر را رسم کنید.

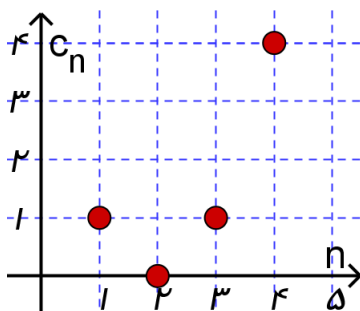
الف) $a_n = 2n - 1$ ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ...



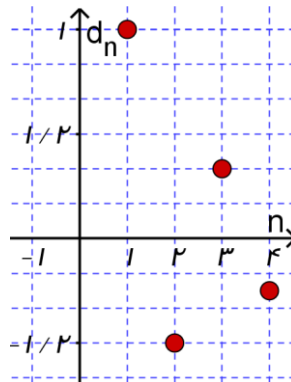
ب) $b_n = 1 - n$ ۰, -۱, -۲, -۳, -۴, ...



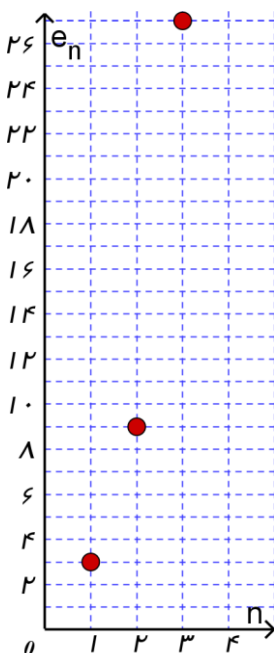
پ) $c_n = (n - 2)^2$ ۱, ۰, ۱, ۴, ...



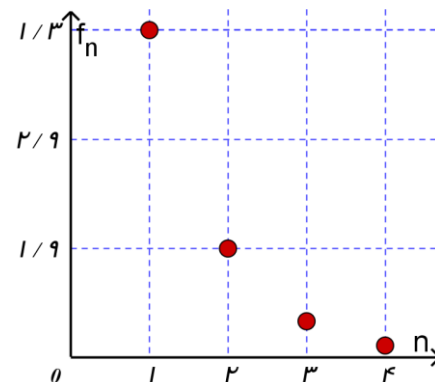
ت) $d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ۱, -1/2, 1/3, -1/4, ...

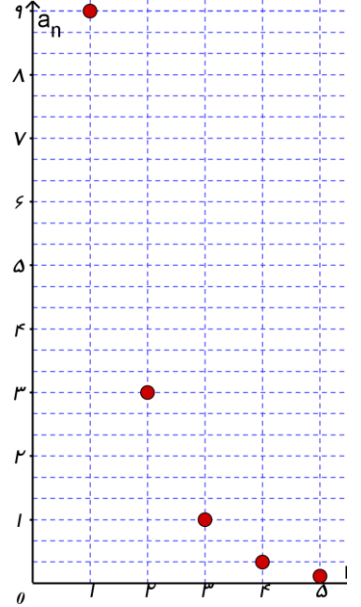
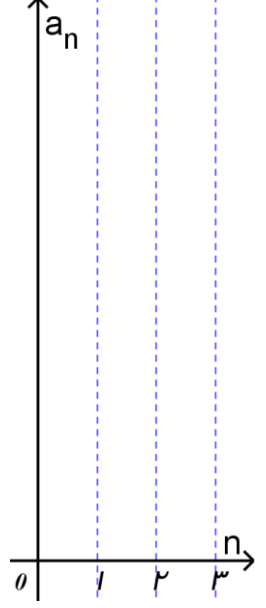
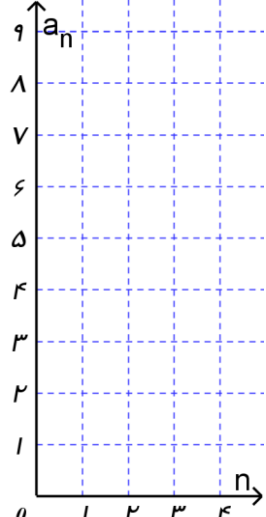


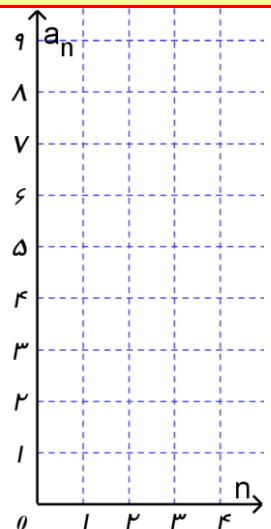
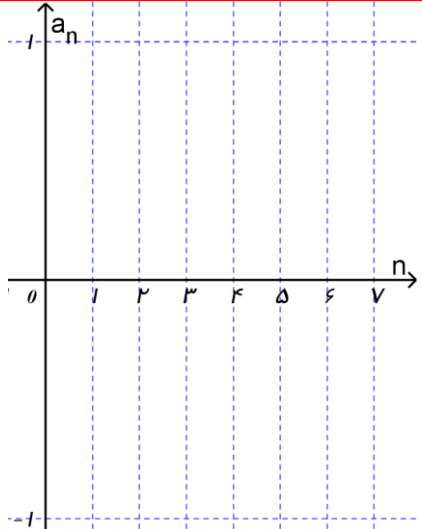
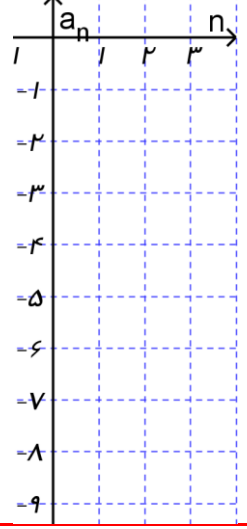
ث) $e_n = 3^n$ ۳, ۹, ۲۷, ...



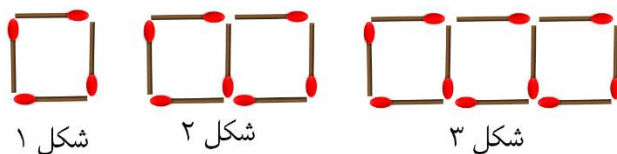
ج) $f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 1/3, 1/9, 1/27, ...



نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{3-n}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
		$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	
	$a_n = 2n + 1$		

نمودار دنباله	ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
		$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	
			$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$
			$-1, -4, -9, -16, \dots$
		$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$	

تمرین ۱۱: با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



شکل ۱

شکل ۲

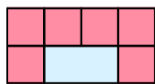
شکل ۳

الف) تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

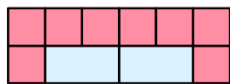
ب) جمله n ام (جمله عمومی) دنباله مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.



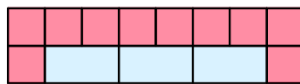
تمرین ۱۲: به الگوی هندسی روبرو دقت کنید.



شکل ۱



شکل ۲



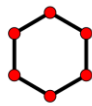
شکل ۳

الف) شکل بعدی الگو را رسم کنید.

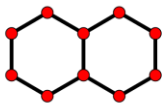
ب) تعداد کاشی های سفید و تیره را برای هر شکل بنویسید.

پ) جمله عمومی مربوط به الگوهای کاشی های تیره را بنویسید.

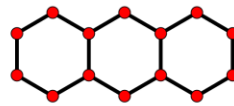
تمرین ۱۳: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

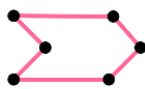
الف) جدول زیر را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ضلع ها						

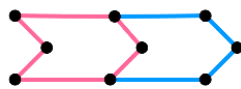
ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟



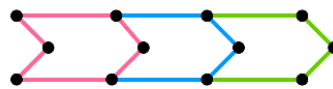
تمرین ۱۴: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

الف) جدول زیر را کامل کنید.

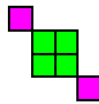
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ضلع ها						

ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟

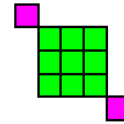
تمرین ۱۵: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

(الف) جدول زیر را کامل کنید

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع ها						

(ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟

حل:

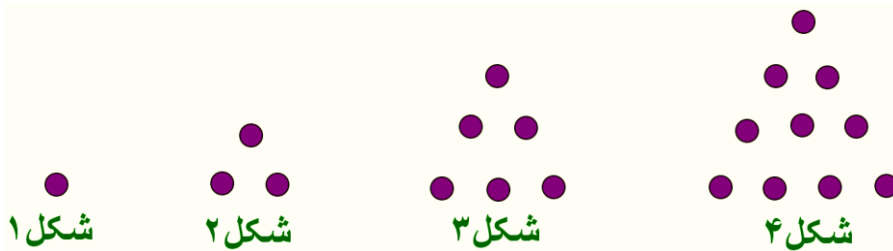
$$n=1 \rightarrow a_1 = (1)^2 + 2 = 3, \quad n=2 \rightarrow a_2 = (2)^2 + 2 = 6$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = (3)^2 + 2 = 11, \quad n=4 \rightarrow a_4 = (4)^2 + 2 = 18$$

$$a_n = n^2 + 2$$



تمرین ۱۶: الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

شکل ۴

(ب) تعداد دایره های هر شکل را بنویسید.

(الف) شکل بعدی الگو را رسم کنید.

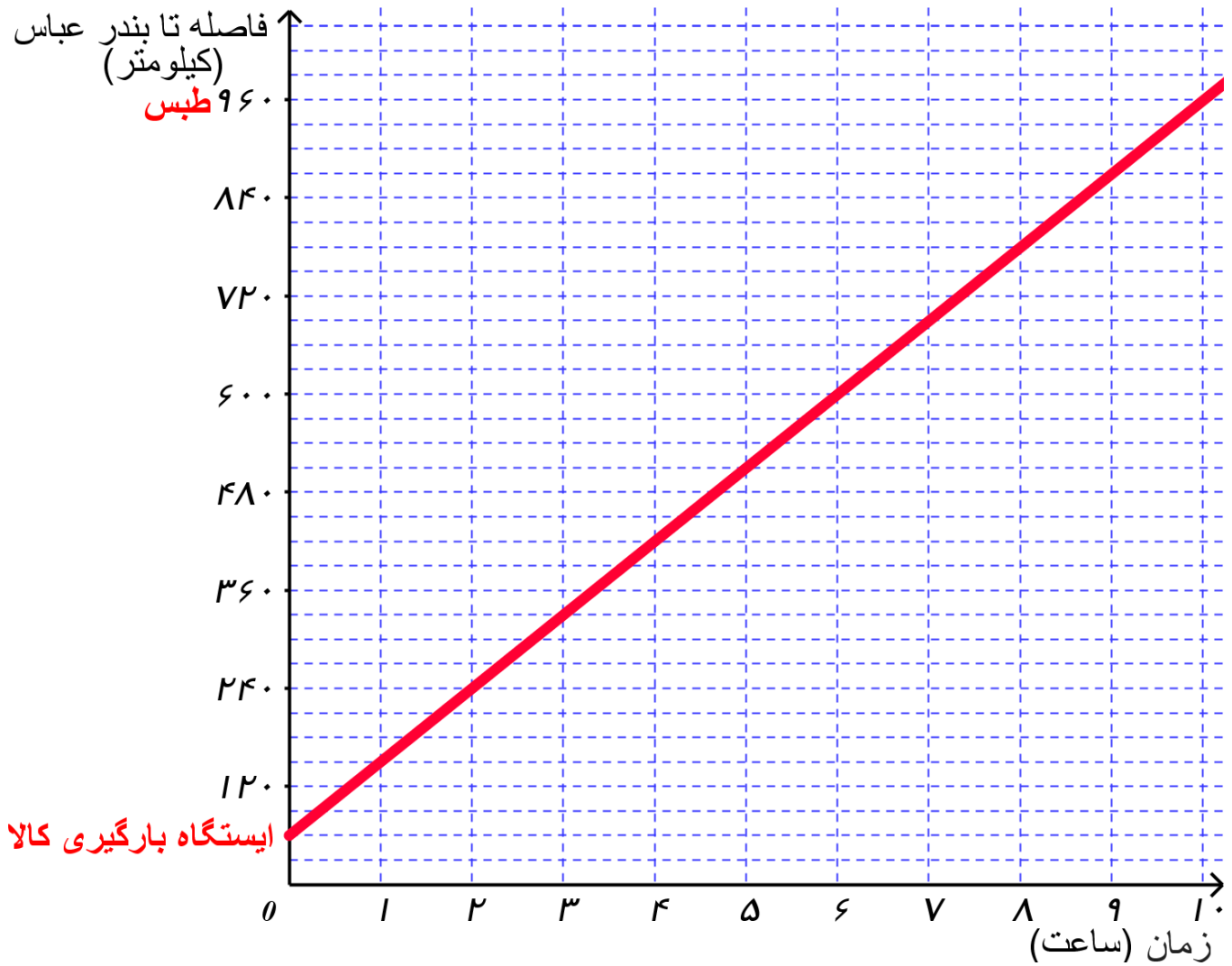
(پ) جمله عمومی این الگو را بنویسید.

