بسمه تعالی

تمرینات فصل اول پلاستیسیته

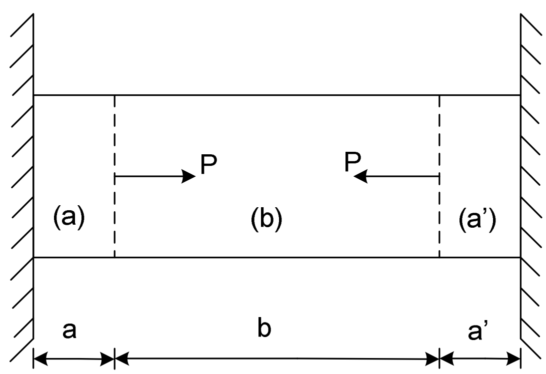
مسئله ۱،۱. یک میله که از دو انتها ثابت شده است، تحت دو نیروی محوری برابر ولی در خلاف جهت هم قرار دارد. فاصله دو نیرو از دو انتهای چپ و راست، برابر و مساوی a و فاصله بین نقطه اثر دو نیرو برابر b است که در شکل (پ.۷،۱) نشان داده شده است. میله از ماده با خاصیت الاستیک-پلاستیک کامل ساخته شده است و تنش تسلیم آن σ_y است. نیروی محوری P در آغاز از مقدار اولیه صفر افزایش می‌یابد، تا جایی که تمام میله در حالت پلاستیک کامل قرار بگیرد. سپس نیروی P باربرداری می‌شود تا مقدارش به صفر برسد. در ادامه این بار در جهت معکوس اعمال می‌شود. $b > 2a$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار نیروی بحرانی[1] را برای حد ناحیه الاستیک و پلاستیک یعنی P_e و P_p را در طول بارگذاری محاسبه کنید.

ب) مقدار تنش باقی مانده وکرنش پلاستیک را زمانی که نیروی محوری P تا مقدار صفر باربرداری شود، محاسبه کنید.

ج) مقدار نیروی بحرانی پلاستیک[2] P_p را در بارگذاری معکوس[3] محاسبه کنید.

د) نمودار P بر حسب u را برای سیکل کامل بارگذاری- باربرداری- بارگذاری معکوس برای حالتی که $b = 3a$ باشد رسم کنید. u جابجایی محوری P در ناحیه سمت چپ است.



شکل (پ.۷،۱).

حل: به علت تقارن، فقط تنش و کرنش در سمت چپ میله یعنی قسمت (a) و نیمه چپ قسمت (b) را در نظر می‌گیریم. معادلات تعادل و سازگاری به صورت زیر هستند:

$$\sigma_a - \sigma_b = \frac{P}{A} \qquad\qquad 2a\varepsilon_a + b\varepsilon_b = 0$$

[1] Limit load
[2] Plastic limit load
[3] Reversed loading

که در آن σ_a و ε_a به ترتیب تنش و کرنش در قسمت (a)، σ_b و ε_b تنش و کرنش در قسمت (b) هستند. A سطح مقطع میله می‌باشد. با استفاده از رابطه تنش- کرنش الاستیک، داریم:

$$\sigma_a = \frac{b}{L}\frac{P}{A}, \qquad \sigma_b = -\frac{2a}{L}\frac{P}{A}$$

که در آن $L = 2a + b$ طول میله است.

پاسخ قسمت الف: حد نیروی الاستیک P_e و حد نیروی پلاستیک P_p

به دلیل اینکه $b > 2a$، پس $|\sigma_a| > |\sigma_b|$ در نتیجه تغییر شکل پلاستیک ابتدا از قسمت (a) آغاز می‌شود.

