

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارت های زیر را مانند نمونه ها به دست آورید :

$$\begin{array}{cccc} (-3)^2=9 & (\sqrt{5})^2=5 & \left(\frac{1}{7}\right)^2= & \left(-\frac{2}{3}\right)^2= \\ (-\sqrt{5})^2= & \left(-\frac{1}{7}\right)^2= & 4^2= & (-4)^2= \end{array}$$

مربع (توان دوم) عددها ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه های دوم عدد ۹ می نامند. همان گونه که در سال های گذشته دیده اید، ریشه های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می دهند و داریم:

$$\sqrt{9}=3 \text{ و } -\sqrt{9}=-3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳			$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه های دوم ۷، عددهای $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0}=0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم b می نامند. همان طور که می دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸			۶۴					

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3=8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8}=2$. همچنین چون $(-2)^3=-8$ ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8}=-2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر و ریشه سوم عدد $-\frac{8}{27}$ عدد است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید :

$$(\sqrt[3]{8})^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-27} =$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.
هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt{81} = \sqrt{4^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{-1} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = \sqrt[3]{(-7)^3} =$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2}=|x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{8^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(2-9)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} =$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$$

الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x>0, y>0$).

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$$

ب) x مثبت و y منفی است ($x>0, y<0$).

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$$

ج) x منفی و y مثبت است ($x<0, y>0$).

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$$

د) x و y هر دو منفی هستند ($x<0, y<0$).

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است :

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷		$\frac{1}{8}$				
-۸		۲۷				

به طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم : $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{۸+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt{\quad} =$$

$$3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = \quad$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{\quad} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\quad}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \quad$$

$$\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = \quad$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 1^0$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$	$\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\sqrt{1/44} = 1/2$	$(\sqrt{-1})^2 = 1$	$\sqrt[3]{-64} = -4$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt[3]{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد :

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید : $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

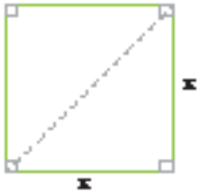
$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید :

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{1^0}} = \frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{6^0}}{\sqrt[3]{5}} =$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه ————— داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین ————— این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ————— مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ = ————— مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$				

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارت زیر را ساده کنید.

راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{الف)} \quad \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:

(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \quad} = 4\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\quad} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\quad} - \quad + \quad = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\quad} + 2\sqrt[3]{\quad} + 3\sqrt[3]{\quad} = 5\sqrt{\quad} + 5\sqrt[3]{\quad} \end{aligned}$$

مثال ۱: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^3} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

مثال ۲: حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{۹۸} - \sqrt{۵۰} + \sqrt{۱۲۸}$$

$$۴) \sqrt{۴ + \frac{۱}{۸۱} + \frac{۴}{۹}}$$

$$۲) \sqrt{۲۷} - \sqrt{۱۲} - \sqrt{۷۵} + \sqrt{۴۸}$$

$$۵) (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$$

$$۳) ۵\sqrt[۳]{۲} + ۳\sqrt[۳]{۵۴} - ۴\sqrt[۳]{۱۲۸}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\text{ب) } \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} \times \frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۵^۲}}{۵}$$

$$\text{ج) } \frac{۴}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۴}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}} \times \frac{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۴\sqrt{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{\frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۲}}} = \frac{۴\sqrt{\frac{۳}{۲}}}{۱} = ۴\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$\text{د) } \frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۱۴}}{\sqrt[۳]{۱۴}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۷ \times ۱۴}}{\sqrt[۳]{۲^۲ \times ۱۴}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۹۸}}{\sqrt[۳]{۲^۲ \times ۷}}$$

$$\text{هـ) } \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲x}}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{و) } \frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z}} = \frac{۵\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z^۲ \times z}} = \frac{۵\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z^۳}} = \frac{۵}{z} \quad (z \neq 0)$$

کار در کلاس

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج) $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د) $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

$(x \neq 0)$

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ ج) $\sqrt[3]{27^2}$ هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$ و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

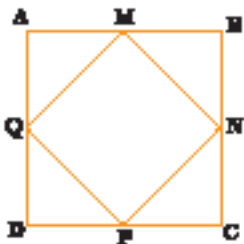
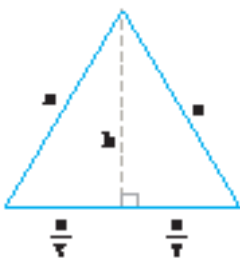
۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب a بنویسید.



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$ چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت < یا = یا > بگذارید :

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

$$\sqrt{8} = 2 \quad \text{د) } \sqrt{\quad} = \frac{1}{3} \quad \text{ج) } 2\sqrt{\quad} = 6 \quad \text{ب) } \sqrt{\quad} = 10 \quad \text{الف) }$$

$$\frac{2^{-5}}{2^0} = \sqrt{64} \quad \text{هـ) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0 \quad \text{و) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m^0} = m \quad \text{ز) } \sqrt[3]{-27} = \frac{0^3}{(-4)^3} \quad \text{ح) }$$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

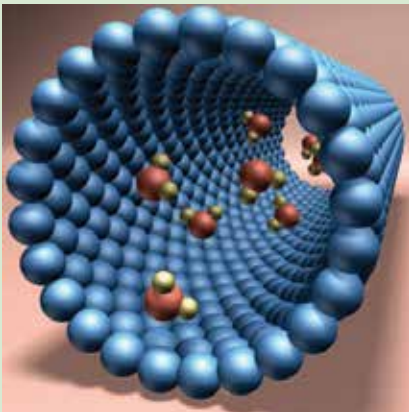
$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- آیا تساوی $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$ ، تساوی

درست است.

خوابگاه نانو



فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر 10^{-9} متر یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.