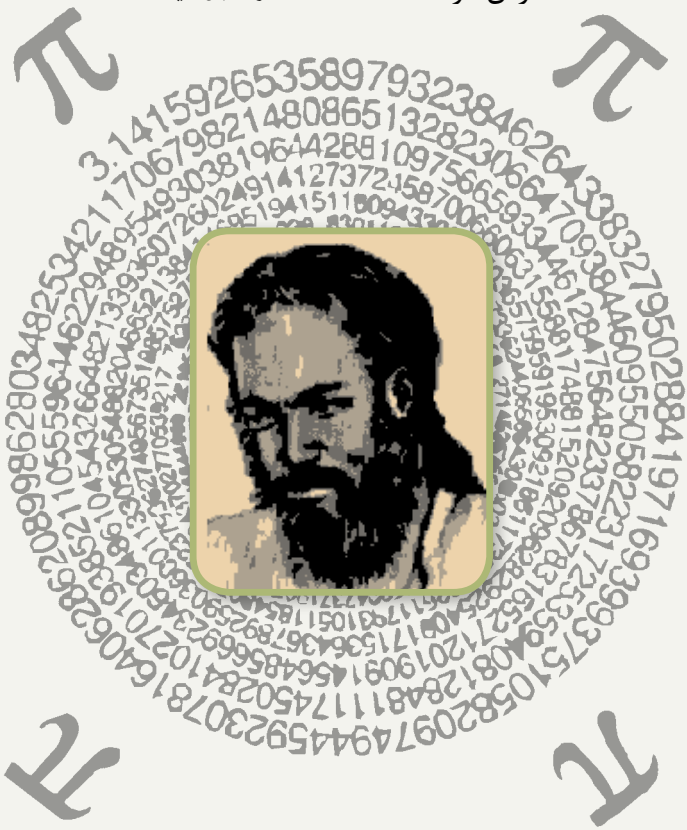
فصل ۲ عددهای حقیقی

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

فعالیت

۱ــ در فصل گذشته با نمایش‌های مختلفِ مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید :

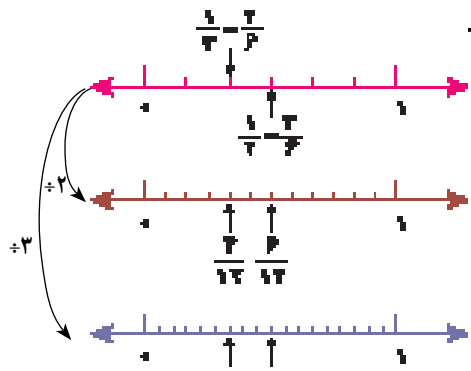
ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq ۳\}$ $\{۳, ۴, ۵, \ldots\}$	
۲	عددهای حسابی ــــــ ــــــــــــ	$\{x \in \mathbb{W} \mid x \leq ۲\}$ $\{_____\}$	
۳	عددهای صحیح بین ۳- و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} \mid _____\}$ $\{_____\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱-	$\{_____\}$ $\{_____\}$	

نامساوی $x \geq ۳$ برای کدام‌یک از عددهای زیر درست است؟

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵

۲ــ می‌خواهیم بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش



روش بهار

$$\frac{۱}{۳} < ? < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲}{۶} < ? < \frac{۳}{۶}$$

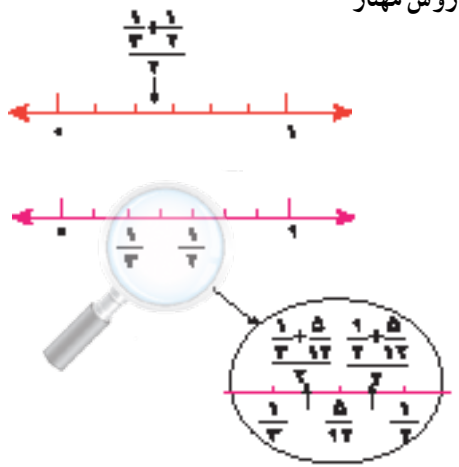
$$\frac{۴}{۱۲} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۶}{۱۲}$$

$$\frac{۶}{۱۸} < \frac{۷}{۱۸} \;,\; \frac{۸}{۱۸} < \frac{۹}{۱۸}$$

×۲

×۳

روش مهناز



روش عطیه

$$\frac{۱}{۳} < ؟ < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} < \frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۲} < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱}{۲}$$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید. $\left\{\frac{a}{b} \middle| \quad \right\}$

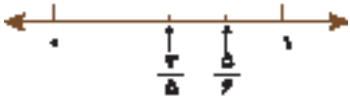
کار در کلاس

۱ــ بین $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲ــ بین $-\frac{۱}{۲}$ و ۱- دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱ــ می‌خواهیم کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۵}{۹}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به‌کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد : شاهد به‌صورت تقریبی کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به‌نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی : مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید :

$\frac{۳}{۵} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۷}{۸} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۹} = \frac{\quad}{۳۶۰}$

روش مجید : مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید :

$\frac{۳}{۵} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۷}{۸} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۵}{۹} \simeq ۰/۵۵$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید.

