بسمه‌تعالی

پاسخ‌نامه آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۸/۲۱

رشته‌های فنی و مهندسی
گروه‌های ۹ و ۱۷

---

۱. همه‌ی نقاطی از $z \in \mathbb{C}$ را بیابید که در معادله‌ی

$$\left(\frac{1}{z} - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{6}) - \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})} - 5\mathrm{i}$$

صدق می‌کنند. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ: از آنجا که

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{6}) - \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})} - 5\mathrm{i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}) - 5\mathrm{i} = -4\mathrm{i} = 4\left[\cos(\frac{3\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{2})\right]$$

است بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} - 1 &= \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{2}\right)\right]; \qquad k = 0, 1 \\ &= \begin{cases} 2\left[\cos(\frac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{4})\right] = \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}) \\ 2\left[\cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4})\right] = \sqrt{2}(1 - \mathrm{i}) \end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه بنابراین پاسخ‌های معادله عبارتند از $z = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ و $z = \frac{2 - \mathrm{i}}{5\sqrt{2}}$.

---

۲. فرض کنید $x_1 = 2$ بوده و به‌ازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم:

$$x_{n+1} = 1 + \ln(x_n)$$

ابتدا ثابت کنید که دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست و سپس مقدار حد آن‌را بیابید. (۱ نمره)

پاسخ: ابتدا با استفاده از استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{x_n\}$ نزولی است. بوضوح

$$x_2 = 1 + \ln(2) < 2 = x_1$$

است. حال اگر $x_k < x_{k-1}$ باشد آن‌گاه چون تابع $\ln x$ صعودی است بنابراین $\ln(x_k) < \ln(x_{k-1})$ خواهد بود و بنابراین داریم:

$$x_{k+1} = 1 + \ln(x_k) < 1 + \ln(x_{k-1}) = x_k$$

حال با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{x_n\}$ از پایین کراندار است. بوضوح $x_1 = 2 > 1$. حال اگر $x_k > 1$ باشد آن‌گاه با توجه به صعودی بودن تابع $\ln x$ خواهیم داشت $\ln(x_k) > \ln 1 = 0$ که از آن $x_{k+1} = 1 + \ln(x_k) > 1$ را نتیجه می‌گیریم. بنابراین چون دنباله‌ی $\{x_n\}$ نزولی و از پایین کراندار است بنابراین همگراست. قرار می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$، که از آن $L = 1 + \ln(L)$ و بنابراین $L = 1$ به‌دست می آید.

۳. مقدار حد زیر را محاسبه کنید. (۱ نمره)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)^{x^۲}$$

پاسخ: این حد از حالات ابهام ۱^∞ است و چون $\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)>۰$ است بنابراین قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)^{x^۲}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^{\ln\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)^{x^۲}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^{x^۲\ln\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}e^{\frac{\ln\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)}{x^{-۲}}}$$

به سهولت می‌توان دید که حد $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)}{x^{-۲}}$ از ابهامات $\frac{۰}{۰}$ برخوردار است و با بکارگیری قضیه‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\ln\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)}{x^{-۲}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-\frac{۱}{x^۲}\tanh(\frac{۱}{x})}{-۲x^{-۳}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\tanh(\frac{۱}{x})}{۲x^{-۱}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\tanh(\frac{۱}{x})}{۲x^{-۱}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\cosh\left(\frac{۱}{x}\right)\right)^{x^۲}=\sqrt{e}$$

---

۴. نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را با بیان دلیل تعیین کنید. (۱ نمره)

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x\in\mathbb{Q}\\ x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم تابع f در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۳}$ پیوسته است. در واقع نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}}f(x)=f(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\qquad(۱)$$

به عبارت دیگر

$$\forall\varepsilon>۰,\quad\exists\delta>۰;\quad\left|x-\frac{۱}{۳}\right|<\delta\ \longrightarrow\ \left|f(x)-\frac{۱}{۳}\right|<\varepsilon\qquad(۲)$$

اگر $x\in\mathbb{Q}$ آن‌گاه داریم:

$$\left|f(x)-\frac{۱}{۳}\right|=\left|۱-۲x-\frac{۱}{۳}\right|=۲\left|x-\frac{۱}{۳}\right|<\varepsilon$$

بنابراین در این حالت با انتخاب $\delta_۱=\frac{\varepsilon}{۲}$ استدلال (۲) برقرار است. اگر $x\notin\mathbb{Q}$ آن‌گاه داریم:

$$\left|f(x)-\frac{۱}{۳}\right|=\left|x-\frac{۱}{۳}\right|<\varepsilon$$

بنابراین در این حالت با انتخاب $\delta_۲=\varepsilon$ استدلال (۲) برقرار است. درحالت کلی با انتخاب $\delta=\min\{\delta_۱,\delta_۲\}=\frac{\varepsilon}{۲}$ رابطه‌ی (۱) برقرار است و تابع f در نقطه‌ی $\frac{۱}{۳}$ پیوسته است. حال نشان

می‌دهیم که تابع f روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$ ناپیوسته است. فرض کنید $x_۰\in\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$ دلخواه باشد. گیریم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا و $\{y_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گنگ باشد که هر دو به $x_۰$ همگرا هستند. در این‌صورت داریم:

$$۱-۲x_۰=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=x_۰$$

که نتیجه می‌دهد $x_۰=\frac{۱}{۳}$ و این یک تناقض است پس فرض خلف باطل است و f روی $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$ پیوسته نیست.

