

آنالیز ریاضی

اثبات نابرابری

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

با فرض $x \in (0, 1)$ و $k \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$kx^k < \frac{x}{1-x}$$

به جهت رعایت امانت، این مسئله از صفحه @ghaderi_math و با اجازه ایشان ارائه و اثبات می‌شود.

۲ روش حل مسئله

پاسخ: برای حل این مسئله به دو نکته باید توجه شود. 🤔

💡 به ازای $|x| < 1$ با توجه به بسط تیلور دو عبارت زیر معادل هستند:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

💡 به ازای $x \in (0, 1)$ و $m, n \in \mathbb{N}$ به طوری که $m > n$

$$x^m < x^n$$

به عبارتی دیگر در نکته دوم ذکر شده که هر چقدر توان x بزرگ‌تر باشد، مقدار آن کوچک‌تر می‌شود. به

ازای $k = 1$ این رابطه برقرار است چون

$$x < \frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + \dots) = x + x^2 + x^3 + \dots$$

برای k های دیگر همواره روابط زیر برقرار است:

$$k-1 \text{ تا جمله } \left\{ \begin{array}{l} x^{k-1} < 1 \\ x^{k-1} < x \\ x^{k-1} < x^2 \\ \vdots < \vdots \\ x^{k-1} < x^{k-2} \end{array} \right.$$

تمام سطرهای سمت چپ و راست متناظر با هم جمع می‌شوند. در نتیجه نابرابری زیر ایجاد می‌شود:

$$(k-1)x^{k-1} < 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-2} \quad (۱)$$

به دو طرف نابرابری (۱) عبارت x^{k-1} افزوده می‌شود:

$$kx^{k-1} < 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-2} + x^{k-1} \quad (۲)$$

می‌دانیم رابطه زیر هم برقرار است:

$$1 + x + \dots + x^{k-2} + x^{k-1} < 1 + x + \dots + x^{k-2} + x^{k-1} + x^k + \dots \quad (۳)$$

از مقایسه (۲) و (۳) نابرابری زیر حاصل می‌شود:

$$kx^{k-1} < 1 + x + \dots + x^{k-2} + x^{k-1} + x^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$kx^{k-1} < \frac{1}{1-x}$$

با ضرب دو طرف در x نابرابری مسئله اثبات می‌شود:

$$kx^k < \frac{x}{1-x}$$

به ازای هر دقیقه برنامه‌ریزی، یک
ساعت ذخیره می‌شود!



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com