درسنامه

(ابتدا فصل ۵ جزوه ریاضی۲ کامل خوانده شود*)

گرین :

تعریف(پارامتری) :

پتانسیل :

حالت خاص :

هرگاه مبـدأ مختصـات درون مرز بسته‌ی C قرار نداشته باشد، برای میدان برداری $\vec{F}=(\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2})$ داریم: $\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0$

چون نقطه (۰و۰) نقطه ناپیوستگی تابع است ، اگر این نقطه درون محدوده بود باید تغییرمتغیر بزنیم و نمیتوان مستقیم محاسبه کرد .

$x=R\cos t\ ,\ y=R\sin t\ ,\ dx=-R\sin t dt\ ,\ dy=R\cos t dt$

$\Rightarrow I_1=\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} \Rightarrow I_1=\int_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}{R^2}dt$

ارتباط با استوکس :

Scanned by CamScanner

MBA۹۸

مقدار $I=\oint_C (\underbrace{۵y+\cos\sqrt{x}}_{P})dx+(\underbrace{۸x+e^{y^۲}}_{Q})dy$، که در آن C مرز دایره $x^۲+y^۲=۲$ با جهت مثبت می‌باشد، کدام است؟

$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \iint ۸-۵\,dA = ۳\iint dA = ۳\pi(\sqrt{۲})^۲$

۱) ۶π ✓

۲) ۱۰π

۳) $۲(\sqrt{۳})\pi$

۴) $۳(\sqrt{۲})\pi$

MBA۹۴

مقدار انتگرال منحنی الخط $\int_c (\underbrace{۳y-e^{\sin x}}_{P})dx+(\underbrace{۷x+\sqrt{۱+y^۴}}_{Q})dy$ که در آن c دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۹$ طی شده در جهت مثبت می‌باشد، کدام است؟

$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \iint ۷-۳\,dA = ۴\iint dA$

$=۴\pi(۹)=۳۶\pi$

۱) ۱۲π

۲) ۲۴π

۳) ۳۶π ✓

۴) ۴۸π

فیزیک دریا-۹۵

کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y)=\underbrace{(۲x-۴y)}_{P}\vec{i}+\underbrace{(۳y-۵x)}_{Q}\vec{j}$ در جابجایی ذره‌ای روی یک دور از منحنی $x^۲+۹y^۲=۹$ در جهت خلاف گردش عقربه ساعت، کدام است؟

$\frac{x^۲}{۹}+y^۲=۱$

$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \iint -۵-(-۴)\,dA$

$= -\iint dA = -\pi(۳)(۱) = -۳\pi$

۱) -۹π

۲) -۳π ✓

۳) ۶π

۴) ۱۲π

MBA۹۸

فرض کنید C مرز دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۰$ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. اگر $\int_C (\underbrace{ke^x y+e^x x}_{P})dx+(\underbrace{e^x+ke^y y}_{Q})dy=۰$، مقدار k برابر با کدام مورد است؟

$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x$

$\frac{\partial P}{\partial y}=ke^x \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \longrightarrow k=۱$

۱) -۱

۲) ۰

۳) ۱ ✓

۴) ۲

Scanned by CamScanner

MBA۹۲

فرض کنید W مرز ناحیهٔ مثلثی شکل با رئوس (۰,۱) ، (۰,−۱) ، (۲,−۱) باشد. در این صورت مقدار $\oint_W \underbrace{(2xy+\sqrt{x})}_{P}dx+\underbrace{(xy+\sqrt[3]{y})}_{Q}dy$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ✓

۲) $\frac{5}{3}$

۳) $-\frac{10}{3}$

۴) $\frac{10}{3}$

$$\oint F.dr=\iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA=\iint y-2x$$