حل:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره ها	$\frac{(1)(2)}{2} = 1$	$\frac{(2)(3)}{2} = 3$	$\frac{(3)(4)}{2} = 6$	$\frac{(4)(5)}{2} = 10$

لذا تعداد واقعی دایره های هر الگو به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

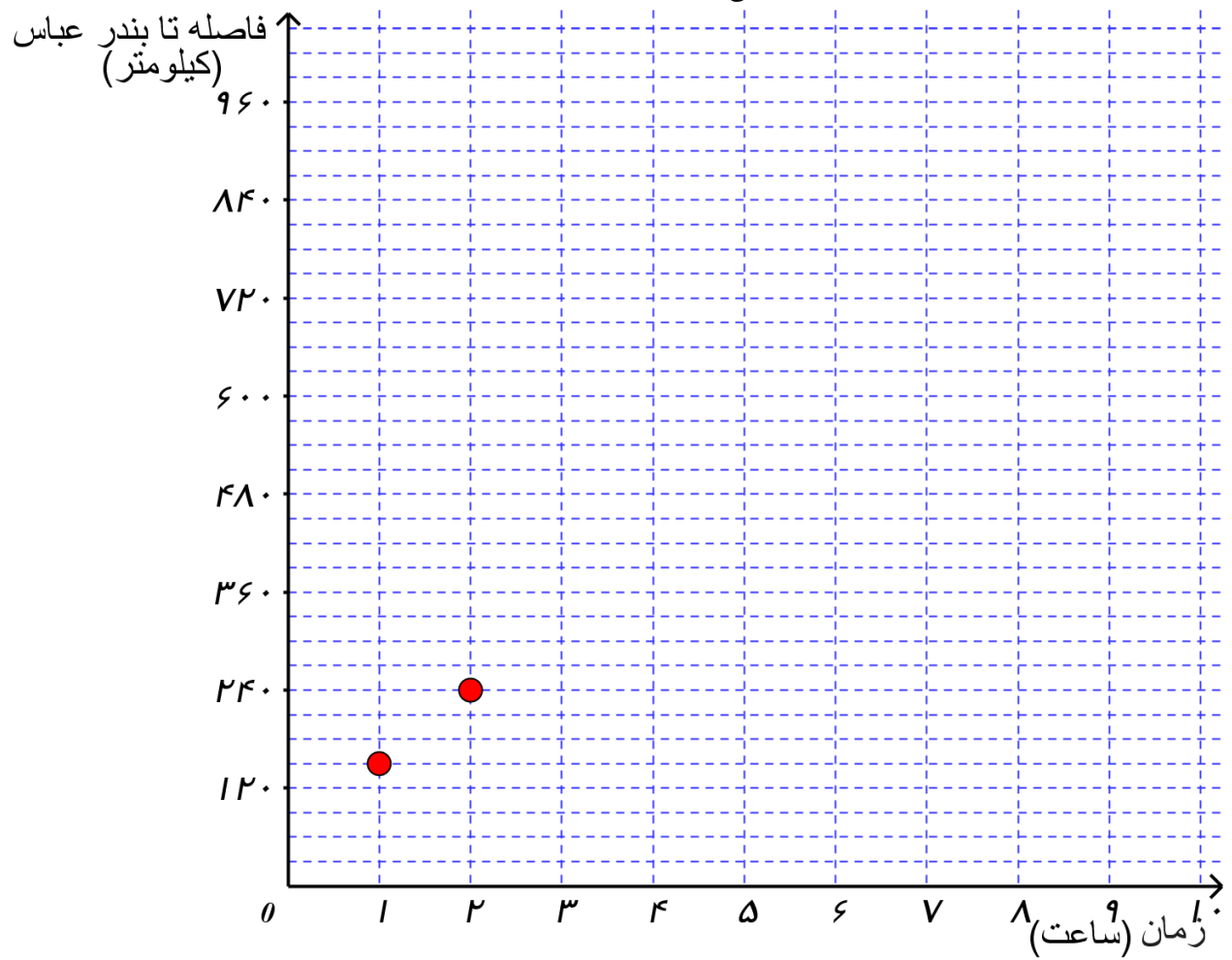
تمرین ۱۷: یک قطار باری در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان _ زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می کند.



الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را بدست آورید.

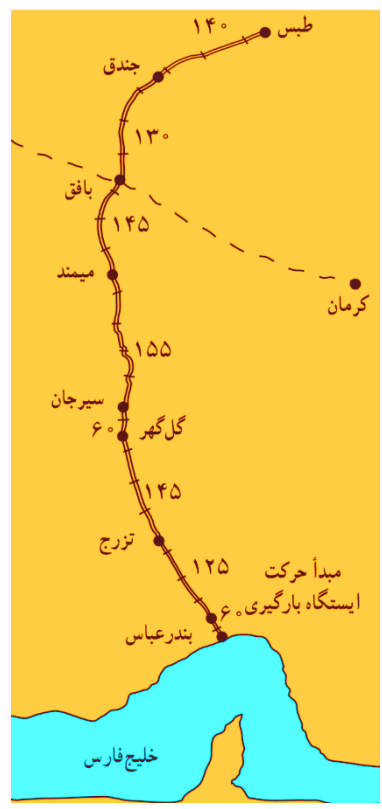


ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندر عباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.



پ) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

ت) جدول زیر را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.



نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندر عباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	
گل گهر - سیرجان		
سیرجان - میمند		
میمند - بافق		
بافق - جندق		
جندق - طبس		

ث) با فرض اینکه a_n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد جدول زیر را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

$n=1$	$a_1 = 60 + 90 = 150$	$n=2$	$a_2 = a_1 + 90 = 150 + 90 = 240$
$n=3$	$a_3 = a_2 + 90 =$	$n=4$	
$n=5$		$n=6$	
$n=7$		$n=8$	
$n=9$		$n=10$	

ج) با مقایسه جدول های بالا کدام ایستگاه ها محل تناس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \\ a_3 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_4 + \\ a_5 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{10} + \\ a_{11} = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_7 + \dots \times 90 \\ a_8 = a_5 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$a_{10} = a_9 + \dots \times 90$$

$$a_9 = a_3 + \dots \times 90$$

$$a_{12} = a_5 + \dots \times 90$$

از روابط بالا می توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (\dots) \times 90 \quad (۱)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

$$a_n - a_m = (\dots) \times 90$$

ج) کدام ویژگی دنباله باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ج) رابطه (۱) در قسمت «ج» چه ارتباطی با ضابطه تابع بدست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنباله حسابی

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در تمرین قبل این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می شود.

چنین دنباله هایی که هر جمله آن به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت (مثبت یا منفی) به جمله قبلی به دست می آید، «دنباله حسابی» نامیده می شود.

یک دنباله حسابی، دنباله ای به صورت :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d « اختلاف مشترک » جملات دنباله است.

جمله n ام این دنباله را به صورت معرفی می شود: $a_n = a + (n-1)d$

« d » را اختلاف مشترک دنباله حسابی می نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

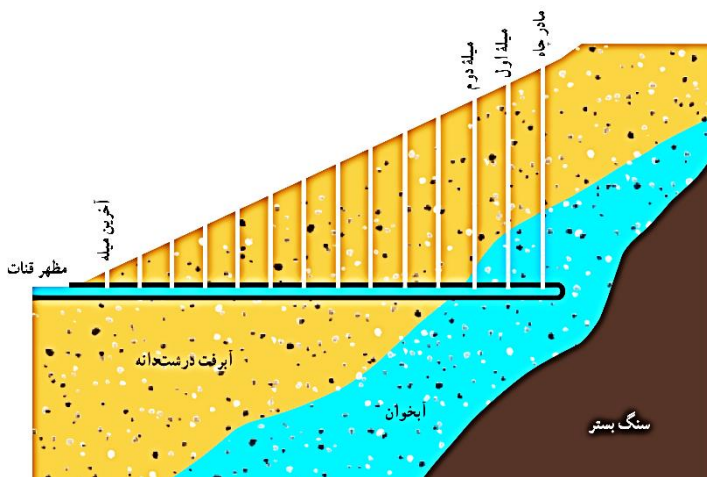
تمرین ۱۸: جدول زیر را کامل کنید.

a_n	پنج جمله اول	اختلاف مشترک	جمله اول
		d	a
$a_n = 2 + 3(n-1)$	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	۳	۲
	۴, ۱, -۲, -۵, -۸		
		$-\frac{1}{2}$	۴
$a_n = -3 + 5(n-1)$			

تمرین ۱۹: ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

تمرین ۲۰: مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک d » چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

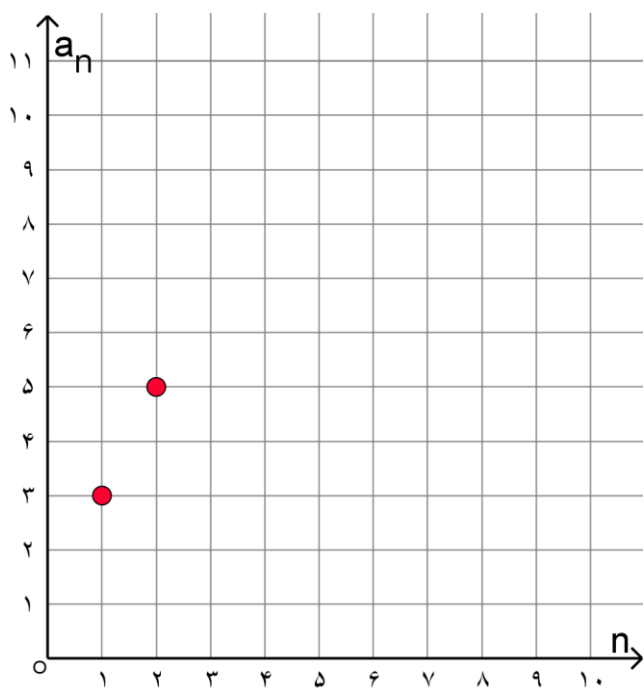
قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفره چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل، از چاه های کلمکی به نام «میله» استفاده می کنند. میله ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی در خارج کردن خاک های حاصل از حفر کانال و بعد ها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می شوند.



تمرین ۲۱: در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیر زمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه های کلمکی در فاصله های یکسان از هم، عمق میله اول $29\frac{1}{5}$ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق آخرین میله ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $1\frac{1}{5}$ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

تمرین ۲۲: دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

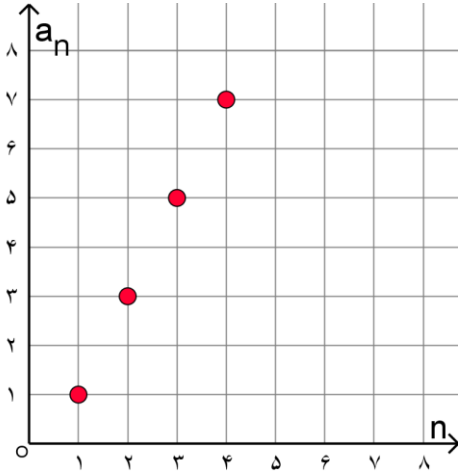
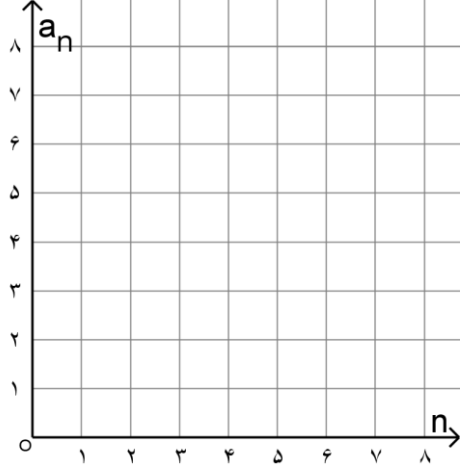
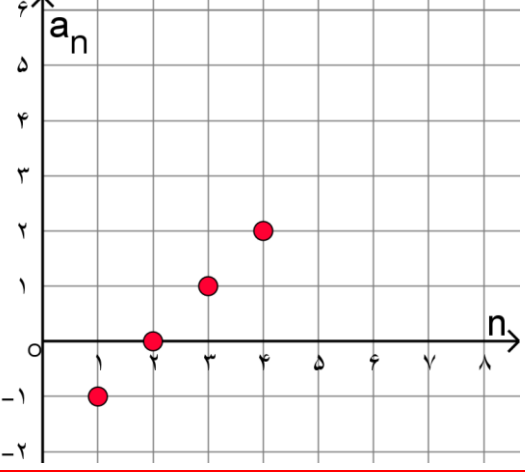
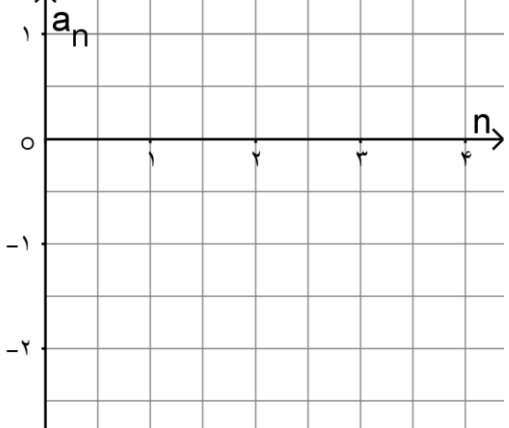


ب) معادله خط گذرنده از دو نقطه اول و دوم را به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می کنند؟

پ) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

.....

اگر جمله یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می کند.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷	
$y = -x - 4$			
			
		$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$	

تمرین ۲۴: شخصی برای ثبت نام در باشگاه والیبال ۱۲۵۰۰ تومان می دهد. و برای هر دفعه بازی نیز ۶۰۰۰ هزار تومان می پردازد. دنباله مبلغ پرداختی توسط او برای n بازی را تشکیل دهید.

.....

تمرین ۲۵: از دریچه سدی با گنجایش ۱۲ میلیون لیتر هر ساعت ۴۸ هزار لیتر آب خارج می شود. اگر این دریچه باز باشد، برای حجم پشت سد پس از n ساعت یک دنباله تشکیل دهید.

.....

تمرین ۲۶: کارگری برای انجام کار ۱۵۰۰۰ تومان پیش پرداخت و به ازای هر ساعت کار هم ۸۰۰۰ تومان می گیرد.

(الف) دنباله میزان دستمزد او به ازای n ساعت کار را تشکیل دهید.

(ب) پس از ساعت ۸ میزان دستمزد این کارگر چند تومان می شود؟

(پ) پس از چند ساعت میزان دستمزد این کارگر ۱۷۵۰۰۰ تومان می شود؟

تمرین ۲۷: جمله عمومی و جمله هشتم دنباله حسابی $9, 15, 21, \dots$ را بیابید.

.....

تمرین ۲۸: جمله چندم دنباله حسابی $8, 15, 22, \dots$ برابر ۱۱۳ است؟

.....

تمرین ۲۹: جمله بیستم یک دنباله حسابی $67 -$ و اختلاف مشترک آن $3 -$ است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

.....

تمرین ۳۰: جمله یازدهم یک دنباله حسابی 105 و اختلاف مشترک آن 17 است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین ۳۱: در یک دنباله حسابی جمله n برابر a_n و جمله m برابر a_m است. اختلاف مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

$$a_n = a + (n-1)d, \quad a_m = a + (m-1)d$$

حل: طبق جمله عمومی

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= (a + (m-1)d) - (a + (n-1)d) \\ &= (a + md - d) - (a + nd - d) \\ &= a + md - d - a - nd + d \\ &= md - nd = d(m-n) \end{aligned}$$

$$d(m-n) = a_m - a_n \Rightarrow \boxed{d = \frac{a_m - a_n}{m-n}}$$

.....

تمرین ۳۲: در یک دنباله حسابی جمله اول ۲ و جمله چهاردهم ۶۷ است. اختلاف مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

.....

تمرین ۳۳: در یک دنباله حسابی جمله هجدهم ۱۱۴ و جمله سی ام ۶۶ است. اختلاف مشترک و جمله اول این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۳۴: در یک دنباله حسابی جمله هشتم ۱۵۳ و جمله بیست و یکم ۸۸ است. صدمین جمله این دنباله را حساب کنید.