اگر قرار دهیم $\sigma_a = \sigma_y$ می‌توانیم حد نیرو برای ماندن در ناحیه الاستیک، P_e را محاسبه کنیم:

$$\frac{P_e}{A} = \frac{L}{b}\sigma_y > \sigma_y$$

برای $P > P_e$، $\sigma_a = \sigma_y$، از معادله تعادل داریم:

$$\sigma_b = \sigma_y - \frac{P}{A}$$

اگر قرار دهیم $\sigma_b = -\sigma_y$ مقدار حدی نیرو برای ناحیه پلاستیک بدست می‌آید:

$$\frac{P_p}{A} = 2\sigma_y$$

پاسخ قسمت ب: بار برداری

وقتی نیروی P از مقدار P_p تا مقدار صفر کاهش می‌یابد، ماده در حالت باربرداری الاستیک قرار دارد و نمو تنش با نمو بار ΔP بصورت الاستیک رابطه دارند:

$$\Delta\sigma_a = \frac{b}{L}\frac{\Delta P}{A} \qquad \Delta\sigma_b = -\frac{2a}{L}\frac{\Delta P}{A}$$

بنابراین داریم:

$$\sigma_a = \sigma_y + \frac{b}{L}\frac{\Delta P}{A}, \qquad \sigma_b = -\sigma_y - \frac{2a}{L}\frac{\Delta P}{A}$$

اگر قرار دهیم $\Delta P = -P_p$ می‌توانیم تنش پسماند در قسمت‌های a و b را حساب کنیم داریم:

$$\sigma_a^* = \sigma_b^* = (1 - \frac{2b}{L})\sigma_y = -(1 - \frac{4a}{L})\sigma_y < 0$$

تنش پسماند فشاری است و $|\sigma_a| < |\sigma_y|$ است و در حالت باربرداری، تسلیم رخ نمی‌دهد.

کرنش پلاستیک برای حالت P=0 برابر با حالت $P = P_p$ است و در حالت $P = P_p$ داریم:

$$\varepsilon_b^p = 0, \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_b^e = -\frac{\sigma_y}{E} = -\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_a = -\frac{b}{2a}\varepsilon_b = \frac{b}{2a}\varepsilon_y = \varepsilon_y + (\frac{b}{2a} - 1)\varepsilon_y$$

که بدست می‌آید:

$$\varepsilon_a^p = (\frac{b}{2a} - 1)\varepsilon_y$$

پاسخ قسمت ج: بار گذاری در جهت معکوس

در طول بارگذاری معکوس، داریم:

$$\sigma_a = \sigma_a^* + \Delta\sigma_a = (1 - \frac{2b}{L})\sigma_y - \frac{b}{L}\frac{P'}{A}$$
$$\sigma_b = \sigma_b^* + \Delta\sigma_b = (1 - \frac{2b}{L})\sigma_y + \frac{2a}{L}\frac{P'}{A}$$

که در آن $\Delta\sigma_a$ و $\Delta\sigma_b$ نمو تنش مربوط به بار معکوس P' است که از مقدار صفر شروع به افزایش می‌کند. از آنجایی هنوز داریم $|\sigma_a| > |\sigma_b|$ ، این نشان می‌دهد که ابتدا بخش a از میله در حالت بارگذاری معکوس به حالت تسلیم در می‌آید. اگر قرار دهیم $\sigma_a = -\sigma_y$ در حالت بارگذاری معکوس داریم:

$$\frac{P'}{A} = \frac{P'_e}{A} = \frac{4a}{b}\sigma_y$$

بخش a در حالت فشاری تسلیم می‌شود. برای $P' > P'_e$ با استفاده از رابطه تعادل، دوباره می‌توانیم حد نیروی پلاستیک، P_p را در حالت بارگذاری معکوس حساب کنیم.

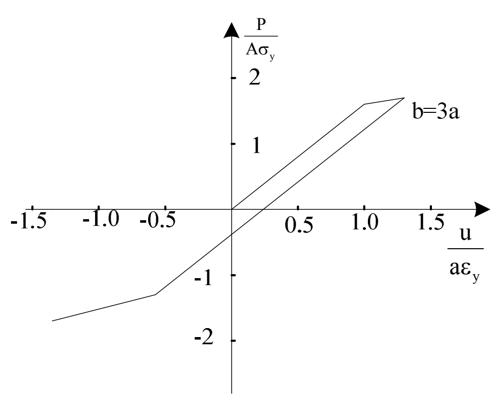
$$\frac{P'_p}{A} = 2\sigma_y$$

پاسخ قسمت د:

رابطه بین بارگذاری و جابجایی برای حالت b=3a رابطه بین نیروی P و جابجایی u را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$[\frac{P}{A\sigma_y}, \frac{u}{a\varepsilon_y}] = [0,0] \rightarrow [\frac{5}{3}, 1] \rightarrow [2, \frac{2}{3}] \rightarrow [0, \frac{3}{10}] \rightarrow [-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}] \rightarrow [-2, -\frac{3}{2}]$$

رابطه بصورت شکل زیر است:



شکل (س.۱.۷): برای حالت b=3a رابطه بین نیروی P و جابجایی u.

