به نام حضرت دوست

آذر ماه 95

درس نامه

آشنایی با مدل پلی تروپیک و کاربرد آن در اخترفیزیک

11 th IOAA Team
I.R. IRAN

تهیه و گردآوری : امیراحسان علیزاده

ویرایشگر : امیرحسین ستوده فر

فهرست مطالب

بخش اول :

بخش دوم :

بخش اول

1. آشنایی و پیش نیاز :

منابع اخترفیزیکی که به زبان فارسی ترجمه شده اند ، به برخی موضوعات پر اهمیت و پیشرفته اخترفیزیک کمتر پرداخته اند . منابع لاتین که جزو کتب دانشگاه های معتبر برای اخترفیزیک در مقطع دکترا هستند ، به منظور مطالعه یک دانش پژوه دبیرستانی به حد زیادی پیشرفته و گیج کننده اند . هدف از نوشتن این درسنامه شفاف سازی این موضوعات و همچنین ایجاد یک منبع مناسب برای مطالعه اخترفیزیک پیشرفته است که از جهت سوال خیز بودن نیز بسیار غنی است . این درسنامه شامل دو بخش است . بخش اول این درسنامه اندکی به ترمودینامیک و رفتار گاز ها می پردازد . بررسی رفتار گاز های پلی تروپیک و بی دررو که به نوعی در بخش دوم درسنامه به آن نیاز داریم ، در این قسمت به تفضیل گفته شده است . توصیه می شود پیش از مطالعه این بخش با مفاهیمی نظیر گاز کامل ، معادله حالت گاز ها ، انتگرال فشار و مفاهیم پایه ای اخترفیزیک آشنایی داشته باشید . می توانید برای مطالعه این مباحث اوایل فصل دهم کتاب مدرن را مطالعه کنید .

2. معادله حالت گاز ها و تعریف گاز پلی تروپیک

معادله حالت یک گاز در واقع ویژگی های ماکروسکوپیک آن گاز را به هم مرتبط می کند . در حالت کلی معادله حالت بصورت $P = f(\rho, T, X)$ است که به این معنی است که فشار تابعی از چگالی ، دما و ترکیب شیمیایی گاز است . به طور مثال برای گاز کامل داریم :

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \Longrightarrow P \propto \frac{\rho T}{X}$$

در حالت های خاص معادله حالت بالا به شکل ساده تری است . یک دسته خاص از این گاز ها را گاز های پلی تروپیک می نامند که معادله حالت آن ها به گونه ای است که فشار تنها تابعی از چگالی یا دما (با فرض ثابت بودن ترکیب شیمیایی) است .

$P = f(\rho)$ یا $P = f(T)$

به عنوان مثال گاز کامل این ویژگی را ندارد ، اما گاز فوتونی (فشار تابشی) یک گاز پلی تروپیک است ، زیرا تنها تابع صریحی از دما است .

$$P = \frac{1}{3}aT^4 \implies P \propto T^4$$

گاز های پلی تروپیک به خودی خود شامل چند دسته می شوند . ما با دسته خاصی از گاز های پلی تروپیک سر و کار داریم که آن ها را در قسمت بعد بررسی می کنیم .

3. گاز بی دررو :

قانون اول ترمودینامیک ، یا اصل پایستگی انرژی ، بیان می کند که انرژی داخلی یک سیستم می تواند از دو طریق تغییر کند : گرما و کار . این قانون در فیزیک به شکل زیر نوشته می شود :

$$\delta U = \delta Q - \delta W$$

یک المان جرم Δm به صورت پوسته کروی با دمای T ، چگالی ρ و ترکیب شیمیایی X در نظر می گیریم و فرض می کنیم در آن تمامی این کمیت ها ثابت هستند . برای کمیت f ، کمیت ثانویه δf به صورتی تعریف می شود که تغییرات زمانی آن در مدت δt مد نظر است .انرژی درونی بر واحد جرم این المان را u و فشار را با P نشان می دهیم . برای این المان جرم مشخص (Δm ثابت نسبت به زمان) داریم :

$$U = u\Delta m \implies \delta U = \Delta m.\delta u \qquad (1)$$

از تعریف کار می دانیم :

$$dW = F.dr \implies dW = \frac{F}{A}.(Adr) = PdV$$

برای این Δm ، یک المان حجم کوچک (ΔV) متناظر با آن تعریف می شود ، در نتیجه :

$$\delta W = P\delta(\Delta V) = P\delta\left(\frac{\Delta m}{\rho}\right) = P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad (2)$$

در نتیجه با جاگذاری معادلات (1) و (2) در قانون اول ترمودینامیک داریم :

$$\Delta m.\delta u = \delta Q - P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

یک حالت خاص از فرایند های ترمودینامیکی ، زمانی رخ می دهد که تبادل انرژی بین سیستم و محیط وجود نداشته باشد ($\delta Q = 0$) این فرایند ها را بی دررو (*adiabatic*) می نامند ، در نتیجه یک گاز که در این فرایند شرکت می کند را گاز بی دررو می نامند .

$$\delta Q = 0 \Longrightarrow \Delta m.\,\delta u = -P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \Longrightarrow \delta u = -P\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

با کمی محاسبه به این نتیجه میرسیم که بعد u با بعد $\frac{P}{\rho}$ یکسان است ، در نتیجه فرض می کنیم رابطه بین دو این کمیت به صورت خطی است ، یعنی :

$$u = n\frac{P}{\rho}$$

با جاگذاری این عبارت در قانون اول ترمودینامیک در یک فرایند بی دررو داریم :

$$\delta u = n\left(\frac{\delta P}{\rho} - P\frac{\delta\rho}{\rho^2}\right) = P\frac{\delta\rho}{\rho^2}$$