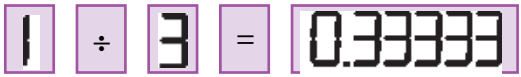
۲ــ با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید :

$\frac{۷}{۶} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۱}{۹} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۱}{۷} \simeq$

$\frac{۳}{۸} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۱}{۳} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۱}{۵} =$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحهٔ نمایش نشان می‌دهد؟

ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟



در نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۳}$، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۵}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم :

$\frac{۷}{۶} = ۱/۱۶۶۶\ldots = ۱/۱\overline{۶}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots = ۰/\overline{۳}$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$\frac{۵}{۶} =$ $\qquad$ $\frac{۷}{۹} =$ $\qquad$ $\frac{۵}{۱۱} =$

$\frac{۵}{۱۶} =$ $\qquad$ $\frac{۳}{۲۰} =$ $\qquad$ $\frac{۷}{۲۲} =$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اوّلی به‌جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱ــ پس از محاسبهٔ هر قسمت، کسر مرکب را تا حدامکان ساده کنید :

$\frac{۵}{۶} \div ۲\frac{۱}{۲}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۸}$ $\qquad$ $-۱ + \frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $۱ + \frac{۳}{۲}$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰} - \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}} \div ۵\frac{۱}{۳}$$

$$(-۲\frac{۵}{۶} + ۳\frac{۱}{۲}) \div (-۱ - \frac{۱}{۹})$$

$$-۲\frac{۱}{۲} - ۳\frac{۱}{۳} + ۴\frac{۷}{۱۲}$$

$$-\frac{۱}{۲} + \frac{-۵}{۶} \div \frac{۷}{۳} \times \frac{۷}{۵} + \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{-۱ - \frac{۱}{-۱ - \frac{۱}{۳}}}$$

$$\frac{۵}{۶} - \frac{۷}{۸} \div (۲ \div \frac{-۶}{۵})$$

۳ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف) $\frac{۷}{۸}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, ۲, -۳\frac{۵}{۶}$

ب) $\frac{۱۶}{۷}, -\frac{۳}{۴}, ۲/۷۵, -\frac{۵}{۶}, ۴\frac{۳}{۵}, \frac{۵۶}{۱۳}$

۴ــ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{۱۰}{۱۱}, \frac{۱۲}{۱۳}$

ب) $۰, -\frac{۱}{۳}$

فعالیت

۱ــ پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.

۲ــ با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ مساوی ۱/۴ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳ــ معلّم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان از ماشین‌حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین‌حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562

1.41421356237

ــ چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد.

ــ چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟

ــ با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟

ــ مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

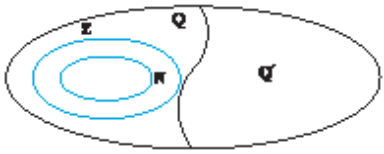
آیا در ۱۵ رقم نشان‌داده شده برای $\sqrt{۲}$، تناوبی می‌بینید؟

عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$ ، ...۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱... و π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی‌شمار و دارای دورهٔ تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید.

عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است؛ امّا در محاسبات، معمولاً تا دو رقم اعشار π استفاده می‌شود : $\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹$

به‌طور کلی جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است؛ مانند $\sqrt{۱۵}$ ، $\sqrt{۶}$ ، ... (عددهایی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.)



مثال : مجموعه‌های N و Z و Q و Q′ به کمک نمودار ون، مشخص شده است.

مثال : $۰/۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲... \in Q'$ $\quad ۰ \in Q$ $\quad \sqrt{۸} \in Q'$ $\quad \sqrt{۳} \in Q'$ $\quad -\frac{۳}{۴} \notin Q'$

کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$\mathbb{Z} \subseteq Q'$ $\qquad \mathbb{Z} \subseteq Q$ $\qquad \mathbb{N} \subseteq Q'$ $\qquad Q \cap Q' = \varnothing$

فعالیت

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می‌توان پیدا کرد؟

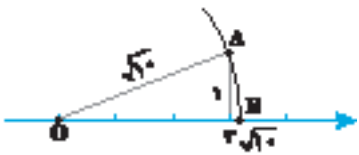
ج) روی محور نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همهٔ نقاط پاره‌خط AB رنگ می‌شود؟ آیا $\sqrt{۲}$ نیز رنگ می‌شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عددگویا است، یک پاره‌خط به‌وجود می‌آورد؟ چرا؟

مثال : نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{۱۰}$ روی محور به‌صورت زیر است :

به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می‌کنیم. نقطه B روی محور عدد $\sqrt{۱۰}$ را نمایش می‌دهد.