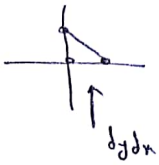
$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=-1}^{-x+1} y-2x\,dy\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}-2xy\Big|_{y=-1}^{-x+1}=\frac{(-x+1)^2}{2}-2x(-x+1)-\left(\frac{1}{2}+2x\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x+2x^2-2x-\frac{1}{2}-2x=\frac{5}{2}x^2-5x$$

$$=\int_{x=0}^{1}\frac{5}{2}x^2-5x\,dx=\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2\Big|_{x=0}^{1}=\frac{5}{6}-\frac{5}{2}=\frac{5-15}{6}=\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3}$$

صنایع-۹۴

هرگاه C مثلثی با رئوس (۰,۰) و (۱,۰) و (۰,۱) در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\oint_C \underbrace{xy}_{P}dx+\underbrace{(x^2+y^2)}_{Q}dy$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{6}$ ✓

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{5}{6}$

$$\oint F.dr=\iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

$$=\iint 2x-x=\iint x\,dA$$

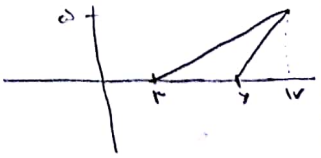
$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{-x+1} x\,dy\,dx$$

$$xy\Big|_{y=0}^{-x+1}=x(-x+1)=-x^2+x$$

$$\int_{x=0}^{1}-x^2+x\,dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

مواد-۹۷ و سوانح و MBA-۹۶

اگر C یک منحنی بسته واقع بر مثلثی به رئوس (۳,۰)، (۶,۰)، (۱۷,۵) باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، دراین‌صورت مقدار $\oint_C \underbrace{(7y+e^{x^2})}_{P}dx+\underbrace{(19x+e^{y^7})}_{Q}dy$، کدام است؟



۱) ۹۰ ✓

۲) ۸۵

۳) ۸۰

۴) ۷۵

$$\oint F.dr=\iint \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

$$=\iint 19-7\,dA=12\iint dA$$

$$=12\left(\frac{1}{2}(5)(15)-\frac{1}{2}(5)(11)\right)$$

$$35-27.5$$

$$=12\times 7.5=12\times\frac{15}{2}=90$$

نکته بسیار مهم:

$$\iint_D (ax+by+c)dA=(a\bar{x}+b\bar{y}+c)A$$

Math-Teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی

Scanned by CamScanner

تمرین ۱۱) اگر منحنی C مثلثی با رئوس $(0,0), (2,2), (2,0)$ در صفحه‌ی مختصات باشد که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده باشد، آنگاه $\int_C \underbrace{\sin(x^3)}_{P}dx + \underbrace{2ye^{x^2}}_{Q}dy$ را بیابید.

$$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = \iint 4xye^{x^2}$$

$$= \int_{x=0}^{2} \underbrace{\int_{y=0}^{x} 4xye^{x^2} dy}_{2y^2xe^{x^2}\Big|_{y=0}^{x}} dx = \int_{x=0}^{2} 2x^2 \cdot x e^{x^2} dx$$

$x^2 = u$

$2x dx = du$

$$= \int_{u=0}^{4} ue^u du = ue^u - e^u \Big|_{u=0}^{4} = 4e^4 - e^4 - (-1) = 3e^4 + 1$$

خواجه نصیر

تمرین ۱۳) درستی قضیه‌ی گرین را برای میدان برداری $\vec{F} = (xy^2 + x^2)\vec{i} + (4x-1)\vec{j}$ روی مثلثی با رئوس $(-3,0)$ و $(0,0)$ و $(0,3)$ بررسی کنید. (خواجه نصیر- خرداد ۹۷)

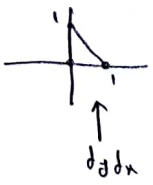
هرگاه C مثلثی با رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\oint_C \underbrace{xydx}_{P} + \underbrace{(x^2+y^2)}_{Q}dy$، کدام است؟

(صنایع - سیستم - سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ✓ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$= \iint 2x - x = \int_{x=0}^{1} \underbrace{\int_{y=0}^{-x+1} x\, dy}_{(-x+1)x} dx$$



$$= \int_{x=0}^{1} -x^2 + x\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Scanned by CamScanner

مکانیک-۹۵

اگر C مثلث تشکیل شده از اضلاع $x=0$، $x+y=1$ و $y=0$ در صفحهٔ xy باشد، مقدار انتگرال روی منحنی $\oint_C y^2dx+x^2dy$، کدام است؟ (C پیموده شده در جهت مثبت است).

