به نام خدا

حل تمرین سری دوم کنترل غیرخطی ۲ محمد مهدی میرزایی ۹۳۰۴۶۰۵۲۷

1)

a)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2$$

بنابراین در مبدأ $A=0$. از آنجا که خطی‌سازی دارای یک مقدار ویژه در محور موهومی است، خطی‌سازی نمی‌تواند پایداری در مبدأ را تعیین کند.

b)

$V(0)=0$, $V(x) \neq 0$ برای $x \neq 0$

$V(x) \longrightarrow \infty$ زمانی که $x \longrightarrow \infty$

بنابراین $V(x)$ ارضا می‌کند تابع لیاپانوف پیشنهادی را

$$\dot V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 4ax^6$$

برای $a<0$ ← منفی معین است

برای $a>0$ ← مثبت معین است.

نتایج مورد نظر پایداری و ناپایداری قضایای لیاپانوف را پیروی می‌کند.

c) برای $a=0$ سیستم خطی است و $\dot x = 0$

این سیستم دارای راه حل $x(t)=x_0$ برای تمام t است، بنابراین سیستم پایدار است. نتیجه‌گیری شهودی برای کدام از نتایج لیاپانوف مورد استفاده در b پایدار نیست.

2)

a)

$$V(x) = gl(1-\cos(x_1)) + \frac{l^2}{2}x_2^2$$

V مثبت است و حاصل مشتق برحسب زمان

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot x_i = gl\sin(x_1)x_2 + x_2(-gl\sin(x_1)) = 0$$

از تئوری لیاپانوف نتیجه می‌گیریم که نقطه تعادل مبدأ است. از آنجا که $\dot V(x)=0$، می‌توان نتیجه گرفت که مبدأ پایدار مجانبی نیست. شروع مسیر حالت در سطح $V(x)=c$، در این سطح برای همه زمان‌ها باقی خواهد ماند.

b) برای $k \neq 0$، با استفاده از $V(x)$ همانطور که در بالا محاسبه شد داریم

$$\frac{dV(x)}{dt} = -\frac{kl^2}{m}x_2^2$$

$\dot V(x)$ منفی نیمه معین است، منفی معین نیست زیرا در $x_2=0$ ← $\dot V(x)=0$ است. به عبارت دیگر $\dot V(x)=0$ برای طول محور x_1 است. یک تابع لیاپانوف اصلاح شده:

$$V(x) = \frac{g}{l}(1-\cos(x_1)) + \frac{1}{2}x^T P x$$

برای برخی ماتریس‌های P مثبت معین

به ترتیب برای P مثبت معین، عناصر باید برآورده کنند

$$P_{11}>0,\quad P_{22}>0,\quad P_{11}P_{22}-P_{12}^2>0$$

مشتق $V(x)$ برابر است با

$$\dot V(x) = \frac{g}{l}(1-P_{22})x_2\sin x_1 - \frac{g}{l}P_{12}x_1\sin x_1 + \left(P_{11}-P_{12}\frac{k}{m}\right)x_1x_2 + \left(P_{12}-P_{22}\frac{k}{m}\right)x_2^2$$

↓ ادامه صفحه بعد

P_{11} و P_{22} و P_{12} را باید طوری انتخاب کنیم که $\dot V(x)$ ناصفر معین گردد. از آنجایی که $x_2 \sin x_1$ و $x_1 x_2$ نامحدود هستند (اختلاف)
ما فرض می‌کنیم از آنجا با توجه به $P_{22} = 1$ و $P_{11} = P_{12}\, K/m$.
با انتخاب P_{12} باید $0 < P_{12} < K/m$ برآورده سازد. ما با $P_{12} = 0.5 K/m$ بدست می‌آید:

$$\dot V(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{l}\frac{k}{m} x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}\frac{k}{m} x_2^2$$

در شرایط $x_1 \sin x_1 > 0$ برای تمام $0 < |x_1| < \pi$. در این محدوده $V(x)$ مثبت معین است و $\dot V(x)$ منفی معین است. نتیجه می‌گیریم که مبدأ پایدار مجانبی است.

---

(3)

$$V = \frac{kx^2}{2} + \frac{\dot x^2}{2}, \qquad \dot V = -d\dot x^4 \le 0$$

از آنجا که $\dot V = 0$ است فقط زمانی که $\dot x = 0$ و معادله سیستم $\ddot x = -kx \neq 0$ مگر آنکه $x = 0$ باشد. نتیجه می‌گیریم که $x = \dot x = 0$ تنها مجموعه ناوردا است. مبدأ پایدار مجانبی سراسری است از آنجا که V نامحدود شعاعی است.

