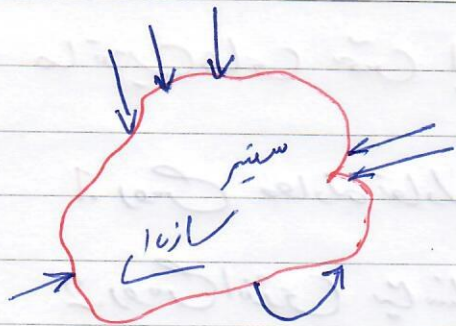




تنش {
دافعی
انواع بار

* تنش باید شدت نیرو در واحد سطح است

$$U = \frac{dU}{d\epsilon} = \epsilon \kappa$$

$$\epsilon \kappa \cdot E = \delta \kappa$$

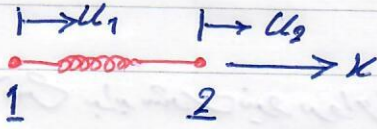
* مقیاس میان تنش و تغییر شکل باشد تا بتوانیم کرنش و تنش را بدست آوریم

برس {
تنش هماس
یادرس
موسس

لتر حشر
تنش
عمودی

ماتریس‌های سختی المان‌های قندروسه:

1. روش معادله تعادل



2. روش انرژی پتانسیل

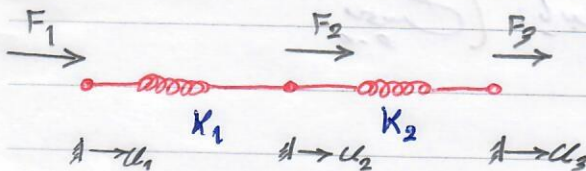
3. قضیه کاستیلیانو

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$K \cdot u = F$$

* قریب سیستم دو درجه آزادی است که ماتریس آن یک ماتریس سختی 2×2 است

مسئله: ماتریس سختی برای سیستم را بنویسید



1 اول، $\begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix}$ $u_1^1 \rightarrow u_2^1 \rightarrow$

2 و 4، $\begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}$ $u_1^2 \rightarrow u_2^2 \rightarrow$

حل اول

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

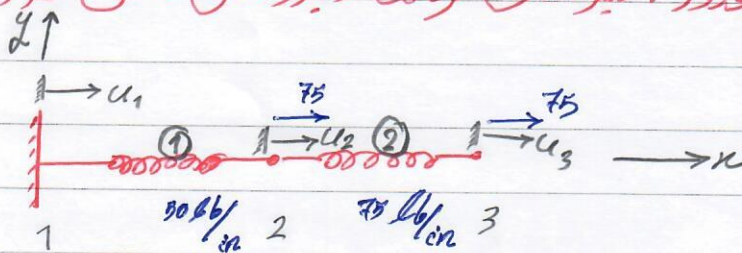
حل اول

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

* بازه ای که فایدا را است و ماتریس معکوس ندارد

مثال: باروس اجزا می رود، تغییر مکان کرده ها و نیروهای داخلی قی را بیابید.



از معادله

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

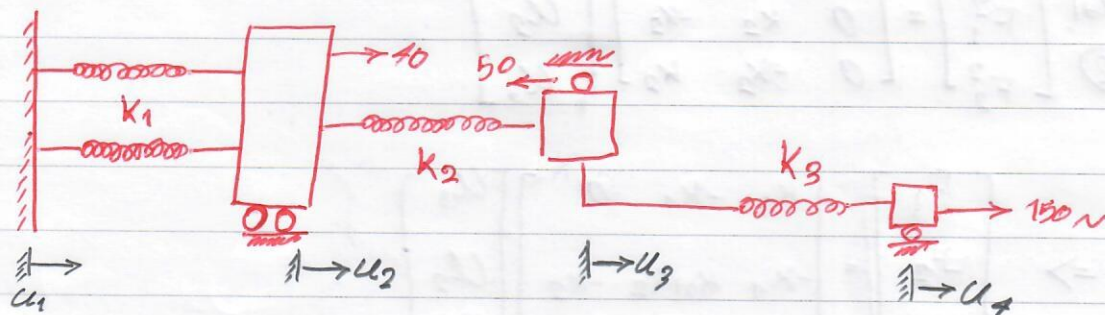
ماتریس

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

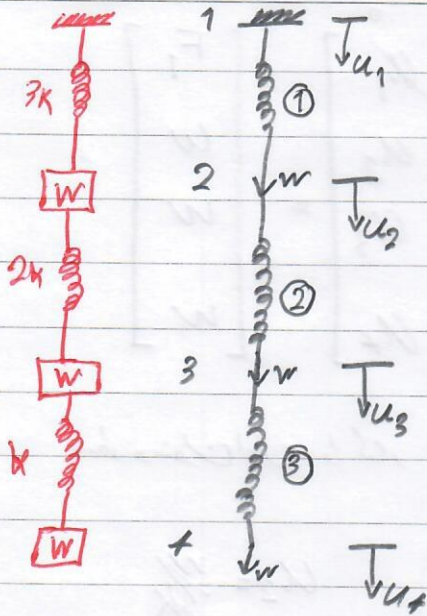
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 125 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \end{bmatrix} \Rightarrow U_2 = 3, U_3 = 4$$

تکانه : $K_1 u_1 - K_1 u_2 = F_1 \Rightarrow K_1 \times 0 - 50 \times 3 = -150 = F_1$

مسئله : با دو سیستم اجزای محدود و تغییر مکان کرده ها را بیابید ؟



مثال ۵: مقدار جابجایی هر قله را محاسبه کنید:



$$1: \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix}$$

$$2: \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$$

$$3: \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \end{bmatrix}$$

ماتریسها

$$\begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 5K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 3K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ W \\ W \\ W \end{bmatrix}$$

سطروشن اول را کم، می‌توانیم و از K فاکتور می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ W \\ W \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} u_2 &= W/K \\ u_3 &= W/K \\ u_4 &= W/K \end{aligned}$$

ایمان میله الاستیک: این به رصارت الاستیک و نیروهای آن در راستای محوری هستند و سازه آن تمام ایمان ها الاستیک و فقط نیروی محوری دارند مشابه خرما



* برای حل کلیه میله های الاستیک، می‌توانیم معادله دیفرانسیل بنویسیم و از آن تغییر مکان و از تغییر مکان تغییر کرنش و از آن تغییر تنش را می‌توانیم

B.C

$$\begin{cases} u(0) = u_1 \\ u(L) = u_2 \end{cases}$$

تغییر میله: u

تغییر مکان: K

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

$$u_1(0) = \alpha_0 + \alpha_0(0) = \alpha_0 = u_1$$

$$u_2(L) = \alpha_0 + \alpha_0(L) = \frac{u_2 - u_1}{L} = \alpha_1$$

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

$$\sum_{i=1}^N N_i(x) u = u(x)$$

$$\text{فرماتر: } u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

ماتریس
بزرگتر
کوچکتر

$$E \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

ماتریس

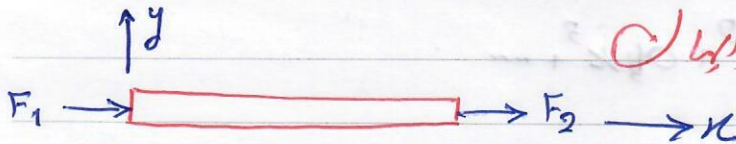
B

$$\text{فرماتر: } u(x) = N \cdot u$$

$$\text{فرماتر: } E(x) = B \cdot u$$

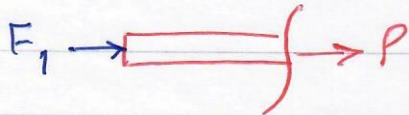
$$\text{فرماتر: } \sigma(x) = \Sigma \cdot B \cdot u$$

$$\text{فرماتر: } E \cdot A \cdot B \cdot u = P(x)$$



نوشتن رابطه مقادیر در اینجا

$$\sum F(x) = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = -F_1$$



$$\sum F(x) = 0 \Rightarrow F_1 = -P$$

$$P = EABU = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_1 = -EA \frac{u_2 - u_1}{L} \\ F_2 = EA \frac{u_2 - u_1}{L} \end{cases}$$

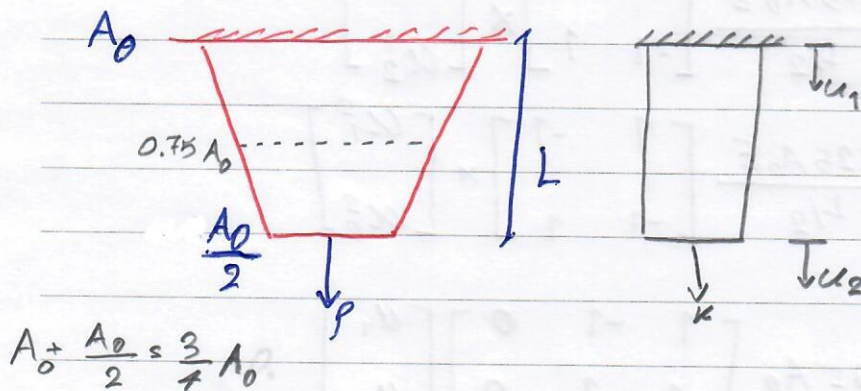
$$\begin{cases} F_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2 \\ F_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$F = K \cdot U$$

ماتریس سفتی

$$K = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} = EA/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = EA/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



$$A_0 + \frac{A_0}{2} = \frac{3}{2} A_0$$

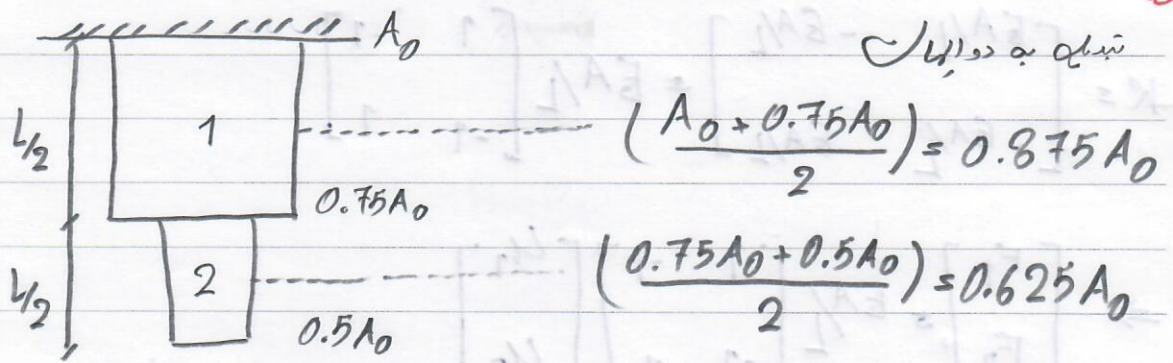
$$\begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix} = \frac{0.75 EA_0}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$$