۱) ۰ ✓
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{1}{3}$

فیزیک دریا-۹۴

مقدار $\int_C (y+e^{\sqrt{x}})dx+(2x+\cos y^2)dy$ کدام است؟ C مرز ناحیه‌ای است که بین دو سهمی $y=x^2$ و $x=y^2$ در جهت مثلثاتی قرار گرفته است.

۱) $-\frac{1}{3}$ ✓
۲) $-\frac{1}{5}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{5}$

اگر C مرز ذوزنقه با رئوس (۱,۱) و (۱,۲) و (۲,۳) و (۲,۱) باشد که یک بار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود و $\vec{F}(x,y)=(e^{x^2}+y^2, xy+\sin(Lny))$ باشد، $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟ (عمران - نقشه‌برداری - سراسری ۹۴)

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) $\frac{8}{3}$ ✓

خواجه نصیر

تمرین ۱۲) مطلوبست $\oint_C (y+\tan x^2)dx+(x+xy+\cos y^2)dy$ که در آن C منحنی بسته‌ای متشکل از منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ برای $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ می‌باشد. (خواجه نصیر - خرداد ۹۶)

ابراهیم شاه ابراهیمی

Math-Teacher.blog.ir

Scanned by CamScanner

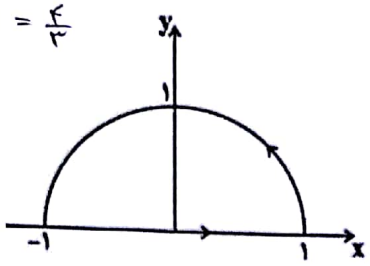
$$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \iint 2x + 2y = 2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} r(\cos\theta+\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta+\sin\theta\, d\theta \int_{r=0}^{1} r^2\, dr = 2\,(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi}\Big)\Big(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\Big)$$

$$= 2\,(0+1-(0-1))\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

سوانح و معماری کشتی و نفت -۹۷

حاصل $\oint_C (2x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$، کدام است؟ (C منحنی بستهٔ نشان داده شده در شکل زیر است)



۱) $\frac{8}{3}$

✓ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) ۰

صنایع و مواد و نساجی-۹۸

جواب تشریحی

اگر C، مسیر دایره‌ای شکل $x^2+y^2=2x$ در جهت ساعتگرد باشد، حاصل $\oint_C (y\cos x+2xe^y+y)dx+(\sin x+x^2e^y+2y)dy$ کدام است؟

$$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \iint \cos x+2xe^y-(\cos x+2xe^y+1)$$

$$= \iint -dA = -\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$$

$x^2+y^2=2x$

$r^2=2r\cos\theta$

$r^2-2r\cos\theta=0$

$r(r-2\cos\theta)=0 \Rightarrow r=0,\ r=2\cos\theta$

$$= -\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta = -\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2\theta = -\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$= -\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\pi$

۱) π ✓

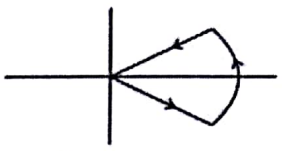
۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) $-\frac{\pi}{2}$

