

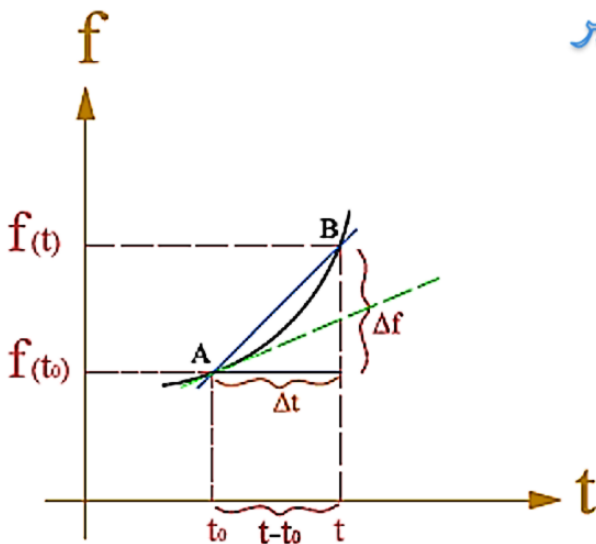
آهنگ تغییر

نمودار تابع f را مطابق شکل در نظر می گیریم.

اگر خطی این نمودار را در نقاط B, A قطع کند،

شیب این خط را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



اگر در نمودار تابع B به نقطه A نزدیک شود در این صورت t به سمت t_0 میل کرده و خط قاطع

به خط مماس تبدیل می شود. شیب خط مماس بر منحنی را مشتق تابع f در نقطه t_0 می نامیم.

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad \text{« } \Delta f \text{ را نمو تابع و } \Delta t \text{ را نمو متغیر گوئیم.»}$$

$$(t - t_0 = \Delta t \rightarrow t = t_0 + \Delta t) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad \text{چون:}$$

نتیجه مهم: به تعبیر هندسی آهنگ متوسط تغییر عبارت است از شیب خط قاطع AB

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

آهنگ آنی (لحظه ای) تغییر عبارت است از شیب خط مماس بر منحنی در لحظه t_0

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

تذکر: آهنگ متوسط تغییرات مسافت یک متحرک نسبت به زمان برابر سرعت متوسط بوده

($\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$: سرعت متوسط) و آهنگ لحظه ای تغییرات مسافت یک متحرک نسبت به زمان.

(مشتق مسافت نسبت به زمان) در لحظه t_0 برابر سرعت لحظه ای متحرک می باشد

$$V = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

سرعت لحظه ای

نکته: در حل برخی از مسائل آهنگ آنی تغییر، از مشتق زنجیره ای استفاده می شود.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

مثلاً در آهنگ آنی تغییرات مساحت دایره نسبت به زمان داریم:

مثال 1) مساحت دایره ای به شعاع R را در نظر گرفته آهنگ آنی تغییر مساحت دایره را نسبت به

R در $R = 4$ بیابید.

مثال 2) آهنگ آنی تغییر مساحت دایره را وقتی که $r=4$ باشد، حساب کنید.

مثال 3) شعاع یک بادکنک کروی شکل با سرعت $0/5$ سانتی متر بر ثانیه افزایش می یابد در

لحظه ای که شعاع بادکنک $r=1$ سانتی متر باشد آهنگ آنی تغییر حجم بادکنک را محاسبه کنید.

مثال 4) اگر شعاع دایره ای با آهنگ آنی 3 سانتی متر بر ثانیه بزرگ شود در لحظه ای که

مساحت دایره برابر با 4π باشد، آهنگ آنی تغییر مساحت آن چقدر است؟

مثال 5) آهنگ آنی تغییر مساحت یک مربع به ضلع x را نسبت به تغییر محیط آن تعیین کنید.

آزمون چهار گزینه ای: (مشتق)

1- اگر $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشد $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) صفر (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

2- مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه ی $x=1$ برابر 3 است. اگر $f(1) = 0, f'(1) = -4, g'(1) = 0$

موجود باشد مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{4}{3}$

3- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

- (1) $-0/2$ (2) $-0/1$ (3) $0/1$ (4) $0/2$

4- مشتق تابع $y = \sin^6 x + \cos^2 x + \cot x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (1) 10 (2) -10 (3) 1 (4) -1

5- اگر $y = \cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$ حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

- (1) -2 (2) $-\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) 2

6- اگر $f(x) = x^2 - x, g(x) = \sqrt{2}x$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)g(2+\Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر

کدام است؟

- (1) 3 (2) 4 (3) 6 (4) 7

7- معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود به صورت $S = -5t^2 + 20t$ است. سرعت لحظه ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ (با صرف نظر کردن از مقاومت هوا)

- (1) -20 (2) -15 (3) -10 (4) -5

8- در تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از 4 به 25 تغییر کند برابر با آهنگ لحظه ای در نقطه ی $x = a$ است. a کدام است؟

- (1) 11/75 (2) 12/25 (3) 12/5 (4) 13/5

9- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه ای از $x = 5$ تا $x = 9$ کدام است؟

- (1) 0/4 (2) 0/5 (3) 0/6 (4) 0/7

10- مشتق تابع $y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})^2 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})^2$ در $x = 0$ کدام است؟

- (1) $\frac{9}{4}$ (2) $\frac{27}{4}$ (3) $-\frac{27}{4}$ (4) $-\frac{9}{4}$

11- مقدار مشتق تابع $y = \tan^2 x - \cot 2x$ در نقطه ی $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (1) $\frac{4}{3}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 4

12- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (4) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$