فصل دوم مثلث‌بندی هوایی آنالوگ

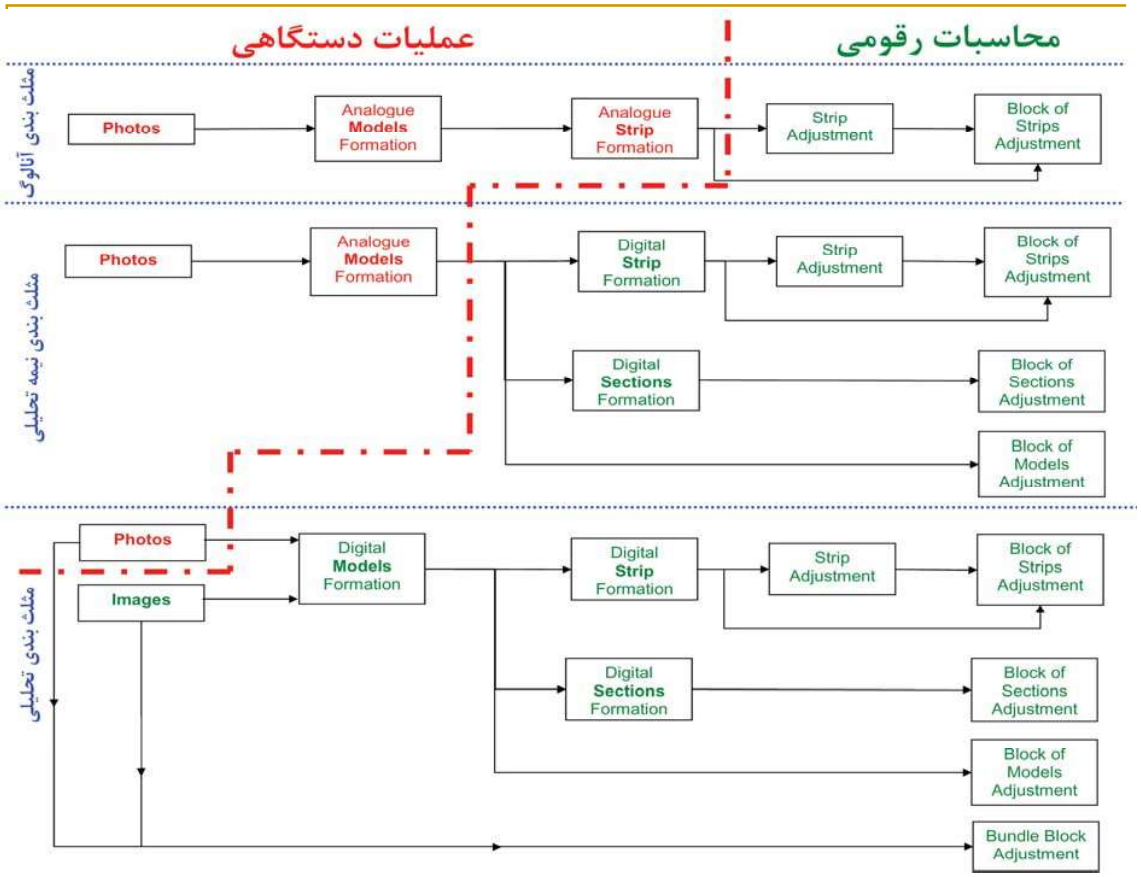
۱-۲) مقدمه

در همهٔ روشهای مثلث بندی هوایی که پس از این به آنها پرداخته خواهد شد، سرشکنی خطاها در یکی از چهار حالت زیر مد نظر است:

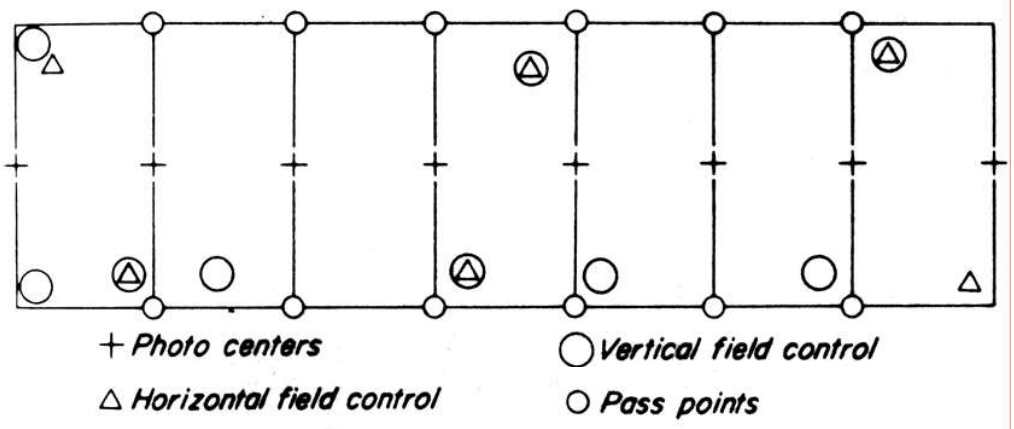
- اتصال مدلهای فتوگرامتری به هم برای تشکیل نوار یا بلوک
- اتصال باندهای فتوگرامتری به هم برای تشکیل بلوک
- اتصال قطعهٔ چند مدلی فتوگرامتری به هم برای تشکیل نوار یا بلوک
- اتصال عکسهای فتوگرامتری به هم برای تشکیل نوار یا بلوک