۴) $-\pi$

MBA۹۷

اگر منحنی بستهٔ C مرز قطاعی از دایره $x^2+y^2=1$ باشد که توسط $y=x$ و $x+y=0$ در ربع اول و چهارم مانند شکل جدا شده و دارای جهت مثلثاتی است، در این صورت $\oint_C (x^2\sin(x^3)-y^3)dx+(y^2\cos^2 y-y)dy$ کدام است؟



$$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \iint 0-(-3y^2) = \iint 3y^2$$

$$= 3\int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{1} r^2\sin^2\theta\, r\, dr\, d\theta = 3\int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\, d\theta \int_{r=0}^{1} r^3\, dr$$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$= \frac{3}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\times\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{16}(\pi-2)$$

$\times\frac{2}{2}$

$\frac{\pi}{2}-1$

۱) $\frac{3}{4^2}(\pi-2)$ ✓

۲) $\frac{3}{4}(\pi-2)$

۳) $\frac{3}{4^2}(\pi-1)$

۴) $\frac{3}{4}(\pi-1)$

Math-Teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی

Scanned by CamScanner

فیزیک دریا-۹۴

مقدار $\oint_C (x^3+y^3)dx+(2y^3-x^3)dy$ کدام است؟ (C دایره به مرکز مبداء و شعاع واحد و در جهت مثلثاتی است.)

۱) $\frac{3}{2}\pi^2$

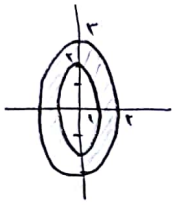
۲) $\frac{3}{2}\pi$

۳) $-\frac{3}{2}\pi$ ✓

۴) $-\frac{3}{2}\pi^2$

معدن-۹۷

فرض کنید C_1 منحنی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ در جهت مثلثاتی و C_2 منحنی $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. اگر $C=C_1\cup C_2$ باشد، مقدار $\oint_C -ydx+xdy$، کدام است؟



۱) 8π ✓

۲) 6π

۳) 4π

۴) 10π

فرض کنید c دلگون $r=1-\cos\theta$ و در جهت مثلثاتی باشد. در این صورت مقدار انتگرال زیر، برابر کدام است؟(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

$$\int_c (x^2-y)dx+(3x-2y^2)dy$$

۱) -6π ۲) -3π ۳) 3π ✓ ۴) 6π

خواجه نصیر

مثال ۱۰) مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_c y^3dx-x^3dy$ که در آن c دایره‌ی $(x-1)^2+y^2=1$ است که یک‌بار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

جواب تمرین

ابراهیم شاه ابراهیمی

Math-Teacher.blog.ir

تمرین

Scanned by CamScanner

MBA۹۲

مقدار $I=\oint_C (y+\sqrt[3]{9+\sin x})dx+(x+\sqrt[3]{7+\cos y})dy$ که در آن C منحنی بسته $x^8+y^8=1$ در جهت مثلثاتی می‌باشد، کدام است؟

$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = \iint 1-1 = 0$

پیوسته پس صفر درست است

۱) $\frac{\pi}{8}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) ۰ ✓
۴) 2π

MBA۹۵

حاصل انتگرال $\int_C e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$ که در آن c تمام بیضی به معادله $4x^2+3y^2=4$ باشد، کدام است؟

$\oint F.dr = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint -e^x \sin y - (-e^x \sin y) = 0$

پیوسته
پس ۰ درست است

۱) $\frac{3}{2}$
۲) صفر ✓
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{4}{3}$

حالت خاص **MBA۹۷**

اگر C دایره‌ای با مرکز (۲,۲) و شعاع ۱ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است در این صورت مقدار $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ کدام است؟

$\int_c \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ تابع در صفر ناپیوسته است اما صفر در داخل ناحیه قرار ندارد پس حاصل همان صفر است

۱) -2π
۲) ۰ ✓
۳) π
۴) 2π

حالت خاص اگر C مرز ناحیه $x^2+(y-2)^2+(x-2)\le 1$ باشد که در جهت مثبت در نظر گرفته شده است، مقدار $\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ۰ ✓

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۱)

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ تابع در صفر ناپیوسته است اما صفر در ناحیه قرار ندارد پس حاصل همان صفر است

فرض کنید C منحنی بسته‌ی هموار باشد که مبدأ را احاطه کرده است. کدام گزینه در مورد مقدار $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ صحیح است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) موجود نیست. ۲) صفر است. ۳) برابر 2π است. ۴ ✓) مضرب صحیحی از 2π است.