تبدیل
به u_1, u_2

با اعمال شرایط مرزی $\Rightarrow [P] = \frac{0.75 EA_0}{L} [1] [u_2]$

$$\Rightarrow P = \frac{0.75 EA_0}{L} \times u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{4 PL}{3 EA_0} = 1.33 \frac{PL}{EA_0}$$





$$\textcircled{1}: \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix} = \frac{0.875A_0 E}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2}: \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \frac{0.625A_0 E}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1}: \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1.75 E A_0}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2}: \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \frac{1.25 E A_0}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{نظام} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} = \frac{E A_0}{L} \begin{bmatrix} 1.75 & -1.75 & 0 \\ -1.75 & 3 & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{4 PL}{7 E A_0}$$

$$u_3 = \frac{48 PL}{37 E A_0}$$

* روش های انرژی و قضیه کاستیلیانو - اصل انرژی پتانسیل کلی

قضیه کاستیلیانو:

انرژی
کلی

$$U_e(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

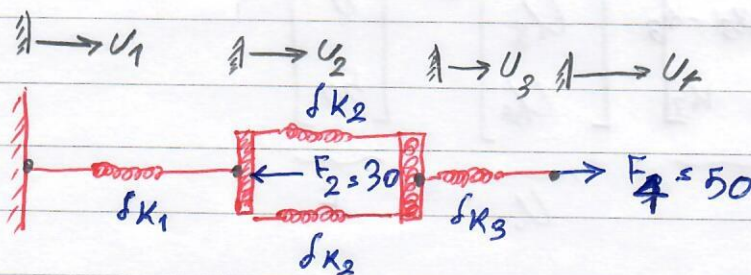
تغییر مکان ها

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_i} = P_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_e}{\partial u_1} = P_1 \\ \frac{\partial U_e}{\partial u_2} = P_2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

نیرو در راستای
تغییرات مورد نظر = مشتق انرژی کُرنش
نسبت به تغییر مکان

$U_e = W_{ext}$



(داده)

$$k_1 = 4 \text{ N/m}$$

$$k_2 = 6 \text{ N/m}$$

$$k_3 = 3 \text{ N/m}$$

انرژی کُرنش
متراس

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta^2 = \frac{1}{2} k (y^2 - y_1^2)$$

تغییرات

$$U_e = \frac{1}{2} k_1 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times k_2 (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_4 - u_3)^2$$

$$F_1 = \frac{\partial U_e}{\partial u_1} = K_1 (u_1 - u_2) = F_1$$

$$F_2 = \frac{\partial U_e}{\partial u_2} = -K_1 u_1 + (K_1 + 2K_2) u_2 - 2K_2 u_3 = -30$$

$$F_3 = \frac{\partial U_e}{\partial u_3} = -2K_2 u_2 + 2(K_2 + K_3) u_3 - K_3 u_4 = 0$$

$$F_4 = \frac{\partial U_e}{\partial u_4} = -K_3 u_3 + K_3 u_4 = 50$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -2K_2 & 0 \\ 0 & -2K_2 & 2K_2 + 2K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ -30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}}_F$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$u_2 = 5 \text{ mm}$
 $u_3 = 9.17 \text{ mm}$
 $u_4 = 25.83 \text{ mm}$
 $F_1 = -20$

97/8/2

13 * نمونه ابتدا معادلات را تشکیل داده و سپس سراسیمه سازی
را اعمال می‌کنیم و بعد از آن جواب می‌گیریم
اصل انرژی پتانسیل کل صاف می‌شود

$$\Pi = U_e + U_F$$

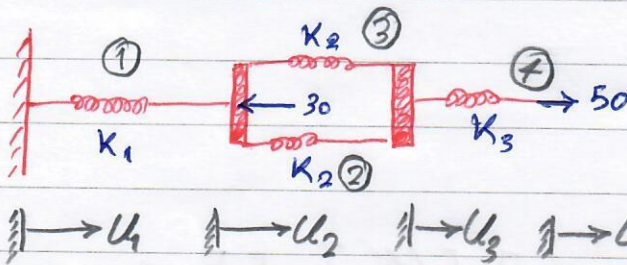
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_i} > 0$$

انرژی پتانسیل کل

انرژی پتانسیل کرنش

انرژی پتانسیل
ناشی از کار نیروها



(20)

$$\begin{aligned} K_1 &= 4 \\ K_2 &= 6 \text{ N/m} \\ K_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\Pi = U_e + U_F$$

$$\Rightarrow \Pi = U_e - W_F$$

انرژی کرنش داخلی

انرژی پتانسیل
ناشی از نیروهای
خارجی $-W = \sum \text{کار نیروها}$

$$U_e = \frac{1}{2} K \Delta^2$$

$$U_e = \frac{1}{2} K_1 (u_2 - u_1)^2 + 2 \times \frac{1}{2} K_2 (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (u_4 - u_3)^2$$

$$W_F = F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_3 u_3 + F_4 u_4$$

حال از Π نسبت به u_i ها مشتق می‌گیریم.



$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow K_1(u_1 - u_2) - F_1 = 0$$

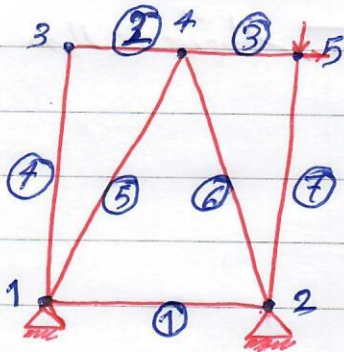
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -2K_2 & 0 \\ 0 & -2K_2 & 2K_2 + 2K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

سازه خرابی :



* پس در یک سازه خرابی به نیروی اعضا محدودی است

و از این رو می‌توان به سازه‌ها آسیب رساند

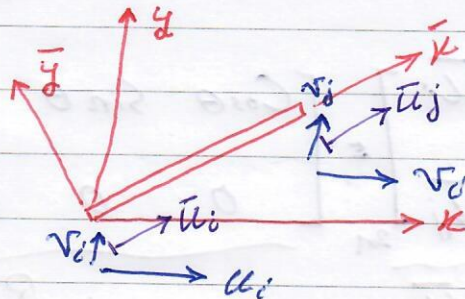
* اما در عضو به نسبت نیرو و همچنین به جایگاهها

مقاومت است

* پس لازم است که در نیروها و جایگاهها از محورهای اصلی هر گره به

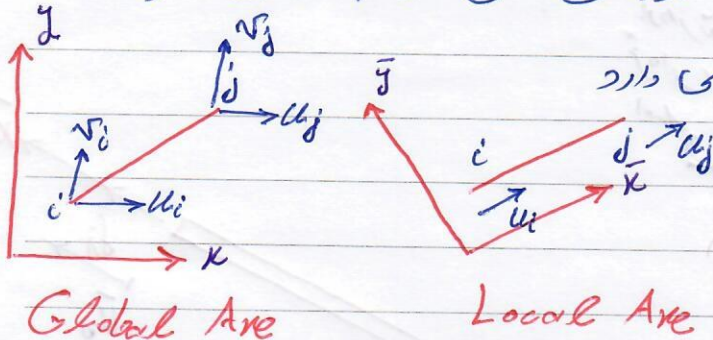
دستگاه‌های اصلی تبدیل شود

{ Local Axe $\bar{x}, \bar{y}$
Global Axe x, y



* اینان می‌تواند در دستگاه‌های محوری اصلی دو درجه آزادی و در دستگاه

محورهای اصلی چهار درجه آزادی دارد

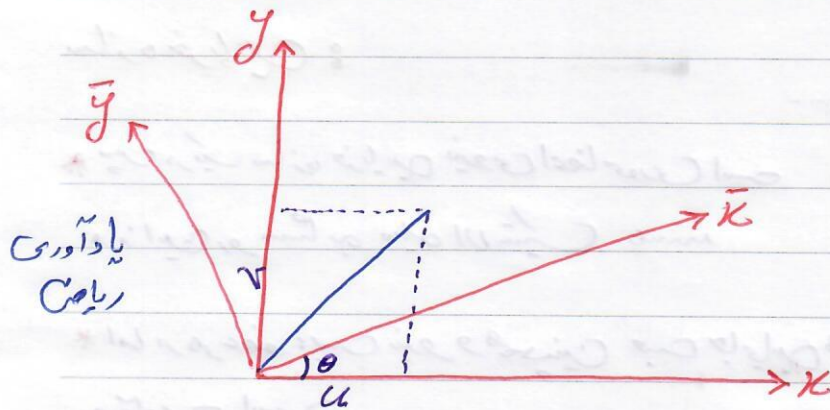


Global Axe

Local Axe

* پس در محورها اصلی هر گره یک درجه آزادی و محورها اصلی دو درجه

آزادی دارد.



