



# استدلال و اثبات در هندسه

أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَجَادِلْهُمْ بِآيَاتِي هِيَ أَحْسَنُ ...  
 با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و  
 مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما  
 شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها  
 دانه‌اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

## فعالیت

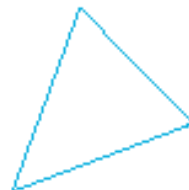
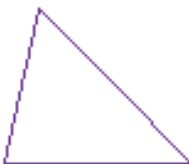
- متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :
- ۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟
  - ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.
  - ۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است.

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

## کار در کلاس

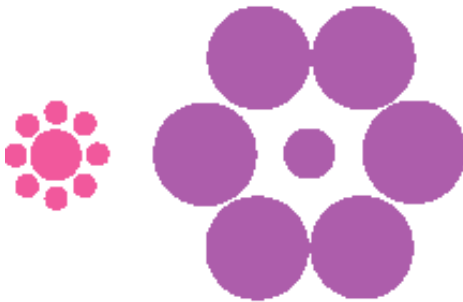
- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.
- ۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟  
یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

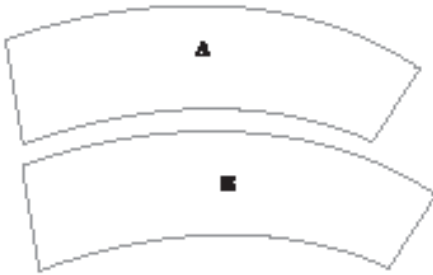
## فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید.

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید.



۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از

شیرینی موردعلاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟)

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه

کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع

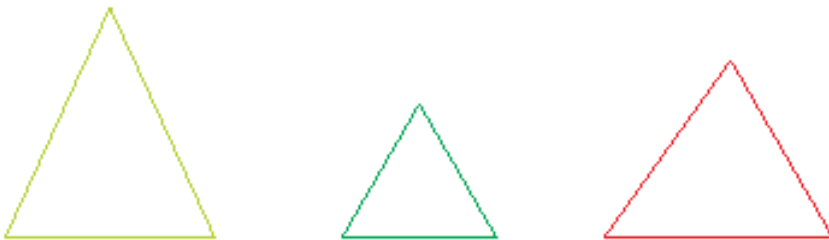
کافی است؟ چرا؟

هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به‌کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

### تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمود منصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلوگی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلوگی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید.

۳- چون من تا به حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه‌ی خاله‌ی کوچکم هم دختر خواهد بود.  
(د) چون همه‌ی قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دو نفر درباره‌ی چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.  
اولی : در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

### فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

**مهرداد :** آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

**سعید :** بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

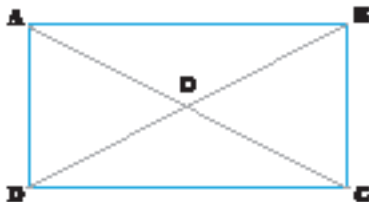
**فرض :** شکل لوزی است.

**حکم :** \_\_\_\_\_ برابر است.

**استدلال :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی } \text{_____} \text{ است.} \\ \text{در متوازی‌الاضلاع } \text{_____} \text{ برابر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{_____ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو}$$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :



فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.

$$\text{فرض : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \text{---} = \text{---} = \text{---} = 90^\circ \\ AB = \text{---} , \quad AD = \text{---} \\ AB \parallel \text{---} , \quad AD \parallel \text{---} \end{array} \right. \quad \text{حکم : } AC = \text{---}$$

## کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



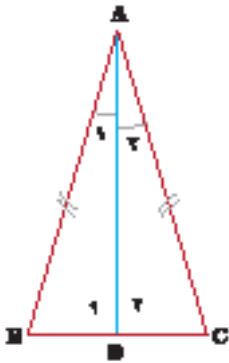
$$\text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---}$$

فرض :

$$\text{---} = \text{---} : \text{حکم}$$

۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ دیگر ABCD با مجموع دو زاویهٔ دیگر EFGH برابر است.



۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید :

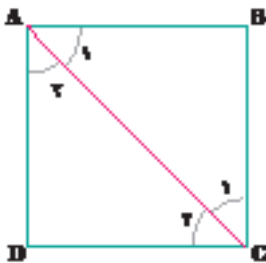
مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است و  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است. ثابت کنید  $AD$  میانه نیز هست :

فرض :

حکم :

استدلال : چون  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است، پس :  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و

$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$  و ضلع  $AD$  در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های  $ADB$  و  $ADC$  به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم برابر است، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه :  $BD = DC$  استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث  $ABC$  می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه  $B$  نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز  $A$  را به نیمساز دیگر تعمیم داد.



۲- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر  $AC$  از مربع  $ABCD$  نیمساز زاویه‌های  $A$  و  $C$  است. چون دو مثلث  $ABC$  و  $ADC$  به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و لذا  $AC$  نیمساز است.

