

ابراهیم شاه ابراهیمی

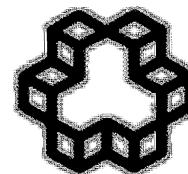
کارشناس ارشد مهندسی عمر آن
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد :
معادلات دیفرانسیل ، ریاضی ۱ و ۲
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

@EShahebrahimi



math-teacher.blog.ir



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مسائل ریاضی ۲ (شماره ۲)

۱. در پیوستگی تابع زیر در \mathbb{R}^2 بحث کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{4} & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۲. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ روی هر خط گذرنده از مبدأ دارای حد صفر در نقطه $(0, 0)$ است، ولی این تابع در نقطه $(0, 0)$ حد ندارد.

۳. در پیوستگی تابع زیر در مبدأ بحث کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + y \sin \frac{1}{x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۴. در پیوستگی تابع زیر در مبدأ بحث کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+2y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۵. فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(i) مطلوب است محاسبه $f'(0, 0)$.

(ii) با استفاده از تعریف مشتق سویی، مقدار $D_u f(0, 0)$ را که در آن $U = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$ را محاسبه کنید.

۶. پیوستگی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در مبدأ بررسی کرده و سپس مشتق جهتی آن را

در نقطه $p(1, 2)$ و در امتداد بر تابع برداری $R(t) = \sin ti + \cos tj$ به ازای $t = \frac{\pi}{3}$ بیابید.

۷. تابع با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی مرتبه اول f را در $(0, 0)$ تعیین کنید.

ج) نشان دهید f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد :
معادلات دیفرانسیل ، ریاضی ۱ و ۲
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی



@EShahebrahimi

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ \circ & e.w \end{cases}$$

۸. در پیوستگی تابع زیر بر \mathbb{R}^2 بحث کنید.

۹. پیوستگی تابع $f(x, y)$ را در مبداء مختصات بررسی کرده سپس مشتق جهتی تابع را در نقطه‌ی $(1, 1)$ در

امتداد بردار مماس بر منحنی $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = \sqrt{2} \sin t$ در $t = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \circ & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۱۰. نشان دهید که تابع زیر در مبداء مختصات پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز در مبداء وجود دارند.

$$f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$$

۱۱. مطلوب است $f_{yx}(0, 0)$ و $f_{xy}(0, 0)$ وقتی که

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \circ & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۱۲. فرض کنید $u = x^2 - y^2$ و $v = xy$. برای تابع دلخواه $z = f(x, y)$ که خارج از مبداء تعریف شده است

عبارت $z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ را بر حسب مشتقات z نسبت به متغیرهای u و v بیابید.

۱۳. معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی $(1, -1, 1)$ بنویسید:

$$C : 3x^2y + y^2z = -2, \quad 2xy - x^2y = 3$$

۱۴. در صورتیکه تابع y از x با استفاده از رابطه‌ی $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \arctan(\frac{y}{x})$ بیان شده باشد مقادیر $\frac{d^2y}{dx^2}$ و $\frac{dy}{dx}$

را محاسبه کنید.

۱۵. اگر $u = x + y$ و $v = \frac{y}{x}$ و $w = \frac{z}{x}$. تابع $z(x, y)$ را به $w(u, v)$ تبدیل نموده و معادله با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

را بر حسب w و مشتقاتش بر حسب u و v بنویسید.

۱۶. فرض کنید $z = f(u, v)$ و $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$. مجموع $z_{xx} + z_{yy}$ را بر حسب ضریبی از مجموع

$$z_{uu} + z_{vv} \text{ بدست آورید. (به صورت } [\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}] (z_{uu} + z_{vv}) \text{).}$$

۱۷. رابطه‌ی $z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ را بر حسب متغیرهای جدید $u = x$ و $v = \frac{y}{x}$ بازنویسی کنید.

۱۸. نشان دهید که تابع $z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

۱۹. معادله لاپلاس $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

۲۰. مشتق جهتی تابع $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ را در جهت بردار مماس بر منحنی به معادله $r(t) = (t^2 + 1, 2t^2, t^3)$ در لحظه $t = 1$ بنویسید.

۲۱. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و اگر $f(x^3 - y^3, x^2 - z^2) = 0$ ، آنگاه ثابت کنید:

$$y^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = xy^2$$

۲۲. فرض کنید $u = f(x, y)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد طوری که n ای وجود داشته باشد که به ازای هر t ، x و y داشته باشیم $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. در این صورت نشان دهید که

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f$$

۲۳. صفحه‌ی مماس بر سطح $x^2 - y^2 - 3z = 0$ طوری بیابید که از نقطه‌ی $(0, 0, -1)$ گذشته و موازی خط $\frac{x}{3} = y = \frac{z}{4}$ باشد.

۲۴. اگر $z = f(x, y)$ که در آن $x = s + t$ و $y = s - t$ است. نشان دهید:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 - \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$$

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد :

معادلات دیفرانسیل ، ریاضی ۱ و ۲

ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی



@EShahebrahimi