با ضرب یک $\frac{\rho}{P}$ در طرفین رابطه داریم :

$$n\left(\frac{\delta P}{P} - \frac{\delta\rho}{\rho}\right) = \frac{\delta\rho}{\rho} \Longrightarrow n\frac{\delta P}{P} = (n+1)\frac{\delta\rho}{\rho}$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta P}{P} = \frac{(n+1)}{n}\frac{\delta\rho}{\rho} \Longrightarrow P \propto \rho^{\frac{n+1}{n}}$$

در نتیجه معادله حالت یک گاز بی دررو بصورت $P = K_a\,\rho^{\frac{n+1}{n}}$ است که در آن K_a یک ثابت است و به مشخصات سیستم بستگی دارد . همچنین n را نمایه پلی تروپیک می نامیم . از معادله حالت گاز بی دررو می توان بدست آورد :

$$\frac{d\ln P}{d\ln\rho} = \frac{n+1}{n} \coloneqq \gamma_a$$

که در آن γ_a را ضریب بی دررویی می نامیم .

4. بررسی دو حالت خاص :

دو گاز بسیار مشهور و پرکاربرد در اخترفیزیک ، یعنی گاز کامل و گاز فوتونی را در این قسمت بررسی می کنیم.

- گاز کامل :

از معادله حالت گاز کامل داریم :

$$PV = NkT$$

می دانیم انرژی درونی یک گاز کامل برابر است با :

$$U = \frac{3}{2}NkT$$

با ترکیب دو معادله بالا داریم :

$$\Longrightarrow U = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}P(\frac{\overline{m}}{\rho})$$

با توجه به تعریف u (انرژی بر واحد جرم) داریم :

$$u = \frac{U}{\overline{m}} = \frac{\frac{3}{2}\,\frac{P}{\rho}\,\overline{m}}{\overline{m}} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{\rho}$$

با مقایسه عبارت بدست آمده با $u = n\frac{P}{\rho}$ داریم :

$$\boxed{n_{\text{gas}} = \frac{3}{2}} \qquad \boxed{\gamma_{\text{gas}} = \frac{5}{3}}$$

حال می خواهیم از یک رهیافت کاملا متفاوت مسئله را برای گاز کامل حل کنیم . دانستیم که برای یک گاز کامل لزومی وجود ندارد که فرایند بی دررو باشد . در نتیجه قانون اول ترمودینامیک را با فرض جدید آنکه تغییرات گرمایی مخالف صفر است ($dQ \neq 0$) بازنویسی می کنیم :

$$\Delta m.\delta u = \delta Q - P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

تعدادی فرایند معروف در ترمودینامیک وجود دارد که از قبل با فرایند بی دررو آشنا شدیم . فرایند های فشار ثابت و حجم ثابت در این بخش کاربرد دارند . این دو فرایند ، همان طور که از نام آن ها پیداست ، به ترتیب در فشار و حجم ثابت انجام می شوند . در نتیجه برای فرایند حجم ثابت به علت صفر بودن تغییرات حجم ($\delta(\Delta V) = 0$) قانون اول ترمودینامیک به شکل زیر در می آید :

$$if\ \Delta V = cte\ \rightarrow\ \Delta m.\delta u = \delta Q + 0 = \delta Q$$

برای گاز کامل پارامتری به نام گرمای ویژه تعریف می شود که برابر مقدار گرمای لازم برای بالا بردن دمای یک سیستم گازی به اندازه یک واحد است . در نتیجه :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

برای این دو فرایند گرمای ویژه نیز تعریف می شود . در نتیجه :

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{P=cte}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{V=cte}$$

در نتیجه با جاگذاری آن ها در قانون اول ترمودینامیک داریم :

برای فرایند فشار ثابت :

$$\Delta m.\delta u = C_P\,\delta T - P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

برای فرایند حجم ثابت :

$$\Delta m.\delta u = C_V\,\delta T$$

در نتیجه چون این دو فرایند یک تغییر انرژی یکسان را به ما می دهند :

$$C_V\,\delta T = C_P\,\delta T - P\Delta m\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

از معادله حالت گاز کامل برای فرایند فشار ثابت داریم :

$$P = \frac{\rho kT}{\bar{m}} \rightarrow P\bar{m}\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = k\delta T$$

با جاگذاری معادله بالا :

$$C_V \delta T = C_P \delta T - k\delta T \ \rightarrow \ C_V = C_P - nR$$

با تعریف ثابت گاز ها R و n جرم مولی گاز که می دانیم :

$$N = 1 \ \rightarrow k = nR$$

حال رابطه بین گرما های ویژه را بدست آوردیم . دانستیم :

$$\Delta m.\delta u = C_V \delta T$$

و همچنین با جاگذاری قانون گاز ایده آل $(\bar{m} = \Delta m)$:

$$P = \frac{\rho kT}{\bar{m}} \rightarrow T = \frac{\bar{m}}{k}\frac{P}{\rho} \ \rightarrow \delta T = \frac{\bar{m}}{k}\delta\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$\Longrightarrow \Delta m.\delta u = C_V \frac{\Delta m}{nR}\delta(\frac{P}{\rho})$$

در نتیجه :

$$\delta u = \frac{C_V}{nR}\delta\left(\frac{P}{\rho}\right) \Longrightarrow u = \frac{C_V}{nR}(\frac{P}{\rho})$$

با مقایسه عبارت بدست آمده با $u = n\frac{P}{\rho}$ داریم :

$$\boxed{n = \frac{C_V}{nR}}$$

در نتیجه :

$$\gamma = 1 + \frac{nR}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V}$$

