

سری عددی

سری تلسکوپی

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱۱م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

مقدار سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

۲ روش حل مسئله



پاسخ: در سری‌های به فرم $f_n - f_{n+1}$ که مقدار f_n به صفر میل می‌کند، در صورت همگرا بودن سری می‌توان از روشی استفاده کرد که اصطلاحاً سری تلسکوپی نامیده می‌شود. در این روش، مسئله تبدیل به $f_n - f_{n+1}$ شده و تنها جمله f_n به ازای کمترین مقدار n بدست می‌آید.

۱.۲ روش اول

تابع کسری داده‌شده به صورت زیر قابل جدا شدن است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \right)$$

ضرایب a ، b و c به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} a &= (n) \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \Big|_{n=0} = \frac{1}{2} \\ b &= (n+1) \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \Big|_{n=-1} = -1 \\ c &= (n+2) \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \Big|_{n=-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{0.5}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{0.5}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{0.5}{n} - \frac{0.5}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{0.5}{n+1} + \frac{0.5}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

رابطه فوق به دو تفاضل با فاصله واحد تبدیل شده است. در نتیجه دو سری تلسکوپی تشکیل شده است که در جمله اول آن $f_n = \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ و در سری دوم $f_n = \frac{1}{2} \frac{1}{n+1}$ است. کافیت $n = 1$ در جمله اول هر کدام جایگذاری شود.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{4}$$

۲.۲ روش دوم

تابع کسری داده شده به صورت زیر نیز قابل جدا شدن است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

رابطه فوق به صورت سری تلسکوپ می باشد و مقدار آن با جمله اول و سمت چپ سری برابر است.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1)(2)} = \frac{1}{4}$$

۳ مسائل مشابه

مثال ۱: مقدار سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+N)}$$

پاسخ: نوشتن این سری به حالت تلسکوپی دشوار نیست. 

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+N)} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+N-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+N)} \right)$$

کافیت در جمله اول آن مقدار $n = 1$ قرار گیرد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+N)} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N} = \frac{1}{N \times N!}$$

مثال ۲: مقدار سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n \right)$$

🤔 پاسخ: مقدار دنباله این عبارت به ازای $n \rightarrow \infty$ برابر با صفر است ($\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$). پس شرط اولیه برای همگرایی را دارد، اما با نوشتن این عبارت به صورت تلسکوپی در حالت کنونی، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$(\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1) + (\tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2) + \dots + (\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n)$$

حذف جملات در بی‌نهایت با مشکل روبروست! رفع این مشکل با تغییر تابع امکان‌پذیر است.

💡 هنگامی که آرگومان‌ها در ربع اول مثلثاتی قرار دارند، برای معکوس تانژانت رابطه زیر برقرار است:

$$\tan^{-1} a - \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n = \tan^{-1} \frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)} = \tan^{-1} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

صورت و مخرج تابع کسری مقابل معکوس تانژانت بر $n(n+1)$ تقسیم می‌شوند.

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n &= \tan^{-1} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \tan^{-1} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \tan^{-1} \frac{1}{n} - \tan^{-1} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

با این رابطه، مشخص است که سری به صورت تلسکوپی در آمده است.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan^{-1} \frac{1}{n} - \tan^{-1} \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \tan^{-1} \frac{1}{1} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ما میانگینی از پنج انسانی می‌شویم
که بیشتر با آن‌ها در ارتباطیم.

Jim Rohn



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/@AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com