دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

میانترم معادلات دیفرانسیل ۹۸/۹/۱۹ (بارم هر سؤال ۱ نمره)

۱- در معادله دیفرانسیل زیر با فرض $y(0)=1$ مقدار $y(1)$ را بیابید.

$$(e^{-2\sqrt{x}}-y)\,dx=\sqrt{x}\,dy$$

۲- یک فاکتور انتگرال برای معادله دیفرانسیل زیر یافته و به کمک آن معادله را حل کنید

$$(1+(y^2-1)\sec^2 x)\,dx+y\,tg\,x\,dy=0$$

۳- مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y=e^{cx}$ را بیابید.

۴- اگر جواب تحت همگن معادله دیفرانسیل زیر بصورت $y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}$ باشد، جواب خصوصی آن را بیابید
(a و b و c اعداد ثابت اند)

$$ay''+by'+cy=2\cos^2 4x$$

۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=e^x$$

۶- معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه داده شده حل کنید: $y(1)=0$ و $y'(1)=3$

$$x^2y''+xy'+9y=0$$

1) $e^{-2\sqrt{x}} - y = \sqrt{x}\, y' \xrightarrow{\div \sqrt{x}} y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول}}$ عامل : $e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = e^{2\sqrt{x}}$

$\xrightarrow{\times e^{2\sqrt{x}}} e^{2\sqrt{x}} y' + \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} y = \frac{1}{\sqrt{x}} \to (e^{2\sqrt{x}} y)' = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\int} \boxed{e^{2\sqrt{x}} y = 2\sqrt{x} + c}$

$\xrightarrow{y(0)=1} \boxed{1 = c} \qquad \xrightarrow{y(1)=?} e^{2} y = 2+1 \to \boxed{y = \frac{3}{e^{2}}}$

روش دوم : حل با معادله کامل و فاکتور انتگرال .

$(e^{-2\sqrt{x}} - y)\, dx - \sqrt{x}\, dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \to \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{\times \frac{1}{N}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} = f(x)$$

$$\to \text{عامل} = e^{\int f(x)\, dx} = e^{\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x})\, dx} = e^{2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln x} = e^{2\sqrt{x}} \cdot e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - y\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx - e^{2\sqrt{x}}\, dy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \end{cases} \xrightarrow{* \; c = \int M dx + \int N dy} c = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int e^{2\sqrt{x}} dy$$

$$\boxed{c = 2\sqrt{x} - e^{2\sqrt{x}} y}$$

$\xrightarrow{y(0)=1} \boxed{c = 0 - 1} \quad \xrightarrow{y(1)=?} -1 = 2 - e^{2} y \to e^{2} y = 3 \to \boxed{y = \frac{3}{e^{2}}}$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - آذر ۹۸

۲) $\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y\,\mathrm{Sec}^2 x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = y\,\mathrm{Sec}^2 x \end{cases} \longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = y\,\mathrm{Sec}^2 x \xrightarrow{\times \frac{1}{N}} \dfrac{\mathrm{Sec}^2 x}{tg\,x} = f(x)$

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{\mathrm{Sec}^2 x}{tg\,x} dx} = e^{Ln|tg\,x|} = \boxed{tg\,x}$$

$$\xrightarrow{\times\, tg\,x} (tg\,x + (y^2-1)\,tg\,x\,\mathrm{Sec}^2 x)\,dx + y\,tg^2 x\,dy = 0$$

$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y\,tg\,x\,\mathrm{Sec}^2 x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y\,tg\,x\,\mathrm{Sec}^2 x \end{cases} \xrightarrow{c = \overset{*}{\int} M dx + \int N dy} c = \int tg\,x\,dx + \underbrace{\overbrace{\int y\,tg^2 x\,dy}^{-\int tg\,x\,\mathrm{Sec}^2 x}}_{-\frac{1}{2}\mathrm{Sec}^2 x}$

$$\boxed{c = -Ln(\cos x) + \frac{y^2}{2}\,tg^2 x}$$

۳) $y = e^{cx} \longrightarrow y' = c\,e^{cx} \Rightarrow y' = cy \longrightarrow y' = \dfrac{y\,Ln\,y}{x}$

$\xrightarrow{Ln} Ln\,y = cx \longrightarrow c = \dfrac{Ln\,y}{x}$

$$\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'} = \frac{y\,Ln\,y}{x} \longrightarrow y\,Ln\,y\,dy = -x\,dx \xrightarrow{\int}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}y^2 Ln\,y - \frac{y^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + c}$$