---

(4) (a) مقادیر ویژه A $\longrightarrow$ $\lambda = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$

(b) (i)

$$V(x) = P_{11}x_1^2 + 2P_{12}x_1x_2 + P_{22}x_2^2 \overset{P_{11}\neq 0 \text{ اگر}}{=}$$

$$= P_{11}\left(x_1 + \frac{P_{12}}{P_{11}}x_2\right)^2 + \left(P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}\right)x_2^2$$

اگر $P_{11} > 0$ و $P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$ هر دو عبارت غیر منفی است. علاوه بر این $V(x) \to \infty$ ، $x \to \infty$
و $V(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0$
اگر P_{ij} پیدا کردن x آسان است مانند $V(x) < 0$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2P_{12} = -1 \\ P_{22} - P_{11} - P_{12} = 0 \\ -2P_{12} - 2P_{22} = -1 \end{cases}$$

با حل این دستگاه نتیجه می‌گیریم که

$\Downarrow$

$P_{11} = 1.5, \quad P_{12} = -0.5, \quad P_{22} = 1$

ماتریس P مثبت معین می‌باشد.

(c) با استفاده از کد متلب lyap(A', eye(2))

به نام خدا

حل تمرین سری دوم کنترل غیرخطی ۲ محمد مهدی میرزایی ۹۳۰۴۶۰۵۲۷

(6) بدست آوردن نقاط تعادل:

$$\dot{x}_1 = 0 = 4x_1^2 x_2 - f_1(x_1)(x_1^2 + 2x_2^2 - 4)$$

$$\dot{x}_2 = 0 = -2x_1^3 - f_2(x_2)(x_1^2 + 2x_2^2 - 4)$$

$$4x_1^2 x_2 = 0 , \quad f_1(x_1)(x_1^2 + 2x_2^2 - 4) = 0 , \quad -2x_1^3 = 0$$

نقاط تعادل

$$(x_1, x_2) = (0, 0) , \quad (x_1, x_2) = (0, \pm\sqrt{2})$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt}(x_1^2 + 2x_2^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1^3 4x_2 + 4x_2(-2x_1^3) = 0$$

$$\dot{x}_1 = 4x_2 x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 \cdot x_1^2$$

$$V(x) = (x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2$$

از آنجایی که

$$\dot{V} = 4(x_1^2 + 2x_2^2 - 4)^2 (x_1 f(x_1) - 2x_2 f(x_2))$$

نتیجه می‌گیریم که $\dot{V} \le 0$ است، $\dot{V} < 0$ مگر اینکه روی مجموعه ثابت باشد یا اگر $x_1 f(x_1) = 0$.

اگر فرض کنیم $x_1 f_1(x_1)$ برای $x_1 \neq 0$ ما می‌بینیم که مجموعه ای ثابت از $x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0$ و جدا از $(x_1 = x_2 = 0)$ داریم. نقاط تعادل $(x_1, x_2) = (0, \sqrt{2})$ و $(x_1, x_2) = (0, -\sqrt{2})$ حالت متغیر است از بدی معادله در مبدأ.

---

(7)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_1^3 \end{cases} \quad (1)$$

$$V(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1^4$$

(a)

$$\frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = 8x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 + 16x_1^3\dot{x}_1 \xrightarrow[\text{معادله (1)}]{\text{جایگذاری}}$$

$$= 8x_1x_2 + 4x_2(-2x_1 - 2x_2 - 4x_1^3) + 16x_1^3x_2 =$$

$$= -8x_2^2$$

از آنجایی که $\dot{V}(x) \le 0$، نتیجه می‌گیریم که پایدار سراسری می‌باشد.

(b) تابع لیاپانوف برای $x_2 = 0$ ⟵ $\dot{V}(x) = 0$،

برای $x_2 = 0$، $\dot{x}_2 = -2x_1(2 + x_1^2)$

اگر $x_2 = 0$ و $x_1 = 0$ قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که پایداری مجانبی سراسری از مبدأ می‌باشد.

(8)

(a) حل معادله لیاپانوف با P به عنوان ماتریس همانی است. $P_2 = 0.5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x + 2x^T P g(x_2) =$

(b)

$= -x_1^2 - x_2^2 + x_2 g(x_2) < 0$

ترم غیر مثبت می باشد،

(c) بخش (c) باید در مکتب شبیه سازی گردد.

(9) فرض می کنیم خطی سازی $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ از f پایدار مجانبی است. سپس معادله

$PA + A^T P = -I$

$P > 0$ است. برای اثبات این که $P = \int_0^\infty e^{A^T s} e^{As} ds > 0$ است، یک راه حل

$$\frac{d}{ds} e^{A^T s} e^{As} = A^T e^{A^T s} e^{As} + e^{A^T s} e^{As} A$$

از ۰ تا ∞ می باشد. از روش krasovskii در شرایط مشابه استفاده می کنیم که سیستم غیرخطی پایدار مجانبی است. نتیجه: پایداری تحت شرایط است.