با جاگذاری $C_V = C_P - nR$:

$$\boxed{\gamma = \frac{C_P}{C_V}}$$

در نتیجه رابطه بالا ضریب بی دررویی را به ویژگی های یک گاز ، یعنی گرما ویژه ، مرتبط می کند . حال می خواهیم ضریب گاما را برای گاز کامل بدست آوریم ، می دانیم :

$$\delta U = C_V \delta T$$

می دانیم انرژی درونی یک ذره از گاز کامل برابر است با :

$$U = \frac{3}{2} nRT \;\; \rightarrow \;\; \delta U = \frac{3}{2} nR \, \delta T$$

در نتیجه با برابر گذاشتن دو رابطه اخیر :

$$C_V = \frac{3}{2} nR \;\; \rightarrow \;\; C_P = \frac{5}{2} nR$$

در نتیجه :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

- گاز فوتونی (تابش)

از معادله حالت این گاز داریم :

$$P = \frac{1}{3} a T^4$$

همچنین از رابطه انتگرال فشار می دانیم فشار تابشی سه برابر چگالی انرژی آن است :

$$P = \frac{1}{3} \frac{\Delta E}{\Delta V}$$

با فرض آنکه ΔE مقدار انرژی هر ذره با جرم Δm است ، داریم :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta E}{\Delta V}\,\frac{\Delta m}{\Delta E} = 3P\frac{1}{u}$$

در نتیجه :

$$u = 3\frac{P}{\rho}$$

با مقایسه عبارت بدست آمده با $u = n\frac{P}{\rho}$ داریم :

$$\boxed{n_{\text{rad}} = 3} \qquad \boxed{\gamma_{\text{gas}} = \frac{4}{3}}$$

بخش دوم

1. آشنایی و پیش نیاز :

تحول یک ستاره در یک فرایند شبه پایدار (quasi-static) رخ می دهد که در آن ساختار مواد تشکیل دهنده ستاره به آرامی تغییر می کند (می توان از آن صرف نظر کرد) و تعادل هیدرواستاتیک و گرمایی در آن برقرار است .با توجه به معادلات ساختار ستاره ای ، میدانیم که این معادلات به صورت چند معادله دیفرانسیل کوپل شده و غیر خطی هستند و حل آن ها به صورت تحلیلی ممکن نیست و توسط کامپیوتر ها انجام می شود .در نتیجه برای یافتن نحوه رفتار ستاره در طول تحولش نیازمند به یک مدل ستاره ای هستیم تا بتوان مقادیر ستاره ای را تابعی از r بدست آورد . مدلی که در این درسنامه آن را مطرح می کنیم ، مدلی موسوم به مدل پلی تروپیک (Polytropic Model) است . پیش نیاز شما برای مطالعه این درسنامه ، آشنایی با گاز پلی تروپیک ، معادله حالت آن ، نحوه تعریف و بدست آوردن پارامتر های این گاز است که در بخش اول به تفضیل به آن پرداخته شده است .

---

2. روش معمول یافتن تابع چگالی :

از معادله تعادل هیدرواستاتیک داریم :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

با ضرب $\frac{r^2}{\rho(r)}$ در دو طرف رابطه داریم :

$$\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}\cdot\frac{r^2}{\rho(r)}$$

با مشتق گیری نسبت به r از دو طرف رابطه داریم :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}\right) = -G\,\frac{dM(r)}{dr}$$

می دانیم :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

در نتیجه :

$$\frac{d}{dr}(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}) = -4\pi G\rho(r)r^2$$

با ضرب $\frac{1}{r^2}$ در طرفین رابطه :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}) = -4\pi G\rho(r)$$

معادله بالا را می توان از معادله پواسون بدست آورد :

$$\nabla^2\Phi(\mathrm{r}) = 4\pi G\rho(r)$$

که ∇^2 را عملگر لاپلاسی می نامند که به نوعی مشتق دوم محسوب می شود . در دستگاه کروی معادله بالا به شکل زیر نوشته می شود :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi(r)}{dr}\right) = 4\pi G\rho(r)$$

$\Phi(r)$ را باید برحسب $P(r)$ و $\rho(r)$ بدست آوردیم .

طبق تعریف :

$$\vec{F} = -dm\vec{\nabla}\Phi(r) \rightarrow -dPA = -dm\frac{d\Phi(r)}{dr}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{AdP}{dm} = \frac{AdP}{\rho Adr}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

در نتیجه :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = 4\pi G\rho(r)$$

از معادله حالت گاز پلی تروپیک داریم :

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

که در آن $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ است . ابتدا مقدار $\frac{dP(r)}{dr}$ را برای آن بدست می آوریم :

$$\frac{dP(r)}{dr} = K(\frac{1+n}{n})\rho(r)^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho(r)}{dr}$$

با جاگذاری آن در رابطه اصلی داریم :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{\frac{r^2}{\rho(r)}\cdot\left[K(\frac{1+n}{n})\rho(r)^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho(r)}{dr}\right]\right\} = -4\pi G\rho(r)$$

بیرون آوردن ثوابت از داخل مشتق و ساده سازی :

$$K\left(\frac{1+n}{n}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right] = -4\pi G\rho(r) \qquad (1)$$

برای رسیدن به معادله دلخواهمان ، مشتق را باز می کنیم :

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right] = r^2\frac{d}{dr}\left(\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right) + \rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\frac{dr^2}{dr}$$

ابتدا مشتق جمله اول را باز می کنیم و آن را A می نامیم :

$$A : \frac{d}{dr}\left(\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right) = r^2\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)\rho(r)^{\frac{1}{n}-2}\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2 + \rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}\right]$$

جمله دوم نیز برابر است با مقدار زیر و آن را B می نامیم :

$$B\,:\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\frac{dr^2}{dr}=2r\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}$$