دوران مختصات:

$$\bar{U} = U \cos \theta + V \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} \bar{U}_i = U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ \bar{U}_j = U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

$\bar{U}$ R U

$$\Rightarrow \boxed{\bar{U} = R U}$$

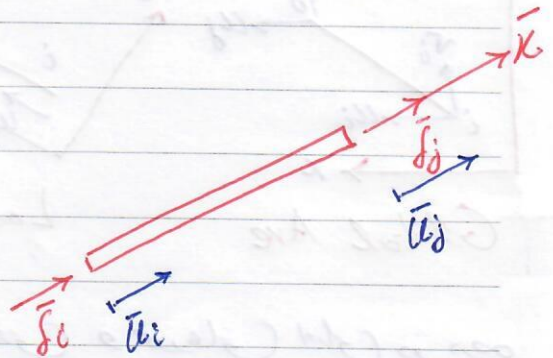
بدون تغییر مکان
نقطه‌ای در دستگاه
مکانی

بدون تغییر مکان
نقطه‌ای در دستگاه
اصولی

$$\bar{f} = \bar{K} \cdot \bar{U}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{bmatrix}$$

$$\bar{f} = \bar{K} \cdot \bar{U}$$



$\bar{f}^e = \bar{k}^e \cdot \bar{u}^e$
 element $\bar{u}^e = R^e \cdot u^e \Rightarrow \bar{f}^e = \bar{k}^e \cdot R^e \cdot u^e$

$\xrightarrow{\times R^{eT}} R^{eT} \cdot \bar{f}^e = R^{eT} \cdot \bar{k}^e \cdot R^e \cdot u^e$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R^{eT} & \times & \bar{f}^e & = & R^{eT} & \times & \bar{k}^e & \times & R^e & \times & u^e \\ 4 \times 2 & & 2 \times 1 & & 4 \times 2 & & 2 \times 2 & & 2 \times 4 & & 4 \times 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_j^x \\ f_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_i \cos\theta \\ \bar{f}_i \sin\theta \\ \bar{f}_j \cos\theta \\ \bar{f}_j \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^{eT} \cdot \bar{f}^e = f^e \\ K^e = R^{eT} \cdot \bar{k}^e \cdot R^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u} = R \cdot u \\ f = R^T \cdot \bar{f} \\ K = R^T \cdot \bar{k} \cdot R \end{cases}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

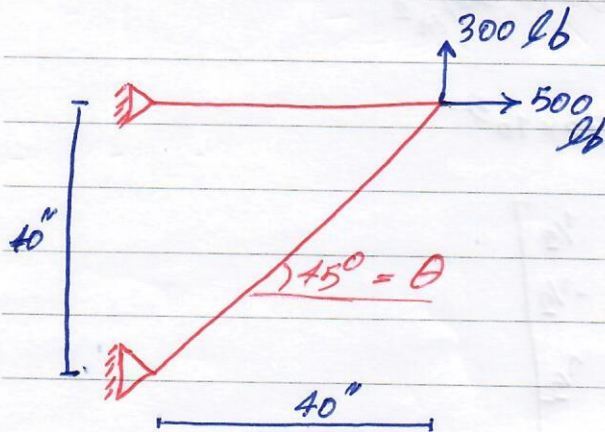
4x4

* ماتریس سختی ایلمان‌های الاستیک همواره مقارن هستند و مربعی اند که تعداد درایه‌های ردیف آن برابر تعداد درجه آزادی ایلمان هستند

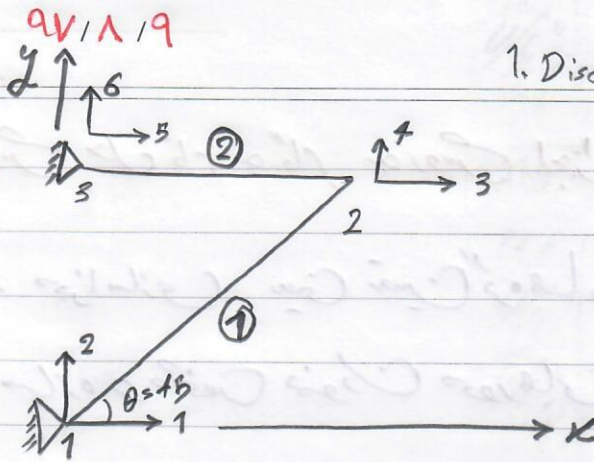
$$\frac{N}{m} \left\{ \begin{array}{l} \bar{k} : \text{ایلمان محلی} \\ k : \text{ایلمان اصلی} \\ K : \text{سازه اصلی} \end{array} \right.$$

روش حل گام به گام به روش اجزاء محدود:

1. مجزاسازی یعنی تقسیم گره ها و ایدمان ها و درجای آزادی سازه و مشخص نمودن محورهای اصلی کل سازه
2. تعیین ماتریس سختی کلیه اعضا در دستگاه محورهای اصلی
3. نوشتن گره ماتریس سختی کل سازه و همچنین تعیین بردار نیروهای گره ای و بردار تغییرات های گره ای سازه
 $\begin{matrix} F \\ K \\ u \end{matrix}$
4. حل معادله اصلی حاکم بر سازه یعنی $f = K u$ و تعیین تغییرات های گره ای سازه (بردار u) با در نظر گرفتن شرایط مرزی
5. تعیین نیروهای تکمیلی گره ها و نیروهای داخلی اعضا در صورت نیاز



$E = 10 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$
 $A = 1.5 \text{ in}^2$



* نحوه دسته بندی به سبب خاصه تریه ها
حتی تریه 1 و 3 نیز در درجه آزادی
دارند اما صفر بودن آن در شرایط
مرزی انجام می شود

* قرار داده

1. اعضای افقی تریه اول راست چپ و تریه دوم تریه سمت راست
معرفی شود.
2. برای اعضای مورب یا قائم تریه راست و تریه اول و تریه بالایی دوم
در نظر گرفته شود.
3. شماره امتداد محوری (محلی) از تریه ابتدا (1) به تریه استایه (2) است

2. نوشتن ماتریس سختی:

$$\textcircled{1}: EA/L = \frac{10 \times 10^6 \times 1.5}{56.57} = 2.65 \times 10^5 \text{ lb/in}^2$$

$$\textcircled{2}: EA/L = \frac{10 \times 10^6 \times 1.5}{40} = 3.75 \times 10^5$$

$$K^{\textcircled{1}} = 2.65 \times 10^5 \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

W/ 1/9

قصد داریم : $n \times (n+1)$ ماتریس

21

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & -3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.75 & 0 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^5$$

	1	2	3	4
①	1	2	3	4
②	5	6	3	4

3. ماتریس ما ترسیم

$$K_{12} = k_{12}^1 \quad K_{56} = k_{56}^2$$

$$K_{34} = k_{34}^1 + k_{34}^2$$

$$K_{22} = k_{22}^1$$

$$K_{33} = k_{33}^1 + k_{33}^2$$

$$K_{16} = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & 1.325 & 1.325 & 0 & 0 \\ & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ & & 5.075 & 1.325 & -3.75 & 0 \\ & & & 1.325 & 0 & 0 \\ & & & & 3.75 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{سختی و سفتی اول} \\ \text{و دو سفتی آخر} \\ \text{حذف می شود} \end{array}$$

شرایط مرزی $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 500 \\ 300 \end{bmatrix} = 10^5 \times \begin{bmatrix} 5.075 & 1.325 \\ 1.325 & 5.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = 5.33 \times 10^{-3} \text{ in}$$

$$U_4 = 1.731 \times 10^{-3} \text{ in}$$

توزیع فعل سفتی: 1 و 2 و 5 و 10

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{U} \quad \bar{U} = R \cdot u$$

← تبدیل به

$$\bar{F} = 2.65 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.33 \times 10^{-4} \\ 1.73 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = 2.65 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.33 \times 10^{-4} \\ 1.73 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -224 \\ 224 \end{Bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -200 \\ 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{در راستای} \\ 2^\circ \end{matrix}$$

$$u = N \cdot u \quad N = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot u$$

$$\frac{dN}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon(x) = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

نیروی دافعه

$$P = V \cdot A = E \cdot A \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^x \\ u_0^y \\ u_j^x \\ u_j^y \end{bmatrix}$$

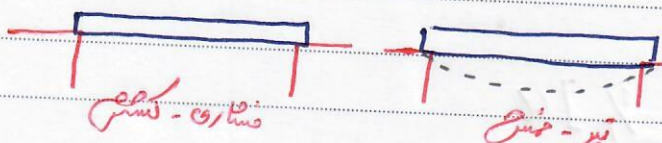
$$V = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^x \\ u_0^y \\ u_j^x \\ u_j^y \end{bmatrix}$$

$$P = E \cdot A \begin{bmatrix} -\frac{1}{56.57} & \frac{1}{56.57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.7 \times 10^{-4} \\ 1.73 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

فصل 4: ابران های خم

بارگذاری روی عضو میله ای که آن را دچار خم می کند اما روی قطر

باعث خم می شود



عیدی با سطح مقطع

و طبق مقطع اثر

مقدار بار میانی پیدا می شود

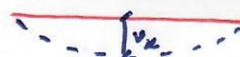
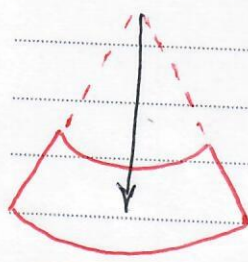
$$P = \text{مقدار ابعادی}$$

$$k = \frac{1}{p} \text{ (ابعادی)}$$

$$P = \frac{[1 + (\frac{dv}{dk})^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{d^2v}{dk^2}}$$

$$\frac{d^2v}{dk^2}$$

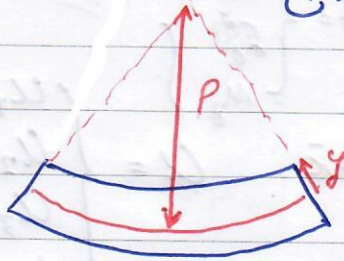
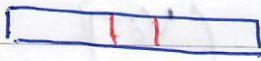
Arman



$$M_{(x)} = EI v''''_{(x)}$$

از مقادیر معاد

1. رفتار الاستیک خطی
2. تغییر شکل هندسی
3. معادلات بدون اعوجاج



صرف تغییر شکل

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}}{d^2v}{dx^2}$$

$$\epsilon = -y/\rho$$

سایه
تغییر شکل
از صورت اعوجاج

مکانی تغییر شکل

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}}$$

$$\Rightarrow \epsilon = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = -Ey \frac{d^2v}{dx^2}$$

