یادآوری:

تعریف تبدیل لاپلاس: $F(s)$ یا $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

شرط لازم برای وجود وارون لاپلاس: اگر $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ موجود باشد آنگاه $\lim_{s\to\infty} F(s)=0$

نتیجه آن است که اگر $\lim_{s\to\infty} F(s)$ صفر نباشد یا موجود نباشد آنگاه $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ وجود ندارد.

---

۱. الف

$$\int_0^\infty e^{-2t}\sin 3t\,dt = \mathcal{L}\{\sin 3t\}_{s=2} = \frac{3}{s^2+9}\Big|_{s=2} = \frac{3}{13} \quad \square$$

۱. ب

$$\int_\pi^\infty e^{-st}\sin 3t\,dt = \int_0^\pi e^{-st}\times 0\times \sin 3t\,dt + \int_\pi^\infty e^{-st}\times 1\times \sin 3t\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}u_\pi(t)\sin 3t\,dt = \mathcal{L}\{u_\pi(t)\sin 3t\}$$

زیرا $u_\pi(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<\pi\\ 1 & t\geqslant\pi\end{cases}$

فرمول ۱۷

$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3(t+\pi))\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3t+3\pi)\}$$

$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-\sin 3t\} = -e^{-\pi s}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{-3e^{-\pi s}}{s^2+9} \quad \square$$

۱. ج

$$\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt = \int_0^\infty e^{-2t}\,t\sin t\,dt = \mathcal{L}\{t\sin t\}_{s=2}$$

فرمول ردیف ۱۴ جدول لاپلاس

$$= (-1)^1\left(\mathcal{L}\{\sin t\}\right)'\Big|_{s=2} = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\Big|_{s=2} = -\left(\frac{0-2s}{(s^2+1)^2}\right)\Big|_{s=2}$$

$$= \frac{4}{25} \quad \square$$

۱. د

$$\int_0^\infty te^{-(s+1)t}\cos t\,dt = \int_0^\infty te^{-st-t}\cos t\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\times e^{-t}\times t\times\cos t\,dt$$

$$= \mathcal{L}\{e^{-t}t\cos t\} = \mathcal{L}\{t\cos t\}_{s\mapsto s+1} = (-1)^1\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'\Big|_{s+1} = -\left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right)\Big|_{s+1}$$

فرمول ۱۴ جدول لاپلاس

$$= -\frac{1-(s+1)^2}{((s+1)^2+1)^2} \quad \square$$

۱. هـ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3t\,dt \underset{\text{نتیجه فرمول ۱۹ جدول لاپلاس}}{=} \sin 3\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \square$$

۱. و

با فرض $t>\frac{\pi}{4}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t}\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du =$$

یکی از ویژگی های تابع دلتای دیراک $\delta(t-t_0)$ آن است که اگر $t\neq t_0$ آنگاه $\delta(t-t_0)=0$ $\forall\, t\neq t_0$ بنابراین می توان نوشت:

$$=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du}_{\text{صفر}}+\int_{\frac{1}{2}}^{t}\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du+\int_{t}^{+\infty}\underbrace{\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du}_{\text{صفر}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du \underset{\text{نتیجه فرمول ۱۹}}{=} \sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \square$$

پس $\int_{\frac{1}{2}}^{t}\delta\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\sin 3u\,du=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به ازای $t>\frac{\pi}{4}$.

۲. $\mathcal{L}\{[t]\}=?$ برای $t\geq 0$

$$[t]=\begin{cases}0 & 0\leq t<1\\ 1 & 1\leq t<2\\ 2 & 2\leq t<3\\ 3 & 3\leq t<4\\ \vdots & \vdots\end{cases} \Rightarrow [t]=0+u_1(t)(1-0)+u_2(t)(2-1)+u_3(t)(3-2)+\cdots$$

$$\Rightarrow [t]=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+\cdots$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{[t]\}=\mathcal{L}\{u_1(t)\}+\mathcal{L}\{u_2(t)\}+\mathcal{L}\{u_3(t)\}+\cdots$$

$$=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-s})^n}{s}=\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}\ \square$$

پایان

توجه کنید که $s>0$ پس $0<e^{-s}<1$ و در نتیجه سری هندسی $\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-s})^n$ همگرا است.

یادآوری: اگر $|q|<1$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}$.