این موضوع در تصویر به طور کامل ارائه شده است. به تفکیک مراحل محاسباتی از مراحل دستگاهی و اجزاء و مراحل هر روش دقت نمایید.

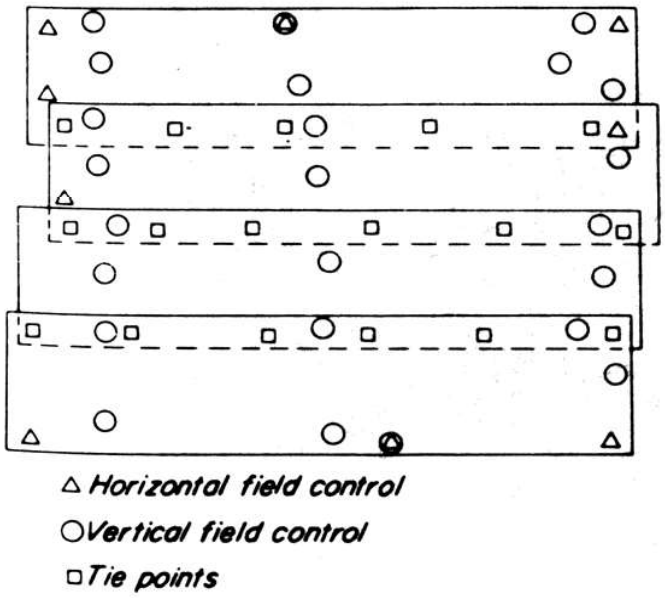
Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006



منظور از باند و بلوک فتوگرامتری در تصاویر نشان داده شده است. همچنین به مفاهیم نقاط Pass و Tie در شکل دقت نمایید.



Strip of models containing control points.

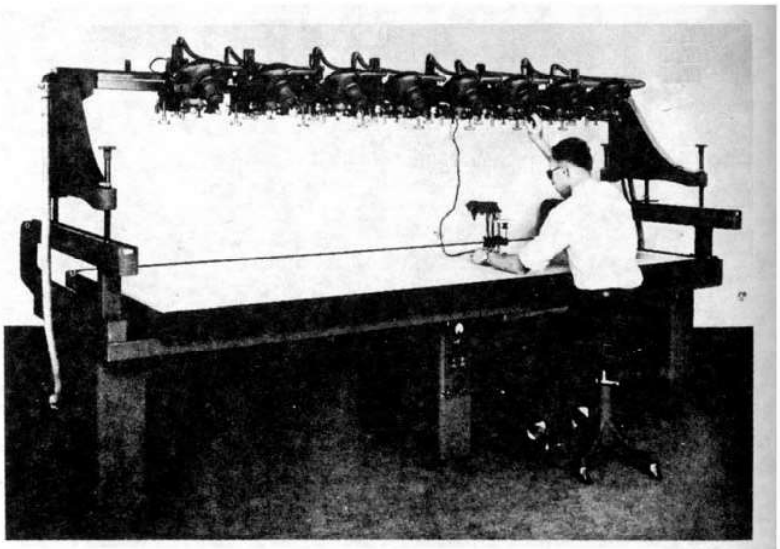


Photogrammetric block.