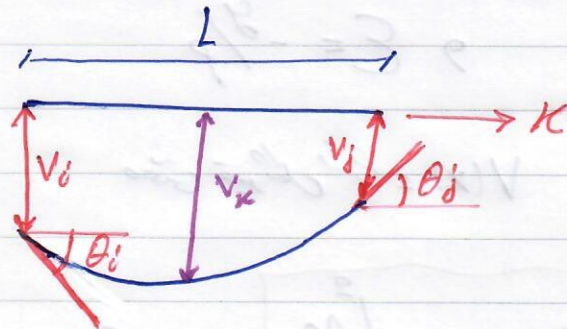
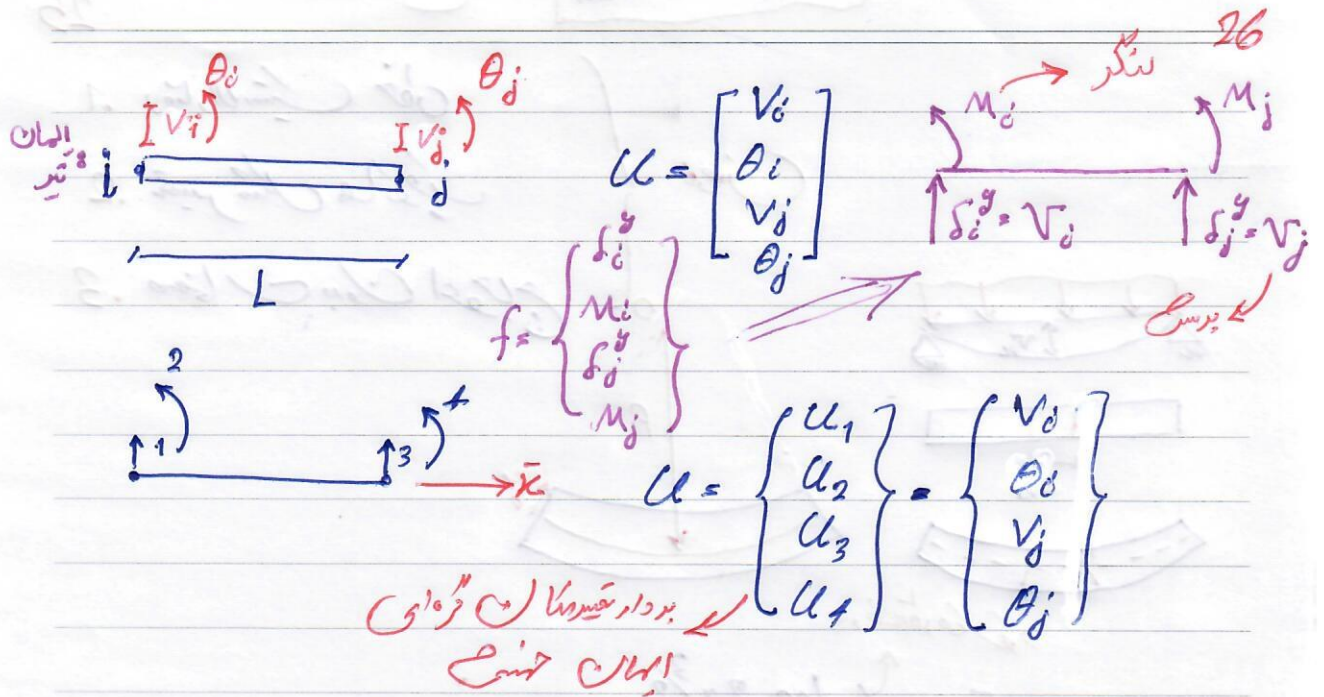
$$\Rightarrow \sigma = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow M_{(x)} = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{III}$$

* این اطلاعات بر اساس

مقاومت مصالح است

$$\sigma_x = \frac{M_{(x)} \cdot y}{I} = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{IV}$$



$$\begin{aligned}
 &K=0 \Rightarrow V(0) = V_i \\
 &K=L \Rightarrow V(L) = V_j \\
 &K=0 \Rightarrow \theta(0) = \frac{dV}{dK}(0) = \theta_i \\
 &K=L \Rightarrow \theta(L) = \frac{dV}{dK}(L) = \theta_j
 \end{aligned}$$

$$V'(K) = \alpha_1 + 2\alpha_2 K + 3\alpha_3 K^2$$

$$V(K) = \alpha_0 + \alpha_1 K + \alpha_2 K^2 + \alpha_3 K^3$$

$$V(0) = V_i \Rightarrow V_i = \alpha_0$$

$$V(L) = V_j \Rightarrow V_j = V_i + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3$$

$$V'(0) = \theta_i \Rightarrow \theta_i = \alpha_1$$

$$V'(L) = \theta_j \Rightarrow \theta_j = \theta_i + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2$$

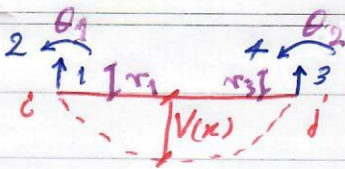
$$\Rightarrow \begin{cases} V_j = V_i + \theta_i L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 \\ \theta_j = \theta_i + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = V_i \\ \alpha_1 = \theta_i \\ \alpha_2 = \frac{3}{L^2} (V_j - V_i) - \frac{1}{L} (2\theta_i + \theta_j) \\ \alpha_3 = \frac{2}{L^3} (V_i - V_j) + \frac{1}{L^2} (\theta_i + \theta_j) \end{cases}$$

در معادله 1 جایگزینی کرده و نسبت به تغییر مکان ها فاکتور مرتب می‌کنیم

$$\Rightarrow V(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{3\kappa^2}{L^2} + \frac{2\kappa^3}{L^3}\right)}_{N_1(x)} \underline{V_i} + \underbrace{\left(\kappa - \frac{2\kappa^2}{L} + \frac{\kappa^3}{L^3}\right)}_{N_2(x)} \underline{\theta_i} \\ + \underbrace{\left(3\kappa^2/L^2 - 2\kappa^3/L^3\right)}_{N_3(x)} \underline{V_j} + \underbrace{\left(\kappa^3/L^2 - \kappa^2/L\right)}_{N_4(x)} \underline{\theta_j}$$



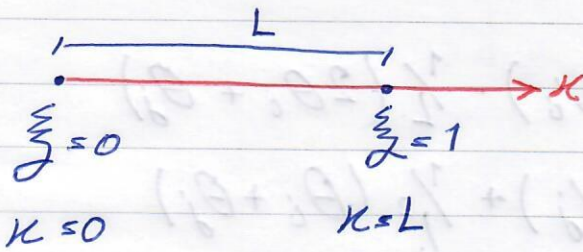


تابع درجه اول

$$V(x) = N \cdot u = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

تابع تغییر مکان
ماتریس تغییر شکل
بدون تغییر مکان نژادی (مان)

* در هر سیستم الاستیک خطی مستقیم
انرژی کرنش برابر است با تغییر انرژی
C به C است و قضیه کاستیلیانو



صور بدلت بعد از

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV$$

معادلات
قبل

$$\begin{cases} V(x) = N \cdot u \\ \epsilon(x) = -y \frac{d^2 u}{dx^2} \end{cases}$$

$$U_e = \frac{E}{2} \int_V y^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 \, dV$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{E}{2} \int y^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 \cdot dA \cdot dx$$

$$\sigma_k = E \cdot \epsilon = -E y \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2}^2 \, dx$$

مبدأ كاستليانو $\Rightarrow \frac{\partial U_e}{\partial u_i} = F_i$

$$U_e = \frac{EI}{2} \int \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial U_e}{\partial v_1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right)^2 dx \right) \\ M_1 &= \frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} \\ F_2 &= \frac{\partial U_e}{\partial v_2} \\ M_2 &= \frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} \end{aligned} \right.$$

$$F_1 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx$$

$$M_1 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx$$

$$F_2 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx$$

$$M_2 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx$$

$$F_1 = \int \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot dk \cdot \nu_1 + \int \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot dk \cdot \theta_1$$

$$+ \int \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_3}{dk^2} \cdot \nu_2 + \int \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_4}{dk^2} \cdot \theta_2$$

$$M_1 = \int \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_1}{dk^2} \cdot \nu_1 + \int \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot \theta_1$$

$$+ \int \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_3}{dk^2} \cdot \nu_2 + \int \frac{d^2 N_2}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_4}{dk^2} \cdot \theta_2$$

$$K_{ij} = EI \int_0^L \frac{d^2 N_i}{dk^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dk^2} \cdot dk$$

$$EI \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \theta_1 \\ \nu_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_0 \\ M_0 \\ \nu_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی اعضا

جابجایی
مخروطی
انحراف

نیروی
مخروطی
انحراف

$$dU|K = EI \left[\begin{array}{cc} \int_0^L \frac{d^2 N_1}{dk^2} \frac{d^2 N_1}{dk^2} dk & \int_0^L \frac{d^2 N_1}{dk^2} \frac{d^2 N_2}{dk^2} dk \\ \int_0^L \frac{d^2 N_2}{dk^2} \frac{d^2 N_1}{dk^2} dk & \int_0^L \frac{d^2 N_2}{dk^2} \frac{d^2 N_2}{dk^2} dk \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \int_0^L \frac{d^2 N_3}{dk^2} \frac{d^2 N_3}{dk^2} dk \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \int_0^L \frac{d^2 N_4}{dk^2} \frac{d^2 N_4}{dk^2} dk \end{array} \right] \quad 4 \times 4$$

$$\left[\begin{array}{l} N_1(k) = \left(1 - \frac{3k^2}{L^2} + \frac{2k^3}{L^3}\right) \\ N_2(k) = \left(k - 2\frac{k^2}{L} + \frac{k^3}{L^2}\right) \\ N_3(k) = \left(\frac{3k^2}{L^2} - \frac{2k^3}{L^3}\right) \\ N_4(k) = \left(\frac{k^3}{L^2} - \frac{k^2}{L}\right) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} N_1(k) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\ N_2(k) = (\xi L - 2\xi^2 L + \xi^3) \\ N_3(k) = (3\xi^2 - 2\xi^3) \\ N_4(k) = (\xi^3 L - \xi^2 L) \end{array} \right]$$

$$\frac{dN}{dk} = \frac{dN}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dk}$$

$$\xi = \frac{k}{L} \Rightarrow d\xi = \frac{dk}{L} \Rightarrow \frac{d\xi}{dk} = \frac{1}{L}$$

$$\rightarrow \frac{dN}{dk} = \frac{dN}{d\xi} \times \frac{1}{L}$$

مراحل بدست آوردن
مسله اول

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left(\frac{dN}{dk} \right) &= \frac{d}{dk} \left(\frac{dN}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dk} \right) = \frac{d}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dk} \left(\frac{dN}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dk} \right) \\ &= \frac{1}{L^2} \times \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dN}{d\xi} \right) = \frac{1}{L^2} \times \frac{d^2 N}{d\xi^2} \end{aligned}$$

