MATH GALAXY

کهکشان ریاضی

POWER& ROOT PLANET

سیاره توان و ریشه

WRITTEN & DEVELOPED BY THE TALENT SCHOOL MATH TEACHER

AMIN EBRAHIMI

جزوه کامل توان و ریشه مخصوص جمع بندی ، مرور و یادگیری مفهومی پایه

قابل استفاده برای امتحانات ، آزمون های ورودی تیزهوشان ، نمونه دولتی و مدارس خاص

دبیر ریاضی تیزهوشان کنکور المپیاد ، مدارس برتر

امین ابراهیمی

بهترین نتایج در آزمون ها ، یادگیری با کیفیت کامل

۰۹۳۵۸۵۳۷۵۲۶

@Mathgalaxy

فرمول های پایه توان :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$$

صفر به توان صفر تعریف نشده است 0^0

هر عدد منفی به توان زوج مثبت می شود .

در توان رسانی عددهای حقیقی به توان گویا پایه را عددی مثبت در نظر می گیریم یعنی $(a)^{\frac{b}{c}}$ داریم $a > 0$

نکته : کوچکترین عدد طبیعی بزرگ تر از یک که هم مجذور کامل و هم مکعب کامل می باشد عدد ۶۴ است چون بصورت توانی $2^6 = 64$ می باشد که توان ۶۴ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است .

عبارت های که اعداد توان دار در جمع تکرار می شوند از تکرارجمع به تبدیل ضرب می رسیم .

مثال : $2^{1400} = 2^2 \times 2^{1398} = 4 \times 2^{1398} = 2^{1398} + 2^{1398} + 2^{1398} + 2^{1398}$

مقایسه اعداد توان دار با رشد در توان :

$$\sqrt[n]{a} < \cdots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < 1 < a^1 < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < a^{n+1}$$

در حالتی که a یک عدد بزرگ تر از یک باشد .

$$\sqrt[n]{a} > \cdots > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > 1 > a^1 > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > a^{n+1}$$

در حالتی که a یک عدد بین صفر و یک باشد .

$$\ldots > a^5 > a^3 > a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \cdots$$

در حالتی که $-1 < a < 0$ می باشد .

$$\ldots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \cdots$$

در حالتی که $a < -1$ می باشد

مثال : اگر $-۱ < a < ۰$ باشد کدام گزینه نادرست است

۱) $a^۵ > a^۳$

۲) $a^۲ > a^۵$

۳) $\sqrt[۳]{a} > \sqrt[۵]{a}$

۴) $\sqrt[۳]{a} > a^۳$

طبق نکات گزینه ۴ نادرست می باشد البته با عدد گذاری هم میتوان این سوال را حل کرد

می دانیم اگر a و b دو عدد مثبت باشند و $a > b$ داریم : $a^۲ > b^۲$ و $a^۳ > b^۳$ و $a^n > b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$ و a^{m^n} دو عبارت متفاوت هستند

$$(((۲^۳)^۲)^۴)^۳ = ۲^{۳×۲×۴×۳} = ۲^{۷۲}$$

$$-۲^{۲^{۳^۲}} = -۲^{۲^۹} = -۲^{۵۱۲}$$

(قانون تبدیل جمع در توان به ضرب)

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

(قانون تبدیل تفریق در توان به تقسیم)

$$a^{m-n} = a^m \div a^n$$

در تفریق عبارت های توان دار نیز سعی می کنیم از فاکتورگیری استفاده کنیم :

مثال : حاصل $۲^{۱۳۹۸} - ۲^{۱۳۹۷} - ۲^{۱۳۹۶} = ۲^{۱۳۹۶}(۲^۲ - ۲^۱ - ۱) = ۲^{۱۳۹۶}$

تجزیه در عبارت های توان دار

مثال :در صورتی که هیچ یک از قانون های قبل به طور مستقیم قابل استفاده نبود از تجزیه کردن کمک می گیریم :

$$۱۲^۳ \times ۱۸^۴ = (۳ \times ۲^۲)^۳ \times (۲ \times ۳^۲)^۴ = ۳^۳ \times ۲^۸ \times ۲^۴ \times ۳^۸ = ۳^{۱۱} \times ۲^{۱۲} = ۲ \times ۶^{۱۱}$$

رقم یکان در توان های بزرگ :

نکته : در صورتی که یکان عددی رقم های ۰ و ۱ و۵ و ۶ باشد به هر توانی آن را برسانیم یکان تغییر نخواهد کرد

$$۱۰^۲ = ۱۰۰ \ , \ ۵^۳ = ۱۲۵ \ , \ ۱۱^۲ = ۱۲۱ \ , \ ۱۶^۲ = ۲۵۶ \ , \ ۶^۲ = ۳۶$$

توجه : رقم یکان را اگر ۹ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۹^{۲} = ۸۱$$

$$۹^{۱} = ۹$$

$$۹^{۳} = ۷۲۹$$

می بینیم توان فرد یکان ۹ و توان زوج یکان ۱ تولید می کند .

