۴۹- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta$ به‌ازای $0 < r < 1$، کدام است؟ (راهنمایی از بسط مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ به‌ازای $|z| < 1$ استفاده کنید.)

۱) $\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

۲) $\dfrac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$

۳) $\dfrac{r\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$

۴) $\dfrac{r\cos\theta-r^2}{1+2r\cos\theta+r^2}$

(۴۹) عبارت داده شده قسمت موهومی $e^{in\theta}$ است. پس ابتدا از آن استفاده می‌کنم
و سپس قسمت موهومی آن جواب خواهد بود.

$$z = r^n e^{i\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n \quad \text{سری هندسی} \quad \begin{cases} q = re^{i\theta} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{1-re^{i\theta}} \xrightarrow{\frac{\times\, 1-re^{-i\theta}}{\times\, 1-re^{-i\theta}}} z = \frac{1-re^{-i\theta}}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}$$

$$\xrightarrow{\text{اویلر}} z = \frac{1-r\cos\theta + r\sin\theta\, i}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

@EbiMath

$$\underset{\text{(مطلوب)}}{f(\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}}$$