با توجه به تعریف :

$$\Longrightarrow\frac{d}{dr}\left[r^2\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right]=A+B$$

$$A+B=r^2\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)\rho(r)^{\frac{1}{n}-2}\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2+\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}\right]+2r\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}$$

در نتیجه :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{\frac{r^2}{\rho(r)}\cdot\left[K(\frac{1+n}{n})\rho(r)^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho(r)}{dr}\right]\right\}=\frac{1}{r^2}(A+B)$$

$$\Longrightarrow\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)\rho(r)^{\frac{1}{n}-2}\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2+\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}\right]+\frac{2}{r}\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}$$

با جاگذاری عبارت بالا در معادله (1) داریم :

$$\left[\left(\frac{1-n}{n}\right)\rho(r)^{\frac{1}{n}-2}\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2+\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}\right]+\frac{2}{r}\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}=-\frac{4\pi G}{K}\left(\frac{n}{1+n}\right)\rho(r)$$

با مرتب سازی آن داریم :

$$\boxed{\frac{d^2\rho(r)}{dr^2}+\left(\frac{1-n}{n}\right)\frac{1}{\rho(r)}\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2+\frac{2}{r}\frac{d\rho(r)}{dr}+\frac{4\pi G}{K}\left(\frac{n}{1+n}\right)\rho(r)^{2-\frac{1}{n}}=0}$$

با حل معادله دیفرانسیل بالا برای هر n ، تابع چگالی بدست می آید . اگر بخواهیم معادله دیفرانسیل را به شکل ساده تری تعریف کنیم ، داریم :

$$\ddot{\phi}+\alpha\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}+\beta\frac{\dot{\phi}}{r}+\gamma\phi^{2-\frac{1}{n}}=0$$

معادله دیفرانسیل بالا ، همان طور که از ظاهر آن پیدا است ، بسیار پیچیده و حل آن احتمالا دشوار است . پس باید به دنبال راه جدیدی برای یافتن $\rho(r)$ بگردیم .

3. بدست آوردن معادله لین–امدن :

رابطه (1) را بازنویسی می کنیم :

$$K\left(\frac{1+n}{n}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left[r^2\rho(r)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho(r)}{dr}\right]=-4\pi\mathrm{G}\rho(r)$$

حال فرض می کنیم برای دسته خاصی از ستارگان ، تابع چگالی بصورت زیر است :

$$\rho(x)=\rho_c f(x)\ \ which\ \ x={}^{r}/_{R}\ ,\ 0\le f(x)\le 1$$

حال فرض کنید یک دسته خاص تر از ستارگان وجود دارند که تابع ***f(x)*** آن ها فرم توانی با نمای ***n*** دارد و بصورت زیر است :

$$f\left({}^{r}/_{R}\right)=\theta^n$$

در نتیجه :

$$\rho(r)=\rho_c\,\theta^n\ \ ,0\le\theta\le 1$$

آنگاه :

$$\frac{d\rho}{dr}=\rho_c\left(n\theta^{n-1}\frac{d\theta}{dr}\right)$$

حال با جاگذاری روابط جدید :

$$K\left(\frac{1+n}{n}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left[r^2(\rho_c\theta^n)^{\frac{1}{n}-1}\rho_c\left(n\theta^{n-1}\frac{d\theta}{dr}\right)\right]=-4\pi\mathrm{G}\rho_c\theta^n$$

با ساده سازی و بیرون بردن ثوابت از مشتق :

$$K(1+n)\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=-4\pi\mathrm{G}\theta^n$$

با تقسیم یک $4\pi G$ بر طرفین معادله داریم :

$$\frac{K(1+n)}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=-\theta^n$$

ثابت پشت $\frac{1}{r^2}$ بعد ^{2}(مکان) دارد ، یعنی میتوان با استفاده از یک تغییر متغیر و معرفی ثابت α داشت :

$$\alpha^2\coloneqq\frac{K(1+n)}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1}{n}-1}$$

در نتیجه :

$$\alpha^2\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)=-\theta^n$$

در نتیجه می توان یک کمیت بی بعد ξ تعریف کرد به صورتی که :

$$r=\alpha\xi$$

با جایگذاری آن :

$$\alpha^2\frac{1}{\alpha^2\xi^2}\frac{d}{\alpha d\xi}\left(\alpha^2\xi^2\frac{d\theta}{\alpha d\xi}\right)=-\theta^n$$

ساده سازی :

رابطه روبرو را **معادله لین- امدن** می نامند .

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-\theta^n}$$

4. شرایط مرزی :

با تحلیل متغیر های جدید داریم :

$$r = \alpha\xi$$

$$\rho(r) = \rho_c\,\theta^n$$

همچنین در رابطه با شیب تغییرات پارامتر θ می توان بحث کرد . از رابطه تعادل هیدرواستاتیک داریم :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

که در آن $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ است . ابتدا مقدار $\frac{dP(r)}{dr}$ را برای آن بدست می آوریم :

$$\frac{dP(r)}{dr} = K(\frac{1+n}{n})\rho(r)^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho(r)}{dr}$$

در نتیجه :

$$K\left(\frac{1+n}{n}\right)\rho(r)^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\Longrightarrow K(\frac{1+n}{n})\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)^{1-\frac{1}{n}}$$

با جاگذاری $\rho(r) = \rho_c\,\theta^n$:

$$\Longrightarrow K\left(\frac{1+n}{n}\right)\left[\rho_c\, n\, \theta^{n-1}\frac{d\theta(r)}{dr}\right] = -\frac{GM(r)}{r^2}(\rho_c\,\theta^n)^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{G}{K(1+n)\rho_c^{\frac{1}{n}}}\frac{M(r)}{r^2}$$

در نتیجه تابع بالا به شکل زیر است :

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -A\ \frac{M(r)}{r^2}$$

که در آن ضریب رابطه A یک ثابت است .