تمرین ۳۵: پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعت ثابت صفر می شود. اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

(الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی گرم می شود؟

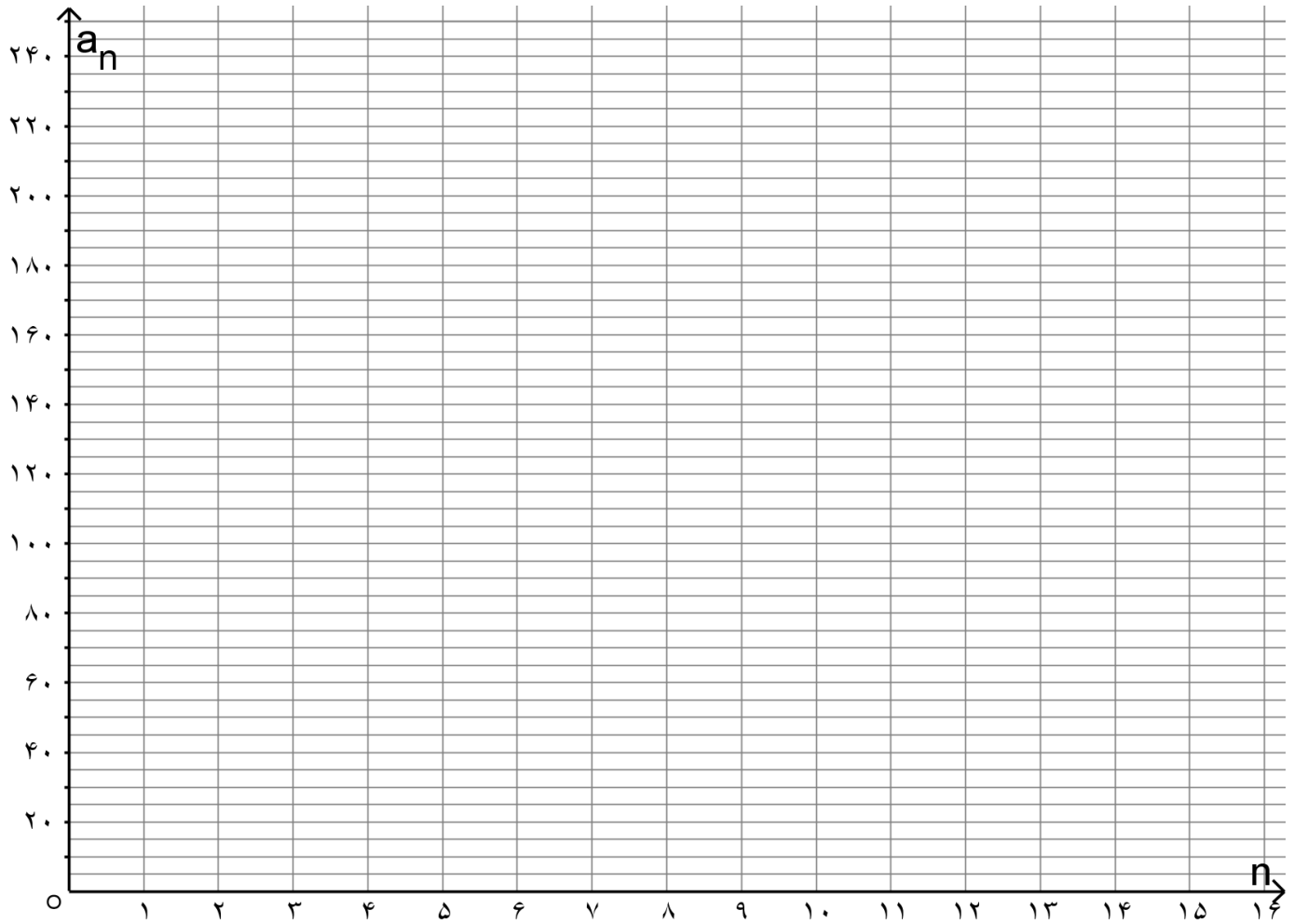
(ب) پس از پنج ساعت از مصرف دارو سطح دارو در بدن او چند میلی گرم می شود؟

(پ) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم می شود؟

فصل ۲

۸۱

ت) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئله بالا را رسم کنید.



.....

تمرین ۳۶: درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی ۲۶۰۰۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید)

حل: میزان حقوق دریافتی شغف بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات

$$2600000 - (2600000) \times \frac{10}{100} = 2600000 - 260000 = 2340000$$

طبق تعریف مسئله دنباله حسابی تشکیل می شود با جمله ثابت ۲۳۴۰۰۰۰ تومان و افتلاف مشترک ۱۱۰۰۰ تومان که جمله عمومی آن به صورت زیر است: $a_n = 2340000 + 11000n$ لذا برای به دست آوردن تعداد ساعت اضافه کاری تا دریافت خالص ماهیانه ۳ میلیون تومان باید n را بدست آوریم:

$$2340000 + 11000n = 3000000 \Rightarrow 11000n = 3000000 - 2340000 \Rightarrow$$

$$11000n = 660000 \Rightarrow n = \frac{660000}{11000} \Rightarrow n = 60$$

و چون هر ماه ۳۰ روز است بنابراین: $60 \div 30 = 2$ بنابراین روزی ۲ ساعت باید اضافه کاری داشته باشد.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

تمرین ۳۷: در فعالیت «محاسبه تعداد چاه های قنات» مشخص شد که قنات مورد نظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29, 29/5, 30$ را تشکیل می دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه های گشته شده را حفر کند؟

حل: ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه ها را یک بار از عمیق ترین تا کم عمق ترین چاه و بار دیگر از کم عمق ترین تا عمیق ترین چاه با یکدیگر جمع می کنیم:

$$S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$+ S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5 + 31/5 \Rightarrow$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 m$$

با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می کند.

$$\text{تعداد روز برای پایان کار} = \frac{913/5 m}{2} = 456/25 \text{ روز}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز کار تقریباً به ۱۵ ماه نیاز دارد تا قنات مورد نظر را تمویل دهد.



جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین، روش جالبی است که می توانیم به کمک آن مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را بدست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a + (n-1)d$ ، از یکی از دو رابطه زیر بدست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثلاً: برای تمرین حفر چاه: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$

تمرین ۳۸: مجموع دنباله حسابی $1, 4, 9, \dots, 199$ را به دست آورید.

.....

تمرین ۳۹: مجموع دنباله حسابی زیر را به دست آورید.

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.) $S_1 = ?$ $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$

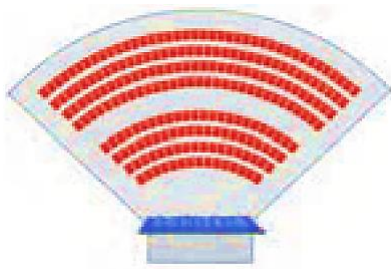
.....

تمرین ۴۰: مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

.....

تکلیف خانه ۱: مجموع ۱۳ جمله اول دنباله حسابی $4, 24, 44, 64, \dots$ را به دست آورید.





تمرین ۴۱: یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

.....

تمرین ۴۲: مجموع چند جمله از دنباله زیر برابر صفر است؟

۱۲, ۱۰, ۸, ...

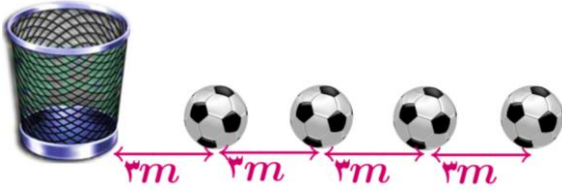
.....

تکلیف خانه ۲: مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی ۹, ۹, ۹, ۹, ... را به دست آورید.



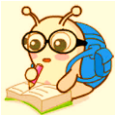


تمرین ۴۳: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سبد شروع کرده و توپ اول را بردارد و آن را به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



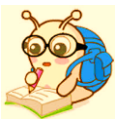
.....

تکلیف خانه ۳: مجموع دنباله حسابی ۵۸, ..., ۲, ۶, ۱۰ را به دست آورید.



.....

تکلیف خانه ۴: اگر در دنباله حسابی $a_1 = 210$ و $a_7 = 450$ باشد، مجموع هفت جمله اول آن را بدست آورید.



فصل ۳ : الگوهای غیر خطی

کتاب: ریاضی و آمار ۳

تهیه کننده: آزاده حاجی هاشمی

دبیر ریاضی: ناحیه ۲ اهواز

اسفند ۱۳۹۸

پیامبر اکرم (ص) مرا فرماید:

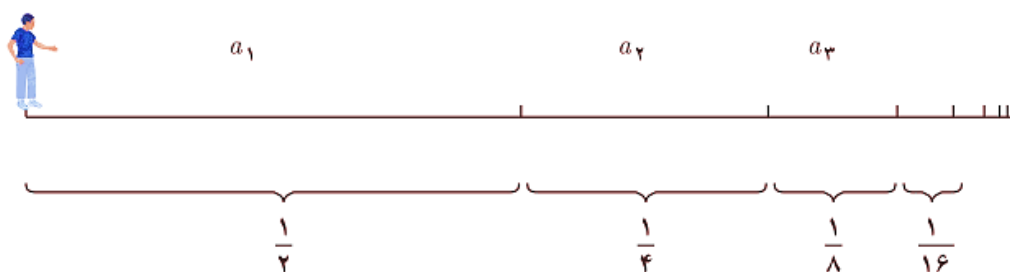
هر کس به «ذات» فراگیرد، ساعتی بهر نفعند،

تا ابد در «ذات» نماند.

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می شوید و بدون توقف به سست در کلاس حرکت می کنید هیچ گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله ای است که «زنو» فیلسوف یونانی، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می کنید و سپس نصف مسیر باقی مانده را طی می کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی مانده و ... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ گاه به در خروجی نخواهد رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله ها نصف فاصله پیشین است، هیچ کدام از این فاصله ها صفر نخواهد شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ نیاز داریم و ... بنابراین:

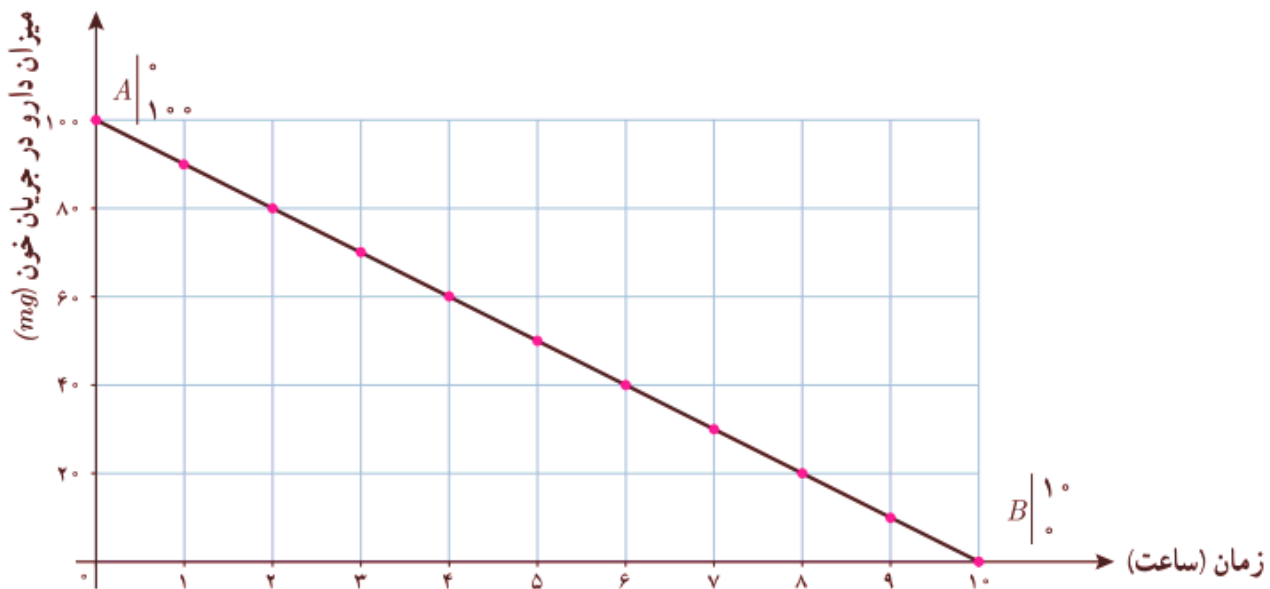
$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

زمان رسیدن به در خروجی کلاس

و چون جملات دنباله $\dots, \frac{t}{4}, \frac{t}{2}, t$ هیچ گاه صفر نمی شوند، پس T از مجموع بی شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه ای به نام «سری های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می شود و در می یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

تمرین ۱: پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می شود. اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی گرم از داروی A در هر ساعت ۱۰ میلی گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون این شخص است.



الف) ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده را بدست آورید.

حل: با استفاده از دو نقطه $(0, 100)$ و $(10, 0)$ شیب خط و سپس ضابطه آن را بدست می آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{0 - 100}{10 - 0} = \frac{-100}{10} = -10$$

$$y = m(x - x_A) + y_A \Rightarrow y = -10(x - 0) + 100 \Rightarrow y = -10x + 100$$

ب) جمله عمومی این دنباله حسابی را بدست آورید.

$$a_1 = 100 - 10 = 90 \quad d = -10$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 90 + (n-1)(-10) = 90 - 10n + 10 \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

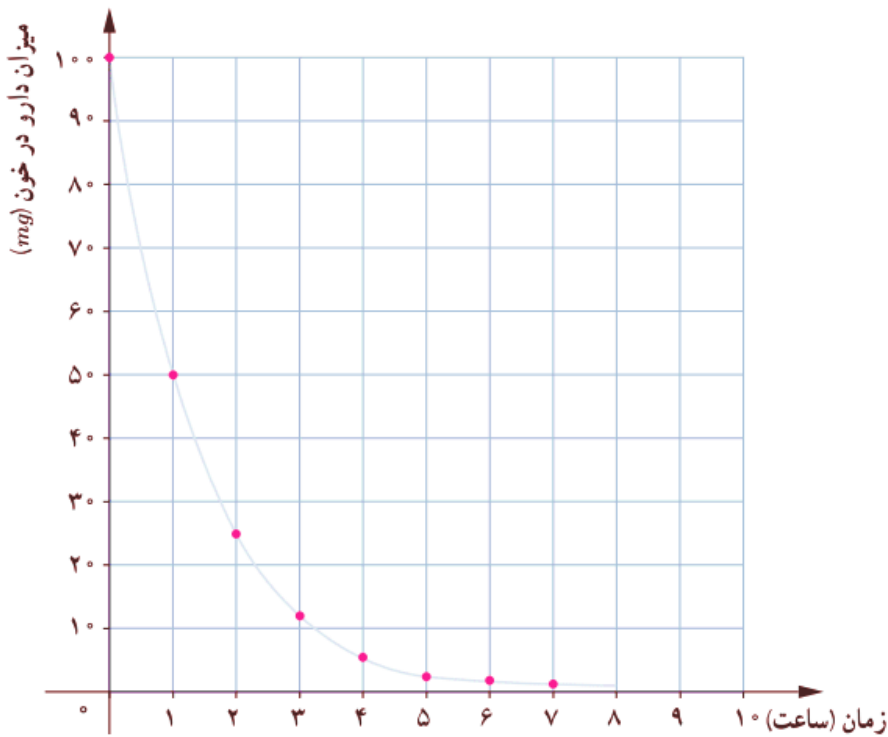


میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی شود و در

تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می یابد.

