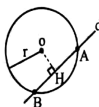


یک خط و یک دایره دارای سه حالت زیر می‌باشند.

۱- خط، دایره را در دو نقطه قطع کند.

اگر فاصله‌ی خطی تا مرکز دایره‌ای از شعاع دایره کوچک‌تر باشد، خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. (خط و

دایره متداخل‌اند)



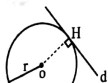
فاصله بین یک نقطه و خط، طول عمودی است که از نقطه بر خط وارد می‌شود.

یادآوری



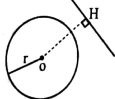
۲- خط دایره را در یک نقطه قطع کند. (خط و دایره مماس‌اند)

اگر فاصله‌ی خطی تا مرکز دایره‌ای با شعاع دایره مساوی باشد، خط دایره را در یک نقطه قطع می‌کند.  $r = OH$



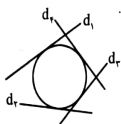
۳- خط دایره را قطع نکند. (خط و دایره متخارج‌اند)

اگر فاصله‌ی خطی تا مرکز دایره‌ای با شعاع دایره بزرگ‌تر باشد، خط دایره را قطع نمی‌کند.  $r < OH$



**خط مماس:** در حالتی که خط و دایره فقط یک نقطه‌ی مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

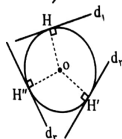
مثال: خطوط  $d_1$ ،  $d_2$ ،  $d_3$  و  $d_4$  بر دایره مماس هستند.



در هر دایره، شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود می‌باشد.

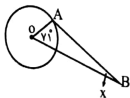
$$OH \perp d_1 \quad OH' \perp d_2 \quad OH'' \perp d_3$$

نکته



مثال: در شکل مقابل AB بر دایره مماس است. اندازه‌ی زاویه‌ی خواسته شده را به دست آورید.

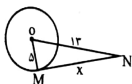
پاسخ: با توجه به نکته‌ی قبل  $\hat{A} = 90^\circ$  می‌باشد در نتیجه:  $x = 180 - (90 + 71) \Rightarrow x = 19^\circ$



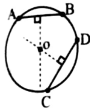
مثال: در شکل مقابل MN بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به نکته‌ی قبل  $\hat{M} = 90^\circ$  می‌باشد. در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه است.

طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:  $x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$



توجه پیدا کردن مرکز دایره: در هر دایره، عمودمنصف هر وتر، قطر دایره می‌باشد. بنابراین با رسم دو وتر دلخواه و رسم عمود منصف‌های آن‌ها، محل برخورد عمودمنصف‌ها (قطرها) مرکز دایره را مشخص می‌کند.



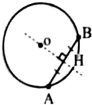
عمودمنصف را می‌توان به وسیله خط کش و گونیا، خط کش و پرگار و یا با تا کردن کاغذ طوری که نقاط دو سر وتر روی هم قرار گیرند، رسم کرد.

تذکر



فقطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و برعکس فقطی که از وسط وتر و مرکز دایره می‌گذرد بر وتر عمود است.

نکته



$$OH \perp AB \Rightarrow AH = BH$$



$$MH = NH \Rightarrow OH \perp MN$$

پرسش‌های با پاسخ



۱- وضعیت خط و دایره را با رسم شکل و نوشتن رابطه مشخص کنید.



$$OH < r$$



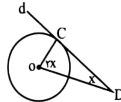
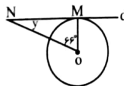
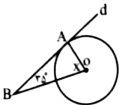
$$OH = r$$



$$OH > r$$

پاسخ:

۲- در شکل‌های زیر d بر دایره مماس است. اندازه‌ی زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.



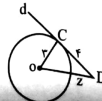
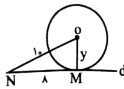
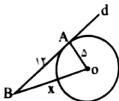
پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌های تند متمم یکدیگرند.

$$\text{الف) } x + 90 = 90 - 35 \Rightarrow x = 55^\circ$$

$$\text{ب) } y + 90 = 90 - 66 \Rightarrow y = 24^\circ$$

$$\text{پ) } x + 2x = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{3} \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{D} = 30^\circ \\ \hat{O} = 2 \times 30 = 60^\circ \end{cases}$$

۳- در شکل‌های زیر d بر دایره مماس است. اندازه‌ی ضلع‌های خواسته شده را به دست آورید.





**لح زاویه مرکزی:** هر زاویه که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌های دایره باشد، زاویه مرکزی نامیده می‌شود.

$$\widehat{O} = \widehat{AB}$$

اندازه هر زاویه مرکزی با اندازه‌ی کمان مقابلش مساوی می‌باشد.



**مثال:** در شکل مقابل کمان  $AB$  مساوی  $\frac{1}{8}$  محیط دایره می‌باشد. اندازه‌ی زاویه  $O$  را به دست آورید.

**پاسخ:** چون محیط دایره  $360^\circ$  می‌باشد. پس:  $\widehat{AB} = 360 \div 8 = 45^\circ$

و چون زاویه  $O$  مرکزی است. پس:  $\widehat{O} = \widehat{AB} = 45^\circ$

**مثال:** در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه و کمان‌های خواسته شده را بنویسید.

**پاسخ:**

$$x = 130^\circ$$

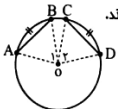
$$y = 360 - (100 + 130) = 130^\circ$$

$$z = y = 130^\circ$$

**نکته ۱**



در هر دایره، اگر دو کمان با هم مساوی باشند و وترهای نظیر آنها نیز با هم مساوی‌اند.