مراحل به دست آوردن

$$k_{me} = EI \int_0^L \frac{d^2 N_m}{dk^2} \times \frac{d^2 N_n}{dk^2} \cdot dk = \frac{EI}{L^3} \int_0^L \frac{d^2 N_m}{d\xi^2} \times \frac{d^2 N_n}{d\xi^2} \cdot d\xi$$

تعیین درجه های ماتریس سختی از این جیب به حسب

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} &= -6\xi + 6\xi^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 N_1(\xi)}{d\xi^2} = -6 + 12\xi$$

$$\left. \begin{aligned} N_2(\xi) &= \xi L - 2\xi^2 L + \xi^3 \\ \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} &= L - 4\xi L + 3\xi^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 N_2(\xi)}{d\xi^2} = -4L + 6\xi$$

$$\Rightarrow k_{11} = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 (-6 + 12\xi)^2 d\xi = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow k_{21} = \frac{EI}{L^3} \int_0^1 (-6 + 12\xi)(-4L + 6\xi) \cdot d\xi = \frac{6EI}{L^3}$$

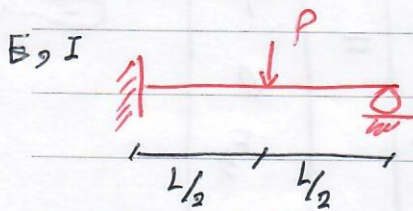
q, w, A, C

33

Local
 $\bar{K} = K =$

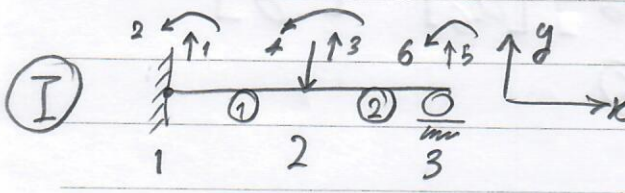
ایمانی مقدر

$$\begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ - & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ - & - & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ - & - & - & 4EI/l \end{bmatrix}$$



مثال 3

با اینک میدان مرکزهای 2 و 3 لنتر وجود ندارد اما طبق قانون اجزای محدود می‌بایست هم نیروی جبری و هم لنتر را اعمال کرد.



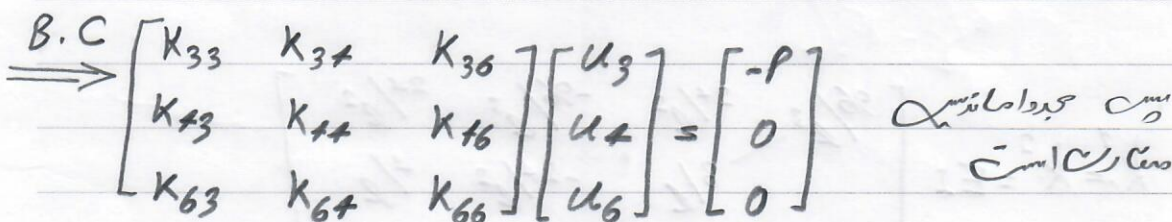
II = $K^1 = K^2 = EI$

$$\begin{bmatrix} 96/l^3 & 24/l^2 & -96/l^3 & 24/l^2 \\ & 8/l & -24/l^2 & 4/l \\ & & 96/l^3 & -48/l^2 \\ & & & 8/l \end{bmatrix}$$

Sym.

	1	2	3	4
①	1	2	3	4
②	3	4	5	6

نکته مهم: بهر است قبل از تعیین درایه های ماتریس سازه
مداخلات کلی نظام سازه نوشته شود و شرایط مرزی
بردشاه، مداخلات اصلی کرده و دشاه بنایم تعیین
شود؛ حال درایه های مورد نظر تعیین شود



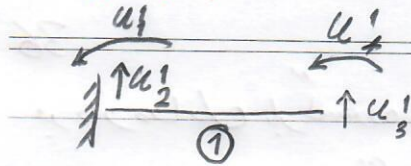
تغیر مکان در U_3 : $U_3 = \frac{-7PL^3}{768EI}$

$F_1 = K_{13}U_3 + K_{14}U_4 + K_{16}U_6 = 11 \frac{P}{16}$

$F_2 = K_{23}U_3 + K_{24}U_4 + K_{26}U_6 = 5 \frac{P}{16}$

$F_3 = K_{53}U_3 + K_{54}U_4 + K_{56}U_6 = 3 \frac{P}{16}$

9/9/97



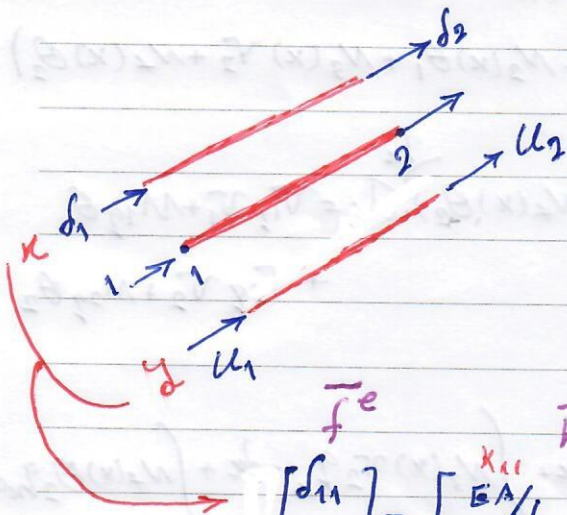
3B

$$\begin{Bmatrix} \bar{r}_i^1 \\ m_i^1 \\ \bar{r}_j^1 \\ m_j^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_1 = K_{13}u_3 + K_{14}u_4 \\ m_1 = K_{23}u_3 + K_{24}u_4 \end{cases} \quad K^1$$

نیروی و گشتاها
در نود 1
و نود 2

$$\begin{Bmatrix} m_i \\ \bar{r}_i \\ m_j \\ \bar{r}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \end{Bmatrix}$$

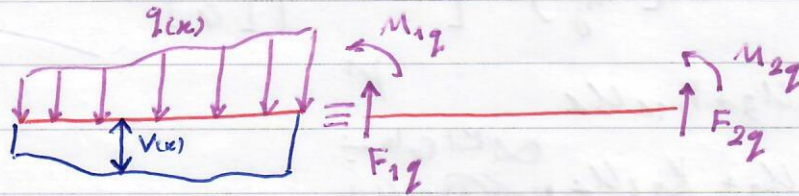


عنصر سفت

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

* نیرو در راستای نه زمان که تغییر مکان در راستای نه باشد و مشروط به ساید و ...
از ادبی مقید باشد باشد

بردار معادل بار گسترده: بین باید در نظر داشته باشیم که هیچ گاه نمی توان بار
(بدون بارگذاری معادل معادل) گسترده را با بار ی نقطه ای جایگزین کرد



$$\begin{Bmatrix} \int_0^l q(x) V(x) dx \\ M_{1q} \\ \int_0^l q(x) \theta(x) dx \\ M_{2q} \end{Bmatrix} = F_q^e$$

کار اغماز شده
نقطه بارگذاری
واحد

$$W = \int_0^l q(x) V(x) dx$$

F_q^e بردار معادل
بارگذاری نقطه ای
خارجی

$$W = \underbrace{V_1 q U_1}_{\text{کار اغماز شده}} + \underbrace{M_{1q} \theta_1}_{\text{جایگاه}} + \underbrace{V_2 q U_2}_{\text{مکان}} + \underbrace{M_{2q} \theta_2}_{\text{دوران}}$$

$$V(x) = N \cdot U = (N_1(x) V_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) V_2 + N_4(x) \theta_2)$$

باجایگذاری در انتگرال اولیه

$$\int_0^l (N_1(x) V_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) V_2 + N_4(x) \theta_2) \cdot q(x) dx = V_1 \int_0^l q(x) V_1 dx + M_{1q} \theta_1 + V_2 \int_0^l q(x) V_2 dx + M_{2q} \theta_2$$

$$\Rightarrow W = \int_0^l N_1(x) V_1 q(x) dx + \int_0^l N_2(x) \theta_1 q(x) dx + \int_0^l N_3(x) V_2 q(x) dx + \int_0^l N_4(x) \theta_2 q(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l q(x) N_1(x) dx V_1 + \int_0^l q(x) N_2(x) dx \theta_1 + \int_0^l q(x) N_3(x) dx V_2 + \int_0^l q(x) N_4(x) dx \theta_2$$

$$\Rightarrow V_1 q = \int_0^L q(x) N_1(x) dx$$

$$V_2 q = \int_0^L q(x) N_2(x) dx$$

$$M_1 q = \int_0^L q(x) N_2(x) dx$$

$$M_2 q = \int_0^L q(x) N_1(x) dx$$

روابط بردار

نیروهای قوا

معادله بردار

بارگذاری

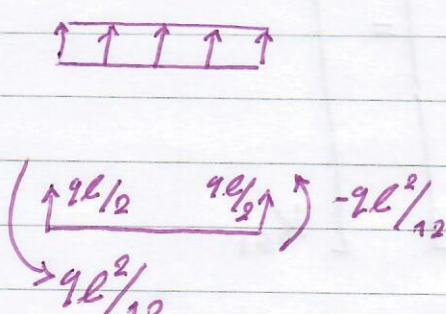
ایمان من

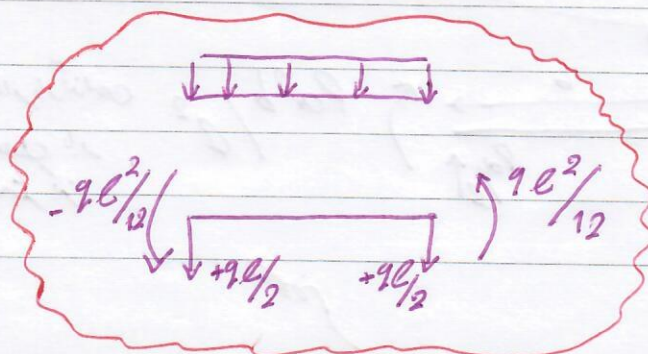
$$V_1 q = \int_0^L q \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) dx = \frac{qL}{2}$$

$$M_1 q = \int_0^L q \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx = \frac{qL^2}{12}$$

$$V_2 q = \int_0^L q \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) dx = \frac{qL}{2}$$

$$M_2 q = \int_0^L q \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) dx = -\frac{qL^2}{12}$$

$$\Rightarrow F_{eq} = \begin{cases} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{cases}$$


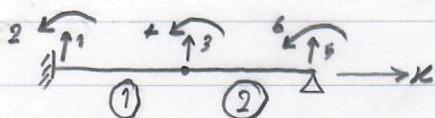


A diagram of a horizontal beam of length l . The left end is fixed to a wall, indicated by a vertical line with hatching. The right end is supported by a pin support, represented by a triangle. A uniformly distributed load is applied downwards along the entire length of the beam, shown as a series of downward-pointing arrows. The beam is labeled with l at the right end.