۲. الف

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \ln\left(\frac{s-2}{s+1}\right) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(2t)\} = ?$$

$$\mathcal{L}\{f(\tfrac{t}{3})\} = ?$$

$$\mathcal{L}\{f(2t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{f(t)\}_{s \mapsto \frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{s-2}{s+1}\right)\right)\Big|_{s\mapsto \frac{s}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{s}{2}-2}{\frac{s}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-4}{s+2}\right) \quad \square$$

$$\mathcal{L}\{f(\tfrac{t}{3})\} = \frac{1}{\frac{1}{3}}\mathcal{L}\{f(t)\}\Big|_{s\mapsto \frac{s}{\frac{1}{3}}} = 3\mathcal{L}\{f(t)\}_{s\mapsto 3s}$$

$$= 3\left(\ln\left(\frac{s-2}{s+1}\right)\right)\Big|_{s\mapsto 3s} = 3\ln\left(\frac{3s-2}{3s+1}\right) \quad \square$$

۲. ب

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{t}}{t}\right\} = \ln\left(1-\frac{1}{s}\right) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{3t}}{2t}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{3t}}{2t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{3(1-e^{3t})}{3\times(2t)}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{3t}}{3t}\right\}$$

بنابراین با فرض $f(t) = \frac{1-e^{t}}{t}$ به دنبال لاپلاس $f(3t)$ هستیم.

$$= \frac{3}{2}\mathcal{L}\{f(3t)\} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\mathcal{L}\{f(t)\}_{s\mapsto \frac{s}{3}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1-\frac{1}{s}\right)\right)\Big|_{s\mapsto \frac{s}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{\frac{s}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{3}{s}\right) \quad \square$$

۲. ج

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t + \int_0^t \sin^2 u\,du \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(2s+3)\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(2s+3)\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{t\mapsto \frac{t}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{t}{2} + \int_0^{\frac{t}{2}} \sin^2 u\,du\right) \quad \square$$

۷. t در گواه $\sin t * \cos t = ?$

روش اول: استفاده از تعریف ضرب پیچشی

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-u)\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin(t-u+u) + \sin(t-u-u)\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \sin t\,du + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-2u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin t\int_0^t du + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-2u)\,du$$

از طرفی $\int_0^t du = t$. پس به محاسبه $\int_0^t \sin(t-2u)du$ می‌پردازیم.

$$\int_0^t \sin(t-2u)\,du \xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{t-2u=v} \int_{+t}^{-t} (\sin v)\left(-\frac{1}{2}dv\right) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \sin v\,dv \overset{\text{فرد است } \sin v}{=} 0$$

بنابراین

$$\sin t * \cos t = \frac{1}{2}t\sin t \quad \square$$

روش دوم: استفاده از تبدیل لاپلاس (این روش فقط برای $t \geq 0$ صحیح است)

$$f(t) = \sin t * \cos t \Rightarrow f(t) = ?$$

$$f(t) = \sin t * \cos t \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t * \cos t\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{\cos t\} = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

از طرفی $\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ پس $\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$.

فرمول ۱۴

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}\left(-t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right) = \frac{1}{2}t\sin t \quad \square$$

یادآوری فرمول ۱۴

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -t\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

۸. با فرض t دلخواه

$$\delta(t-2) * \sin t = ?$$

چون t دلخواه است از تعریف $*$ استفاده می‌کنیم.

$$\delta(t-2) * \sin(t) = \sin t * \delta(t-2)$$

$$= \int_0^t \sin(t-u)\,\delta(u-2)\,du$$

یادآوری: تابع دلتای دیراک $\delta(t-c)$ ، $c \geq 0$ دارای این ویژگی مهم است که

$$\forall\, t \neq c : \delta(t-c) = 0$$

بنابراین در انتگرال $\int_0^t \sin(t-u)\delta(u-2)du$ دو حالت $t<2$, $t \geq 2$ را در نظر می‌گیریم

if $0 \leq u \leq t < 2 \Rightarrow \delta(u-2) = 0 \Rightarrow \int_0^t \sin(t-u)\,\delta(u-2)\,du = 0$

if $u < t$, $t \geq 2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{0} '' + \int_0^t '' + \int_t^{+\infty} ''$