نیمه عمر: مدت زمانی است که میزان یک ماده به نصف میزان اولیه کاهش می یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نمایش می دهند.

تمرین ۲: شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» در شکل زیر آمده است.



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

حل: پس از سه نیمه عمر - فیر زیرا با افزایش زمان میزان دارو کم و کمتر می شود بطوریکه می توان آن را ناپیچ حساب کرد، اما صفر نمی شود.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

حل: با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت $\frac{1}{2}$ در جمله پیشین بدست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

پ) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times 50$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 50$$

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول، از ضرب یک عدد ثابت (مخالف صفر) در جمله قبلی به دست می آید، «دنباله هندسی» گفته می شود. عدد ثابت را «نسبت مشترک» می نامند و با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت: $a \neq 0$, $r \neq 0$

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت r «نسبت مشترک» جملات دنباله است.

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{جمله } n \text{ ام این دنباله را به صورت معرفی می شود:}$$

تمرین ۳: جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \frac{1}{81} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = 1 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, -\frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
$a_1 = 3$	$r = 2$	$3, 6, 12, 24, 48$	$a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 3$	$a_n = 3(2)^{n-1}$

تمرین ۴: با توجه جدول تمرین قبل، در هر دنباله هندسی $a_n = ar^{n-1}$ به صورت با فرض $a > 0$:

(الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهش ☐ ثابت است. **حل:** کاهش

(ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهش ☐ ثابت است. **حل:** افزایشی

(پ) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهش ☐ ثابت است. **حل:** ثابت

.....

تمرین ۵: ضابطه بازگشتی دنباله هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ را مشخص کنید.

حل: $a_{n+1} = ra_n$ ، $a_1 = a$

.....

تمرین ۶: در دنباله های هندسی زیر نسبت مشترک را مشخص کنید، دو جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

(الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots$ **حل:** $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ ، $r = 3$

(ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots$ **حل:** $b_n = 5 \times 2^{n-1}$ ، $r = 2$

(پ) $6, -60, 600, -6000, \boxed{60000}, \boxed{-600000}, \dots$ **حل:** $c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$ ، $r = -10$

(ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots$ **حل:** $d_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$ ، $r = \frac{1}{2}$

.....

تمرین ۸: جاهای خالی را در دنباله های هندسی زیر پر کنید.

(الف) $4, 20, \boxed{100}, 500, \boxed{2500}$ **حل:** $r = \frac{20}{4} = 5$

(ب) $7, \boxed{21}, 63, 189$ **حل:** $r = \frac{189}{63} = 3$

۶

تمرین ۹: شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را بدست آورید.

حل: با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960000 \quad v_2 = 960000 \times \frac{90}{100} \quad v_3 = \left(960000 \times \frac{90}{100}\right) \times \frac{90}{100} = 960000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$$v_n = 960000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow v_n = 960000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

حل: با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می یابد، هرچه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین در v_2 کاهش ارزش یخچال فریزر بیشتر است.

فید - زیرا هرچه زمان می گذرد این کاهش کم و کمتر می شود.

پ) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر می شود؟ ضابطه v_n را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

حل: چون ۱۰٪ هر عدد غیر صفر، صفر نمی شود.

میزان کاهش باید ثابت باشد.

دنباله حسابی است. $v_n = 960000 - 96000n$

ت) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

حل: با توجه به قیمت خرید اولیه که ۹۶۰۰۰۰ تومان است، پس نصف ارزش آن ۴۸۰۰۰۰ تومان است بنابراین باید نخستین عدد n را که در نامساوی $v_n < 480000$ صدق می کند، بدست آوریم.

$$v_n < 48.0000 \Rightarrow 96.0000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 48.0000 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{48.0000}{96.0000} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$$

$n=1 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 0.5 \Rightarrow 1 \not< 0.5$	$n=5 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 0.5 \Rightarrow 0.6561 \not< 0.5$
$n=2 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 0.5 \Rightarrow 0.9 \not< 0.5$	$n=6 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 0.5 \Rightarrow 0.59049 \not< 0.5$
$n=3 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 0.5 \Rightarrow 0.81 \not< 0.5$	$n=7 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 0.5 \Rightarrow 0.531441 \not< 0.5$
$n=4 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 0.5 \Rightarrow 0.729 \not< 0.5$	$n=8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{8-1} < 0.5 \Rightarrow 0.4782969 < 0.5$

پس طبق جدول $n > 7$ باشد.

ث) باتوجه به قسمت های ب و پ تفاوت حالتی که جملات دنباله در هر مرحله، k کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

حل: زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود.

دنباله یک دنباله حسابی با ضابطه بازگشتی $v_{n+1} = v_n - k$ می شود.

اما زمانی که k درصد کسر شود مقدار جملات کم و کمتر می شود اما هیچ گاه صفر نمی شود.

دنباله یک دنباله هندسی با ضابطه بازگشتی $v_{n+1} = v_n - \left(\frac{k}{100} \times v_n\right)$ می شود.

.....

تمرین ۱۰: طبق آزمایش های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی شود).

حل: با توجه به قیمت مقدار اولیه که ۸۰ میلی گرم است، پس: $a_n = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $a_1 = 80$ ، $r = \frac{1}{2}$

$$80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.00625$$

$n=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} < 0.00625 \Rightarrow 1 \cancel{< 0.00625}$
$n=2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.5 \cancel{< 0.00625}$
$n=3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.25 \cancel{< 0.00625}$
$n=4 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.125 \cancel{< 0.00625}$
$n=5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.0625 \cancel{< 0.00625}$
$n=6 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.03125 \cancel{< 0.00625}$
$n=7 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.015625 \cancel{< 0.00625}$
$n=8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.0078125 \cancel{< 0.00625}$
$n=9 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1} < 0.00625 \Rightarrow 0.00390625 < 0.00625$

پس طبق جدول $n > 8$ باشد. یعنی بعد هشت نیمه عمر یا پس از ۴۸ ساعت مقدار کافئین کمتر از ۰/۵ می شود.

.....

تمرین ۱۱: جمله عمومی دنباله هندسی ...، -۸۰، -۲۰، -۵ را به دست آورید.

$$r = \frac{-20}{-5} = 4 \quad a_n = -5 \times (4)^{n-1} \quad \text{حل:}$$

.....

تمرین ۱۲: یازدهمین جمله از دنباله هندسی ...، ۱۲، ۶، ۳ را به دست آورید.

$$r = \frac{6}{3} = 2 \quad a_n = 3 \times (2)^{n-1} \quad \text{حل:}$$

$$a_{11} = 3 \times (2)^{11-1} = 3 \times (2)^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

تمرین ۱۳: با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می نامند).

حل: طبق تعریف دنباله هندسی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{a} = r \\ \frac{c}{b} = r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow a \times c = b^2$$

تمرین ۱۴: اگر اعداد ۵۶ و x و ۱۴ از چپ به راست جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^2 = 14 \times 56 \Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = 28$$

تمرین ۱۵: اگر اعداد $x+3$ و x و $x-4$ از چپ به راست جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^2 = (x-4) \times (x+3) \Rightarrow \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 3x - 4x - 12 \Rightarrow 0 = -x - 12 \Rightarrow x = -12$$

تمرین ۱۶: میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).

حل: اگر دنباله $a, \dots, \dots, b$ به صورت باشد یعنی $(n+2)$ امین جمله این دنباله هندسی عدد b است پس طبق جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow b = a_{n+2} = ar^{(n+2)-1} = ar^{n+1} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{ar^{n+1}}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = r^{n+1}$$

می توان از فرمول زیر نیز برای بدست آوردن نسبت مشترک استفاده کرد.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

تمرین ۱۷: بین ۳ و ۴۸ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی بدهند.

$$a_1 = 3, \quad a_5 = 48$$

$$r^{5-1} = \frac{48}{3} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=-2 \end{cases}$$

$$r=2 \Rightarrow 3, \boxed{6}, \boxed{12}, \boxed{24}, 48 \quad \text{یا} \quad r=-2 \Rightarrow 3, \boxed{-6}, \boxed{12}, \boxed{-24}, 48$$

.....

تمرین ۱۸: جاهای خالی را پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

الف) $10, \boxed{}, 4000$

$$a_1 = 10, \quad a_3 = 4000 \quad r^{3-1} = \frac{4000}{10} \Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} r=20 \\ r=-20 \end{cases}$$

$$r=20 \Rightarrow 10, \boxed{200}, 4000 \quad \text{یا} \quad r=-20 \Rightarrow 10, \boxed{-200}, 4000$$

ب) $10, \boxed{}, \boxed{}, 80000$

$$a_1 = 10, \quad a_4 = 80000 \quad r^{4-1} = \frac{80000}{10} \Rightarrow r^3 = 8000 \Rightarrow r=20$$

$$r=20 \Rightarrow 10, \boxed{200}, \boxed{4000}, 80000$$

پ) $4, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, 972$

$$a_1 = 4, \quad a_6 = 972 \quad r^{6-1} = \frac{972}{4} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r=3$$

$$r=3 \Rightarrow 4, \boxed{12}, \boxed{36}, \boxed{108}, \boxed{324}, 972$$

تمرین ۱۹: در یک دنباله هندسی جمله پنجم ۱۶۲ و جمله دوم ۶ می باشد.

(الف) نسبت مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

حل: $r^{5-2} = \frac{162}{6} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$ $a_2 = 6$, $a_5 = 162$

(ب) جمله اول این دنباله را تعیین کنید.

حل: $a_5: a \times 3^4 = 162 \Rightarrow 81a = 162 \Rightarrow a = \frac{162}{81} \Rightarrow a = 2$

(پ) جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

حل: $a_n = 2 \times (3)^{n-1}$



تمرین ۲۰: در یک دنباله هندسی، جمله پنجم عدد ۸۰ و جمله هشتم عدد ۶۴۰ است. جمله دوازدهم این دنباله را به دست آورید.

حل:

$a_5 = 80$, $a_8 = 640$ $r^{8-5} = \frac{640}{80} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

راه اول: $a_5: a \times 2^4 = 80 \Rightarrow 16a = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{16} \Rightarrow a = 5$

$a_{12} = 5 \times 2^{11} = 5 \times 2048 = 10240$

راه دوم: بدون بدست آوردن جمله اول $a_{12} = a \times r^{11} = a \times r^5 \times r^6 = a_5 \times r^6 = 80 \times 2^6 = 80 \times 64 = 5120$



تمرین ۲۱: در یک دنباله هندسی، جمله اول عدد ۷ و جمله چهارم عدد ۱۸۹ است. جمله هشتم این دنباله را به دست آورید.

حل: $r^{4-1} = \frac{189}{7} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$ $a_1 = 7$, $a_4 = 189$

$a_8 = 7 \times 3^7 = 7 \times 2187 = 15309$

تمرین ۲۲: برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلو درد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه بار و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1 = 80$
۲	۱۵ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۰۴:۰۰ بعدازظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۶ بهمن	۰۴:۰۰ بعدازظهر	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 80, \quad S_1 = 80$$

حل:

پ) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

$$S_1 = A$$

حل:

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + A = \frac{1}{2}A + A$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A + A\right) + A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A$$

$$S_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 A + \left(\frac{1}{2}\right)^4 A + \left(\frac{1}{2}\right)^3 A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A$$

به همین صورت برای S_6 مناسبه می شود:

پس برای مقاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شفص پس از n بار مصرف:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A \quad \text{رابطه (۱)}$$

اگر طرفین رابطه (۱) را در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{2}S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^nA + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^3A + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A \quad \text{رابطه (۲)}$$

با تفاضل رابطه (۱) از رابطه (۲) رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^nA + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ S_n - \frac{1}{2}S_n &= A - \left(\frac{1}{2}\right)^nA \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}S_n = A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \Rightarrow \quad S_n = 2A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

ت) با جایگذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت پ، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

$$S_n = 2A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad A=80 \quad \Rightarrow \quad 2A=160$$

حل:

$$S_n = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 160 \times \frac{1}{2} = 80$$

$$S_2 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120$$

$$S_3 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 160 \times \frac{7}{8} = 140$$

$$S_4 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 160 \times \frac{15}{16} = 150$$

$$S_5 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 160 \times \frac{31}{32} = 155$$

$$S_6 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right) = 160 \times \frac{63}{64} = 157.5$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی، به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad r \neq 1$$

از رابطه روبرو به دست می آید:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a - a_n r}{1-r}$$

تمرین ۲۲: در تمرین قبل:

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید. حل: $r = \frac{1}{2}$, $a = 80$

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_3 و S_3 چیست؟

حل:

$$a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad S_n = 80 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

S_3 : مجموع میزان باقی مانده بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت.

a_3 : میزان باقی مانده از قرص اول بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت

۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

تمرین ۲۳: در دنباله هندسی روبرو:

الف) جمله یازدهم را حساب کنید.

$$a_{11} = 6 \times (2)^{10} = 6 \times 1024 = 6144$$

حل:

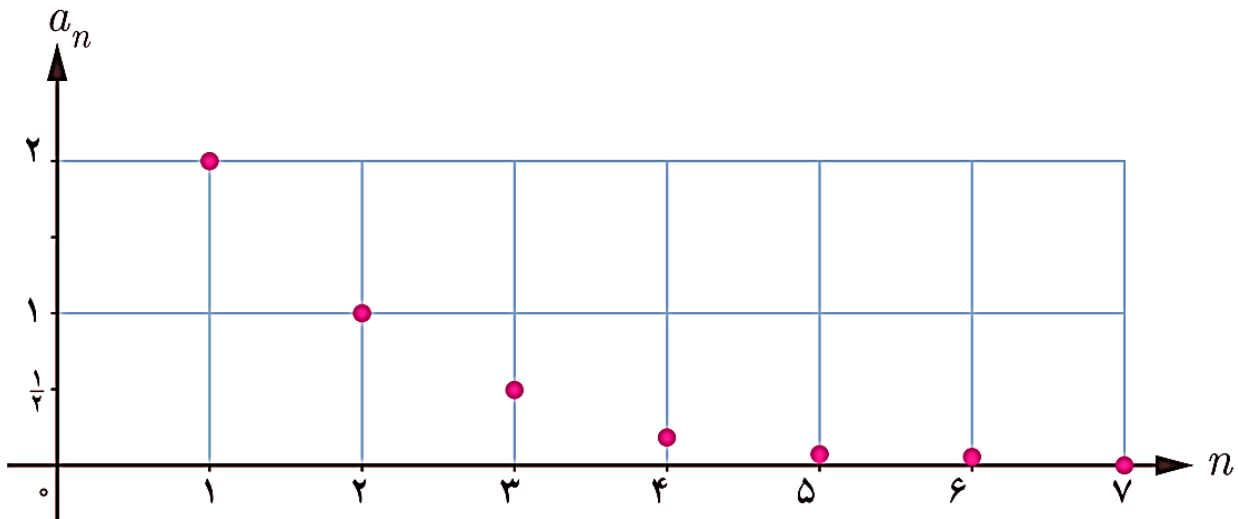
ب) مجموع ده جمله اول را نیز حساب کنید.