---

۵. فرض کنید دو تابع مشتق‌پذیر f و g از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ داده شده باشند که f وارون‌پذیر با تابع وارون $f^{-۱}$ دوبار مشتق‌پذیر است. اگر به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$(f^{-۱}\circ g)(x)=xg(x)$$

الف) اگر $b=g(a)$ باشد آن‌گاه $(f^{-۱})''(b)$ را محاسبه کنید. (۰/۷۵ نمره)

ب) اگر g دارای نمایش پارامتری $\begin{cases} x=۲e^t-e^{-t} \\ y=۲e^{-t}+e^t \end{cases}$ باشد که $y=g(x)$ و $-\infty<t<\infty$ مطلوبست محاسبه‌ی $(f^{-۱})''(۲)$. (۰/۷۵ نمره)

پاسخ: الف) با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق داریم:

$$g'(x)(f^{-۱})'(g(x))=g(x)+xg'(x)\quad\longrightarrow\quad(f^{-۱})'(g(x))=\frac{g(x)}{g'(x)}+x$$

بار دیگر از طرفین رابطه‌ی بالا برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)(f^{-۱})''(g(x))=\frac{(g'(x))^۲-g(x)g''(x)}{(g'(x))^۲}+۱$$

که رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$(f^{-۱})''(g(x)))=\frac{۲(g'(x))^۲-g(x)g''(x)}{(g'(x))^۳} \tag{۳}$$

با قرار دادن $b=g(a)$ در رابطه‌ی بالا داریم:

$$(f^{-۱})''(b)=\frac{۲(g'(a))^۲-bg''(a)}{(g'(a))^۳} \tag{۴}$$

ب) طبق رابطه‌ی (۳) پیداست که ابتدا باید $g'(x)$ و $g''(x)$ را در نمایش پارامتری بیابیم:

$$g'(x)=\frac{dg}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-۲e^{-t}+e^t}{۲e^t+e^{-t}}$$

$$g''(x)=\frac{d^۲g}{dx^۲}=\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^۳}=\frac{۱۰}{(۲e^t+e^{-t})^۳}$$

حال چون در تابع g نقطه‌ی $b=۲$ به‌ازای $t=۰$ و در نتیجه $x=۱$ اتفاق می‌افتد بنابراین $g'(۱)=-\frac{۱}{۳}$ و $g''(۱)=\frac{۱۰}{۲۷}$ بوده و با استفاده از رابطه‌ی (۵) در نقطه‌ی $g(۱)=۲$ داریم:

$$(f^{-۱})''(۲)=\frac{۲(g'(۱))^۲-۲g''(۱)}{(g'(۱))^۳}=-۱۴ \tag{۵}$$

۶. نشان دهید معادله‌ی $\cos(\arctan x) = ۲x$ در بازه‌ی $(۰, ۱)$ فقط یک ریشه دارد. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ: تابع $f(x) = \cos(\arctan x) - ۲x$ بر $[۰, ۱]$ پیوسته است و داریم:

$$f(۰) = \cos(\arctan ۰) - ۰ = ۱ - ۰ = ۱ > ۰$$
$$f(۱) = \cos(\arctan ۱) - ۲(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\pi}{۲} < ۰$$

پس $f(۰)f(۱) < ۰$ بوده و طبق قضیه‌ی بولتزانو تابع f حداقل یک ریشه $c \in (۰, ۱)$ دارد. حال نشان می‌دهیم این ریشه یکتاست. فرض کنید چنین نباشد و f ریشه‌ی دیگری مانند $c' \in (۰, ۱)$ داشته باشد. (بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $c < c'$) بوضوح تابع f بر $(۰, ۱)$ مشتق‌پذیر است و $f(c) = f(c') = ۰$ پس طبق قضیه‌ی رل $\lambda \in (c, c')$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(\lambda) = ۰$. در نتیجه

$$-\frac{۱}{۱ + \lambda^۲} \sin(\arctan \lambda) - ۲ = ۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{۱}{۱ + \lambda^۲} \sin(\arctan \lambda) = -۲ \qquad (۶)$$

چون $\left|\frac{۱}{۱ + \lambda^۲}\right| \leq ۱$ و $|\sin(\arctan \lambda)| \leq ۱$ بنابراین تساوی (۶) به‌ازای هیچ مقداری از λ صحیح نیست و در نتیجه فرض خلف باطل است و ریشه‌ی f یکتاست.

---

۷. فرض کنید برای $۰ < a < ۱$ تابع پوشای $f : [۰, a] \to [۰, a]$ بر $[۰, a]$ پیوسته و بر $(۰, a)$ مشتق‌پذیر بوده و $f(۰) = f(a) = ۰$. ثابت کنید $x_۱, x_۲ \in (۰, a)$ متمایز وجود دارند به‌طوری‌که داریم:

$$\frac{۱}{f'(x_۱)} - \frac{۱}{f'(x_۲)} = \frac{۱}{a}$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید $c \in (۰, a)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(c) = a^۲$. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ: چون $۰ < a < ۱$ است بنابراین $۰ < a^۲ < a$ بوده و چون تابع f پوشاست پس $c \in (۰, a)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(c) = a^۲$. تابع f در بازه‌های $[۰, c]$ و $[c, a]$ پیوسته و در بازه‌های $(۰, c)$ و (c, a) مشتق‌پذیر است در نتیجه طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists\ x_۱ \in (۰, c) \qquad f'(x_۱) = \frac{f(c) - f(۰)}{c - ۰} = \frac{a^۲}{c}$$
$$\exists\ x_۲ \in (c, a) \qquad f'(x_۲) = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} = \frac{-a^۲}{a - c}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{f'(x_۱)} - \frac{۱}{f'(x_۲)} = \frac{c}{a^۲} - \frac{c - a}{a^۲} = \frac{a}{a^۲} = \frac{۱}{a}$$

موفق باشید.

استاد درس: دکتر بخشنده