در نزدیکی مرکز ، ابتدا باید رفتار تابع $M(r)$ را بدست می آوریم ، از بسط تیلور حول مرکز ($r = 0$) داریم :

$$M(r) = M(0) + \frac{dM}{dr}_{r=0}(r-0) + \frac{d^2M}{dr^{\,2}}_{r=0}\frac{(r-0)^2}{2} + \frac{d^3M}{dr^{\,3}}_{r=0}\frac{(r-0)^3}{6} + O(r^3)$$

چون این بسط را تا اولین مرتبه غیر صفر حول مرکز می خواهیم ، باید ضرایب را بررسی کنیم ، در نتیجه :

$$\rightarrow \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \rightarrow \ \frac{dM}{dr}_{r=0} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2M}{dr^{\,2}} = 4\pi\left[r^2\frac{d\rho(r)}{dr} + 2r\rho(r)\right] \rightarrow \ \frac{d^2M}{dr^{\,2}}_{r=0} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^3M}{dr^{\,3}} = 4\pi\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho(r)}{dr}\right) + \frac{d}{dr}\big(2r\rho(r)\big)\right]$$

$$= 4\pi\left[4r\frac{d\rho(r)}{dr} + r^2\frac{d^2\rho(r)}{dr^{\,2}} + 2\rho(r)\right] \rightarrow \ \frac{d^3M}{dr^{\,3}}_{r=0} = 8\pi\rho(r)$$

چون ضریب مرتبه سوم ناصفر است ، عبارت را تا مرتبه سوم حول مرکز می نویسیم و داریم :

$$M(r) = 8\pi\rho(r)\frac{r^3}{6} + O(r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho(r) + O(r^3)$$

در نتیجه :

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -A\ \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho(r) + O(r^3)}{r^2} = -A\ \left[\frac{4}{3}\pi r\rho(r) + O(r)\right]$$

در نتیجه در مرکز ستاره :

$$\frac{d\theta(r)}{dr}_{r=0} = 0$$

از روابط این قسمت می توان شرایط مرزی متناسب با متغیر های جدید را بدست آورد :

$$\begin{cases} center : r = 0 \implies \xi = 0 \qquad , \qquad \rho = \rho_c \implies \theta = 1 \\ surface : r = R \implies \xi = \xi^* = \dfrac{R}{\alpha} \qquad , \qquad \rho = 0 \implies \theta = 0 \end{cases}$$

---

5. معادله جرم :

حال می خواهیم از این معادله استفاده کنیم ! برای یافتن M(r) داریم :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

آنرا برحسب متغیر های جدید (ξ و θ) بازنویسی می کنیم :

$$M(\xi) = \int_0^R 4\pi\alpha^2\xi^2 \, \rho_c \, \theta^n \alpha d\xi = 4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \theta^n d\xi$$

از معادله لین امدن داریم :

$$\xi^2\theta^n d\xi = -d\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)$$

در نتیجه :

$$M(\xi) = -4\pi\alpha^3 \, \rho_c \int_0^r d\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -4\pi\alpha^3 \, \rho_c \left[\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) - \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\text{center}}\right]$$

$$center : \ \xi = 0 \Rightarrow \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\text{center}} = 0$$

$$M(\xi) = -4\pi\alpha^3\, \rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) \Rightarrow M_{\text{Total}} = -4\pi\alpha^3 \rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}$$

در نتیجه رابطه جرم کل ستاره از یک انتگرال تبدیل به یک رابطه خطی شد !

---

6. رابطه جرم و شعاع :

از رابطه چگالی متوسط داریم :

$$\bar{\rho} = \frac{M_{\text{Total}}}{{}^{4\pi}/_{3}\, R^3} \qquad \text{(a)}$$

با جاگذاری همه پارامتر ها برحسب (ξ و θ) داریم :

$$\bar{\rho} = \frac{-4\pi\alpha^3 \rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}}{{}^{4\pi}/_{3}\, \alpha^3 \xi^{*3}} = \left[-\frac{3}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right] \rho_c = \frac{1}{D_n}\, \rho_c$$

$$\Rightarrow \rho_c = D_n \bar{\rho} \qquad , \qquad D_n = \left[-\frac{3}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right]^{-1} \qquad (b)$$

حال می خواهیم رابطه جرم و شعاع کل را برحسب ثوابت و n بدست آوریم ، در نتیجه ρ_c را حذف کنیم ، می دانیم :

$$\alpha^2 = \frac{K(1+n)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \Rightarrow \rho_c = \left(\frac{4\pi G \alpha^2}{K(1+n)}\right)^{\frac{n}{1-n}} \qquad (c)$$

می دانیم :

$$\text{(a)}, \text{(b)}, \text{(c)} \Rightarrow \left(\frac{4\pi G \alpha^2}{K(1+n)}\right)^{\frac{n}{1-n}} = \left[-\frac{3}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right]^{-1} \frac{M_{\text{Total}}}{{}^{4\pi}/_{3}\, R^3}$$

دو طرف رابطه را به توان (n-1) می رسانیم :

$$\left(\frac{K(1+n)}{4\pi G\alpha^2}\right)^n = \left[-\frac{3}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right]^{1-n} \frac{M^{n-1}}{(4\pi/3)^{n-1}R^{3n-3}}$$

با ساده سازی عبارت داریم :

$$\frac{[K(1+n)]^n}{4\pi G} = \left[\frac{-GM}{\frac{1}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}}\right]^{n-1} R^{3-3n}\cdot\alpha^{2n}$$