$\int_{-\infty}^{0} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = \int_t^{+\infty} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = 0$ زیرا $u > 2$ پس $\delta(u-2)=0$. بنابراین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = \int_0^t \delta(u-2)\sin(t-u)\,du$$

از طرفی طبق قضیه ردیف ۱۹ جدول لاپلاس برای تابع پیوسته f داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c) f(t)\,dt \underset{c \geq 0}{=} f(c)$$

بنابراین برای $t \geq 2$ داریم $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = \sin(t-2)$ بنابراین

$$\int_0^t \sin(t-u)\,\delta(u-2)\,du = \sin(t-2)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \sin(t-u)\,\delta(u-2)\,du = \begin{cases} 0 & t<2 \\ \sin(t-2) & t \geq 2 \end{cases} = u_2(t)\sin(t-2)$$

تابع پله‌ای واحد

$$\Rightarrow \delta(t-2) * \sin t = u_2 \sin(t-2)$$

پایان

۸- روش دوم: با فرض $t \geq 0$ می‌توانیم از تبدیل لاپلاس معکوس برای محاسبه $\delta(t-2) * \sin t$ استفاده کنیم.

فرض کنید $f(t) = \delta(t-2) * \sin t$ و $t \geq 0$ و به دنبال $f(t)$ می‌گردیم.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2) * \sin t\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\} . \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$$

$$= u_2(t)\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}_{t \mapsto t-2}$$

$$= u_2(t) \sin t \Big|_{t \mapsto t-2} = u_2(t)\sin(t-2) \quad \square$$

بنابراین برای $t \geq 0$ داریم: $\delta(t-2) * \sin t = u_2(t)\sin(t-2)$ $\square$

.۹ $\delta(t-c) * f(t) = ?$ $\quad c \geq 0$

روش اول: از تعریف $*$ برای هر t دلخواه داریم:

$$\delta(t-c) * f(t) = f(t) * \delta(t-c) = \int_0^t f(t-u)\,\delta(u-c)\,du$$

$$\underset{\text{مشابه روش اول ۸}}{=} \begin{cases} \int_0^t f(t-u) \times (0)\, du = 0 \,; & t < c \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c) f(t-u)\, du = f(t-c) \,; & t \geq c \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < c \\ f(t-c) & t \geq 0 \end{cases} = u_c(t) f(t-c)$$

$\square$

روش دوم: برای $t \geq 0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس:

فرض کنید $g(t) = \delta(t-c) * f(t)$ و به دنبال $g(t)$ می‌گردیم:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-c) * f(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-c)\} . \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s)$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = u_c(t) f(t-c) \quad \square$$

11.

الف) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln s\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = -\frac{1}{t}(1) = -\frac{1}{t}$ $\square$

ب) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{s}{s-1})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln s - \ln(s-1)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln s\} - \mathcal{L}^{-1}\{\ln(s-1)\}$

$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - (-\frac{1}{t})\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}e^{t} = \frac{e^{t}-1}{t}$ $\square$

ج) $\mathcal{L}^{-1}\{\arctan(\frac{1}{s})\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-\frac{1}{s^2}}{1+(\frac{1}{s})^2}\} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \frac{\sin t}{t}$ $\square$

$\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \arctan(\frac{1}{s})$ $\square$

د) $\mathcal{L}^{-1}\{\operatorname{arccot} s\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{s^2+1}\} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \frac{\sin t}{t}$

توجه: $\operatorname{arccot} s = \arctan\frac{1}{s}$, $\arctan s + \arctan(\frac{1}{s}) = \frac{\pi}{2}$.

ه) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{s^3+s}{(s+2)^3})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{s(s^2+1)}{(s+2)^3})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln s + \ln(s^2+1) - 3\ln(s+2)\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{\ln s\} + \mathcal{L}^{-1}\{\ln(s^2+1)\} - 3\mathcal{L}^{-1}\{\ln(s+2)\}$

$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}\} - 3(-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\})$

$= -\frac{1}{t} - \frac{2\cos t}{t} + \frac{3}{t}e^{-2t} = \frac{e^{-2t} - 2\cos t - 1}{t}$ $\square$

و) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{(s^2+4)^{\frac{1}{4}}}{s^{\frac{1}{2}}})\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{\ln(s^2+4)^{\frac{1}{4}}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\ln s^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\ln(s^2+4)\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\ln s\}$