آذر ۹۸ - ابراهیم شاه‌ابراهیمی

۴) $\begin{cases} e^{x} \to t=1 \\ e^{2x} \to t=2 \end{cases} \to (t-1)(t-2)=0 \to t^2-3t+2=0 \to \underline{y''-3y'+2y=0}$

که ضرایب a و b و c معلوم شدند.

$$\to y''-3y'+2y = 2\cos^2(4x) = 2\left(\frac{1+\cos 8x}{2}\right) = 1+\cos 8x$$

$$\xrightarrow{\text{اپراتور}} D^2y-3Dy+2y = \begin{cases} 1 \\ \cos 8x \end{cases} \to y = \begin{cases} \dfrac{1}{D^2-3D+2} \xrightarrow{D=0} \boxed{\dfrac{1}{2}} \\ \dfrac{\cos 8x}{D^2-3D+2} \xrightarrow{D^2=-64} \end{cases}$$

مزدوج

$$\to \frac{\cos 8x}{-62-3D} \times \frac{62-3D}{62-3D} = -\frac{\cos 8x(62-3D)}{62^2-9D^2} \xrightarrow{D^2=-64}$$

$$= -\frac{62\cos 8x - 24\sin 8x}{62^2+9(64)} = \boxed{\frac{6}{1105}\sin 8x - \frac{31}{2210}\cos 8x}$$

$$\to \boxed{y_p = \frac{1}{2} - \frac{6\sin 8x}{1105} - \frac{31}{2210}\cos 8x}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آذر ۹۸

۵) $x+1-2x+x-1=0 \longrightarrow \boxed{y_1=e^x}$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{y_1^2} \longrightarrow \left(\frac{y_2}{e^x}\right)'=\frac{e^{-\int\frac{1-2x}{x}dx}}{e^{2x}}=\frac{e^{-\ln x+2x}}{e^{2x}}=\frac{e^{\ln x^{-1}}\cdot \cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}=x^{-1}=\boxed{\frac{1}{x}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{y_2}{e^x}\right)'=\frac{1}{x} \xrightarrow{\int} \frac{y_2}{e^x}=\ln x \longrightarrow \boxed{y_2=e^x\ln x}$$

$$\begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=e^x\ln x \end{cases} \rightarrow w(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^x\ln x \\ e^x & e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\end{vmatrix}=\cancel{e^{2x}\ln x}+\frac{e^{2x}}{x}-\cancel{e^{2x}\ln x}=\boxed{\frac{e^{2x}}{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{استاندارد}} y''+\frac{(1-2x)}{x}y'+\frac{(x-1)}{x}y=\boxed{\frac{e^x}{x}} \longrightarrow \boxed{g(x)=\frac{e^x}{x}}$$

لاگرانژ

$$\begin{cases} c_1=-\int\frac{y_2\cdot g(x)}{w(x)}dx=-\int\frac{\cancel{e^x}\ln x\cdot\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{x}}}{\cancel{\frac{e^{2x}}{x}}}dx=-\int\ln x\,dx=\boxed{-(x\ln x-x)} \\ c_2=\int\frac{y_1\cdot g(x)}{w(x)}dx=\int\frac{\cancel{e^x}\cdot\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{x}}}{\cancel{\frac{e^{2x}}{x}}}dx=\boxed{x} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \boxed{y_h=c_1e^x+c_2e^x\ln x} \\ \boxed{y_p=-e^x x(\ln x-1)+xe^x\ln x} \end{cases} \qquad \boxed{y_{\text{عمومی}}=y_h+y_p}$$

---

۷) $m(m-1)+m+9=0 \longrightarrow m^2+9=0 \longrightarrow m^2=-9=9i^2 \longrightarrow \boxed{m=\pm 3i}$

$$\longrightarrow \boxed{y=c_1\sin(3\ln x)+c_2\cos(3\ln x)}$$

$$\xrightarrow{y(1)=0} \boxed{0=0+c_2} \qquad \xrightarrow{y'(1)=3} y'=\frac{3c_1}{x}\cos(3\ln x)-\frac{3}{x}c_2\sin(3\ln x)$$

$$\longrightarrow 3=3c_1 \longrightarrow \boxed{c_1=1}$$

$$\longrightarrow \boxed{y=\sin(3\ln x)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - آذر ۹۸

math-teacher.blog.ir