$$S_{10} = 6 \left(\frac{1 - (2)^{10}}{1 - 2} \right) = 6 \left(\frac{1 - 1024}{-1} \right) = 6 \left(\frac{-1023}{-1} \right) = 6 \times 1023 = 6138$$

حل:

جملات دنباله	جمله اول	نسبت مشترک	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^5}{1 - (\frac{1}{3})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{242}{3}}{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{242}{2} \times \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{121}{1} = \frac{121}{2}$ $S_{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^{10}}{1 - (\frac{1}{3})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{59048}{3}}{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{59048}{2} \times \frac{3}{2} \right) = \frac{14762}{2} = 7381$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^4}{1 - (\frac{1}{4})} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{255}{4}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{255}{3} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{85}{3}$ $S_8 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^8}{1 - (\frac{1}{4})} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{65535}{4}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{65535}{3} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{21845}{3}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^3}{1 - (\frac{1}{2})} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{4} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{7}{5}$ $S_9 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^9}{1 - (\frac{1}{2})} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{\frac{511}{8}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{511}{4} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{511}{10}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_6 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (5)^6}{1 - (5)} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 15625}{-4} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{15624}{4} \right) = \frac{15624}{10} = 1562.4$ $S_7 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (5)^7}{1 - (5)} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 78125}{-4} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{78124}{4} \right) = \frac{78124}{10} = 7812.4$

تمرین ۲۵: نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:



الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل: $r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

ب) حاصل S_7 را به دست آورید.

حل: $S_7 = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) = 2 \left(\frac{1 - \frac{1}{128}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(\frac{-\frac{127}{128}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(\frac{127}{128} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{127}{64}$



تمرین ۲۶: مجموع جملات دنباله هندسی $7, 21, 63, 189, \dots, 5103$ را به دست آورید.

حل: $7, 21, 63, 189, \dots, 5103$

$a_1 = 7, \quad r = \frac{21}{7} = 3, \quad a_n = 5103$

$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r}$

$S_n = \frac{7 - 3 \times 5103}{1 - 3} = \frac{7 - 15309}{-2} = \frac{-15302}{-2} = 7651$

تمرین ۲۷: مجموع جملات دنباله هندسی $\frac{15}{16}, \dots, 30, 60, 120$ را به دست آورید.

حل: $a_n = \frac{15}{16} \Rightarrow r = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{120 - \frac{1}{2} \times \frac{15}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{120 - \frac{15}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{3840 - 15}{32} = \frac{3825}{32} = \frac{3825}{32} \times \frac{2}{1} = \frac{3825}{16}$$

.....

تمرین ۲۸: در یک دنباله هندسی جمله اول $\frac{11}{8}$ و نسبت مشترک این دنباله هندسی ۲ است:

(الف) جمله چندم این دنباله برابر ۱۷۶ است؟

حل:

$$a = \frac{11}{8}, \quad r = 2 \quad a_n = \frac{11}{8} \times 2^{n-1}$$

$$\frac{11}{8} \times 2^{n-1} = 176 \Rightarrow 2^{n-1} = 176 \times \frac{8}{11} \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^7$$

$$\Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

(ب) مجموع جملات این دنباله از $\frac{11}{8}$ تا ۱۷۶ را بدست آورید؟

حل:

$$S_n = \frac{\frac{11}{8} - 2 \times 176}{1-2} = \frac{\frac{11}{8} - 352}{-1} = \frac{11-2816}{-1} = \frac{-2805}{-1} = \frac{2805}{1}$$

.....

تکلیف خانه: در یک دنباله هندسی جمله اول ۷ و جمله هفتم آن ۴۴۸ مجموع جملات این دنباله از ۷ تا ۴۴۸ را بدست آورید.



یاد آوری: در سال های پیش خوانده ایم که :

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5$$

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6$$

نکته

جمع عددهای مثل هم تبدیل به می شود. به صورتی که یکی از آن عددها در تعدادشان ضرب می شود.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$$

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$$

نکته

ضرب عددهای مثل هم تبدیل به می شود. به صورتی که یکی از آن عددها را به عنوان پایه و تعدادشان را به عنوان توان نوشته می شود.

تاکنون با مفهوم توان های صحیح اعداد و نحوه ریشه گیری دوم و سوم آنها آشنا شده اید.

$$9 \text{ و } -9 \text{ ریشه های دوم عدد } 81 \text{ هستند.} \Rightarrow (-9) \times (-9) = (-9)^2 = 81, \quad 9 \times 9 = 9^2 = 81$$

$$2 \text{ ریشه سوم عدد } 8 \text{ است.} \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

در این درس ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان دار و ریشه های دوم و سوم اعداد یاد گرفته اید، با مفهوم ریشه های چهارم و پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا خواهید شد.

.....

تمرین ۲۹: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $4^3 = 64$

ب) $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

پ) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

ت) $73^1 = 73$

ث) $(-3)^6 = 729$

ج) $-3^6 = -729$

چ) $(0.1)^5 = 0.000001$

ح) $\left(1\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

تمرین ۳۰: حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید.
(m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

الف) $(-36)^y \div 9^y = \left(\frac{-36}{9}\right)^y = (-4)^y$

ب) $(2/1)^6 \times (\frac{2}{1})^4 \times (\frac{1}{2})^4 = (2/1)^6 \times (2/1) \times (2/1)^4 = (2/1)^{11}$

پ) $(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 20^3$

ت) $(\frac{4}{y})^5 \div (\frac{4}{y})^8 = (\frac{4}{y})^{-3} = (\frac{y}{4})^3$ **ث)** $(1.6)^8 = 1.6^8$

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (\frac{2}{1})^4 \times (\frac{1}{2})^4 = (2/1)^{11}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{4}{y})^5 \div (\frac{4}{y})^8 = (\frac{4}{y})^{-3} = (\frac{y}{4})^3$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 20^3$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$(-36)^y \div 9^y = \left(\frac{-36}{9}\right)^y = (-4)^y$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(1.6)^8 = 1.6^8$

تمرین ۳۱: مانند نمونه برای هر یک از رابطه ها یا مثال های زیر مثال یا رابطه متناظر بنویسید.

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$5^y \times 5^8 = 5^{y+8} = 5^{15}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$3^y \times 4^y = 12^y$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$3.4^y \div 3^y = 1.4^y$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

همان طور که می دانید، اگر a یک عدد حقیقی باشد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر ریشه های دوم عدد a همان ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. همچنین ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ریشه معادله $x^3 = a$ هستند.

مثال: ریشه های دوم عدد ۱۶ همان ریشه های معادله $x^2 = 16$ می باشند و چون $(-4)^2 = 16$ ، $4^2 = 16$ پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند.

مثال: ریشه سوم عدد ۲۷ همان ریشه معادله $x^3 = 27$ می باشند که برابر عدد ۳ است.

و با همین استدلال

ریشه های چهارم عدد ۱۶ همان ریشه های معادله $x^4 = 16$ می باشند. پس $\boxed{2}$ و $\boxed{-2}$ ریشه های چهارم عدد ۱۶ هستند.

ریشه پنجم عدد -۳۲ همان ریشه معادله $x^5 = -32$ می باشند که برابر عدد $\boxed{-2}$ است.

ریشه های ششم عدد ۶۴ همان ریشه های معادله $x^6 = \boxed{64}$ می باشند. پس $\boxed{2}$ و $\boxed{-2}$ ریشه های ششم عدد ۶۴ هستند.

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
ریشه های ششم	$\sqrt[6]{64} = 2$ ، $-\sqrt[6]{64} = -2$	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64} = 2$	وجود ندارد
ریشه هفتم	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[7]{-64}$
$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[7]{-64}$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم. هرگاه: $b^n = a$ همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است ریشه n ام مثبت عدد a است.

$a > 0$	زوج n	$\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ دو ریشه n ام عدد a	$a = 25$ $n = 8$	$\sqrt[8]{25}$ و $-\sqrt[8]{25}$ ریشه های هشتم عدد ۲۵
	فرد n	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام عدد a	$a = 5$ $n = 3$	$\sqrt[3]{5}$ ریشه سوم عدد ۵
$a < 0$	زوج n	a ریشه n ام ندارد.	$a = -64$ $n = 6$	-64 ریشه ششم ندارد.
	فرد n	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام عدد a	$a = -32$ $n = 5$	$\sqrt[5]{-32} = -2$ ریشه پنجم عدد -32

با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز :

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{چون } n \text{ زوج است;} \\ a & \text{یعنی: } n \geq 2 \text{ برقرار است;} \end{cases}$$

مثال: $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$ و $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$ ، همچنین $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ و $\sqrt[12]{5^{12}} = 5$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش بینی کرد که این سود در سال های آینده نیز محقق شود. اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند.

$$t = \text{زمان بر حسب سال} \quad \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)} = 100 \times (1/2)^t$$

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$120 = 100 \times (1/2)^1 = 100 \times (1/2) \quad \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان) پس از گذشت یک سال}$$

$$144 = 100 \times (1/2)^2 = 100 \times (1/4) \quad \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان) پس از گذشت دو سال}$$

حال اگر سهام داران این شرکت می خواستند سرمایه شرکت را مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد محاسبه کنند چگونه می توانستند این کار را انجام دهند؟

حل: $10.9 = 100 \times (1/2)^{1/2} = 100 \times (1/0.9) = 10.9$ سرمایه شرکت (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت نیم سال

تا اینجا شما با توان های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح همانند توان های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می شوید.



تمرین ۳۲: پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکترها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد.

(الف) جدول زیر را کامل کند.

زمان(ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	t
جرم(گرم)	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	2^t

(ب) محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال جرم باکتری بعد از نیم ساعت چقدر می شود؟

پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی درس می زنم که گرم شود، اما مقدار را نمی دانم چقدر می شود؛ چون تمام توان هایی که ما تاکنون یاد گرفته ایم، توان های صحیح بوده اند.

پدر محمد: به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود و او را با توان های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$ (زیرا a مثبت است). بنابراین پس از نیم ساعت جرم باکتری ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم. معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پ) بعد از پانزده دقیقه جرم باکتری چند گرم خواهد شد؟

مهم: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است پس گرم $2^{\frac{1}{4}}$ یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

ت) شما مانند محمد جرم باکتری ها را در زمان های داده شده به دست آورید.

$$\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2} \quad \text{پس از ۲۰ دقیقه } \left(\frac{1}{3} \text{ ساعت}\right) \\ \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} \quad \text{پس از ۱۰ دقیقه } \left(\frac{1}{6} \text{ ساعت}\right)$$

برای هر $n \geq 2$ توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می کنیم: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

در این کتاب اگر $a < 0$ و $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی کنیم. عبارت هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف نمی کنیم.



تمام روابطی که برای توان های صحیح اعداد بیان شد، برای توان های گویای و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

مثال: $3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$, $7^{\frac{5}{4}} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$

اگر $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می شود: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

اگر m و n دو عدد اعداد حقیقی و $b > 0$ و $a > 0$ اعداد حقیقی باشند.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تمرین ۳۳: اعداد تواندار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

الف) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

ب) $6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$

پ) $12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$

ت) $3^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}}$

ث) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^4}}$

ج) $(0.001)^{\frac{14}{4}} = \sqrt[4]{(0.001)^{14}}$

تمرین ۳۴: هر یک از عبارت های توانی را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.

الف) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^1}$

ب) $7^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{7^1}$

پ) $\sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$

ت) $\sqrt[12]{2/7} = (12/7)^{\frac{1}{12}}$

ث) $(0.31)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.31}$

ج) $\sqrt[11]{1} = 1^{\frac{1}{11}}$

تمرین ۳۵: سهام داران یک شرکت با استفاده از فرمول $100 \times (1/2)^t$ (زمان بر حسب سال)، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد می کنند. سرمایه شرکت را در هریک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

(الف) ۶ ماه بعد $(\frac{1}{2} \text{ سال})$

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \cdot \sqrt{1/2}$ = سرمایه شرکت پس از شش ماه

(ب) ۳ سال و ۶ ماه بعد

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{7}{2}} = 100 \cdot \sqrt[4]{(1/2)^7}$ = سرمایه شرکت پس از ۳ سال و شش ماه $(3\frac{1}{2} = \frac{7}{2})$

(پ) ۱ سال و ۲ ماه بعد

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{5}{6}} = 100 \cdot \sqrt[6]{(1/2)^5}$ = سرمایه شرکت پس از یک سال و دو ماه $(1\frac{1}{6} = \frac{5}{6})$

(ت) ۲۰۰ روز بعد

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{200}{365}} = 100 \cdot \sqrt[365]{(1/2)^{200}}$ = سرمایه شرکت پس از ۲۰۰ روز $(\frac{200}{365})$



تمرین ۳۶: مانند الف، هریک از اعداد تواندار را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف) $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

(ب) $125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(پ) $100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}} = 10^1 = 10$

(ت) $32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$



تمرین ۳۷: هر يك از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف) $(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \times \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$

(ب) $-4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4(10^3)^{\frac{1}{3}} = -4 \times (10^{3 \times \frac{1}{3}}) = -4 \times 10^1 = -40$

(پ) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (3)^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

(ت) $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} = (7)^{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = 7^{\frac{8}{4}} = 7^2 = 49$

(ث) $125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{4}} = (125)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = (125)^{\frac{8}{12} - \frac{3}{12}} = (5^3)^{\frac{5}{12}} = (5)^{3 \times \frac{5}{12}} = 5^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{5^5} = \sqrt[4]{5^4 \times 5^1} = 5\sqrt[4]{5^1}$

(ج) $8^{\frac{2}{5}} \times (1/5)^{\frac{2}{5}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{5}} = (12)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{12^2} = \sqrt[5]{144}$

.....