مسئله ۲،۱. مدل سخت شوندگی خطی زیر را برای میله‌ی دو سر ثابت مسأله بالا در نظر بگیرید:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad\qquad \varepsilon \le \varepsilon_0$$
$$\sigma = \sigma_0 + E_t\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) \qquad \varepsilon > \varepsilon_0\ ,\ \ \sigma_0 = E\varepsilon_0$$

که در آن $E_t = E/5$ مدول مماسی پلاستیک بوده و سخت‌شوندگی از نوع ایزوتروپیک است. میله ابتدا از $\mathrm{P}=0$ تا $\mathrm{P}=5A\sigma_0/2$ بارگذاری شده و سپس به طور کامل تا $\mathrm{P}=0$ باربرداری می‌شود. تنش های پسماند، کرنش‌های پسماند و کرنش پلاستیک را بعد از باربرداری محاسبه کنید. فرض کنید b=3a .

حل:

معادلات پایه

معادلات تعادل و سازگاری به صورت زیر می‌باشند:

$$\sigma_a - \sigma_b = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{A}}, \qquad 2a\varepsilon_a + b\varepsilon_b = 0$$

برای این مسئله، ما همچنین فرم نموی این معادلات را نیاز داریم. از $\Delta\sigma, \Delta\varepsilon$ و ΔP برای نمو کرنش، تنش و بارگذاری استفاده می‌کنیم. معادلات نموی تعادل و سازگاری به صورت زیر می‌باشند:

$$\Delta\sigma_a - \Delta\sigma_b = \frac{\Delta P}{\mathrm{A}}, \quad 2a\Delta\varepsilon_a + b\Delta\varepsilon_b = 0$$

راه حل الاستیک: راه حل الاستیک به صورت زیر می باشد.

$$\sigma_a = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}, \qquad \sigma_b = -\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}$$

از آنجایی که $\mathrm{b}=3\mathrm{a}$ می‌باشد، قسمت a در ابتدا به تسلیم می‌رسد و حد بار P_e برابر است با:

$$\frac{\mathrm{P_e}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{b}}\sigma_0$$

و در $\mathrm{P}=\mathrm{P}_e$ داریم:

$$\sigma_e = \sigma_0\ , \quad \sigma_b = -\frac{2a}{b}\sigma_0 = -\frac{2}{3}\sigma_0$$

برای $\mathrm{P}>\mathrm{P_e}$: برای $\mathrm{P}>\mathrm{P_e}$ ، در قسمت b، ماده در مرحله بارگذاری الاستیک قرار دارد، روابط تنش کرنش الاستیک هنوز باقی است. برای $\mathrm{P}>\mathrm{P_e}$ در حالت بار $\Delta\mathrm{P}$، با ترکیب کردن روابط تنش کرنش نموی با بسط تنش‌های نموی داریم:

$$\Delta\sigma_a = \frac{E}{5}\Delta\varepsilon_a\ ,\ \Delta\sigma_b = E\Delta\varepsilon_b \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_a = \frac{b}{10a+b}\frac{P-P_e}{A},\ \Delta\sigma_b = -\frac{10a}{10a+b}\frac{P-P_e}{A}$$

بنابراین، برای $\mathrm{P}>\mathrm{P_e}$ تنش‌های عبارتند از:

$$\sigma_a = \sigma_0 + \frac{b}{10a+b}\frac{P-P_e}{A}, \quad \sigma_b = -\frac{2a}{b}\sigma_0 - \frac{10a}{10a+b}\frac{P-P_e}{A}$$

راه حل بالا تا زمانی که $\sigma_b = -\sigma_0$ برقرار است.