تابع در صفر ناپیوسته است و صفر در ناحیه قرار دارد پس جواب مضربی از 2π می‌باشد.

Math-Teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی

Scanned by CamScanner

عمران-۹۳

مقدار انتگرال $\oint_C f(\frac{y}{x})\frac{xdy-ydx}{x^2}$، کدام است؟ (C دایره $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ در جهت مثلثاتی و f تابعی مشتق‌پذیر است.)

۱) -2π
۲) ۰
۳) π
۴) 2π

فیزیک دریا-۹۸

مقدار $\oint_C 2Arctg\frac{y}{x}dx+\ln(x^2+y^2)dy$ که در آن C خم $(x-2)^2+y^2=1$ در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی است، کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) ۰
۳) π^2
۴) π

حالت خاص MBA98

فرض کنید C منحنی $r=10+\cos^2\theta$ باشد که $0\le\theta\le 2\pi$، مقدار $\int_C \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) -2π
۲) ۰
۳) ۱
۴) 2π

Math-Teacher.blog.ir

Scanned by CamScanner

$$2\oint \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} + \oint e^x\cos y - e^x\sin y = 4\pi$$

حالت خاص

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

نابیوتت صفردافل ناحیات

پس جواب ضرب 2π

$2\times 2\pi = 4\pi$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

پیوسته

پس جواب همان ضرایب

حالت خاص MBA۹۳

مقدار $\oint_C (e^x\cos y - \frac{2y}{x^2+y^2})dx + (\frac{2x}{x^2+y^2} - e^x\sin y)dy$ روی خم C که به صورت $x^8+y^8=1$ و در جهت مثلثاتی جهت‌دار شده، کدام است؟

۱) ۰
۲) π
۳) 2π
۴) 4π ✓

حالت خاص .فرض کنید γ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع R در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) است. اگر $\vec{F}=(F_1,F_2)$ میدان برداری باشد که $F_1=(\frac{-y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2})$ و $F_2=(\frac{x}{x^2+y^2}+x+\tan y^2)$، در این صورت $\oint_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - سراسری ۹۱)

۱) 2π
۲) $\pi(R^2+1)$
۳) $\pi(2R^2+2)$ ✓
۴) $\pi(2R^2+2)$

$$\oint \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} + \oint \underbrace{-2y+e^{x^2}}_{P}dx + \underbrace{x+\tan y^2}_{Q}dy$$

حالت خاص

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

نابیوتت و صفردافل ناحیه

حاصل ضرب 2π $= 2\pi$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2$

$\iint \frac{1-(-2)}{+2}dA = +2\pi(R)^2$

$= 2\pi + 2\pi R^2$

حالت خاص صنایع-۹۵

مقدار $\int_C \frac{x^5+x^3y^2-3y}{x^2+y^2}dx + \frac{yx^2+y^3+3x}{x^2+y^2}dy$ هرگاه C منحنی $x^4+y^4=1$ در جهت مثلثاتی باشد.

۱) ۰
۲) 2π
۳) 4π
۴) 6π ✓

$$-2\oint_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} + \oint \underbrace{\frac{x^5+x^3y^2}{x^2+y^2}}_{P}dx + \underbrace{\frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}}_{Q}dy$$

حالت خاص

نابیوتت و صفردافل ناحیه

حاصل ضرب 2π $= -2(2\pi) = -4\pi$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