تمرین ۳۸: دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

حل: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ در صورتی که $(-8)^{\frac{1}{3}}$ در کتاب گفته شده تعریف نشده است زیرا از دو روش مختلف دو جواب متفاوت برای آن بدست می آید.

روش اول: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

روش دوم: $(-8)^{\frac{1}{3}} = ((-2)^3)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{3 \times \frac{1}{3}} = (-2)^1 = -2$

.....

تمرین ۳۹: در هر یک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

(الف) $5^x \times 3^4 = 15^4$

حل: $5^x \times 3^4 = 15^4 \Rightarrow 5^x \times \cancel{3^4} = 5^4 \times \cancel{3^4} \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4$

ب) $5^4 \times 5^{-7} \times 5^x = 25$

حل: $5^4 \times 5^{-7} \times 5^x = 25 \Rightarrow 5^{-3+x} = 5^2 \Rightarrow -3+x=2 \Rightarrow x=2+3 \Rightarrow x=5$

پ) $(6^3)^x = \frac{1}{6^5}$

حل: $(6^3)^x = \frac{1}{6^5} \Rightarrow 6^{3x} = 6^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$

ت) $\frac{x^6 \times 21^5}{7^3 \times 7^2 \times 7^6} = 3^{11}$

$\frac{x^6 \times 21^5}{7^3 \times 7^2 \times 7^6} = 3^{11} \Rightarrow \frac{x^6 \times 21^5}{7^{11}} = \frac{3^{11}}{1} \Rightarrow x^6 \times 21^5 = 21^{11}$
 $\Rightarrow x^6 = \frac{21^{11}}{21^5} \Rightarrow x^6 = 21^6 \Rightarrow x = 21$



تابع نمایی

درس ۳

«بنیاد ملی بازی های رایانه ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت های موجود صنعت بازی های رایانه ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تا کنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد «مجموعه بازی های سبز» است که قرار است دانش آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده کننده محیط زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط زیست می شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد.



تمرین ۴۰: براساس «مجموعه بازی های سبز» به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
$3^4 = 81$	۴
۲۴۳	۵
$3^6 = 729$	۶
$3^7 = 2187$	۷
$3^8 = 6561$	۸
$3^9 = 19683$	۹
$3^{10} = 59049$	۱۰

ب) در کدام مرحله، میزان امتیاز کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

حل: مرحله هشتم

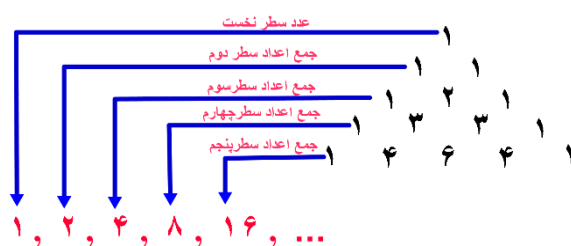
پ) آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیاز کسب شده، رابطه ای به دست آورید.

حل: $(\text{تعداد مراحل بازی}) \times 3 = \text{میزان امتیاز کسب شده}$

ت) با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله $n^{\text{ام}}$ را به دست آورید؟

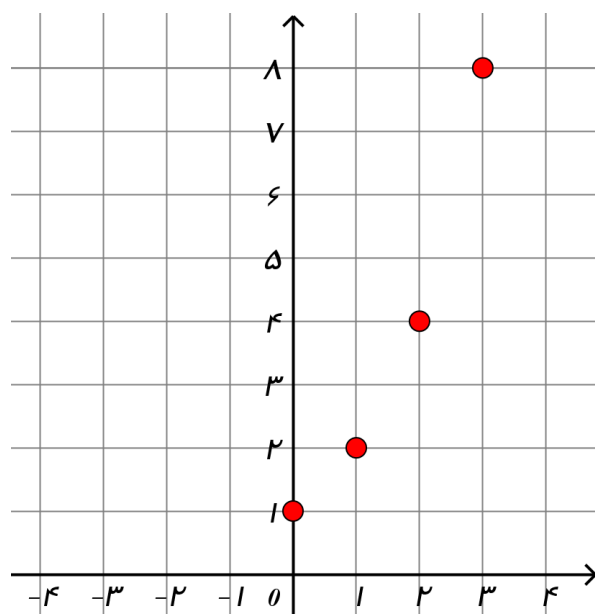
حل: بله - $3^{10} = 59049$ - $3^{20} = 3486784401$ - مرحله $n^{\text{ام}} = 3^n$

تمرین ۴۱: دربخش دنباله ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می کرد.



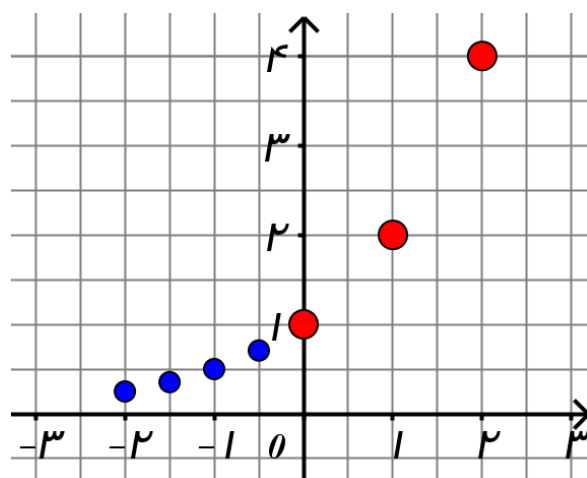
الف) مقادیر به دست آمده مثلث خیام را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۲	۴	۸	۱۶

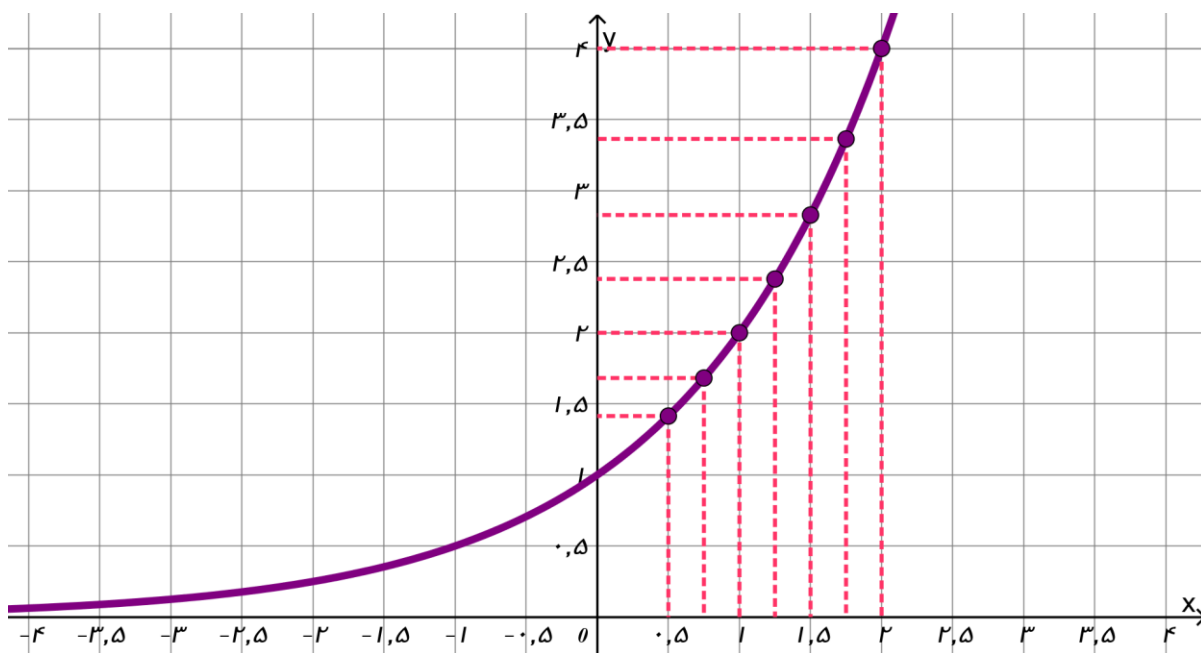


ب) جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱	$-\frac{3}{2}$	-۲
2^x	۱	۰/۷۰۷	۰/۵۰۰	۰/۳۵۳	۰/۲۵۰



پ) اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می شود.

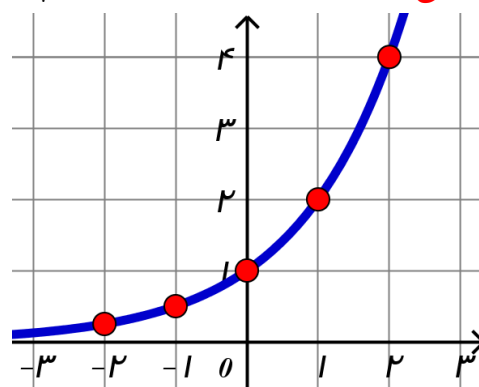
تذکره: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ ، مجموعه $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

تمرین ۴۲: تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.

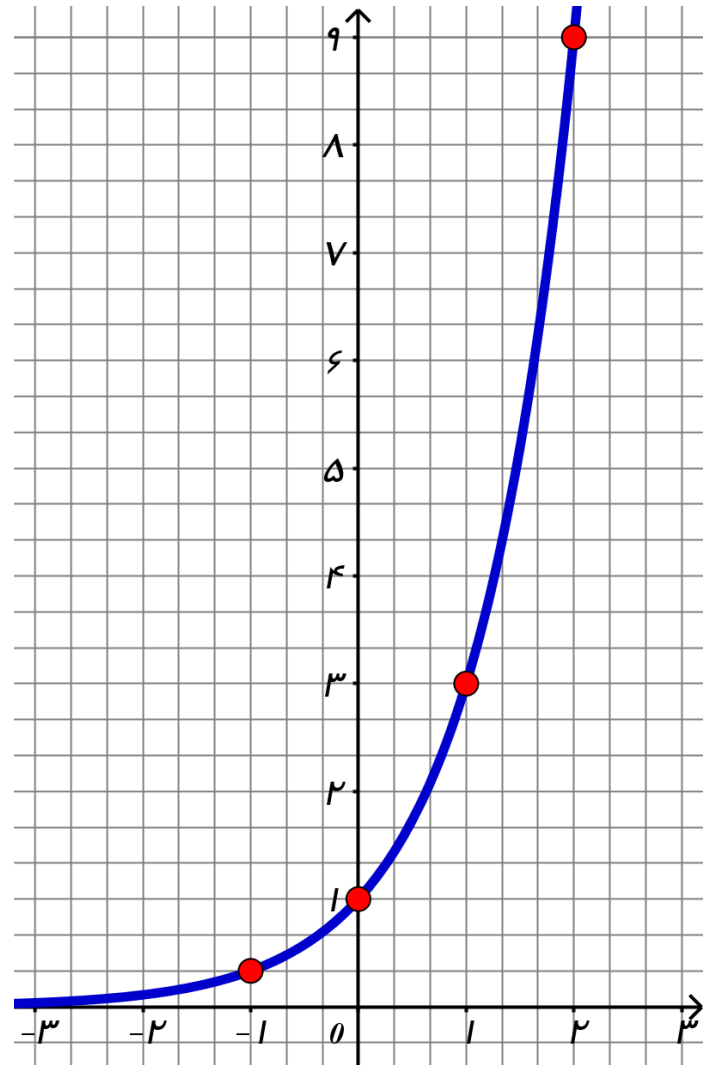


x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{1}{۴}$	$\frac{1}{۲}$	۱	۲	۴



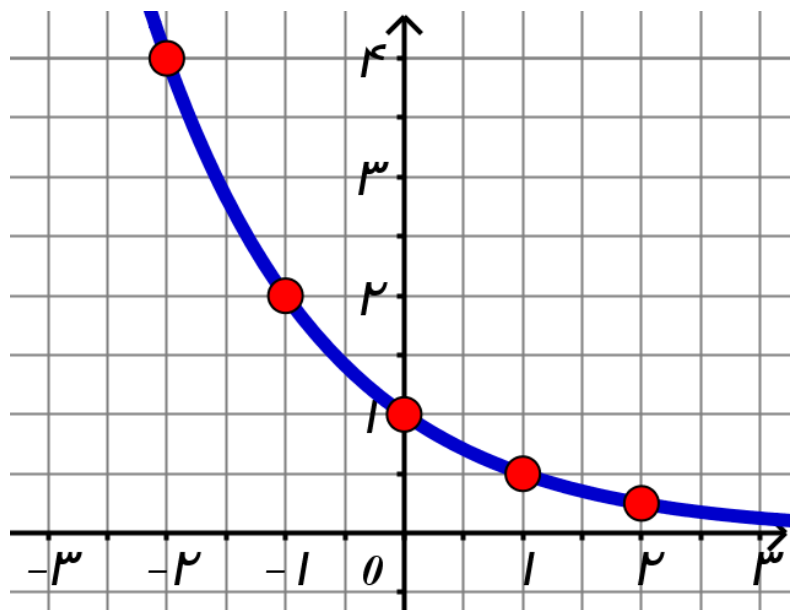
تمرین ۴۳: تابع $y = 3^x$ را رسم کنید.

x	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹



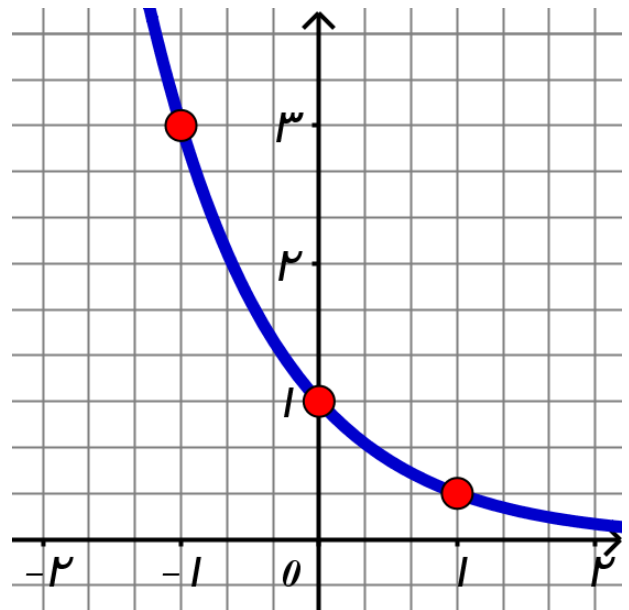
تمرین ۴۴: تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

x	۲	۱	۰	-۱	-۲
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴



تمرین ۴۵: تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را رسم کنید.

x	۱	۰	-۱
y	$\frac{1}{3}$	۱	۳



تمرین ۴۶: با توجه به نمودار تابع نمایی $y = 3^x$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نمودار این تابع محور y ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

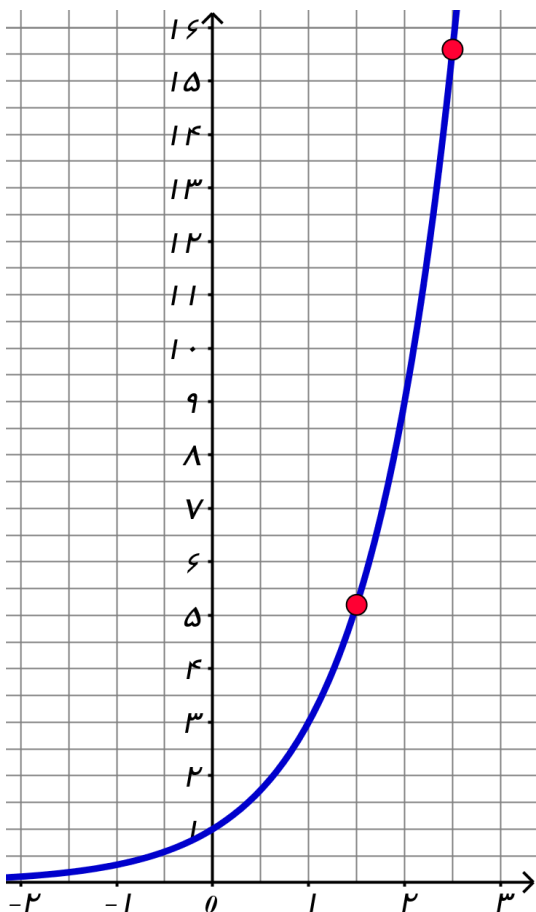
حل: نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.