توجه ۲ : رقم یکان را اگر ۴ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۴^{۱} = ۴$$

$$۴^{۲} = ۱۶$$

می بینیم توان فرد یکان ۴ و توان زوج یکان ۶ تولید می کند .

مثال : مجموع یکان در عبارت زیر را مشخص کنید

$$۱۳۹۶^{۳} + ۱۴۰۴^{۴} = \cdots ۶ + \cdots ۶ = \cdots ۱۲$$

نکته : برای مشخص کردن تعداد ارقام یک عدد توان دار می توانیم با تجزیه پایه ها به ۲ و ۵ پایه ای از ۱۰ بسازیم در سوالات می توانیم برای تقریب از $۱۰۰۰ \simeq ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ نیز استفاده کنیم به مثال زیر دقت کنیم:

مثال : عدد $۱۲۵^{۲۵} \times ۱۶^{۲۰}$ چند رقمی است ؟

$$۱۲۵^{۲۵} \times ۱۶^{۲۰} = (۵^{۳})^{۲۵} \times (۲^{۴})^{۲۰} = ۵^{۷۵} \times ۲^{۸۰}$$

نکته : الگوی مربوط به عبارت توانی

$$۱۰^{n} - ۱۰^{m} = ۹۹ \ldots ۹۹۰۰۰ \ldots ۰۰۰$$

به صورت زیر می باشد :

تعداد رقم های ۹ برابر است با : $n - m$

و تعداد رقم های صفر برابر است با : m تا

$$۱۰^{۳} - ۱۰^{۲} = ۱۰۰۰ - ۱۰۰ = ۹۰۰$$

$$۱۰^{۲۵} - ۱۰^{۱۹} = \underset{\text{۱۹ تا صفر ، ۶ رقم ۹}}{۹۹ \ldots ۹۹۰۰ \ldots ۰۰۰}$$

سوال : مجموع ارقام در عبارت $۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n}$ را بدست آورید ؟

$$۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n} = ۹۹۹ \ldots ۹۹۹۰۰۰ \ldots ۰۰۰$$

که تعداد ارقام ۹ برابر است با : تفاضل توان ها یعنی $۸n - ۳n = ۵n$ و تعداد صفرها برابر $۳n$ بنابراین مجموع ارقام عبارت است از $۹ \times ۵n = ۴۵n$

ترتیب انجام عملیات در عبارت های توان دار :

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$۳^۲ - ۲^۳(۲^۲ - ۲^۳(۳^۲ - ۱)^{-۱})^{-۱} =$$

پاسخ :

$$۹ - ۸(۴ - ۸(۹ - ۱)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸(۴ - ۸(۸)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸\left(۴ - ۸\left(\frac{۱}{۸}\right)\right)^{-۱} = ۹ - ۸(۳)^{-۱} = ۹ - \frac{۸}{۳}$$

سوال : اگر $A = (x^{x^x})^{x^x}$ باشد ، A^x برابر است با:

پاسخ : $A = (x)^{x^x \times x^x} = (x)^{x^{۲x}}$

$$A = (x)^{x^{۲x}} \to A^x = ((x)^{x^{۲x}})^x = (x)^{x^{۲x} \times x} = x^{x^{۲x+۱}}$$

دنباله مجموع اعداد توان دار :

حاصل عبارت $A = ۲^{-۱} + ۲^{-۲} + ۲^{-۳} + ۲^{-۴} + \cdots$ را بدست آورید .

مجموع دنباله های هندسی (هر جمله از ضرب عددی در جمله قبل باشد) از فرمول مشخصی بدست می آید اما در صورتی که اعداد کوچکتر و کوچکتر شوند از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\text{جمله اول}}{\text{۱ − قدرنسبت}}$$

بنابراین داریم

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots$$

و طبق فرمول

$$\frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱$$

اما چرا این فرمول را استفاده می کنیم :

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots \to ۲A = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots \to ۲A = ۱ + A \to ۲A - A = ۱ \to A = ۱$$

حاصل عبارت $A = ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷}$ را بدست آورید

$$\begin{aligned} A + ۲ &= ۲ + (۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷}) = ۲ \times ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷} \\ &= ۲^۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷} = ۲ \times ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷} = ۲^۳ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{۱۳۹۷} \\ &= \cdots = ۲ \times ۲^{۱۳۹۷} = ۲^{۱۳۹۸} \to A + ۲ = ۲^{۱۳۹۸} \to A = -۲ + ۲^{۱۳۹۸} \end{aligned}$$

روش دوم : طبق فرمول نیز می توانیم به نتیجه برسیم :

$$\frac{۲(۱-۲^{۱۳۹۷})}{۱-۲}=\frac{۲-۲^{۱۳۹۸}}{-۱}=-۲+۲^{۱۳۹۸}$$

نکته ۱ : **مجموع اعداد مربعی متوالی** بصورت زیر محاسبه می شود

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

نکته ۲ : **مجموع اعداد مکعبی متوالی** بصورت زیر محاسبه می شود

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+\cdots+n^۳=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