$\longrightarrow$ تابع پیوسته

۰

Math-Teacher.blog.ir

Scanned by CamScanner

فقط نقطه اول و آخر مسیر دارد

MBA91 ***

اگر $F=(y-x)i+(y+x)j$ باشد، مقدار $\int_C F.dr$ بر روی منحنی $y=x^2$ از $x=0$ تا $x=1$ و سپس بر منحنی $y=\frac{1}{x}$ از $x=1$ تا $x=2$ کدام است؟

(c)

$$curl\,f=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

حلقه باز

$$=(0,0,2)$$

پایستار

$$\int f.dr=\int P\,dx+\int_{*} Q\,dy = xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(2,\frac{1}{2})}$$

1) $\frac{-7}{8}$ ✓

2) $\frac{-9}{8}$

3) $\frac{9}{8}$

4) $\frac{7}{8}$

$$=\frac{-1}{1}-2+\frac{1}{8}$$

صنایع و عمران-۹۷

اگر $\vec{F}=3xy\vec{i}-y^2\vec{j}$ و c قسمتی از سهمی $y=2x^2$ از (0,0) تا (1,2) باشد، حاصل $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

حلقه باز

$$curl\,f=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0-3x\neq 0$$

پایستار

1) $\frac{-25}{6}$

2) $\frac{-7}{6}$ ✓

3) $\frac{25}{6}$

4) $\frac{7}{6}$

$$r=(t,2t^2)\longrightarrow dr=(1,4t)\,dt \qquad 0<t<1$$

$$F=(4t^3,-4t^4)$$

$$\int f.dr=\int_{t=0}^{1}(4t^3-16t^5)\,dt=\frac{4}{4}t^4-\frac{16}{6}t^6\Big|_{t=0}^{1}=\frac{4}{4}-\frac{16}{6}=\frac{18-32}{12}=\frac{-14}{12}=\frac{-7}{6}$$

خواجه نصیر

تمرین ۲) میدان برداری $\vec{F}(x,y)=(e^x\sin y+x)\vec{i}+(e^x\cos y+\sin y)\vec{j}$ مفروض است. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ را هنگامی که نقطه اثر آن روی سهمی $y=x^2$ از نقطه $A(1,1)$ تا نقطه $B(2,4)$ حرکت کند را محاسبه کنید.

حلقه باز

$$curl\,f=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-e^x\cos y=0 \Longrightarrow$$

پایستار

$$\int f.dr=\int P\,dx+\int_{*} Q\,dy=e^x\sin y+\frac{x^2}{2}-\cos y\Big|_{(1,1)}^{(2,4)}$$

$$=e^2\sin(4)+2-\cos(4)-(e\sin(1)+\frac{1}{2}-\cos(1))$$

Math-Teacher.blog.ir

Scanned by CamScanner

ایمنی-۹۸

کار انجام شده توسط نیروی پایستار:

$$\vec{F}(x,y,z)=\underbrace{(y-\frac{z}{x^2y})}_{P}\vec{i}+\underbrace{(x-\frac{z}{xy^2})}_{Q}\vec{j}+\underbrace{\left(\frac{1}{xy}+3z^2\right)}_{R}\vec{k}$$

curlF = 0 ← تابع پتانسیل

از نقطهٔ (۱,۱,۱) تا نقطهٔ (۲,۱,۰). کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) ۱- ✓

۴) ۲-

$$\int F.dr=\int P\,dx+\int Q\,dy+\int R\,dz$$

$$=xy+\frac{z}{xy}+z^3\Big|_{(1,1,1)}^{(2,1,0)}=(2)-(1+1+1)=-1$$

سوانح-۹۵

اگر C یک منحنی دلخواه از $A=(1,2,5)$ به $B=(1,1,1)$ باشد، مقدار $\int_C \underbrace{(x+y)}_{P}dx+\underbrace{(x-z)}_{Q}dy+\underbrace{(z-y)}_{R}dz$ کدام است؟

حلقه باز

$$curlF=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+y & z-z & z-y\end{vmatrix}=(-1+1,\ 0,\ 1-1)=0$$ ← پایستار