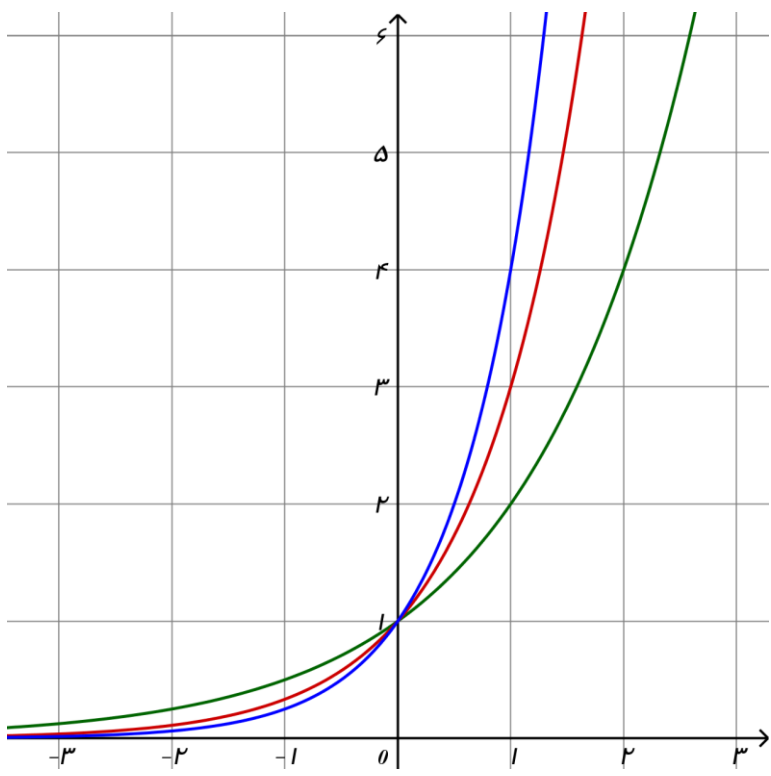
ب) آیا نمودار این تابع محور x ها را قطع می کند؟ چرا؟

حل: نمودار محور x ها را قطع نمی کند. زیرا عدد سه به هر توانی که برسد صفر نمی شود.

پ) با استفاده از نمودار این تابع مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{3}{2}}$ و $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

حل: $3^{\frac{3}{2}} \approx 5.25$ و $3^{\frac{5}{2}} \approx 15.5$





تمرین ۴۷: نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

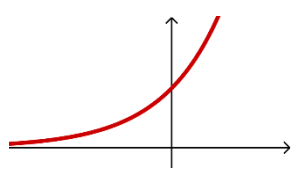
شباهت ها: هر سه نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کنند. - هر سه نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. - در هر سه نمودار با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. ($\mathbb{R}^+$)

تفاوت ها: سرعت افزایش مقدار y هایشان برابر نیست.

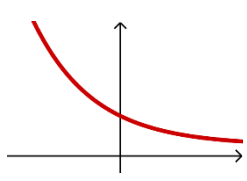


تمرین ۴۸: جاهای خالی را پر کنید:

الف) در تابع $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر y افزایش می یابند.



ب) در تابع $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر y کاهش می یابند.



تمرین ۴۹: یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی مساحت اولیه است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

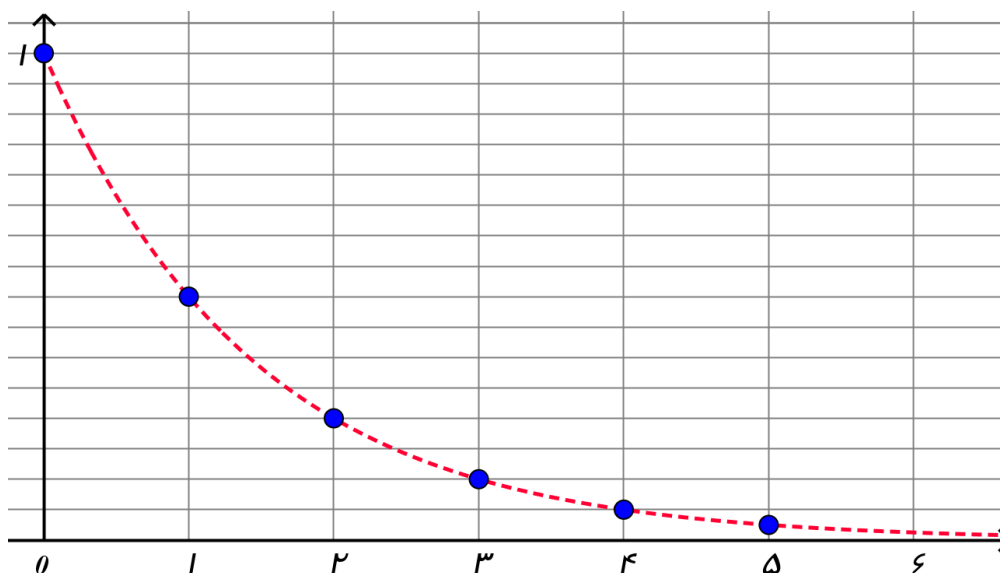
تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$
۵	$\frac{1}{32}$
⋮	⋮
۸	$\frac{1}{256}$
۱۰	$\frac{1}{1024}$

ب) با توجه به جدول چه الگویی را می توانید پیشنهاد کنید؟

حل: $\frac{1}{2^n}$ = میزان مساحت هر ناحیه (تعداد تا زدن ها)
یعنی:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

پ) در نمودار زیر رابطه تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است. نقطه تقاطع منحنی با محور



y ها چیست؟

حل: منحنی محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی مقدار x بزرگ می شود، مقدار y کوچک می شود و وقتی مقدار x کوچک می شود، مقدار y بزرگ می شود.

رشد و زوال نمایی

منظور از مسائل رشد یا زوال مسائل است که به متغیرهایی اشاره دارد که با گذشت زمان، افزایش یا کاهش می یابند.

مانند: افزایش یا افت قیمت اجناس ، رشد جمعیت ، رشد تورم ، افزایش تعداد باکتری ها در یک کشت باکتری ، کاهش وزن یک پنجره آهنی بر اثر زنگ زدگی ، کاهش مواد غذایی بر اثر جمعیت ، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...



تمرین ۵۰: احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه گذاری کند. او تصمیم گرفته که این مبلغ را در یک شرکت تولید کننده کالای ایرانی سرمایه گذاری کند که در پایان هر سال ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

سن احسان	۱۷	۱۸	۱۹	...	۲۳
مبلغ سرمایه گذاری شده در شرکت تولیدی	۱۰۰۰۰۰۰۰ تومان			...	

مبلغ سرمایه گذاری در ۱۸ سالگی احسان $1000000 + \left(1000000 \times \frac{14}{100}\right) = 1000000 + 140000 = 1140000$

$$1000000 + \left(1000000 \times \frac{14}{100}\right) = 1000000 \times \left(1 + \frac{14}{100}\right) = 1000000 \times (1/14) = 1140000$$

مبلغ سرمایه گذاری در ۱۹ سالگی احسان $1000000 \times (1/14)^2 = 1299600$ یا $1140000 \times (1/14) = 1299600$

بنابراین:

$$23 - 17 = 6 \quad \text{مبلغ سرمایه گذاری در ۲۳ سالگی احسان} \quad 1000000 \times (1/14)^6 \approx 21949726/23$$



معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = C(1+r)^t$ است.

C : بیانگر مقدار اولیه

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی

t : بیانگر زمان

r : بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار)

تمرین ۵۱: ایران در سال ۱۳۵۹ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است. اگر آهنگ رشد سالانه جمعیت ایران برابر ۰/۰۲ باشد، حساب کنید پس از ۴۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود؟ $(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۲/۲۱$

حل:

$$f(۴۰) = ۳۶(۱ + ۰/۰۲)^{۴۰} = ۳۶(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۳۶(۲/۲۱) = ۷۹/۵۶$$

تمرین ۵۲: در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر آهنگ رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد.

(الف) پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ $(۱/۰۲)^{۳۰} \approx ۱/۸۱$

$$f(۳۰) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۳۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۰} \approx ۵/۲(۱/۸۱) = ۹/۴۱۲$$

حل:

(ب) پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟

$$(۱/۰۲)^{۱۰۵} \approx ۱/۹۹, (۱/۰۲)^{۷۰} \approx ۳/۹۹, (۱/۰۲)^{۳۵} \approx ۷/۹۹$$

$$f(۳۵) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۳۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۵} \approx ۵/۲(۱/۹۹) = ۱۰/۳۴۸$$

حل:

$$f(۷۰) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۷۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۷۰} \approx ۵/۲(۳/۹۹) = ۲۰/۷۴۸$$

$$f(۱۰۵) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۱۰۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۱۰۵} \approx ۵/۲(۷/۹۹) = ۴۱/۵۴۸$$

(پ) آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ سال مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: تقریباً هر ۳۵ سال جمعیت کره زمین دو برابر می شود.

معادله کلی زوال نمایی، به صورت $f(t) = C(1-r)^t$ است.

C : بیانگر مقدار اولیه

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی

t : بیانگر زمان

r : بیانگر میزان نزول (تغییرات برحسب اعشار)

تمرین ۵۳: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ $0/۸۳ \approx (0/۹۹)^{۱۸}$

حل:

$$f(۱۸) = ۴۰۰۰۰۰۰ \cdot (۱ - 0/۰۱)^{۱۸} = ۴۰۰۰۰۰۰ \cdot (0/۹۹)^{۱۸} \approx ۴۰۰۰۰۰۰ \cdot (0/۸۳) = ۳۳۲۰۰۰۰$$



تمرین ۵۴: وزن تیر آهن سائز ۱۴، ۱۵۵ کیلوگرم است. اگر وزن این تیر آهن بر اثر زنگ زدگی هر سال ۳ درصد وزن سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۰ سال وزن این تیر آهن چقدر می شود؟ $0/۷۳ \approx (0/۹۷)^{۱۰}$

حل:

$$f(۱۰) = ۱۵۵(۱ - 0/۰۳)^{۱۰} = ۱۵۵(0/۹۷)^{۱۰} \approx ۱۵۵(0/۷۳) = ۱۱۳/۱۵$$



تمرین ۵۵: شخصی یک دوچرخه به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این دوچرخه هر سال معادل ۵ درصد ارزش سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۵ ارزش این دوچرخه چقدر می شود؟ $0/۴۶ \approx (0/۹۵)^{۱۵}$

حل:

$$f(۱۵) = ۹۶۰۰۰۰(۱ - 0/۰۵)^{۱۵} = ۹۶۰۰۰۰(0/۹۵)^{۱۵} \approx ۹۶۰۰۰۰(0/۴۶) = ۴۴۱۶۰۰$$

بارم بندی ریاضی و آمار ۳ (پایه دوازدهم رشته‌ی علوم انسانی و معارف اسلامی)

فصل	عناوین	پایان نوبت اول تا آخر صفحه ۶۰	پایان نوبت دوم تا آخر کتاب	شهریور و دی تا آخر کتاب
اول	کل فصل	۱۵	۵	۸
دوم	درس ۱ (تا صفحه‌ی ۶۰)	۵	۲	۵/۵
	درس ۲ (صفحه‌ی ۶۰ به بعد)	-	۳/۵	
سوم	کل فصل	-	۹/۵	۶/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

حل تمرینات صفحات ۸۴ و ۸۵ و ۸۶

۱ - با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

$$۱) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

حل: ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

$$۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

حل: ... $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{4}{18}, \frac{8}{54}, \dots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

حل: ... $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

$$a_{1+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

و

$$a_{2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

و

$$a_{3+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

حل: ... $1, 2, 4, 8, \dots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

۲ - در جزوه به عنوان تمرین ۱۳ حل شده است.

۳ - اگر اعداد $X+3$ و $X+2$ و X سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار X را به دست آورید.

حل: $(X+2)^2 = X \times (X+3) \Rightarrow \cancel{X^2} + 4X + 4 = \cancel{X^2} + 3X \Rightarrow 4X - 3X = -4 \Rightarrow X = -4$

۴ - سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

حل: اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد پس ۴۰٪ باقی می ماند.

$$a_n = 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_3 = 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 = 16 \times 10^{10}$$

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

حل:
$$a_n < 7 \times 10^6 \Rightarrow 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < \frac{7 \times 10^6}{10^{12}} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$$

$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 1 \not< 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.4 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.16 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.064 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0256 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.01024 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 \not< 0.000007$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.004096 \not< 0.000007$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.000007$

پس از ۱۴ بار شیمی درمانی توده سرطانی کوچک و سپس به کمک جراحی می توان باقی مانده سلول های سرطانی او را برداشت.

۵- در جزوه به عنوان تمرین ۱۶ حل شده است.