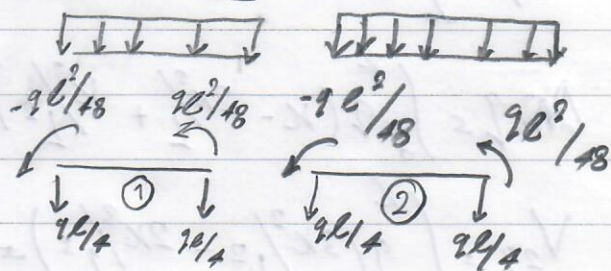


① $k^1 = k^2 = EI$

$96/L^3$ — $24L^2/2$ — —
 — $8/L$ — —
 — $5ym$ — —

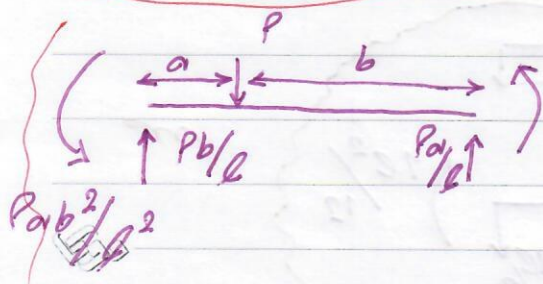


	1	2	3	4
(1)	1	2	3	4
(2)	3	4	5	6



$$\textcircled{\text{IV}} \begin{bmatrix} -2L/4 \\ -2L^2/48 \\ -2L/2 \\ 0 \\ -2L/4 \\ 2L^2/48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ & K_{16} & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

F

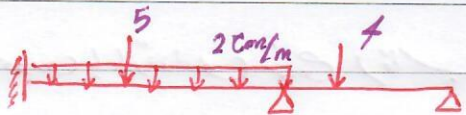


$\rho a^2 b / \rho^2$ بردار بارگذاری
 $s =$ معادله بار
 مستریکن

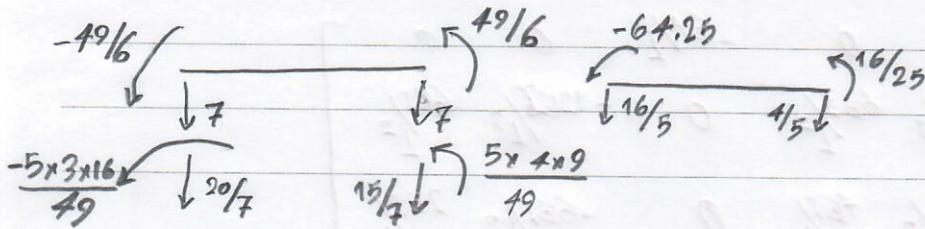
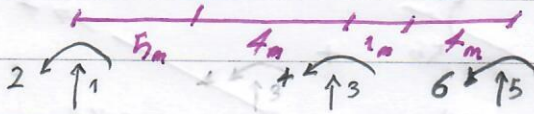
$$= \begin{cases} -\rho b / \rho \\ -\rho b^2 a / \rho^2 \\ -\rho a / \rho \\ \rho a^2 b / \rho^2 \end{cases}$$

9W/9/V

0938-772-9278 : 39



بارگذاری معلوم؟

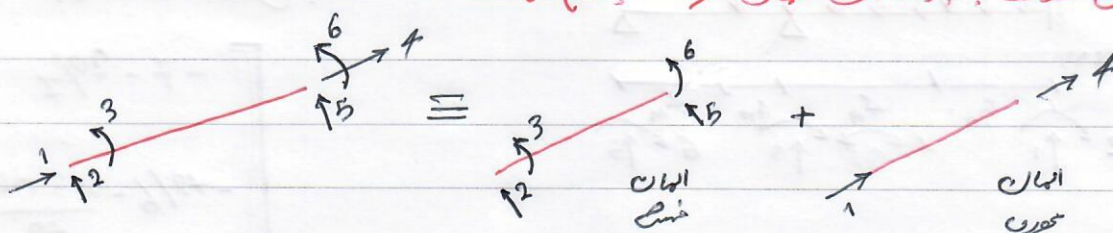


$$\begin{aligned} & -7 - \frac{20}{7} \\ & \hline & -\frac{49}{6} - \frac{5 \times 3 \times 16}{49} \\ & \hline & -7 - \frac{15}{7} - \frac{16}{5} \\ & \hline & \frac{49}{6} - \frac{64}{25} \\ & \hline & + \frac{5 \times 4 \times 9}{49} \\ & \hline & \frac{4}{5} \\ & \hline & \frac{16}{25} \end{aligned}$$

تیرین فصل : 4, 5, 8, 12, 16



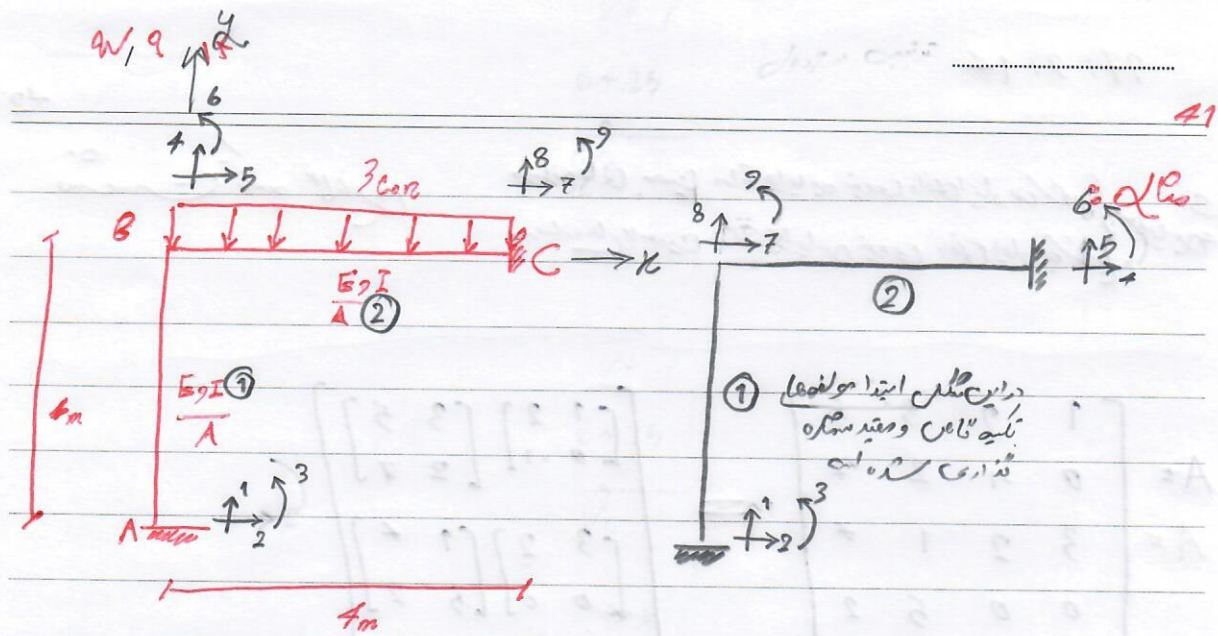
ایمان عمومی با بارگذاری خمی (مقاسم):



$$\bar{K} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$K = R^T \cdot \bar{K} \cdot R$$



* در این مثال ما به کمک رابطه‌های این دو می‌توانیم جواب را پیدا کنیم. K این دو را می‌توانیم به هم وصل کنیم. برای K اساسی

$$\begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{matrix}$$

9×9

	1	2	3	4	5	6
①	1	2	3	4	5	6
②	7	8	9	4	5	6

معمولاً به ترتیب - به ترتیب - به ترتیب

معمولاً به ترتیب - به ترتیب - به ترتیب $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} K_{77} & K_{78} & K_{79} \\ K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ K_{97} & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix}$$



$$y'' - 10x^2 - 5 = 0 \quad 0 \leq x < 1 \quad y(0) = y(1) = 0$$

روش گالری

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^n C_i N_i(x) + C_2 N_2(x) + \dots + C_n N_n(x)$$

پیش‌فرض
تابع

$$N(x) = (x-a)^p (x-b)^q$$

باید شرایط مرزی ارضا کند

برای حل سوال خود

$$y^*(x) = C_1 N_1(x) = C_1 (x-0)(x-1) \quad p=1, q=1$$

$$y(x) = C_1 (x)(x-1) \xrightarrow{DE} R(x) = 2C_1 - 10x^2 - 5$$

$$N_1(x) = x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 \underbrace{(2C_1 - 10x^2 - 5)}_{R(x)} \underbrace{x(x-1)}_{N_1(x)} dx = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow y(x) = 4x(x-1) = 4x^2 - 4x$$