$= \frac{1}{4}(-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s}{s^2+4}\}) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\})$

$= \frac{-1}{2t}\cos 2t + \frac{1}{2t} = \frac{1}{t}(\frac{1-\cos 2t}{2}) = \frac{\sin^2 t}{t}$ $\square$

زیرا $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

پس $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}})\} = \frac{\sin^2 t}{t}$ و در نتیجه

$\mathcal{L}\{\frac{\sin^2 t}{t}\} = \ln(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}})$

۱۲.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{(s-1)+2}{(s-1)}\right)\right\}$$

طبق فرمول ۱۳
$$= e^t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s}\right)\right\}$$

طبق فرمول ۲۰
$$= e^t\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s}\right)\right\}du$$

$$= e^t\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln(s+2)-\ln(s)\right\}du$$

$$= e^t\int_0^t \left(\mathcal{L}^{-1}\{\ln(s+2)\} - \mathcal{L}^{-1}\{\ln s\}\right)du$$

طبق فرمول ۱۲ با تغییر
$$= e^t\int_0^t\left[-\frac{1}{u}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\right) - \left(-\frac{1}{u}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right)\right]du$$

$$= e^t\int_0^t\left(\frac{-1}{u}e^{-2u}+\frac{1}{u}\right)du = e^t\int_0^t\frac{1-e^{-2u}}{u}\,du \quad \square$$

۱۳.

الف
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} \overset{\text{فرمول ۱۵}}{=} \int_s^{+\infty}\mathcal{L}\{\sin t\}\,du = \int_s^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{\alpha\to\infty}(\arctan u)_s^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}(\arctan\alpha - \arctan s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

توجه کنید که همواره $\arctan s + \arctan\frac{1}{s} = \frac{\pi}{2}$ بنابراین
$ctg\frac{1}{s} = \frac{\pi}{2} - arctg\, s$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \arctan\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) \quad \square$$

۱۳.

ب ـ $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin^2 t\}\,du = \int_s^\infty \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}du$

زیرا $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$.

$$= \int_s^\infty \left(\mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{2}\right\} - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\}\right)du$$

$$= \int_s^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{u^2+4}\right)\right]du$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)du = \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{4}\ln(u^2+4)\right)\Big|_s^\alpha$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln\sqrt{u} - \ln(u^2+4)^{\frac{1}{4}}\right)\Big|_s^\alpha$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{u^2+4}}\right)\right)\Big|_s^\alpha = -\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[4]{s^2+4}}\right)$$

عزیزان ریاضی کار: نشان دهید

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{\alpha^2+4}}\right) = 0$$

بنابراین $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = -\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[4]{s^2+4}}\right)$ توجه کنید که

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[4]{s^2+4}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[4]{s^2+4}}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}}\right)$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = -\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[4]{s^2+4}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}}\right) \quad \square$$

پایان

ج. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{2\cos^2 t-2e^{-t}}{t}\right\}$.۱۳

فرمول ۱۵

$$\overset{}{=}\int_s^\infty \mathcal{L}\{2\cos^2 t-2e^{-t}\}\,du$$

$$=\int_s^\infty \mathcal{L}\{1+\cos 2t-2e^{-t}\}\,du$$

زیرا $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$.

$$=\int_s^\infty \left(\mathcal{L}\{1\}+\mathcal{L}\{\cos 2t\}-2\mathcal{L}\{e^{-t}\}\right)du$$

$$=\int_s^\infty \left(\frac{1}{u}+\frac{u}{u^2+4}-\frac{2}{u+1}\right)du=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\ln u+\frac{1}{2}\ln(u^2+4)-2\ln(u+1)\right)\Big|_s^\alpha$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\ln u+\ln\sqrt{u^2+4}-\ln(u+1)^2\right)\Big|_s^\alpha$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\ln\left(\frac{u\sqrt{u^2+4}}{(u+1)^2}\right)\right)\Big|_s^\alpha=\lim_{\alpha\to\infty}\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2+4}}{(\alpha+1)^2}\right)-\ln\left(\frac{s\sqrt{s^2+4}}{(s+1)^2}\right)$$