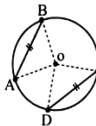


$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \text{ شعاع} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ \overline{OB} = \overline{OD} \text{ شعاع} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ اثبات}$$

**نکته ۲**



در هر دایره، اگر دو وتر با هم مساوی باشند کمان‌های نظیر آنها نیز با هم مساوی‌اند.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \text{ شعاع} \\ \overline{OB} = \overline{OD} \text{ شعاع} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \text{ فرض مسئله} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \text{ اثبات}$$



کمان‌های کم‌تر از  $180^\circ$  را با دو حرف و کمان‌های بیش‌تر از  $180^\circ$  را با سه حرف نمایش می‌دهند.

$$\widehat{AB} = 100^\circ$$

$$\widehat{AMB} = 260^\circ$$

**یادآوری**



**لح تقسیم دایره به کمان‌های مساوی:** برای تقسیم یک دایره به کمان‌های مساوی طبق مراحل زیر عمل می‌کنیم.

- ۱- یکی از شعاع‌های دایره را به دلخواه رسم می‌کنیم.
  - ۲- محیط دایره را بر تعداد تقسیم‌های خواسته شده تقسیم کرده و به وسیله‌ی نقاله زاویه‌ای به همان اندازه رسم می‌کنیم.
  - ۳- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی وتر ایجاد شده باز کرده، سوزن پرگار را روی یکی از نقاط دو سر باره خط قرار داده و کمانی رسم می‌کنیم.
  - ۴- سوزن پرگار را روی کمان ایجاد شده قرار می‌دهیم و مراحل را تکرار می‌کنیم.
- مثال:** دایره‌ای رسم کرده و آن را به ۹ قسمت مساوی تقسیم کنید.

**پاسخ:**



$$\widehat{AB} = 360 \div 9 = 40^\circ$$



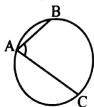
**لح زاویه‌ی محاطی:** هر زاویه که رأس آن روی محیط دایره و ضلع‌های آن وترهای دایره باشند. زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی با نصف کمان مقابلش مساوی می‌باشد.



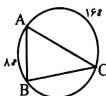
مثال: در شکل مقابل کمان BC مساوی  $\frac{1}{3}$  محیط دایره می‌باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.



پاسخ: چون محیط دایره  $360^\circ$  می‌باشد. پس:  $360 \div 3 = 120^\circ$

و چون زاویه‌ی A محاطی است. پس:  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$

مثال: در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌های مثلث را به دست آورید.



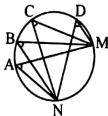
$$\hat{A} = 180 - (80 + 40) = 60^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$$

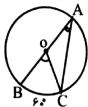


در هر دایره، روبرو به یک کمان، می‌توان بی‌شمار زاویه‌ی محاطی رسم کرد.



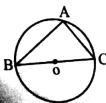
زاویه‌های محاطی روبرو به یک کمان با هم مساوی‌اند.  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

اگر دو زاویه‌ی مرکزی و محاطی، روبرو به یک کمان باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف زاویه‌ی مرکزی می‌باشد.



$$\left. \begin{array}{l} \text{مرکزی } \hat{O} = \widehat{BC} = 60^\circ \\ \text{محاطی } \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}}{2}$$

مثال:

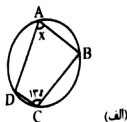


در هر دایره، زاویه‌ی محاطی روبرو به قطر، قائمه می‌باشد.  
می‌دانیم محیط دایره  $360^\circ$  می‌باشد و قطر دایره را نصف می‌کند.

$$\widehat{BC} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

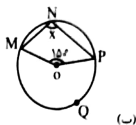
و چون  $\hat{A}$  محاطی است، بنابراین:  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$

۱- در شکل‌های زیر مقدار  $x$  را به دست آورید.



(الف)

$$\begin{aligned} \hat{C} = 134^\circ &\Rightarrow \widehat{DAB} = 26^\circ \\ \widehat{DCB} &= 360 - 260 = 100^\circ \\ x &= \frac{\widehat{DCB}}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$



(ب)

$$\begin{aligned} \hat{O} = 150^\circ &\Rightarrow \widehat{MNP} = 150^\circ \\ \widehat{MQP} &= 360 - 150 = 210^\circ \\ x &= \frac{\widehat{MQP}}{2} = \frac{210}{2} = 105^\circ \end{aligned}$$

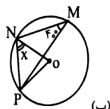
پاسخ:

۲- در شکل‌های زیر مقدار  $x$  را به دست آورید.



(الف)

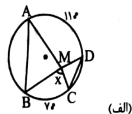
$$\begin{aligned} \triangle OBC \text{ متساوی الساقین} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 40^\circ, \hat{O} = 180 - (40 + 40) = 100^\circ, \widehat{BC} = \hat{O} = 100^\circ, x = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$



(ب)

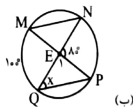
$$\begin{aligned} \hat{M} = 40^\circ &\Rightarrow \widehat{NP} = 80^\circ \\ \hat{P} = \widehat{NP} = 80^\circ &\Rightarrow \triangle ONP \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{N} = \hat{P} \\ x &= \frac{180 - 80}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$

۳- در شکل‌های زیر مقدار  $x$  را به دست آورید.



(الف)

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ \\ \hat{A} &= \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ \\ x &= 55 + 35 = 90^\circ \end{aligned}$$



(ب)

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\widehat{MQ}}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ \\ \hat{E}_1 &= 180 - 80 = 100^\circ \\ x &= 180 - (100 + 50) = 30^\circ \end{aligned}$$

پاسخ:

۴- در شکل‌های زیر مقدار  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



(۵ ضلعی منتظم)



(۶ ضلع منتظم)