استفاده از اتحاد در توان ها :

$$۱۰۳^۲=(۱۰۰+۳)^۲=۱۰۰^۲+۳^۲+۲(۱۰۰)(۳)=۱۰۰۰۰+۹+۶۰۰=۱۰۶۰۹$$

محاسبات جبری توانی :

سوال : اگر $۷=۳^a$ و $۳=۷^b$ باشد ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید

الف : $۳^{۲ab}$

ب : ۲۱^{ab}

پ : $۴۹^{ab+۱}$

پاسخ : الف : $۳^{۲ab}=(۳^a)^{۲b}=۷^{۲b}=(۷^b)^۲=۳^۲=۹$

$$(۳\times۷)^{ab}=۳^{ab}\times۷^{ab}=(۳^a)^b\times(۷^b)^a=۷^b\times۳^a=۳\times۷=۲۱$$

$$۴۹^{ab+۱}=۴۹^{ab}\times۴۹^۱=(۷^۲)^{ab}\times۴۹^۱=(۷^b)^{۲a}\times۴۹=$$

معادلات توانی :

به هر معادله ای که مجهول در توان قرار گرفته باشد معادله توانی یا نمایی می گوییم

برای حل این معادلات کافی است پایه ها را مساوی کنیم تا بتوانیم توان ها را نیز با هم مساوی کنیم

$$۳^{۲x-۱۰}=۱$$

$$۳^{۲x-۱۰}=۳^۰\rightarrow۲x-۱۰=۰\rightarrow۲x=۱۰\rightarrow x=۵$$

سوال : در معادله ی توانی $۲^{۲^{۲^n}}=۱۶^{۶۴}$ مقدار n کدام است ؟

۱) ۳ ‏ ‏ ۲) ۸ ‏ ‏ ۳) ۱۶ ‏ ‏ ۴) ۶۴

پاسخ : ازتجزیه سمت راست شروع کنیم

$$۲^{۲^{۲^n}}=۱۶^{۶۴}=(۲^۴)^{۶۴}=۲^{۲۵۶}$$

پایین ترین پایه ها را مرحله اول خط می زنیم در این صورت داریم :

$$۲^{۲^n} = ۲۵۶$$

و روند بالا را ادامه می دهیم

چند نکته مفید در تست ها از توان منفی :

$$۰/۲ = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} = ۵^{-۱}$$

$$۰/۰۴ = \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲۵} = ۲۵^{-۱} = ۵^{-۲}$$

$$۰/۰۰۸ = \frac{۸}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۲۵} = ۱۲۵^{-۱} = ۵^{-۳}$$

$$۰/۰۰۱۶ = ۵^{-۴}$$

$$۰/۵ = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} = ۲^{-۱}$$

$$۰/۲۵ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} = ۴^{-۱} = ۲^{-۲}$$

$$۰/۱۲۵ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۸} = ۸^{-۱} = ۲^{-۳}$$

نماد علمی :

نماد علمی یک عدد بصورت $a \times ۱۰^n$ می باشد که در آن $۱ \le a < ۱۰$ و n عددی صحیح می باشد .

مثال یک سال نوری $۹/۴۶۰۸ \times ۱۰^{۱۲} = ۹۴۶۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰ \times ۳۰۰۰۰۰$ کیلومتر می باشد (از اولین رقمی که ممیز زدیم ۱۲ رقم توانستیم شمارش کنیم)

در مورد اعداد اعشاری خیلی کوچک نیز از توان منفی کمک می گیریم :

مثال : عدد ۰/۰۰۰۰۰۰۰۱۴۰۴ به صورت نماد علمی عبارت است از $۱/۴۰۴ \times ۱۰^{-۸}$ (بین اولین رقمی که ممیز گذاشتیم تا ممیز قبلی ۸ رقم داشتیم)

مقایسه اعداد توان دار :

۱) اگر پایه ها برابر باشد عددی بزرگتر است که توان آن بزرگ تر باشد

$۴^۷ > ۴^۵$ و $(\frac{۱}{۵})^۴ < (\frac{۱}{۵})^۳$ و اما در منفی ها $(-۲)^۷ < (-۲)^۵$

۲) اگر توان ها برابر باشد عدد ی بزرگ تر است که پایه آن بزرگتر باشد

$۱۰^۹ > ۷^۹$ و در مورد توان منفی $۱۰^{-۹} < ۷^{-۹}$

۳) اگر پایه ها و توان ها برابر نباشند یا پایه ها را یکی می کنیم یا توان ها را :

مثال : الف) مقایسه عددهای $۲^{۳۰۰}$ و $۳^{۲۰۰}$: $۲^{۳۰۰} = (۲^۳)^{۱۰۰} = ۸^{۱۰۰}$ و $۳^{۲۰۰} = (۳^۲)^{۱۰۰} = ۹^{۱۰۰}$

بنابرین $۹^{۱۰۰} > ۸^{۱۰۰}$

ب) مقایسه عددهای $۷^{۲۹}$ و $۳^{۴۱}$:

از نزدیک ترین اعداد که عامل مشترک دارند استفاده کنیم یعنی از $۷^{۲۸}$ و $۳^{۴۲}$: داریم $۲۴۰۱^{۷} = (۷^{۴})^{۷} = ۷^{۲۸}$ و داریم $۳^{۴۲} = (۳^{۶})^{۷} = ۷۲۹^{۷}$ بنابراین $۷۲۹^{۷} < ۲۴۰۱^{۷}$ و در نتیجه $۳^{۴۲} < ۷^{۲۸}$ و $۳^{۴۱} < ۷^{۲۹}$

استفاده از اتحادها در عبارت های توان دار :

معمولا از اتحاد مزدوج در عبارت های توان دار بهره می گیریم :

سوال : حاصل عبارت $۱^{۱} - ۲^{۱} + \cdots + ۹^{۲} - ۱۰^{۲} + ۱۱^{۲} - ۱۲^{۲}$ را بدست آورید

حل : اگر جملات را دو به دو تفکیک کنیم می توانیم از اتحاد مزدوج کمک بگیریم :

$$\begin{aligned}(۱۲^{۲} - ۱۱^{۲}) + (۱۰^{۲} - ۹^{۲}) + \cdots + (۲^{۱} - ۱^{۱})\\ = (۱۲ - ۱۱)(۱۲ + ۱۱) + (۱۰ - ۹)(۱۰ + ۹) + \cdots + (۲ - ۱)(۲ + ۱)\\ = ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + \cdots + ۲ + ۱ =\end{aligned}$$

می دانیم می توانیم از فرمول گاوس برای مجموع اعداد متوالی یا گام مشخص استفاده کنیم

مثال : حاصل عبارت $\left(۱ - \frac{۱}{۲^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۴^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۶^{۲}}\right)$ را به دست آورید

حل :

$$\begin{aligned}&\left(۱ - \frac{۱}{۲^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۴^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵^{۲}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۶^{۲}}\right)\\ &= \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۴}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۶}\right)\\ &\left(۱ + \frac{۱}{۶}\right) = \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۴}{۳}\right)\ldots\left(\frac{۶}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)\left(\frac{۷}{۶}\right) = \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۷}{۶}\right) = \frac{۷}{۱۲}\end{aligned}$$

ریشه گیری :

می دانیم $۲۵ = ۵^{۲}$ و $۲۵ = (-۵)^{۲}$ یعنی مربع یا مجذور عددهای ۵ و ۵- برابر ۲۵ می باشد بنابراین ۵ و ۵- ریشه های دوم

عدد ۲۵ می باشند و به طور کلی $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد مثبت a می باشند

می دانیم اعداد منفی ریشه ی دوم ندارند ، $\sqrt{۰}=۰$ و $\sqrt{۱} = ۱$

مکعب عدد را توان سوم آن عدد تعریف می کنیم مثال : $۲۷ = ۳^{۳}$ و $-۲۷ = (-۳)^{۳}$ و می توانیم ریشه سوم عددهای ۲۷ و ۲۷- را بصورت $\sqrt[۳]{۲۷} = ۳$ و $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ می نویسیم .بنابراین ریشه سوم برای اعداد منفی قابل تعریف است .

حجم مکعبی به ضلع a برابر با $a^{۳}$ می باشد بنابراین ضلع یک مکعب ریشه سومی از حجم مکعب می باشد .

قوانین پایه ای ریشه گیری (رادیکال ها):

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \times b \times c}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(a\sqrt[n]{x}\right)\left(b\sqrt[n]{y}\right) = ab\ \sqrt[n]{xy}$$

$$\frac{a\ \sqrt[n]{x}}{b\ \sqrt[n]{y}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

توجه :برای ریشه های بالاتر نیز برقرار است .

جمع و تفریق رادیکال ها :

بعد از تجزیه عبارت زیر رادیکال سعی در ساده کردن کل عبارت داریم

مثال : $۴\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۱۲} = ۴\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳ \times ۴} = ۴\sqrt{۳} + ۲\left(\sqrt{۳} \times \sqrt{۴}\right) = ۴\sqrt{۳} + ۲\left(\sqrt{۳} \times ۲\right) = ۴\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$

$$۳\sqrt{۸} - ۵\sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۴ \times ۲} - ۵\sqrt{۲ \times ۹} = ۶\sqrt{۲} - ۱۵\sqrt{۲} = -۹\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{\frac{۵}{۸}} + \sqrt{\frac{۸}{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۸}} + \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵} + \sqrt{۸} \times \sqrt{۸}}{\sqrt{۸ \times ۵}} = \frac{۵ + ۸}{\sqrt{۸ \times ۵}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۴۰}}$$

جواب قسمت قبل برابر با : $\frac{۱۳}{\sqrt{۴۰}} \times \frac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۴۰}} = \frac{۱۳\sqrt{۴۰}}{۴۰}$ به عملی که در این مرحله انجام دادیم گویا کردن مخرج کسر می گوییم

مثال : مخرج هر یک از عبارت های $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$ و $\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}$ را گویا کنید (گویا کردن مخرج کسر یعنی کسری بنویسیم که مخرج آن رادیکالی نباشد)