۱) صفر ✓

۲) ۳-

۳) ۴-

۴) بستگی به منحنی دارد.

$$\int F.dr=\int P\,dx+\int Q\,dy+\int R\,dz=\frac{x^2}{2}+xy-yz+\frac{z^2}{2}\Big|_{(1,1,1)}^{(1,2,5)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1-1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+2-10+\frac{25}{2}\right)=-12-2+10=-4$$

**** عمران-۹۱**

curlF = 0 ← پایستار

برای آنکه $\int \vec{F}.d\vec{r}$ بین هر دو نقطه A و B مستقل از مسیر باشد: $\varphi(z)$ را به دست آورید.

$$\vec{F}(x,y,z)=(xy-\sin z)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}x^2+e^y\varphi(z)\right)\vec{j}+\left(\frac{e^y}{z}\ln z-x\cos z\right)\vec{k}$$

۱) $\ln z+c$

۲) $\frac{\ln z}{z}+c$

۳) $\frac{1}{2}(\ln z)^2+c$ ✓

۴) $z(\ln z-1)+c$

$$curlF=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy-\sin z & \frac{1}{2}x^2+e^y\varphi(z) & \frac{e^y}{z}\ln z-x\cos z\end{vmatrix}=\left(\frac{e^y}{z}\ln z-e^y\varphi'(z)\right)$$

$$,\ -\cos z+\cos z$$

$$,\ x-x)$$

$$\frac{e^y}{z}\ln z=e^y\varphi'(z)\longrightarrow \varphi'(z)=\frac{\ln z}{z}$$

Math-Teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی

Scanned by CamScanner

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z^2\sec^2 x & 2ye^{3z} & 3y^2e^{3z} + 2z\tan x \end{vmatrix} = (6ye^{3z} - 6ye^{3z} \text{ ، } 2z\sec^2 x - 2z\sec^2 x \text{ ، } 0)$$

$\Longrightarrow$ پایستار

خواجه نصیر

P Q R

مثال ۲) تابع برداری $\vec{F} = z^2\sec^2 x\,\vec{i} + 2ye^{3z}\vec{j} + (3y^2e^{3z} + 2z\tan x)\vec{k}$ مفروض است:

کار انجام شده توسط میدان نیروی فوق وقتی که نقطه اثر از $(1,0,\frac{\pi}{4})$ به $(0,3,0)$ تغییر مکان دهد را به دست آورید.

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz$$

ضم باز

$$= z^2\tan x + y^2e^{3z}\Big|_{(\frac{\pi}{4},0,1)}^{(0,3,0)} = 9 - (\frac{\sqrt{2}}{2})$$

خواجه نصیر

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2 + 2\cos(yz) & 2x^2yz + y\cos(yz) \end{vmatrix}$$

تمرین ۱) مطلوبست محاسبه‌ی مقدار انتگرال زیر:

$$\int_C 2xyz^2dx + (x^2z^2 + z\cos(yz))dy + (2x^2yz + y\cos(yz))dz$$

روی منحنی $C = \ln(1+\frac{2t}{\pi}(e-1))\vec{i} + \frac{\pi}{4}\sin t\,\vec{j} + (1+\sin t)\vec{k}$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{2}$

(خواجه نصیر - خرداد ۹۵)

$$= (2x^2z + \cos(yz) - yz\sin(yz)) - (2x^2z + \cos(yz) - z\,y\sin(yz))$$

$$= 2xyz - zxyz$$

$t=0 \longrightarrow (0,0,1)$

$t=\frac{\pi}{4} \longrightarrow (1,\frac{\pi}{4},2)$

ضم باز

$= (2xz^2 - 2xz^2) \Longrightarrow$ پایستار

خواجه نصیر

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x^2y^2z^2 + \sin(yz)\Big|_{(0,0,1)}^{(1,\frac{\pi}{4},2)} = 1 + \pi$$

مثال ۳) مقدار انتگرال $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z\ln y\,dz$ را بیابید.