با ضرب مقدار $\xi^{*-3(n-1)}$ در دو طرف رابطه داریم :

$$\frac{[K(1+n)]^n}{4\pi G} = \left[\frac{-GM}{\xi^{*2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}}\right]^{n-1} R^{3-3n}\cdot\xi^{*3n-3}\cdot\left(\frac{R}{\xi^*}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{[K(1+n)]^n}{4\pi G} = \left[\frac{GM}{-\xi^{*2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}}\right]^{n-1} \left(\frac{R}{\xi^*}\right)^{3-n}$$

با تعریف کمیت های زیر :

$$M_n := -\xi^{*2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*} \quad , \quad R_n := \xi^*$$

معادله ما به شکل زیربازنویسی می شود :

$$\boxed{\frac{[K(1+n)]^n}{4\pi G} = \left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n}}$$

برای $n = 3$ ، تابعیت شعاع از بین می رود و مقدار جرم بصورت یک ثابت بدست می آید .

$$if\ n = 3 \ \Rightarrow \frac{(4K)^3}{4\pi G} = \left(\frac{GM}{M_n}\right)^2 \Rightarrow M = 4\pi M_3\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}$$

برای $n = 1$ ، تابعیت جرم از بین می رود و مقدار شعاع بصورت یک ثابت بدست می آید .

$$if\ n = 1 \Rightarrow \frac{2K}{4\pi G} = \left(\frac{R}{R_{\mathrm{n}}}\right)^2 \Rightarrow R = R_1 \left(\frac{K}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

بین دو حد بالا ، یعنی $1 < n < 3$ ، داریم :

$$if\ 1 < n < 3$$

$$M^{n-1} \propto R^{n-3} \Rightarrow \qquad \boxed{M \propto R^{\frac{n-3}{n-1}}}$$

در نتیجه رابطه جرم و شعاع با استفاده از مدل پلی تروپیک بدست می آید .

---

7. رابطه فشار مرکزی :

با استفاده از نتایج بالا می توان رابطه ای برای فشار مرکز نیز پیدا کرد . از معادله حالت گاز پلی تروپیک داریم :

$$P_{\mathrm{c}} = K{\rho_{\mathrm{c}}}^{1+\frac{1}{n}}$$

با جاگذاری K داریم :

$$P_{\mathrm{c}} = \frac{4\pi G\alpha^2}{(n+1){\rho_{\mathrm{c}}}^{\frac{1}{n}-1}}{\rho_{\mathrm{c}}}^{1+\frac{1}{n}} = \frac{4\pi G\alpha^2}{(n+1)}\ {\rho_{\mathrm{c}}}^2$$

با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{R}{\xi^*}$ داریم :

$$P_{\mathrm{c}} = \frac{4\pi G}{(n+1)}\left(\frac{R}{\xi^*}\right)^2 {\rho_{\mathrm{c}}}^2$$

همچنین از رابطه چگالی متوسط شعاع را بدست می آوریم :

$$\bar{\rho} = \frac{M_{\text{Total}}}{{}^{4\pi}/_{3}\,R^3} \Rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

در نتیجه :

$$P_c = \frac{4\pi G}{(n+1)}\left(\frac{1}{\xi^*}\right)^2\left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}\right)^{\frac{2}{3}}\rho_c{}^2$$

با استفاده از رابطه (b) و جاگذاری $\bar{\rho}$ برحسب ρ_c داریم :

$$P_c = \frac{4\pi G}{(n+1)}\left(\frac{1}{\xi^*}\right)^2\left(\frac{3M}{4\pi\frac{1}{D_n}\,\rho_c}\right)^{\frac{2}{3}}\rho_c{}^2 = (4\pi)^{\frac{1}{3}}GM^{\frac{2}{3}}\rho_c^{\frac{4}{3}}\left[\frac{(3D_n)^{\frac{2}{3}}}{\xi^{*2}(n+1)}\right]$$

برای ساده سازی ثابت موجود در رابطه بالا داریم :

$$\left[\frac{(3D_n)^{\frac{2}{3}}}{\xi^{*2}(n+1)}\right] = \left\{\frac{\left[-\frac{1}{\xi^*}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right]^{-\frac{2}{3}}}{\xi^{*2}(n+1)}\right\} = \left\{\frac{\left[-\xi^{*2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}\right]^{-\frac{2}{3}}}{(n+1)}\right\}$$

با استفاده از تعریف M_n و بازنویسی رابطه بالا برحسب آن داریم :

$$\left[\frac{(3D_n)^{\frac{2}{3}}}{\xi^{*2}(n+1)}\right] = \frac{(M_n)^{-\frac{2}{3}}}{n+1} \Rightarrow B_n := \frac{(M_n)^{-\frac{2}{3}}}{n+1}$$

در نتیجه با جاگذاری پارامتر جدید B_n رابطه را بازنویسی می کنیم :

$$\boxed{P_c = (4\pi)^{\frac{1}{3}}\,B_n\,GM^{\frac{2}{3}}\rho_c^{\frac{4}{3}}}$$

اگر بخواهیم بصورت خلاصه بگوییم ، ما ثوابت M_n , R_n , D_n را در مسیر اثبات خود تعریف کردیم ، این ثوابت برای هر n مقدار معینی دارند که با حل معادله لین- امدن برای هر n خاص ، می توان این ثوابت را بدست آورد . در ادامه برای تعدادی n مشخص این مقادیر را به صورت تحلیلی بدست می آوریم . جدول زیر مقدار عددی این ثوابت برای تعدادی از n ها است .

n	R_n	M_n	D_n
0	2.45	4.89	1.00
1	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.98
2	4.35	2.41	11.38
2.5	5.36	2.19	23.44
3	6.90	2.02	54.21
4	15.00	1.80	625.00
5	∞	–	–

8. حل معادله لین–امدن :

حال به رابطه اصلی ، یعنی معادله لین-امدن باز میگردیم و سعی می کنیم آن را برای چند n خاص حل کنیم . برای مقادیر 0 , 1 و 5 این معادله جواب تحلیلی دارد که ما دو حالت اول را بررسی کرده و حالت آخر را به خواننده واگذار می کنیم .