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}} \rightarrow \times \frac{۲\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}} = \frac{۴\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۳}} = \frac{۴\sqrt[۳]{۴}}{۲} = ۲\sqrt[۳]{۴}$$

نتیجه :

هر گاه مخرج کسر شامل یک رادیکال به صورت $\frac{a}{b\ \sqrt[n]{c^m}}$ باشد برای گویا کردن کسر را در $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$ ضرب می کنیم .دقت داریم که این کسر ضرب شده برابر واحد است و در ضرب کسر اصلی را تغییر نمی دهد.

$$\frac{۲}{۱ - \sqrt{۲}} \rightarrow \times \frac{۱ + \sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}} = \frac{۲(۱ + \sqrt{۲})}{(۱ - \sqrt{۲})(۱ + \sqrt{۲})} = \frac{۲ + ۲\sqrt{۲}}{-۱} = -۲ - ۲\sqrt{۲}$$

در مثال دوم از مزدوج مخرج استفاده کردیم

$$\frac{۲}{\sqrt{x+۱}}\times\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}}=\frac{۲\sqrt{x+۱}}{(\sqrt{x+۱})^۲}=\frac{۲\sqrt{x+۱}}{x+۱}$$

برای گویا کردن کسر زیر از اتحاد چاق و لاغر استفاده شده است

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{(\sqrt[۳]{a})^۳+(\sqrt[۳]{b})^۳}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{a+b}$$

توجه : اتحاد چاق و لاغر بصورت زیر می باشد

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$$

$$\left(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}\right)\left(\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}\right)=(\sqrt[۳]{a})^۳+(\sqrt[۳]{b})^۳=a+b$$

اندازه ی طول یک مستطیل $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ واحد و مساحت آن ۱ واحد مربع باشد محیط آن را بدست می آوریم.

$$x.y=۱\to x\times\left(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right)=۱\to x=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

مقایسه رادیکال ها :

متداول ترین روش مجذور کردن رادیکال ها می باشد

مثال۱ : اعداد $۲\sqrt{۸}$ و $۳\sqrt{۵}$ را مقایسه کنید

حل : داریم $۲\sqrt{۸}\to(۲\sqrt{۸})^۲=۴\times۸=۳۲$ و $۳\sqrt{۵}\to(۳\sqrt{۵})^۲=۹\times۵=۴۵$ بنابراین داریم $۴۵>۳۲$ و در نتیجه $\sqrt{۳۲}<\sqrt{۴۵}$ و داریم $۲\sqrt{۸}<۳\sqrt{۵}$

مثال۲ : اعداد $۱+\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۶}-۱$ را با هم مقایسه کنید

حل : داریم $۱+\sqrt{۵}\to(۱+\sqrt{۵})^۲=۵+۱+۲\sqrt{۵}=۶+۲\sqrt{۵}$ و

$\sqrt{۶}-۱\to\left(\sqrt{۶}-۱\right)^۲=۶+۱-۲\sqrt{۶}=۷-۲\sqrt{۶}$ حال از خواص نامساوی ها داریم :

$$۶+۲\sqrt{۵}\to\sqrt{۴}<\sqrt{۵}<\sqrt{۹}\to۲\sqrt{۴}<۲\sqrt{۵}<۲\sqrt{۹}\to۶+۲\sqrt{۴}<۶+۲\sqrt{۵}<۶+۲\sqrt{۹}\to$$

$$۶+۲\times۲<۶+۲\sqrt{۵}<۶+۲\times۳\to۱۰<۶+۲\sqrt{۵}<۱۲$$

و برای $۷-۲\sqrt{۶}$

$$۷-۲\sqrt{۶}\to\sqrt{۴}<\sqrt{۶}<\sqrt{۹}\to۲\sqrt{۴}<۲\sqrt{۶}<۲\sqrt{۹}\to۷-۲\sqrt{۴}<۷-۲\sqrt{۶}<۷-۲\sqrt{۹}\to$$

$$۷-۲\times۲<۷-۲\sqrt{۶}<۷-۲\times۳\to۱<۷-۲\sqrt{۶}<۳$$

بنابراین $۶+۲\sqrt{۵}>۷-۲\sqrt{۶}$ در نتیجه داریم $۱+\sqrt{۵}>\sqrt{۶}-۱$

بدست آوردن حدود یک عدد با ریشه سوم :

مثال :عدد $\sqrt[۳]{۲۵}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد

برای بدست آوردن جواب از اعداد $\sqrt[۳]{۸}$ و $\sqrt[۳]{۶۴}$ استفاده می کنیم یعنی داریم $\sqrt[۳]{۶۴} < \sqrt[۳]{۲۵} < \sqrt[۳]{۸}$ و داریم

$۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۴$

توجه به کمک فرمول زیر نیز می توانیم تقریب خوبی از ریشه ها بدست آوریم :

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{n \times a^{n-۱}}$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n - b} \approx a - \frac{b}{n \times a^{n-۱}}$$

$$\sqrt[۳]{۲۵} = \sqrt[۳]{۳^۳ - ۲} \approx ۳ - \frac{۲}{۳ \times ۳^{۳-۱}} = ۳ - \frac{۲}{۳ \times ۹} = ۳ - \frac{۲}{۲۷} = \frac{۸۱ - ۲}{۲۷} = \frac{۷۹}{۲۷} \approx ۲/۹$$

اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد برای a و $\sqrt[۳]{a}$ سه حالت برای مقایسه می توانیم انجام دهیم :

الف : اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه $\sqrt[۳]{a} > a$

برای مثال می دانیم اگر $a = ۰/۵$ در این صورت $\sqrt[۳]{a} \approx \frac{۷۹}{۱۰۰}$

ب : اگر $a > ۱$ آنگاه $\sqrt[۳]{a} < a$

برای مثال می دانیم اگر $a = ۸$ در این صورت $\sqrt[۳]{۸} < ۸$

پ : برای $a = ۰ , ۱ , -۱$ داریم $\sqrt[۳]{a} = a$

توجه : در صورتی که $۰ < a < ۱$ در این صورت $\sqrt{a} > a$ و $a > a^۲$

سوال : تعداد اعداد طبیعی که فاصله جذرشان از عدد ۹ از یک واحد کمتر باشد را بدست آورید

پاسخ :

$$۸ < \sqrt{n} < ۱۰ \to ۶۴ < n < ۱۰۰$$

تعداد این اعداد عبارت است از $(۱۰۰ - ۶۴) + ۱ = ۳۷$

حاصل ضرب دو عبارت رادیکالی با فرجه های متفاوت :

اگر فرجه ها یکسان نباشد دو مرحله زیر را پیش می گیریم :

۱ – ک.م.م فرجه ها را بدست می آوریم

۲ –فرجه اولیه را در هر عددی که ضرب کرده ایم تا به ک.م.م برسد زیر رادیکال را نیز به همان تاون می رسانیم

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} =$$

مرحله اول : ک.م.م :

$$[۳,۲] = ۶$$

مرحله دوم :

$$\frac{۶}{۳} = ۲ \rightarrow \sqrt[۳\times۲]{۲^۲} \rightarrow \sqrt[۶]{۲^۲}$$

$$\frac{۶}{۲} = ۳ \rightarrow \sqrt[۲\times۳]{۳^۳} \rightarrow \sqrt[۶]{۳^۳}$$

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} = \sqrt[۶]{۲^۲} \times \sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt[۶]{۲^۲ \times ۳^۳} = \sqrt[۶]{۱۰۸}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}}} \times \sqrt[k]{b^{\frac{k}{m}}} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}} \times b^{\frac{k}{m}}} \quad , \qquad k = [n,m]$$

نکته : ضریب رادیکال را می توانیم به زیر رادیکال برگردانیم به این ترتیب که آن عدد را به توان فرجه می رسانیم و زیر رادیکال می بریم

مثال :

$$۲\sqrt{۳} = \sqrt{۲^۲ \times ۳} = \sqrt{۱۲}$$

و در حالت کلی داریم :

$$x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \times y}$$

می بینیم فرجه تغییری نمی کند .

تبدیل رادیکال مرکب به رادیکال ساده :

الف : اگر رادیکال مرکب به شکل زیر باشد

$$\sqrt[x]{a\sqrt[y]{b\sqrt[z]{c}}} = \sqrt[x]{a} \times \sqrt[x\times y]{b} \times \sqrt[x\times y\times z]{c} = \sqrt[x\times y\times z]{a^{y\times z} \times b^z \times c}$$

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = \sqrt[۳\times۲\times۳]{۲^{۲\times۳} \times ۳^۳ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۲^۶ \times ۳^۳ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴}$$
$$= \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

روش دوم : استفاده از ک.م.م فرجه ها :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۶}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = ۲^{\frac{۶}{۱۸}} \times ۳^{\frac{۳}{۱۸}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = \sqrt[۱۸]{۲^۶ \times ۳^۳ \times ۴^۱}$$

$$= \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

نکته : رادیکال های مرکب نوع دوم به شکل $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

به طور کلی در صورتی می توانیم این عبارت را به رادیکال ساده تبدیل کنیم که حاصل $a^۲ - b$مجذور کامل باشد که در این صورت جذر عبارت $a^۲ - b$ را برابر عددی مانند c قرار می دهیم $\sqrt{a^۲ - b} = c$ و از فرمول های زیر استفاده می کنیم :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} + \sqrt{\frac{a-c}{۲}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} - \sqrt{\frac{a-c}{۲}}$$

مثال : حاصل عبارت $\sqrt{۳-\sqrt{۸}}$ کدام است ؟

حل : $\sqrt{۳-\sqrt{۸}} = \sqrt{a-\sqrt{b}}$ یعنی a=۳ و b=۸ طبق فرمول $\sqrt{a^۲ - b} = \sqrt{۹-۸} = \sqrt{۱} = ۱ \to c = ۱$

جاگذاری :

$$\sqrt{۳-\sqrt{۸}} = \sqrt{\frac{۳+۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۳-۱}{۲}} = \sqrt{۲} - ۱$$

تمرین : حاصل $\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}$ را به صورت رادیکال ساده بدست آورید ؟

حل :روش اول (فرمول) : ابتدا عبارت را برای استفاده از فرمول به کمک رابطه ی $c = \sqrt{۷^۲ - ۴۸} = ۱$ محاسبه می کنیم داریم :

$$\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}} = \sqrt{\frac{۷+۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۷-۱}{۲}} = \sqrt{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

روش دوم : اتحاد :

$$\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}} = \sqrt{۷-\sqrt{۱۶\times۳}} = \sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{۴+۳-۲(۲)(\sqrt{۳})} = \sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲} = ۲-\sqrt{۳}$$

سوال :اگر $\sqrt[۳]{x} = \frac{۲۵}{۳۶}$ باشد مقدار $\sqrt{x}$ را به دست آورید .