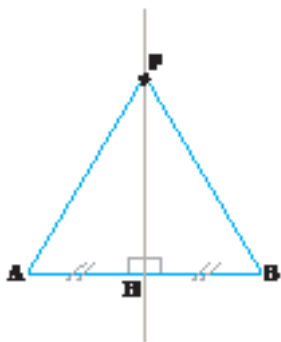
آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر

نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به کار برده‌ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.





۴- نقطه‌ای مانند P، روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت است، نتیجه می‌شود پاره خط‌های PA و PB با هم برابر است. بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است. آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟

## کار در کلاس

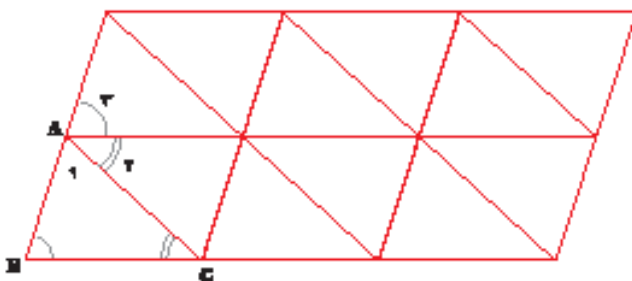
به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئله زیر آورده‌اند :

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه  $60^\circ$  است، مجموع زاویه‌های مثلث  $180^\circ$  است.

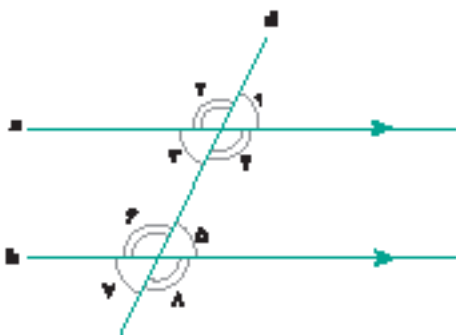
استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال مهدی : مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است را کشید و

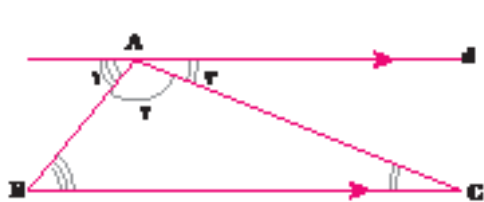


با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلی دلخواه مانند  $\triangle ABC$  را در نظر می گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس  $A$  خط  $d$  را موازی  $BC$  رسم می کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس  $A$  را با

شماره های ۱، ۲ و ۳ نشان داده ایم که زاویه  $\hat{A}_2$  همان زاویه  $A$  در مثلث است و با در نظر گرفتن  $AB$  به عنوان مورب داریم  $\hat{B} = \hat{A}_1$  و با در نظر گرفتن  $AC$  به عنوان مورب داریم  $\hat{C} = \hat{A}_3$  پس با جای گذاری  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$  خواهیم داشت : استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال های این دانش آموزان بحث کنید.

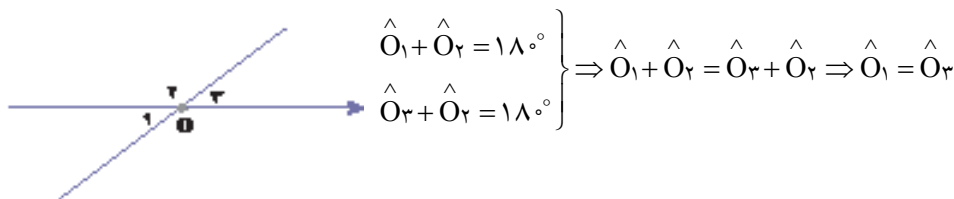
## فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟

مسئله : نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابر است.

فرض کنیم  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_3$  مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



### تمرین

۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل

بیاورید.

مسئله : در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع

اندازه های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات : مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.

می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است و زوایای

$\hat{A}_1$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  هر کدام  $60^\circ$  است، بنابراین

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

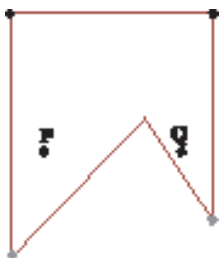
۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را

می توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون

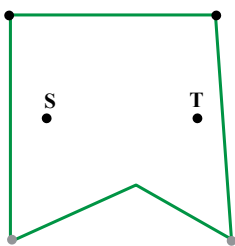
آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که

محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های

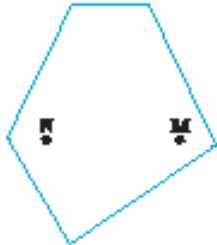
زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد.



مهديه : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد.

۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی متوازی الاضلاع است.} \end{cases}$  ABCD مستطیل است.

(ب)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{cases}$  همه ضلع های ABCD، با هم برابر نیستند.

(ج)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع ها برابر نیستند.} \end{cases}$  ABCD مربع نیست.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط عمود می شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.