- $n = 0$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -1 \Longrightarrow d\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\xi^2 d\xi$$

از عبارت بالا بصورت نامعین انتگرال می گیریم و ثابت آن را C_1 تعریف می کنیم :

$$\int d\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = \int -\xi^2 d\xi$$

$$\Longrightarrow \xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi^3}{3} + C_1$$

برای یافتن ثابت C_1 شرایط مرزی را وارد میکنیم ، برای مرکز :

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

در نتیجه :

$$\Longrightarrow \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi^3}{3} \Longrightarrow \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi}{3} \Longrightarrow d\theta = -\frac{\xi}{3} d\xi$$

از عبارت بالا بصورت نامعین انتگرال می گیریم و ثابت آن را C_2 تعریف می کنیم :

$$\int d\theta = \int -\frac{\xi}{3} d\xi \Longrightarrow \theta = -\frac{\xi^2}{6} + C_2$$

برای یافتن ثابت C_2 شرایط مرزی را وارد میکنیم ، برای مرکز :

$$1 = 0 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 1$$

در نتیجه :

$$\boxed{\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}}$$

برای بدست آوردن ξ^* برای این حالت داریم :

$$\theta(\xi^*) = 0 \Longrightarrow \frac{\xi^{*2}}{6} = 1 \Longrightarrow \xi^* = \sqrt{6}$$

برای یافتن جرم کل ستاره می دانیم:

$$M_{\text{Total}} = -4\pi\alpha^3 \rho_c \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*} = -\frac{\xi^*}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow M = 4\pi\alpha^3 \rho_c \frac{6\sqrt{6}}{3}$$

$$\Longrightarrow M = 4\pi\rho_c \frac{R^3}{6\sqrt{6}} \frac{6\sqrt{6}}{3} = \frac{4}{3}\pi\rho_c R^3$$

که مقدار بالا در واقع جرم ستاره در حالت چگالی ثابت است که شرط $n = 0$ نیز به همین مسئله اشاره می کند ! در نتیجه هیچ ارتباطی بین چگالی و فشار وجود ندارد !

- $n = 1$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta \Longrightarrow d\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta\xi^2 d\xi$$

معادله دیفرانسیل بالا به سادگی $n = 1$ نیست ، برای حل آن تغییر متغیر زیر را می دهیم :

$$\chi = \theta\xi \Longrightarrow \frac{d\chi}{d\xi} = \xi\frac{d\theta}{d\xi} + \theta$$

با ضرب طرفین رابطه در ξ داریم :

$$\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = \xi\frac{d\chi}{d\xi} - \xi\theta = \xi\frac{d\chi}{d\xi} - \chi$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\chi}{d\xi} - \chi\right) = \xi\chi \Longrightarrow \xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{d\chi}{d\xi} - \frac{d\chi}{d\xi} = \xi\chi$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \chi = 0$$

با حل معادله دیفرانسیل بالا همگی آشنایی داریم که معادله نوسانگر هماهنگ پاسخ آن است ، به صورت :

$$\chi = Asin\xi + Bcos\xi \Longrightarrow \theta\xi = Asin\xi + Bcos\xi$$

که در آن A وB ثوابتی هستند که باید تعیین شوند .

در مرکز ستاره :

$$B = 0 \Longrightarrow \chi = \theta\xi = Asin\xi$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\xi} = Acos\xi \Longrightarrow Acos\xi = \xi\frac{d\theta}{d\xi} + \theta \Longrightarrow A = 1$$

در نتیجه :

$$\boxed{\theta(\xi) = \frac{sin\xi}{\xi}}$$

برای بدست آوردن ξ^* برای این حالت داریم :

$$\theta(\xi^*) = 0 \Longrightarrow \frac{sin\xi^*}{\xi^*} = 0 \Longrightarrow \xi^* = \pi$$

برای یافتن جرم کل ستاره می دانیم:

$$M_{\text{Total}} = -4\pi\alpha^3\rho_c\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*} = \frac{cos\xi^* - \theta(\xi^*)}{\xi^*} = \frac{-1-0}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Longrightarrow M = 4\pi\alpha^3\rho_c\pi$$

$$\Longrightarrow M = 4\pi\rho_c\frac{R^3}{\pi^3}\pi = \frac{4}{\pi}\rho_c R^3$$

- $n = 5$

در این حالت حل معادله لین – امدن دارای پیچیدگی های ریاضی زیادی است ، در نتیجه تنها به ذکر پاسخ و قرار دادن آن در معادله لین-امدن اکتفا می کنیم :

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{\xi^2}{3})}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{2\xi}{3}}{(1+\frac{\xi^2}{3})^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \xi^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{2\xi^3}{3}}{(1+\frac{\xi^2}{3})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{\xi^3}{3}}{(1+\frac{\xi^2}{3})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)\right] = -\frac{\xi^2\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\xi^4}{3}\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^3}$$

$$= -\xi^2\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}\left[\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right) - \frac{\xi^2}{3}\right]$$

$$= -\xi^2\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\xi^2}\xi^2\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} \\ -\theta^5 = \left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

در نتیجه این تابع در معادله لین-امدن صدق می کند .