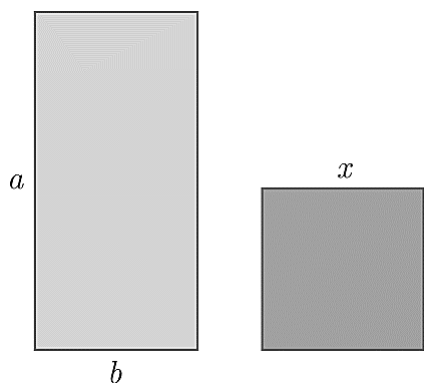
۶- جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

حل:

$$a_3 = 27, \quad a_5 = 243 \quad r^{5-3} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \quad \begin{cases} r = 3 \\ r = -3 \end{cases}$$

$$a_7 = ar^6 = ar^3 \times r^3 = a_3 \times r^3 = 27 \times 27 = 729$$

۷- مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟



الف) a, b, x

ب) a, x, b

پ) b, a, x

حل: $x^2 = \text{مساحت مربع}$ و $a \times b = \text{مساحت مستطیل}$

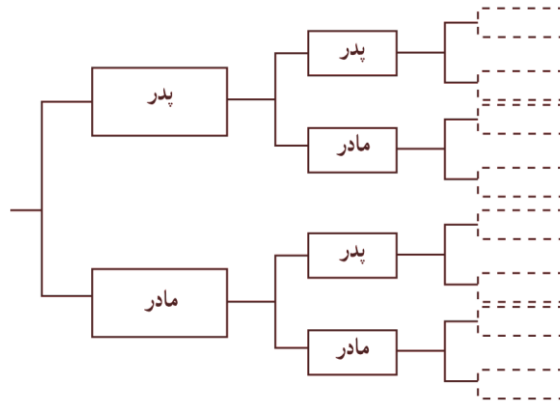
بنابراین باید $ab = x^2$ یعنی واسطه هندسی است. بنابراین گزینه ب درست است.

۸- یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

حل: اگر در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود پس ۸۵٪ باقی می ماند.

$$a_n = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{n-1} \Rightarrow a_5 = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{5-1} \approx 15000 \times 0.522 = 7830 \text{ کیلوگرم}$$

۹- شخصی پدر و مادر ، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و دارد.



الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

حل: $۲, ۴, ۸, \dots$

$$a_n = 2(2)^{n-1} = 2^n \Rightarrow a_{10} = 2^{10} = 1024 \text{ نفر}$$

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص چند نفرند؟

$$S_{10} = 2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2 \times \frac{1-1024}{-1} = 2 \times \frac{-1023}{-1} = 2046 \text{ نفر}$$

حل:

۱۰- مجموع های زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$

$$a_1 = 1, \quad r = \frac{4}{1} = 4, \quad a_n = 4096$$

حل:

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r} \Rightarrow S_n = \frac{1 - 4 \times 4096}{1 - 4} = \frac{1 - 16384}{-3} = \frac{-16383}{-3} = 5461$$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{640}$$

حل:

$$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{640}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{256}{1280} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{255}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{255}{640}$$

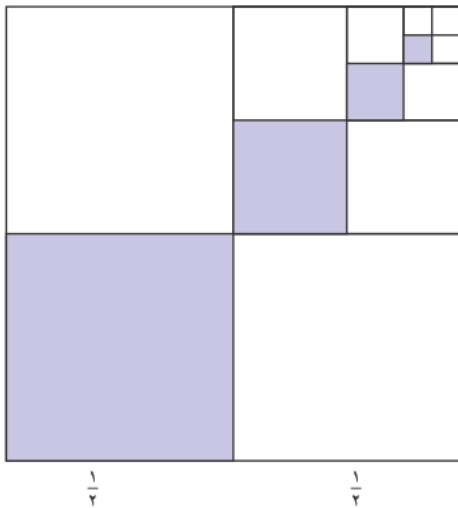
۱۱ - نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

$$a_1 = 1536, \quad r = \frac{1}{4}, \quad a_n = 6$$

حل:

$$6 = 1536 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{6}{1536} \Rightarrow \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{256} \Rightarrow 4^{n-1} = 256 \Rightarrow 4^{n-1} = 4^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$S_n = \frac{1536 - \frac{1}{4} \times 6}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1536 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1536 - 1.5}{0.75} = \frac{1534.5}{0.75} = 2046$$



۱۲ - پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می کنیم. از مربع های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می کنیم و همین روند را ادامه می دهیم.

فصل ۲

الف) چرا دنباله مساحت های مربع های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد؟

حل: $\dots, \frac{1}{64}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}$ زیرا مساحت هر قسمت از ضرب مساحت قبلی در $\frac{1}{4}$ بدست می آید.

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

حل:

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^6}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{\frac{4^6 - 1}{4^6}}{\frac{3}{4}} = \frac{4^6 - 1}{4^6 \times 3} = \frac{4096 - 1}{4096 \times 3} = \frac{4095}{12288}$$

حل:

۴۳

حل تمرینات صفحات ۹۴ و ۹۵

۱- با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

حل:

۲- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند).

الف) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}}$

حل: $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{12} + \frac{3}{12}} = 3^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{3^7}$

ب) $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})}$

حل: $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} = 5^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 5^0 = 1$

پ) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

حل: $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

ت) $(2^6)^{\frac{1}{3}}$

حل: $(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

ث) $\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}}$

حل: $\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{4 \times \frac{1}{2}}}{2^{6 \times \frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$

ج) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$

حل: $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{a^{-\frac{1}{2} \times (-4)}}{a^{-\frac{1}{4} \times (-4)}} = \frac{a^2}{a^1} = \frac{a^2}{a} = a$

چ) $3^{0/26} \times 3^{0/74}$

حل: $3^{0/26} \times 3^{0/74} = 3^{0/26 + 0/74} = 3^0 = 1$

ح) $(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 \cdot n^3)^{\frac{1}{2}}$

حل: $(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 \cdot n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{2}{3} \times 2} \cdot n^{\frac{1}{2} \times 2} \cdot m^{2 \times \frac{1}{2}} \cdot n^{3 \times \frac{1}{2}} = m^{\frac{4}{3}} \cdot n^1 \cdot m^1 \cdot n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{4}{3} + 1} \cdot n^{\frac{3}{2} + 1} = (mn)^{\frac{5}{2}}$

۳- در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

الف) $1^x \times 9^5 = 72^5$

حل: $1^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 1^x \times \cancel{9^5} = 1^5 \times \cancel{9^5} \Rightarrow 1^x = 1^5 \Rightarrow x = 5$

ب) $(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7$

حل: $(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7 \Rightarrow (0.36)^{-2+x} = (0.36)^7 \Rightarrow -2+x=7 \Rightarrow x=9$

پ) $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2}$

حل: $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

ت) $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^1$

حل: $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^1 \Rightarrow \frac{x^5 \times 15^3}{3^8} = \frac{5^1}{1} \Rightarrow x^5 \times 15^3 = 5^1 \Rightarrow x^5 = \frac{15^1}{15^3} \Rightarrow x^5 = 15^{-2} \Rightarrow x = 15^{-2/5}$

۴ - همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (V حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر به دست

آورد. $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

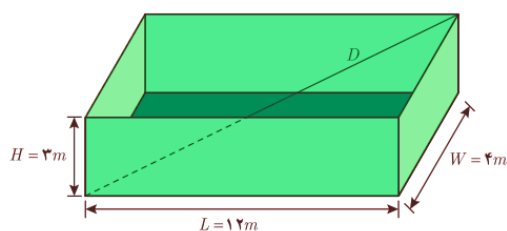
حل: $\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \times \frac{1}{3}} = r$



ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

حل: $r = \left(\frac{3\left(\frac{32\pi}{3}\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2$

۵- اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه H به دست می آید.



الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

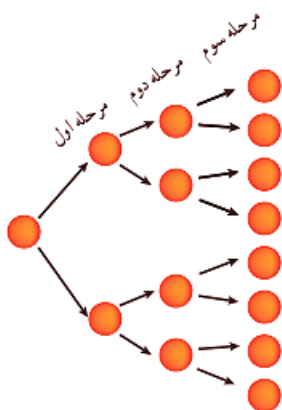
حل: $(12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (144 + 16 + 9)^{\frac{1}{2}} = (169)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$

ب) اگر اندازه $L = W = H = 1$ m باشد، اندازه D را به دست آورید.

حل: $(1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 1 + 1)^{\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

حل تمرینات صفحات ۱۰۲ و ۱۰۳

۱- در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول های بنیادی جنین انسان تولید می شود. این سلول ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می توانند تمام انواع سلول های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

حل: مرحله یازدهم $n = 11 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow 2^n = 2048 \Rightarrow n = 11$

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

حل: $a_8 = 2^8 = 256$

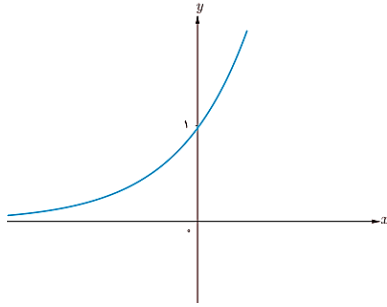
پ) آیا می توانید الگویی برای تکثیر سلول ها مشخص کنید؟

حل: $a_n = 2^n$ یعنی: تعداد سلول ها

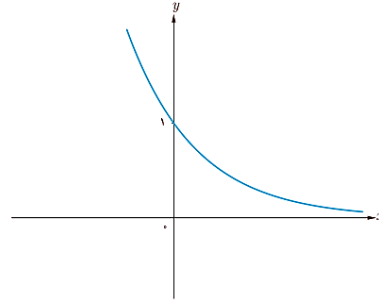
۲- یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

حل: مانند کاهش وزن یک پنبره آهنی بر اثر زنگ زدگی، کاهش کربن ۱۴ در بدن، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...

۳- در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = 4^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



$$y = 4^x$$



$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

حل:

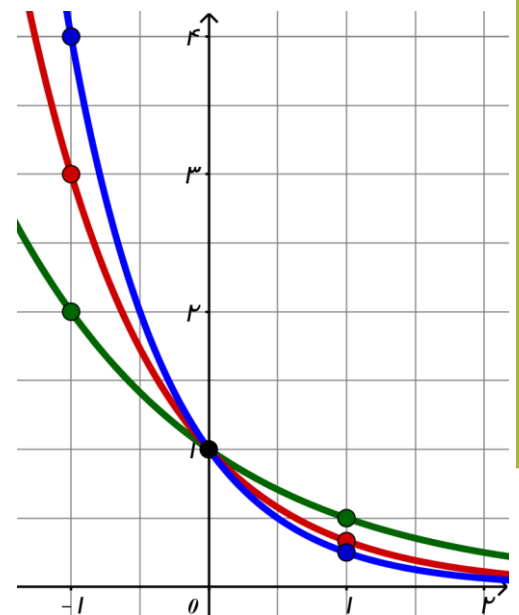
۴- نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت ها و شباهت های آنها را برشمرد.

حل: شباهت ها: هر سه نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کنند. - هر سه نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. - در هر سه نمودار با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز کاهش می یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. $(\mathbb{R}^+)$ تفاوت ها: سرعت کاهش مقدار y هایشان برابر نیست.

x	1	0	-1
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	1	2

x	1	0	-1
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\frac{1}{3}$	1	3

x	1	0	-1
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	$\frac{1}{4}$	1	4



۵- نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: شباهت ها: هر دو نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کنند. - هر دو نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. - دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. $(\mathbb{R}^+)$

تفاوت ها: در نمودار با $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ افزایش مقدار x ، مقدار y نیز کاهش می یابد. ولی در نمودار با $y = 3^x$ افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می یابد.

حل تمرینات صفحه ۱۰۵

۱- در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

$$f(10) = 40000000 \times (1 + 0.114)^{10} = 40000000 \times (1.114)^{10} \approx 40000000 \times 3.707 = 148280000$$

حل:

۲- جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$$f(10) = 1000000 \times (1 + 0.06)^{10} = 1000000 \times (1.06)^{10} \approx 1000000 \times 1.79 = 1790000$$

حل:

۳- جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها باموش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

$$f(t) = 23576 \times (1 - 0.025)^t = 23576 \times (0.975)^t$$

$$f(1) = 23576 \times (0.975)^1 = 22986.6$$

$$f(2) = 23576 \times (0.975)^2 \approx 23576 \times (0.95) = 22397.2$$

$$f(3) = 23576 \times (0.975)^3 \approx 23576 \times (0.92) = 21689.92$$

$$f(4) = 23576 \times (0.975)^4 \approx 23576 \times (0.90) = 21218.4$$

$f(5) = 23576 \times (0.975)^5 \approx 23576 \times (0.88) = 20746/11$
$f(6) = 23576 \times (0.975)^6 \approx 23576 \times (0.85) = 20039/6$
$f(7) = 23576 \times (0.975)^7 \approx 23576 \times (0.83) = 19561/0.1$
$f(8) = 23576 \times (0.975)^8 \approx 23576 \times (0.81) = 19096/56$
$f(9) = 23576 \times (0.975)^9 \approx 23576 \times (0.79) = 18625/0.4$
$f(10) = 23576 \times (0.975)^{10} \approx 23576 \times (0.77) = 18153/52$

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

$$g(t) = 15786 \times (1 + 0.018)^t = 23576 \times (1/0.18)^t$$

$g(1) = 15786 \times (1/0.18)^1 = 16070/148$
$g(2) = 15786 \times (1/0.18)^2 \approx 15786 \times (1/0.3) = 16259/51$
$g(3) = 15786 \times (1/0.18)^3 \approx 15786 \times (1/0.5) = 16525/3$
$g(4) = 15786 \times (1/0.18)^4 \approx 15786 \times (1/0.7) = 16891/0.2$
$g(5) = 15786 \times (1/0.18)^5 \approx 15786 \times (1/0.9) = 17206/74$
$g(6) = 15786 \times (1/0.18)^6 \approx 15786 \times (1/1.1) = 17522/46$
$g(7) = 15786 \times (1/0.18)^7 \approx 15786 \times (1/1.3) = 17838/11$
$g(8) = 15786 \times (1/0.18)^8 \approx 15786 \times (1/1.5) = 18153/9$
$g(9) = 15786 \times (1/0.18)^9 \approx 15786 \times (1/1.7) = 18469/62$
$g(10) = 15786 \times (1/0.18)^{10} \approx 15786 \times (1/1.9) = 18785/34$

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟

مل: $g(10) > f(10)$
 $18785/34 \quad 18153/52$

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟

مل: بین سال نهم و دهم

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟

مل: اگر طبق این توابع جمعیت موش ها و گربه ها را حساب کنیم تعداد موش ها کم و کمتر می شود و تعداد گربه ها زیاد و زیادتر می شود. اما در طبیعت وقتی تعداد موش ها کم شود به دلیل نبود فوآک برای گربه ها گربه ها هم کم و کمتر می شود.