$OA^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰ \Rightarrow OA = \sqrt{۱۰}$



مثال : $\sqrt{۷}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی :

$$۴<۷<۹ \Rightarrow \sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹} \Rightarrow ۲<\sqrt{۷}<۳$$

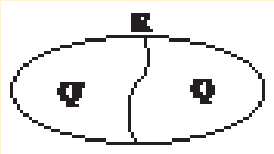
کار در کلاس

۱ــ بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲ــ بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳ــ الف) مجموعه A به‌صورت $A=\{x\in Q \mid ۲\le x\le ۳\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟

ب) نقطهٔ نمایش $\sqrt{۵}$ را روی محور مشخص کنید.



عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. تساوی $\mathbb{R}=Q\cup Q'$ بین سه مجموعهٔ Q و Q' و $\mathbb{R}$ برقرار است.

مثال :

$۰/۷۵ \in R$ $\quad -\frac{۵}{۶}\in Q$ $\quad \sqrt{۱۰}\in \mathbb{R}$ $\quad ۰\in \mathbb{R}$

$\frac{۵}{\sqrt{۲}}\in \mathbb{R}$ $\quad \pi\in\mathbb{R}$ $\quad ۰/۰۲۰۲۲۰۲۲۲۰۲۲۲۲\ldots\in\mathbb{R}$

کار در کلاس

۱ــ داخل ○ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید :

$\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}$ ○ $\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۸}$ ○ R $\quad ۰/۲$ ○ Q $\quad ۴$ ○ $\mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۶}$ ○ $\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۲۵}$ ○ Q' $\quad -\frac{۷}{۳}$ ○ Z $\quad -۵$ ○ $\mathbb{R}$

$\frac{۹}{-۱}$ ○ $\mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{۰/۰۹}$ ○ Q $\quad \sqrt{۰/۹}$ ○ Q' $\quad \sqrt{۳/۵}$ ○ Q'

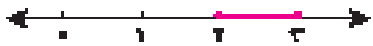
۲ــ مجموعه‌های سطر اوّل را به مجموعهٔ مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اوّل با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

$Q \cap Q'$	$Q \cap Z$	$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$	$Q' \cap \mathbb{R}$	$Q \cup Q'$
$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\mathbb{N}$	Q'	$\mathbb{R}$

فعالیت

با توجه به اینکه مجموعهٔ عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید :

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \le x < ۳\}$



$B = \{x \in R \mid x < -۲\}$

$C = \{x \in R \mid -۱ \le x \le ۵\}$

$D = \{x \in R \mid x \ge ۶\}$

با توجه به مجموعهٔ A چرا نقطهٔ ۲ روی محور توپر و نقطهٔ ۳ روی محور توخالی است؟

کار در کلاس

۱ــ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعهٔ متناظر آن را بنویسید :

الف) $A = \{x \in R \mid x > -۱\}$

ب) $B = \{ \qquad \}$

ج) $C = \{x \in R \mid x \le ۲\}$

۲ــ با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید :

$\sqrt{۱۳} \in A$ $\qquad$ $۰/۲۵۲۵۵۲۵۵۵... \in B$ $\qquad$ $۰/۷۵ \in A$

$-۱۰۰۰ \in C$ $\qquad$ $\sqrt{۱} \in A$ $\qquad$ $\sqrt{۷} \in C$

۳ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

الف) $\{-۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -۲\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x < ۳\}$

تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید :

مجموعهٔ اعداد	$\sqrt{۳/۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	π	$-\frac{۳}{۴}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۹....	-۱۰	$\frac{۶}{۲}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	×	×	×	×	×	×	×	✓
W حسابی								
$\mathbb{Z}$ صحیح								
Q گویا								
Q' گنگ								
$\mathbb{R}$ حقیقی								

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱/۵ < x < ۵\}$, $B = \{x \in Q \mid ۱/۵ < x < ۵\}$

ب) $C = \{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۹\}$

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$ ۲) $\mathbb{R} - Q' =$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$ $\mathbb{R} \cap Q' =$

۴ــ عدد $\sqrt{۵} + ۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

الف) ۲ و ۵ ب) ۶ و ۷ ج) $\sqrt{۳}, ۶$ د) $\sqrt{۲}, \sqrt{۴/۱}$

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☐ ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.