برای بدست آوردن ξ^* برای این حالت داریم :

$$\theta(\xi^*) = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{\xi^2}{3})}} = 0 \implies \xi^* = \infty$$

برای یافتن جرم کل ستاره می دانیم:

$$M_{\text{Total}} = -4\pi\alpha^3\rho_c\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}$$

دانستیم :

$$\xi^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\frac{\frac{\xi^3}{3}}{\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

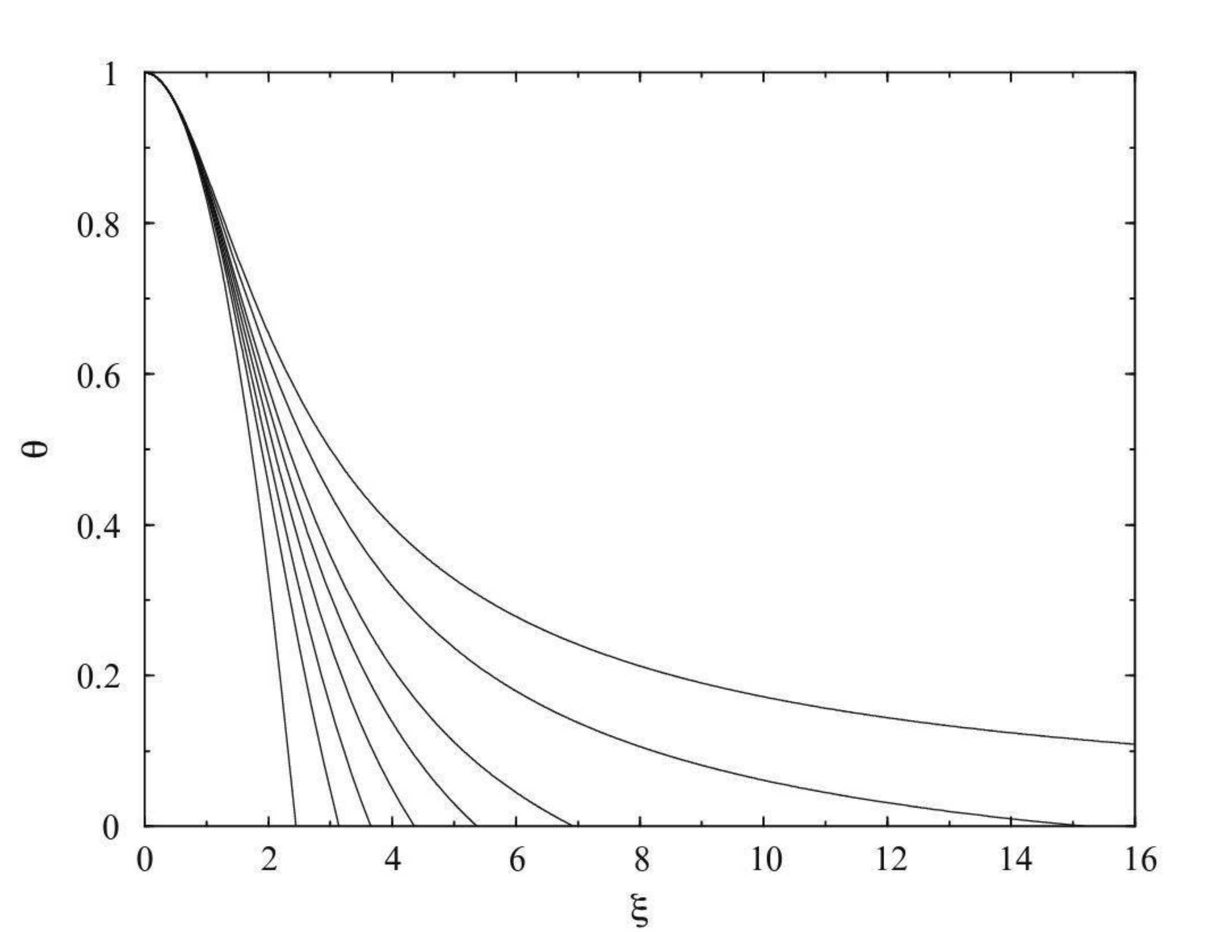
$$\Longrightarrow \left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\infty} = -\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{3}$$

با جاگذاری مقادیر بدست آمده در رابطه M_{Total} داریم :

$$M_{\text{Total}} = -4\pi\alpha^3\rho_c\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi^*}$$

$$\Longrightarrow M = 4\pi\rho_c\frac{R^3}{\infty^3}\sqrt{3} = 0 \text{ !!!}$$

برای n های دیگر معادله لین-امدن بصورت عددی حل می شود . نتیجه حاصل از تحلیل این نمودار ها بصورت شکل زیر است . هر چه n بیشتر می شود ، نمودار به سمت ξ های بیشتر میل می کند و در نهایت برابر بی نهایت می شود ! با توجه به این نمودار ها ، می توان $\frac{d\theta}{d\xi}$ را از روی شیب خط مماس بر نمودار در هر نقطه دلخواه بدست آورد و در نتیجه بقیه پارامتر ها بدست می آید .



به ترتیب برای $n = 0 , 1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 4 , 5$ نمودار $\theta(\xi)$ رسم شده است .

9. منابع علمی :

اخترفیزیک جدید ، برادلی کرول , دیل استلی

An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution , Dina Prialnik

An Introduction to the Evolution of Single and Binary Stars , Matthew Benacquist

An Introduction to the Study of Stellar Structure, S. Chandrasekhar

در صورت وجود هر گونه مشکل ، سوال و ... آن را با من در میان بگذارید . به زودی برای این درسنامه یک مجموعه سوال نیز انتشار خواهیم داد تا اهمیت این موضوع هم از جهت جذابیت علمی و همچنین سوال خیز بودن آن برای شما عزیزان به صورت کامل مشخص گردد . از دوست خوبم امیرحسین ستوده فر نیز برای ویرایش این درسنامه و احساس نیاز برای تدوین آن تشکر می کنم .

ایمیل من : amirehsanalizadeh@yahoo.com

وبلاگ شخصی من : http://astronomicalnotes.blog.ir

موفق باشیم !