ضم باز

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 & \frac{z^2}{y} & 2z\ln y \end{vmatrix} = (\frac{2z}{y} - \frac{2z}{y} \text{ ، } 0 \text{ ، } 0) \longrightarrow$$ پایستار

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x^3 + z^2\ln y\Big|_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} = 1 + 9\ln 2 - (1) = 9\ln 2$$

خواجه نصیر

مثال ۴) مقدار کار انجام شده $(\int F.dr)$ توسط میدان $F = \sin y\,\vec{i} + (x\cos y + \cos z)\,\vec{j} - y\sin z\,\vec{k}$ روی مسیری به معادله $r(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ را بیابید.

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & x\cos y + \cos z & -y\sin z \end{vmatrix}$$

ضم باز

$t=0 \longrightarrow (0,1,0)$

$t=\frac{\pi}{2} \longrightarrow (1,0,\pi)$

$= (-\sin z + \sin z \text{ ، } 0 \text{ ، } \cos y - \cos y) \longrightarrow$ پایستار

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x\sin y + y\cos z\Big|_{(0,1,0)}^{(1,0,\pi)} = -1$$

Scanned by CamScanner

$t=0 \to (0,0,0)$
$t=1 \to (1,1,1)$ ضمناً ⟵

MBA۹۷

فرض کنید $F(x,y,z)=(2xy^2+3x^2, 2yx^2, 1)$ و C منحنی $r(t)=(t^2, \sin^5(\frac{\pi t}{2}), t)$ که $0 \le t \le 1$ باشد.

مقدار انتگرال تابع F بر منحنی C یعنی $\int_C F.dR$ کدام است؟

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2+3x^2 & 2yx^2 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,4xy-4xy) \Longrightarrow$$ پایستار

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲ ✓
۴) ۳

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x^2y^2+x^3 \Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = 1+1=2$$

$t=0 \to (1,0,0)$
$t=2\pi \to (1,0,4\pi)$ ضمناً

معماری کشتی و نفت -۹۸

کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ در طول مارپیچ $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+2t\vec{k}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) \Longrightarrow$$ پایستار

۱) صفر
۲) 18π
۳) $9\pi^2$
۴) $18\pi^2$ ✓

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2} \Big|_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} = \frac{1}{2}+18\pi^2-\frac{1}{2} = 18\pi^2$$

MBA۹۷

فرض کنید C منحنی $r(t)=(t^3+\sin(\pi t), t^2+\sin(\pi t^2), t+\sin(\pi t^3))$ است که $0 \le t \le 1$. مقدار $\int_C 3x^2dx+2yz\,dy+y^2dz$ کدام است؟

$t=0 \to (0,0,0)$
$t=1 \to (1,0,1)$ ضمناً

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y-2y, 0, 0) \Longrightarrow$$ پایستار

۱) ۰
۲) ۱ ✓
۳) ۲
۴) ۳

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x^3+y^2z \Big|_{(0,0,0)}^{(1,0,1)} = 1$$

نساجی-۹۵

فرض کنید C منحنی $\alpha(t)=((1-t)\cos t, t^2+1, 2t+1)$ که $0 \le t \le 1$ باشد.

اگر $F(x,y,z)=(2x+z, z, y+x)$ باشد، مقدار $\int_C F.dr$ کدام است؟

$$curl F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & z & y+x \end{vmatrix} = (1-1, 1-1, 0) \Longrightarrow$$ پایستار

$t=0 \to (1,1,1)$
$t=1 \to (0,2,3)$ ضمناً ⟵

۱) -۱
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۳ ✓

$$\int F.dr = \int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz = x^2+xz+2y \Big|_{(1,1,1)}^{(0,2,3)} = 6-(1+1+1) = 3$$

Math-Teacher.blog.ir
ابراهیم شاه ابراهیمی
Scanned by CamScanner