حل سوال
فوق بصورت
دو جمله ای

$$y^*(x) = C_1 (x-0)(x-1) + C_2 (x-0)^2 (x-1)$$

شرایط مرزی ارضا شود
ارضا شده است

$$\Rightarrow y^*(x) = C_1 x(x-1) + C_2 x^2(x-1)$$

$$\Rightarrow y^*(x) = C_1 x^2 - C_1 x + C_2 x^3 - C_2 x^2$$

$$R(x) = ? \quad D[y^*(x), x] = R(x)$$

$$(y^*)' = 2C_1 x - C_1 + 3C_2 x^2 - 2C_2 x$$

$$(y^*)'' = 2C_1 + 6C_2 x - 2C_2$$

$$R(x) = 2C_1 + 6C_2x - 2C_2 - 10x^2 - 5$$

$$\int_0^1 (2C_1 + 6C_2x - 2C_2) \cdot N_1(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 (2C_1 + 6C_2x - 2C_2) \cdot N_2(x) dx = 0$$

الكرسي

$$\int_0^1 (2C_1 + 6C_2x - 2C_2 - 10x^2 - 5) \underbrace{(x(x-1))}_{N_1(x)} dx = 0$$

$$\int_0^1 (2C_1 + 6C_2x - 2C_2 - 10x^2 - 5) \underbrace{(x^2(x-1))}_{N_2(x)} dx = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 19/6 \quad C_2 = 5/3$$

معاملات

$$Y^* = \boxed{5/3x^3 + 3/2x^2 - 19/6x}$$

$$y'' - 10x^2 - 5 = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

$$y^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$$

حل مسائل قبل به فرمت مشابه

مشتق با تا مشتق

$$y^*(0) = C_0 \rightarrow C_0 = 0$$

$$y^*(1) = 0 + C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y^*(x) = C_1 x - C_1 x^2 = C_1 (x - x^2)$$

$N_1(x)$

$$y^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$y(0) = 0 = C_0 + 0 + 0 + 0 \rightarrow C_0 = 0$$

$$y(1) = 0 = 0 + C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow C_3 = -(C_1 + C_2)$$

$$y^*(x) = C_1 x + C_2 x^2 - (C_1 + C_2) x^3$$

$$y^*(x) = C_1 (x - x^3) + C_2 (x^2 - x^3)$$

$N_1(x)$

$N_2(x)$

$$R(x) =$$

$$\int R(x) \cdot (x - x^3) dx = 0$$

$$\int R(x) \cdot (x^2 - x^3) dx = 0$$

$\Rightarrow$

C_1, C_2, C_3

$$y'' + y' + 2x^2 = 0 \quad 0 < x < 1 \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 1$$

$$y^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$\begin{cases} 1 = C_0 + 0 + 0 + 0 & C_0 = 1 \\ 1 = 1 + C_1 + C_2 + C_3 & C_3 = -(C_1 + C_2) \end{cases}$$

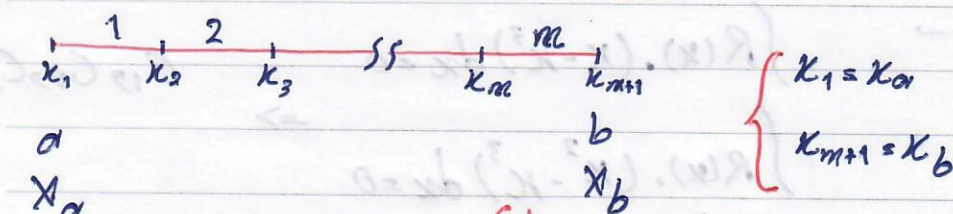
$$y^*(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 - (C_1 + C_2) x^3$$

$$y^*(x) = 1 + C_1 x + C_2 x^2 - C_1 x^3 - C_2 x^3$$

$$\Rightarrow y^*(x) = 1 + C_1 (x - x^3) + C_2 (x^2 - x^3)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0 & a < x < b \\ y(a) = y_a & y(b) = y_b \end{cases}$$

روش اجزای محدود گالرکین:



$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \underbrace{\phi_i(x)}_{\text{تابع آزمايشي}}$$

که مقدار تابع جواب در $x = x_i$



اجزاء محدود ٹال رکھیں :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0$$

$$a < x < b$$

تعداد نکات : $M+1$

$$y(a) = y_a$$

تعداد (بالوں) : M

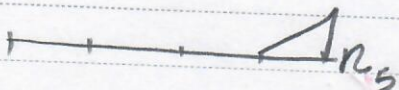
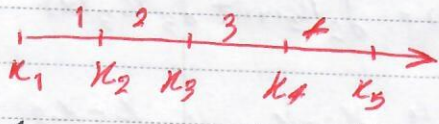
$$y(b) = y_b$$

$$y^*(x) = \sum C_i M_i(x) \Rightarrow$$

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{M+1} y_i h_i(x)$$

تابع دستاویز
تعمیر نکات

تابع آزمائش
تعمیر نکات نوها



مثال :

$$r_{0i} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

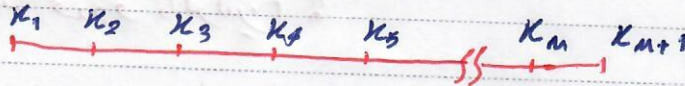
$$x_{i-1} < x < x_i$$

$$r_{ci} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

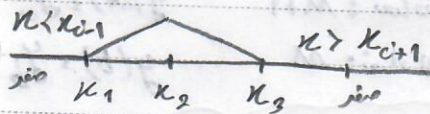
$$x_i < x < x_{i+1}$$

$$r_{ci} = 0$$

$$\begin{cases} x_{i+1} > x \\ x < x_{i-1} \end{cases}$$

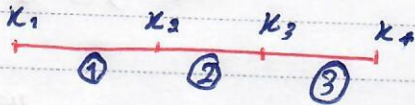


: Δ



$$r_2(x) = \begin{cases} \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

$$y^*(x) = y_2$$



: Δ

$$y^*(x) = y_2 r_2(x) + y_3 r_3(x)$$



$$y_{(x)}^* = y_2 \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + y_3 \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$



$$y^*(x) = y_3 r_3(x) + y_4 r_4(x)$$



$$y_{(x)}^* = y_3 \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + y_4 \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad x_{i-1} < x < x_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \quad x_i < x < x_{i+1} \end{array} \right.$$

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{m+1} y_i r_i(x)$$

$$R(x, y_i) = \sum_{i=1}^{m+1} \left[\frac{d^2 y^*}{dx^2} + f(x) \right] \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \{ y_i r_i(x) \} + f(x) \right]$$

Galerkin: $\int_{x_a}^{x_b} r_j(x) R(x, y_j) dx = \int_{x_a}^{x_b} r_j(x) \sum_{i=1}^{m+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \{ y_i r_i(x) \} + f(x) \right] dx$

$$\Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} r_j \left[\frac{d^2}{dx^2} [y_j r_j(x) + y_{j+1} r_{j+1}(x) + f(x)] dx \right] = 0$$

$$j = 1, m+1$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0 & y(x_j) = y_j \\ x_j < x < x_{j+1} & y(x_{j+1}) = y_{j+1} \end{cases}$$

فرمول بندی یک اهرام

تقریب: $y^*(x) = \underbrace{y_j}_{\text{آزمایش}} r_j(x) + \underbrace{y_{j+1}}_{\text{آزمایش}} r_{j+1}(x)$

$$\Rightarrow y^*(x) = y_j \underbrace{\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}}_{N_1(x)} + y_{j+1} \underbrace{\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}}_{N_2(x)}$$

انتگرال گیری جزء به جزء $\int u'v = uv - \int uv'$

$j=1 \Rightarrow R^e \rightarrow C^e$
 $\Rightarrow R^e [x, y_j, y_{j+1}] = \frac{d^2}{dx^2} [x_1 N_1(x) + x_2 N_2(x)] dx + f(x) \neq 0$

Galerkin $\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i R^e dx = 0 \Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \left[\frac{d^2 y^e}{dx^2} + f(x) \right] dx = 0$

$i=1,2 \Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{d^2 y^e}{dx^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \cdot f(x) dx = 0$

انتگرال گیری جزء به جزء $\Rightarrow \left(N_i(x) \frac{dy^e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dy^e}{dx} dx \right) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0$

$\Rightarrow \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dy^e}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_1 f(x) dx + N_1 \frac{dy^e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}}$

$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_2}{dx} \cdot \frac{dy^e}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_2 f(x) dx + N_2 \frac{dy^e}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}}$

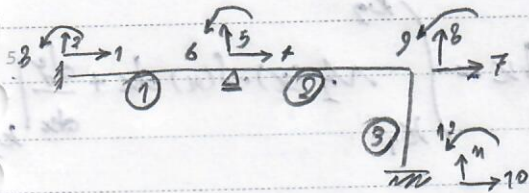
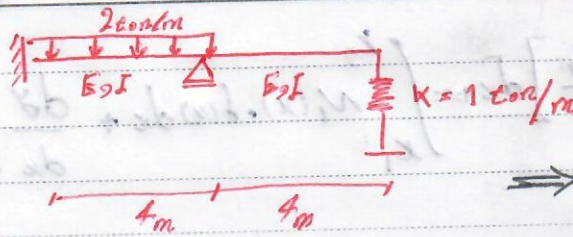


$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dk} \left[y_1 \frac{dN_1}{dk} + y_2 \frac{dN_2}{dk} \right] dk &= \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) \cdot f(x) dx + \frac{dy}{dk} \Big|_{x_1} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dk} \left[y_1 \frac{dN_1}{dk} + y_2 \frac{dN_2}{dk} \right] dk &= \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) \cdot f(x) dx - \frac{dy}{dk} \Big|_{x_2} \end{aligned}$$

$$\int y_1 \frac{dN_1}{dk} \cdot \frac{dN_1}{dk} \cdot dk + \int y_2 \frac{dN_1}{dk} \cdot \frac{dN_2}{dk} \cdot dk = \dots$$

$$\int y_2 \frac{dN_2}{dk} \cdot \frac{dN_1}{dk} \cdot dk + \int y_2 \frac{dN_2}{dk} \cdot \frac{dN_2}{dk} \cdot dk = \dots$$

$$\begin{bmatrix} \int \frac{dN_1}{dk} \cdot \frac{dN_1}{dk} & \int \frac{dN_1}{dk} \cdot \frac{dN_2}{dk} \\ \int \frac{dN_2}{dk} \cdot \frac{dN_1}{dk} & \int \frac{dN_2}{dk} \cdot \frac{dN_2}{dk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int N_1(x) f(x) dx + \frac{dy}{dk} \Big|_{x_1} \\ \int N_2(x) f(x) dx - \frac{dy}{dk} \Big|_{x_2} \end{bmatrix}$$



③:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

قالب با A بسیار کم $\Rightarrow$ 1 و 2: نیروی بهار
قالب با I بسیار کم $\Rightarrow$ 3: نیروی بهار
بسیار کم

* سایر مقادیر معادله های 0.001k دیگر در جدول قرار می گیرد

* مقدار $\frac{EA}{L}$ را K قرار می دهیم

* سایر مقادیر همان 0.001k قرار می گیرند

① و ②:

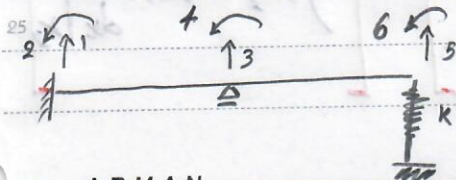
$$\begin{bmatrix} 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k \\ 0.001k & & & & & \\ 0.001k & & & & & \\ 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k & 0.001k \\ 0.001k & & & & & \\ 0.001k & & & & & \end{bmatrix}$$

* سایر مقادیر را بر اساس ماتریس مانتوسین بدست می آوریم

* مقدار 0.001k را در جایی نیروی محوری قرار می دهیم

* مقدار $\frac{EI}{L}$ را K قرار می دهیم

* درجه های دیگر به ترتیب صفتان شماره گذاری می شوند:

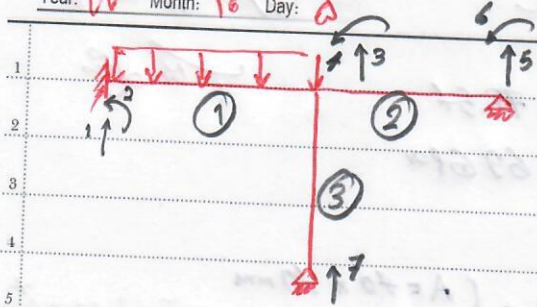


بدون در نظر گرفتن قدرتهای ماتریس ها را نوشتیم
در همان ماتریس نوشتیم ماتریس ها را با K جمع کردیم و ماتریس نوشتیم معادله

Subject:

Year: 97 Month: 16 Day: 5

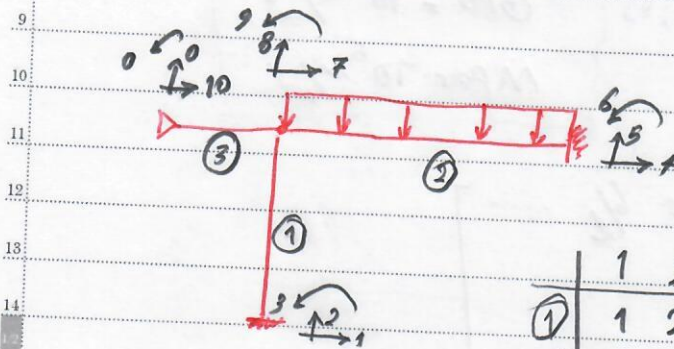
page: 58



در این مسئله، بارهای ثابت و متغیر
در نظر گرفته شده است.

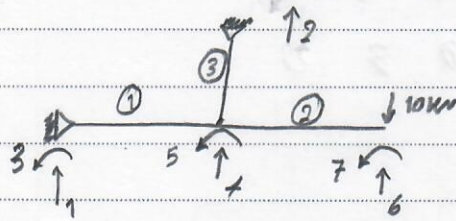
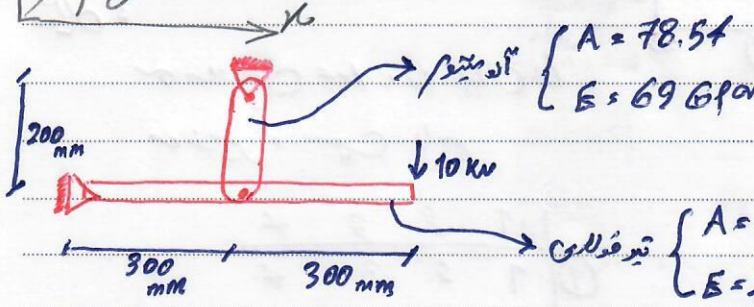
این بار 3، از نوع بارهای مابین نواحی است.

	1	2	3	4
①	1	2	3	4
②	3	4	5	6
③	7	0	3	0



این بار 3، از نوع بارهای مابین نواحی است.

	1	2	3	4	5	6
①	1	2	3	7	8	9
②	7	8	9	4	5	6
③	10	0	0	7	0	0



$$\begin{aligned} \text{GPa} &= 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \text{GPa} &= 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ \text{MPa} &= 10^6 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

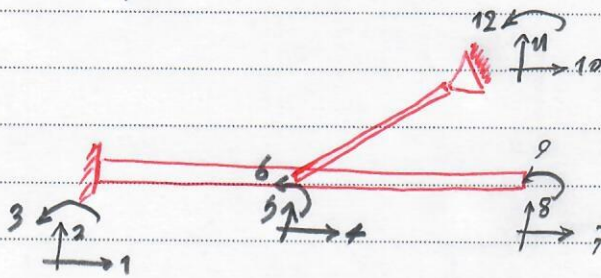
$$K^1 = K^2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & \dots \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	1	2	3	4
①	1	3	4	5
②	4	5	6	7
③	4	0	2	0

$$K_{44} = K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(3)}$$

$$K_{22} = K_{33}^{(3)}$$



	1	2	3	4	5	6
①	1	2	3	4	5	6
②	4	5	6	7	8	9
③	4	5	0	10	11	0

$$k \frac{d^2 y}{dk^2} + \frac{dy}{dk} - 4k = 0$$

در این معادله: $\frac{d^2 y}{dk^2}$

↑ y

$$1 \leq k \leq 2$$

$$y(1) = y(2) = 0$$



① حل: $y^e_{(k)} = y_1 \overbrace{N_1(k)}^{\text{در این معادله}} + y_2 N_2(k)$

$$N_1(k) = \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1}$$

$$N_2(k) = \frac{k - k_1}{k_2 - k_1}$$

$$y^e_{(k)} = y_1 \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} + y_2 \frac{k - k_1}{k_2 - k_1}$$

$$k \frac{d^2 y}{dk^2} + \frac{dy}{dk} - 4k = 0 \xrightarrow{\text{در این معادله}} \frac{d}{dk} \left(k \frac{dy}{dk} \right) - 4k = 0$$

$$\Rightarrow \int_{k_1}^{k_2} N_i \left[\frac{d}{dk} \left(k \frac{dy}{dk} \right) - 4k \right] dk = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{k_1}^{k_2} N_i(k) \frac{d}{dk} \left(k \frac{dy}{dk} \right) dk}_{\text{U}} - \underbrace{\int_{k_1}^{k_2} N_i(k) 4k dk}_{\text{dV}} = 0$$

$$\Rightarrow N_i(k) \cdot k \frac{dy}{dk} \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} \frac{dN_i}{dk} \cdot k dk - \int_{k_1}^{k_2} N_i(k) \cdot 4k \cdot dk = 0 \quad i=1,2$$

$$\Rightarrow \int_{k_1}^{k_2} \frac{dN_i(k)}{dk} \cdot k \left(y_1 \frac{dN_1}{dk} + y_2 \frac{dN_2}{dk} \right) dk = N_i(k) \cdot k \frac{dy}{dk} \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} 4k \cdot N_i(k) dk$$

Arman

$$i=1 \int_{k_1}^{k_2} \frac{dN_1(k)}{dk} k \left(y_1 \frac{dy_1}{dk} + y_2 \frac{dy_2}{dk} \right) dk = N_1(k) \cdot k \frac{dy}{dk} \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} k \cdot N_1(k) dk$$

$$N_1(k) = \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} \quad \frac{dN_1}{dk} = -1$$

$$N_2(k) = \frac{k - k_1}{k_2 - k_1} \quad \frac{dN_2}{dk} = 1$$

$$\frac{dy}{dk} = y_1 \frac{dy_1}{dk} + y_2 \frac{dy_2}{dk} \quad \frac{dy}{dk} = y_2 - y_1$$

$$i=1 \int_{k_1}^{k_2} -1(k) (-y_1 \ y_2) dk = \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} \cdot k (y_2 - y_1) \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} k \cdot \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} dk$$

$$i=2 \int \dots = \dots - \int \dots$$

$$i=1 \frac{1}{(k_2 - k_1)^2} \int_{k_1}^{k_2} k (y_1 - y_2) dk = -k_1 \frac{dy}{dk} \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} k \cdot \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} dk \quad (F_1)$$

$$i=2 \frac{1}{(k_2 - k_1)^2} \int_{k_1}^{k_2} k (y_2 - y_1) dk = k_2 \frac{dy}{dk} \Big|_{k_2}^{k_1} + \int_{k_1}^{k_2} \frac{k - k_1}{k_2 - k_1} dk \quad (F_2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_2^2 - k_1^2}{2(k_2 - k_1)} & -\frac{k_2^2 - k_1^2}{2(k_2 - k_1)} \\ -\frac{k_2^2 - k_1^2}{2(k_2 - k_1)} & \frac{k_2^2 - k_1^2}{2(k_2 - k_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \frac{dy}{dk} \Big|_{k_1}^{k_2} - \int_{k_1}^{k_2} k \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} dk \\ k_2 \frac{dy}{dk} \Big|_{k_2}^{k_1} + \int_{k_1}^{k_2} k \frac{k - k_1}{k_2 - k_1} dk \end{bmatrix}$$