پاسخ $(\sqrt[۳]{x})^{۳} = (\frac{۴}{۲۵})^{۳} = \frac{۲۵^{۳}}{۳۶^{۳}} = \frac{(۵^{۲})^{۳}}{(۶^{۲})^{۳}} = \frac{۵^{۶}}{۶^{۶}} = (\frac{۵}{۶})^{۶} \to x = (\frac{۵}{۶})^{۶}$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\frac{۵}{۶})^{۶}} = (\frac{۵}{۶})^{۳}$$

سوال : اگر $x = (\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲}$ در این صورت حاصل $x^{۲} - ۳x + ۱$ را بدست آورید

پاسخ :

$$x = (\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲} = (\frac{۹}{\sqrt{۳}})^{۲} = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷$$

$$x^{۲} - ۳x + ۱ = ۲۷^{۲} - ۳(۲۷) + ۱$$

سوال : اگر $۶a = ۳^{۲k+۱}$ باشد مقدار $۲۷^{\frac{k}{۳}}$ را بر حسب a بدست آورید .

$$۳^{۲k+۱} = ۳^{۲k} \times ۳^{۱} = ۶a \to ۳^{۲k} = ۲a$$

$$۲۷^{\frac{k}{۳}} = (۳^{۳})^{\frac{k}{۳}} = ۳^{k} = \sqrt{۳^{۲k}} = \sqrt{۲a}$$

مثال۳ : اعداد$\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵} - \sqrt{۶}$ را باهم مقایسه کنید

حل : داریم $(\sqrt{۶} - \sqrt{۵})^{۲} = ۶ + ۵ - ۲\sqrt{۳۰} = ۱۱ - ۲\sqrt{۳۰}$ و همچنین $(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^{۲} = ۳ + ۲ - ۲\sqrt{۶} = ۵ - ۲\sqrt{۶}$

در ادامه مانند قبل ...

چند سوال مهم :

سوال ۱) حاصل $A = \sqrt{۵ + ۴\sqrt{۳ - ۴\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۳}}}}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد ؟

پاسخ : از داخلی ترین رادیکال داریم : $۴ - ۲\sqrt{۳} = (\sqrt{۳} - ۱)^{۲} \to A = \sqrt{۵ + ۴\sqrt{۳ - ۴(\sqrt{۳} - ۱)}} =$

$$\sqrt{۵ + ۴\sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}}} = \sqrt{۵ + ۴\sqrt{(۲ - \sqrt{۳})^{۲}}} = \sqrt{۵ + ۴(۲ - \sqrt{۳})} = \sqrt{۱۳ - ۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲\sqrt{۳} - ۱)^{۲}} = ۲\sqrt{۳} - ۱ = \sqrt{۱۲} - ۱ \to ۳ < \sqrt{۱۲} < ۴ \to ۳ - ۱ < \sqrt{۱۲} - ۱ < ۴ - ۱ \to ۲ < \sqrt{۱۲} - ۱ < ۳$$

سوال ۲) حاصل عبارت A را محاسبه کنید

$$A = \frac{۱}{\sqrt{۲} + ۱} + \frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۴} + \sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۴۰۰} + \sqrt{۳۹۹}}$$

پاسخ : از تکنیک گویا کردن مخرج کسر استفاده کنیم

$$A=\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}+\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۳}}{(\sqrt{۴}+\sqrt{۳})(\sqrt{۴}-\sqrt{۳})}+\cdots+\frac{\sqrt{۴۰۰}-\sqrt{۳۹۹}}{(\sqrt{۴۰۰}+\sqrt{۳۹۹})(\sqrt{۴۰۰}-\sqrt{۳۹۹})}$$
$$=\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۴}-\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{۴۰۰}-\sqrt{۳۹۹}=\sqrt{۴۰۰}-۱=۲۰-۱=۱۹$$

سوال ۳) حاصل عبارت $X=\sqrt[۱۰]{۲۴+۲\sqrt{۲۴+۲\sqrt{۲۴+\cdots}}}$ را بدست آورید

پاسخ : از تکنیک به توان رساندن طرفین استفاده کنیم : به توان ۵ می رسانیم

$$X^{۵}=\sqrt{۲۴+۲\sqrt{۲۴+۲\sqrt{۲۴+\cdots}}}$$

و چون داخل رادیکال عبارت X تکرار شده است می توان نوشت $X^{۵}=\sqrt{۲۴+۲X^{۵}}\rightarrow X^{۱۰}=۲۴+۲X^{۵}\rightarrow X^{۱۰}-۲X^{۵}-۲۴=۰\rightarrow (X^{۵}-۶)(X^{۵}+۴)=۰\rightarrow \begin{cases} X^{۵}=۶\rightarrow X=\sqrt[۵]{۶} \\ X^{۵}=-۴\rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