به عنوان تمرین، [illegible] نشان دهید $\lim_{\alpha\to\infty}\ln\left(\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha^2+4}}{(\alpha+1)^2}\right)=0$. پس

$$\mathcal{L}\left\{\frac{2\cos^2 t-2e^{-t}}{t}\right\}=-\ln\left(\frac{s\sqrt{s^2+4}}{(s+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{(s+1)^2}{s\sqrt{s^2+4}}\right)\qquad\square$$

۱۳.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}\,du\right\}$$

$$\overset{\text{فرمول ۲۰}}{=} \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos u}{u}\right\}$$

$$\overset{\text{فرمول ۱۵}}{=} \frac{1}{s}\int_s^\infty \mathcal{L}\{1-\cos u\}\,dU$$

$$= \frac{1}{s}\int_s^\infty \left(\mathcal{L}\{1\}-\mathcal{L}\{\cos u\}\right)dU = \frac{1}{s}\int_s^\infty\left(\frac{1}{U}-\frac{U}{U^2+1}\right)dU$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{\alpha\to\infty}\int_s^\alpha\left(\frac{1}{U}-\frac{U}{U^2+1}\right)dU$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln U-\frac{1}{2}\ln(U^2+1)\right)\Big|_s^\alpha$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln U-\ln\sqrt{U^2+1}\right)\Big|_s^\alpha$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{U}{\sqrt{U^2+1}}\right)\right)\Big|_s^\alpha$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{\alpha\to\infty}\left(\ln\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)-\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)\right)$$

به عنوان تمرین نشان دهید $\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)=0$ پس

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\left(0-\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)\right) = -\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right) \quad \square$$

پایان

۱۴.

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-t} \sin t \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\sin t}{t} \right) dt = \mathcal{L}\left\{ \frac{\sin t}{t} \right\}_{s=1}$$

درسوال ۱۳ـ الف نشان دادیم $\mathcal{L}\left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \arctan \frac{1}{s}$ پس

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\sin t}{t} \right) dt = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \square$$

۱۵.

الف)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \overset{\text{نتیجه فصل ۱۵}}{=} \int_0^\infty \mathcal{L}\{\sin t\} ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\alpha \frac{1}{s^2+1} ds = \lim_{\alpha \to \infty} (\arctan s)\Big|_0^\alpha$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} (\arctan \alpha - \arctan 0) = \lim_{\alpha \to \infty} (\arctan \alpha - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

ب)

$$\int_0^\infty \frac{e^t - \cos 2t}{t} dt \underset{\text{له نتیجه فصل ۱۵}}{=} \int_0^\infty \mathcal{L}\{e^t - \cos 2t\} ds$$

$$= \int_0^\infty \left(\mathcal{L}\{e^t\} - \mathcal{L}\{\cos 2t\}\right) ds = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4}\right) ds$$

قدرمطلق

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4}\right) ds = \lim_{\alpha \to \infty} \left(\ln|s-1| - \frac{1}{2}\ln(s^2+4)\right)_0^\alpha = \lim_{\alpha \to \infty} \left(\ln\left(\frac{|s-1|}{\sqrt{s^2+4}}\right.\right.$$

$$= \cdots = \ln 2 \quad \square$$

۱۵.

ج) $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt \underset{\text{نتیجه فرمول ۱۵}}{=} \int_0^{\infty} \mathcal{L}\{e^{-t} - e^{-3t}\} ds$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right) ds = \lim_{\alpha \to \infty} \Big(\ln(s+1) - \ln(s+3)\Big)_0^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{s+1}{s+3}\right)\right)_0^{\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

از طرف $\lim_{\alpha \to \infty} \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right) = 0$

زیرا لگاریتم تابع پیوسته است پس

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right) = \ln\left(\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right) = \ln 1 = 0$$

پس $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3 \quad \square$$

۱۶.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s+2}{2s^2+s+1} \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} f(t) = ? \quad \text{و} \quad f'(0) = ?$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) \underset{\downarrow}{=} \lim_{s \to 0} s\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{s \to 0} \frac{s(s+2)}{2s^2+s+1} = \boxed{0}$$

{اولین فرمول جدول لاپلاس}

فرم مشترک و سپس حدگیری $f'(0)$

$$f'(0) \underset{\text{نتیجه فرمول ۲۳}}{=} \lim_{s \to +\infty} \left(s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0)\right) = \lim_{s \to \infty} \left(\frac{s^2(s+2)}{2s^2+s+1} - \frac{1}{2}s\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f(0) \underset{\text{نتیجه فرمول ۲۲}}{=} \lim_{s \to \infty} s\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{s \to \infty} \frac{s(s+2)}{2s^2+s+1} = \frac{1}{2}$$