در نظر بگیرید $\sigma_b = -\sigma_0$:

$$\sigma_b = -\frac{2a}{b}\sigma_0 - \frac{10a}{10a+b}\frac{P-P_e}{A} = -\sigma_0 \;\Rightarrow\; P = P_1 = \frac{21}{10}A\sigma_0$$

ما تنش ها را در حالت $P = P_1 = \frac{21}{10}A\sigma_0$ بدست می‌آوریم.

$$\sigma_b = -\sigma_0 \,,\; \sigma_a = \frac{11}{10}\sigma_0$$

برای $P > P_1$، هردو قسمت میله در حالت پلاستیک قرار دارند. با ترکیب کردن روابط تنش کرنش نموی داریم:

$$\Delta\sigma_a = E_t\Delta\varepsilon_a = \frac{E}{5}\Delta\varepsilon_a \,,\;\; \Delta\sigma_b = E_t\Delta\varepsilon_b = \frac{E}{5}\Delta\varepsilon_b$$

با معادلات نموی تعادل و سازگاری، ما تنش‌های نموی را برای حالت $P > P_1$ بدست می‌آوریم:

$$\Delta\sigma_a = \frac{b}{L}\frac{\Delta P}{A} = \frac{3}{5}\frac{\Delta P}{A},\; \Delta\sigma_b = -\frac{2a}{L}\frac{\Delta P}{A} = -\frac{2}{5}\frac{\Delta P}{A}$$

با در نظر گرفتن $P_2 = \frac{5}{2}A\sigma_0$ بار نهایی برابر است با:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{5}{2}A\sigma_0 - \frac{21}{10}A\sigma_0 = \frac{4}{10}A\sigma_0$$

ما تنش های نموی را بدست می‌آوریم:

$$\Delta\sigma_a = \frac{6}{25}\sigma_0 \;\;,\;\; \Delta\sigma_b = -\frac{4}{25}\sigma_0$$

بنابراین،تنش در میله در حالت $P = P_2 = \frac{5}{2}A\sigma_0$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_a = \frac{11}{10}\sigma_0 + \frac{6}{25}\sigma_0 = \frac{67}{50}\sigma_0 \;\;,\;\; \sigma_b = -\sigma_0 - \frac{4}{25}\sigma_0 = -\frac{58}{50}\sigma_0$$

باربرداری و تنش های پسماند:

در طول باربرداری، از $P = \frac{5}{2}A\sigma_0$ تا $P = 0$، در هر دوقسمت از میله ، ماده در حالت باربرداری الاستیک قرار دارد،تنش های نموی در طول باربرداری می تواند به راحتی بدست آید.

$$\Delta\sigma_a = \frac{b}{L}\frac{\Delta P}{A} = -\frac{3}{2}\sigma_0 \;\;,\;\; \Delta\sigma_b = -\frac{2a}{L}\frac{\Delta P}{A} = \sigma_0$$

از آنجایی که $\Delta P = -\frac{5}{2}A\sigma_0$ ما تنش های پسماند را حساب می کنیم.

$$\sigma_a^{\,*} = \frac{67}{50}\sigma_0 + \Delta\sigma_a = -\frac{4}{25}\sigma_0 < 0 \;,\; \sigma_b^{\,*} = -\frac{58}{50}\sigma_0 + \Delta\sigma_b = -\frac{4}{25}\sigma_0 < 0$$

کرنش های پلاستیک و کرنش های پسماند:

به خاطر اینکه مدول پلاستیک E_P ثابت است،کرنش پلاستیک می‌تواند با کم کردن σ_0 از تنش در $P=\frac{5}{2}A\sigma_0$ و سپس تقسیم آن بر E_P بدست آید.

$$\varepsilon_a{}^p=\left(\frac{67}{50}\sigma_0-\sigma_0\right)/\,E_p=\frac{34}{25}\varepsilon_0\ ,\ \ \varepsilon_b{}^p=\left(-\frac{58}{50}\sigma_0+\sigma_0\right)/\,E_p=-\frac{16}{25}\varepsilon_0$$

کرنش‌های پسماند شامل دو قسمت می‌شوند: قسمت الاستیک که مربوط به تنش‌های پسماند می‌باشد و قسمت کرنش پلاستیک. بنابراین، کرنش پسماند از رابطه ی زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_a{}^*=\frac{\sigma_a{}^*}{E}+\varepsilon_a{}^p=\frac{6}{5}\varepsilon_0\ ,\ \ \varepsilon_b{}^*=\frac{\sigma_b{}^*}{E}+\varepsilon_b{}^p=-\frac{4}{5}\varepsilon_0$$