☐ ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

☐ ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

☐ ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

فعالیت

۱ــ با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید :

نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟

فاصلهٔ نقطه A از O یا طول پاره‌خط OA چقدر است؟

فاصلهٔ نقطه B از O یا طول پاره‌خط OB چقدر است؟

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲ــ نقطه C را روی محور نمایش دهید به‌طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت : $|-۲| = |۲| = ۲$

مثال : فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ تا مبدأ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $(-\frac{۲}{۳})$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ یعنی : $|\frac{۲}{۳}| = |-\frac{۲}{۳}| = \frac{۲}{۳}$

مثال : قدر مطلق $-\sqrt{۵}$ را به‌صورت $|-\sqrt{۵}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{۵}$ است. قدرمطلق ۰/۰۴ را به‌صورت $|۰/۰۴|$ نشان می‌دهیم که مساوی ۰/۰۴ است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد :

$$a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$$

$$a > ۰ \Rightarrow |a| = a$$

$$a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$$

مثال : به محاسبات زیر توجه کنید :

$$|۱۰ - ۲۰ + ۵| = |-۵| = ۵$$

$$|(-۶) \times (+۱۰)| = |-۶۰| = ۶۰$$

کار در کلاس

۱ــ جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

الف) دو عدد a و b مثبت است. — ۱) $a > ۰, b < ۰$

ب) عدد a نامنفی است. — ۲) $a > ۰, b > ۰$

ج) دو عدد a و b منفی است. — ۳) $a \geq ۰$

د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. — ۴) $a < ۰, b < ۰$

هـ) عدد a نامثبت است. — ۵) $a \leq ۰$

۲ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $ab < ۰$ — الف) $a > ۰, b > ۰$

۲) $ab > ۰, a + b > ۰$ — ب) $a < ۰, b < ۰$

۳) $ab > ۰ , a + b < ۰$ — ج) $a < ۰, b > ۰$

۳ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $|a| = -a$ — الف) $a > ۰$

۲) $|a| = a$ — ب) $a > ۰, b > ۰$

۳) $|a + b| = a + b$ — ج) $a < ۰$

۴) $|a + b| = -(a + b)$ — د) $a < ۰, b < ۰$

۴ــ عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلقِ حاصلضربِ دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلقِ آنهاست.

۲) قدر مطلقِ مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \quad \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \quad \sqrt{۵} \simeq ۲/۲ \quad \sqrt{۶} \simeq ۲/۴ \quad \sqrt{۷} \simeq ۲/۶$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحهٔ قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

دلیل : $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی می‌شود :

۱) $|۲-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|=$ دلیل :

۳) $|۲\sqrt{۵}-\sqrt{۶}|$ دلیل :

۴) $|-۴-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

مثال : اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\sqrt{۲}$ و $c=-۳$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به‌دست می‌آوریم :

$$|a+b+c|=|\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+(-۳)|=|-۲/۵+\sqrt{۲}|$$

چون $-۲/۵+\sqrt{۲}$ عددی منفی است ($\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-۲/۵+\sqrt{۲})$ یعنی $۲/۵-\sqrt{۲}$ است.

مثال :

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|=(۳-\sqrt{۵})-(-۲-\sqrt{۵})$$

$$=۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}=۵$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدرمطلق، می‌توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال : برای محاسبه $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}$ خواهیم داشت :

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}$$

کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-۷)^۲|$ ○ $|-۷|^۲$

ب) $|-۸+۵|$ ○ $|-۸|+|۵|$

ج) $|۳-۹|$ ○ $|۳|-|۹|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

$|۰/۲^۵ - ۰/۲^۶| =$ $\quad$ $|۷^۳ - ۷^۴| =$ $\quad$ $|-\frac{۴}{۳}| =$ $\quad$ $|۰| =$

۳ــ حاصل عبارات زیر رابه‌دست آورید :

الف) $\sqrt{(-۲۵۹۵)^۲} =$ $\quad$ ب) $\sqrt{(۱۳۹۴)^۲} =$

ج) $\sqrt{(-۳+\sqrt{۱۰})^۲} =$ $\quad$ د) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲} =$

تمرین

۱ــ اگر $a=۰/۲۵$, $b=-\frac{۱}{۴}$, $c=۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$|a+b| + ۲|a-b-c|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

الف) $|-۳\sqrt{۵}|$ $\quad$ ب) $|۷-۵\sqrt{۳}|$ $\quad$ ج) $|۰+\sqrt{۵}|$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$|۵-۱۲| > ۱ + \square$

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟

۵ــ با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^۲} = a$ را نشان دهید.

۶ــ حاصل عبارات روبه‌رو را به‌دست آورید : $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲}$ $\quad$ $\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$