سوال ۴) معادله ی رادیکالی مقابل را حل کنید و جواب هاب آن را مشخص کنید

$$\sqrt{x+۲\sqrt{x+۲\sqrt{x+\cdots+۲\sqrt{۳x}}}}=x$$

پاسخ : مانند قبل از تکرار رادیکال ها استفاده می کنیم: $\sqrt{x+۲x}=x\rightarrow\sqrt{۳x}=x\rightarrow ۳x=x^{۲}\rightarrow x^{۲}-۳x=۰\rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۳ \end{cases}$

البته با جایگزاری هم با کمی دقت می توانستیم به این جواب ها برسیم

سوال ۵) داریم $a=\sqrt{۳-\sqrt{۸}}$ و $b=\sqrt{۳+\sqrt{۸}}$ در این صورت حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را بدست آورید

$$a=\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۹-۸}}{۲}}-\sqrt{\frac{۳-\sqrt{۹-۸}}{۲}}=\sqrt{۲}-۱$$

$$b=\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۹-۸}}{۲}}+\sqrt{\frac{۳-\sqrt{۹-۸}}{۲}}=\sqrt{۲}+۱$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt{۲}+۱)}{(\sqrt{۲}-۱)-(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{۲\sqrt{۲}}{-۲}=-\sqrt{۲}$$

سوال ۶ : اگر $۳^{\sqrt{\frac{a}{۲}}}+۳^{-\sqrt{\frac{a}{۲}}}=۴$ باشد حاصل $۳^{\sqrt{۸a}}+۳^{-\sqrt{۸a}}$ را بدست آورید

اگر از تغییر متغیر استفاده کنیم می توانیم بنویسیم $B = ۳^{\sqrt{\frac{a}{۲}}}$ بنابراین از تعریف توان منفی داریم $B + \frac{۱}{B} = ۴$ و از طرفی در عبارت سوال می توان نوشت $B^۴ + \frac{۱}{B^۴} = ۳^{۴\sqrt{\frac{a}{۲}}} + ۳^{-۴\sqrt{\frac{a}{۲}}} = ۳^{-\sqrt{۸a}} + ۳^{\sqrt{۸a}}$ طبق قانونی که در اتحاد مربع داریم

$$B^۴ + \frac{۱}{B^۴} = (B^۲ + \frac{۱}{B^۲})^۲ - ۲ = \left(\left(B + \frac{۱}{B}\right)^۲ - ۲\right)^۲ - ۲ = (۱۶ - ۲)^۲ - ۲ = ۱۴^۲ - ۲ = ۱۹۴$$

توان رسانی و ارتباط آن با رادیکال :

برای یک عبارت با توان گویا داریم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال :

$$\sqrt[۴]{x^۸} = x^{\frac{۸}{۴}} = x^۲$$

عدد طلایی

اگر نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر عدد طلایی باشد آن مستطیل را مستطیل طلایی می نامیم یعنی اگر مستطیلی با طول و عرض a وb داشتیم آنگاه $\frac{a}{b} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

قوانین محاسبه سریع توان :

توان رساندن اعدادی که یکان آنها ۵ باشد

۱) دهگان را بنویس و با عدد یک جمع کن

۲) عدد بدست آمده از مرحله قبل را در دهگان ضرب کن

۳) جلوی عدد بدست آمده از مرحله قبل ۲۵ را بنویس

مثال : حاصل ضرب سریع ۳۵×۳۵ :

۱) $۳ + ۱ = ۴$

۲) $۴ \times ۳ = ۱۲$

۳) ۱۲۲۵

توان رساندن اعدادی که دهگان آنها ۵ باشد

۱) یکان عدد را به توان دو برسان

۲) یکان را با ۲۵ جمع کن

۳) جلوی جواب مرحله دوم اولی را بنویس

مثال : حاصل ضرب سریع ۵۱ × ۵۱ :

۱) $۱^{۲} = ۱$

۲) $۲۵ + ۱ = ۲۶$

۳) ۲۶۰۱

توان رساندن اعدادی که یکان آنها یک باشد :

۱) یک واحد از عدد کم می کنیم و به توان دو می رسانیم

۲) عدد را با عدد قبل خود جمع کن

۳) حاصل جمع مراحل قبل را بدست بیار

مثال : حاصل ضرب سریع $۹۱^{۲}$:

۱) $۹۰^{۲} = ۸۱۰۰$

۲) $۹۱ + ۹۰ = ۱۸۱$

۳) $۸۱۰۰ + ۱۸۱ = ۸۲۸۱$

The end of the trip on the POWER& ROOT PLANET

Do not be tired friends