$f(0)$

۱۷.

$$y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} t & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

جواب $y=\varphi(t)$ در نقطه $(0,1)$ شیب صفر دارد (خط مماس در $(0,1)$ افقی است) یعنی

$\rightarrow y(0)=1$

$\underset{\text{شیب}}{m} = y'(0) = \varphi'(0) = 0$

$$I_1 = \int_0^{\infty} 5e^{-t}\varphi(t)\,dt = ? \qquad I_2 = \int_2^{+\infty} 5e^{-t}\varphi(t)\,dt = ?$$

$$g(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases} \Rightarrow g(t) = t + (0-t)u_\pi(t)$$

$$\Rightarrow g(t) = t - t\,u_\pi(t)$$

بنابراین باید

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = t - t\,u_\pi(t) \\ y'(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

را حل کنیم

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 2y\} = \mathcal{L}\{t - t\,u_\pi(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{t\,u_\pi(t)\}$$

$$\Rightarrow \left(s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\mathcal{L}\{t+$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - s - 0 + 2s\mathcal{L}\{y\} - 2 + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

$$(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}\{y\} - s - 2 = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right) + s + 2}{s^2 + 2s + 2} \rightsquigarrow$$

توجه: یافتن $y(t)$ طولانی است

از طرفی

$$I_1 = 5\int_0^{\infty} e^{-t} y(t)\,dt = 5\mathcal{L}\{y\}\Big|_{s=1} = 5\left(\frac{\frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right) + s + 2}{s^2 + 2s + 2}\right)\Bigg|_{s=1}$$

$$\Rightarrow I_1 = 1 - e^{-\pi}(1+\pi) + 3 \Rightarrow \boxed{I_1 = 4 - (1+\pi)e^{-\pi}}$$

ادامه ۱۷

$$I_2 = \int_2^{\infty} 5 e^{-t} y(t-2)\,dt = ?$$

$$I_2 = \int_0^2 5 e^{-t} \times (0) \times y(t-2)\,dt + \int_2^{\infty} 5 e^{-t} \times (1) \times y(t-2)\,dt$$

$$\Rightarrow I_2 = 5\int_0^{\infty} e^{-t} u_2(t)\, y(t-2)\,dt = 5\,\mathcal{L}\{u_2(t)\, y(t-2)\}\Big|_{s=1}$$

$$\Rightarrow I_2 = 5\left(e^{-2s}\mathcal{L}\{y(t)\}\right)_{s=1} = e^{-2}\left(5\mathcal{L}\{y\}\right)_{s=1}$$

$$\Rightarrow I_2 = e^{-2}\left(4-(1+\pi)e^{-\pi}\right) = 4e^{-2}-(1+\pi)e^{-2-\pi} \quad \square$$

b-۲-۱۹

$$\int_0^1 \frac{y(tx)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \sqrt{t}$$

تغییر متغیر $u = tx \Rightarrow du = t\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}du$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=t$

صورت سؤال

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{y(tx)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{1-\frac{1}{t}u}}\left(\frac{1}{t}du\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{\frac{t-u}{t}}}\left(\frac{1}{t}du\right) = \sqrt{t} \Rightarrow \int_0^t \frac{y(u)}{\frac{\sqrt{t-u}}{\sqrt{t}}}\left(\frac{1}{t}du\right) = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\cancel{\sqrt{t}}\,y(u)}{\sqrt{t-u}}\left(\frac{1}{t}du\right) = \overset{1}{\cancel{\sqrt{t}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-u}}\,y(u)\cdot\frac{1}{t}\,du = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-u}}\,y(u)\,du = t$$

طرفین در t ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} * y(t) = t \xRightarrow{\text{از طرفین لاپلاس}} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}} * y(t)\right\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

طبق ردیف ۶ جدول $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ پس

$$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{1}{s^2}}{\sqrt{\frac{\pi}{s}}} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,s^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}\,s^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} \stackrel{\text{ردیف ۳}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi}$$

پس $\boxed{y(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi}}$ □