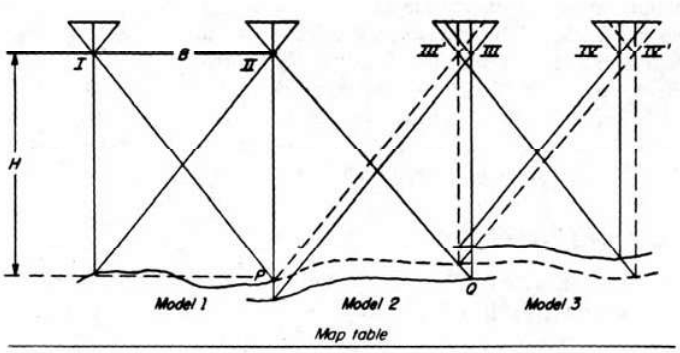
Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

۲-۲) سرشکنی باند دستگاهی (Strip Adjustment)

مثلث‌بندی هوایی آنالوگ، بر مبنای «سرشکنی خطاها در باندِ حاصل از اتصال دستگاهی مدلها» است. دستگاههایی نظیر Multiplex یا Balplex و یا دستگاههای Universal می‌توانند مدلهای مجاور در یک باند را به هم متصل نمایند طوری که سیستم مختصات همهٔ مدلها با مدل اول یکسان شود.

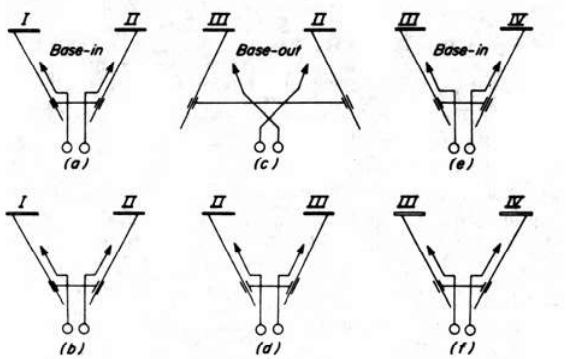


Balplex projectors used to perform stereotriangulation.



Bringing successive models to common scale.

دستگاههای چند پروژکتوری



Optical switch used for base-in base-out joining of models

دستگاههای Universal

•به دلیل وجود **خطاهای سیستماتیک و تصادفی**، باند حاصل از این دستگاهها پس از توجیه مطلق، بر همهٔ نقاط کنترل موجود در امتداد باند منطبق نیست. به عبارت دیگر، مختصات زمینی نقاط کنترل با مختصات حاصل از باند توجیه مطلق شده دقیقاً برابر نیست.

•بنابر این هدف از سرشکنی باند آن است که با استفاده از **برازش** روابط چند جمله‌ای (Polynomials) به خطای موجود روی نقاط کنترل، مقادیر ***تصحیح مختصات*** را برای نقاط گرهی حاصل از مثلث بندی باند بدست آوریم.

•مسالهٔ مهم در اینجا ***پیدا کردن چند جمله‌ای با درجه مناسب*** است.

بنابر این هدف این فصل (فصل دوم: مثلث بندی هوایی آنالوگ) به طور خلاصه عبارتست از :

۱) تعریف و پیدا کردن چند جمله‌ای با درجه مناسب، برای توصیف خطای باند پیوسته
۲) برازش این چند جمله‌ای تعریف شده به خطای مشاهده شده روی نقاط کنترل (تعیین ضرایب چند جمله‌ای)
۳) تصحیح مختصات همهٔ نقاط (گرهی و غیره) با استفاده از نتایج عددی محاسبهٔ چند جمله‌ای

Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

۳-۲) بررسی تاثیر خطای انتقال المانها از یک مدل به مدلهای بعدی

دو دسته خطا داریم:

- سیستماتیک مانند خطاهای دستگاه و خطاهای عکس (که برای ساده سازی فرض می‌کنیم ثابت هستند)
- تصادفی (اتفاقی یا Random) مانند خطاهای مشاهداتی

تاثیر خطاهای سیستماتیک بر روی باند منظم است و قابلیت معادله نویسی دارد. اما خطاهای اتفاقی تاثیر نامنظمی دارند.

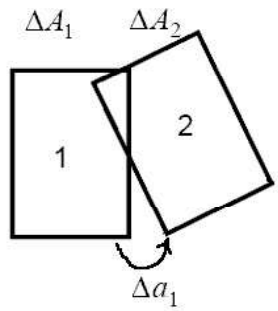
المانهای توجیه مطلق از مدل اول به دوم و از دوم به سوم و همینطور تا آخر باند منتقل می‌شوند. این المانها عبارتند از:

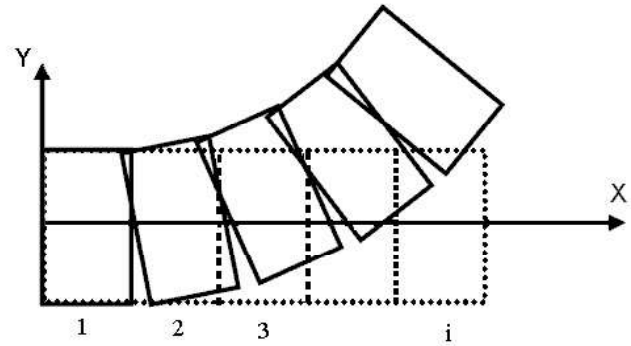
$$S, Az, \Omega, \Phi, Xt, Yt, Zt$$

الف-بررسی خطای سیستماتیک انتقال المانها بر محور مرکزی باند

مثال: خطای سیستماتیک انتقال المان آزیموت

با فرض اینکه مدل اول بدون خطای آزیموت باشد، تصویر نشان دهندهٔ رفتار خطای آزیموت می‌باشد.



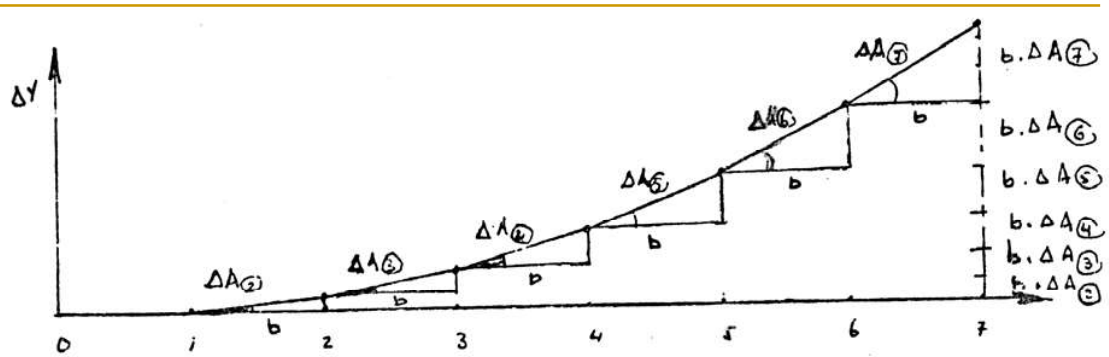


ΔA_i : AzimuthAbsolute error

Δa_i : Azimuth Transfer error

$$\Delta A_1 = 0$$
$$\Delta A_2 = 0 + \Delta a_1$$
$$\Delta A_3 = 0 + \Delta a_1 + \Delta a$$

$$\Delta A_i = 0 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta a_j$$



$$\left.\begin{aligned}
\Delta Y_0 &= 0\\
\Delta Y_1 &= 0\\
\Delta Y_2 &= b.\Delta A_2\\
\Delta Y_3 &= b.\Delta A_2 + b.\Delta A_3\\
\Delta Y_4 &= b.\Delta A_2 + b.\Delta A_3 + b.\Delta A_4\\
&\vdots\\
\Delta Y_i &= b.\sum_{k=1}^{i} \Delta A_k
\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta A_i = \sum \Delta a_k \Longrightarrow \boxed{\Delta Y_i = b.\sum\sum \Delta a_k}$$

$$\Delta Y_i = b.\sum_{k=1}^{i} \Delta A_k \Longrightarrow \boxed{\Delta Y \propto \int \Delta A} \Longrightarrow \boxed{\Delta A \propto \frac{\partial \Delta Y}{\partial X}}$$

انتگرال روی محور مرکزی (در امتداد X) و مشتق
نسبت به همین محور

تاثیر خطای انتقال آزیموت بر روی Y به صورت جمع دوگانه (Double Summation) است که در واقع مثل انتگرال دوگانه است. (از این نکته می توان برای خطای اتفاقی انتقال المانها استفاده نمود. رجوع کنید به بخش ب۴-۲)

قضیهٔ خطای انتقال المان برای آزیموت: خطای سیستماتیک انتقال آزیموت (Azimuth transfer error)
⟸ خطای آزیموت مطلق در مدلها تغییر خطی و خطای ΔY در طول باند تغییر از درجهٔ دو دارد.

اثبات : اگر خطای سیستماتیک انتقال آزیموت بین همهٔ مدلها برابر باشد (همانطور که پیشتر گفتیم) و باز همهٔ مدلها را با هم برابر بگیریم (که با تقریب، چنین است) داریم:

$$\Delta Y_0 = 0$$
$$\Delta Y_1 = 0$$
$$\Delta Y_2 = b.\Delta a$$
$$\Delta Y_3 = b.\Delta a + 2b.\Delta a$$
$$\Delta Y_4 = b.\Delta a + 2b.\Delta a + 3b.\Delta a$$
$$\vdots$$
$$\Delta Y_i = b.\Delta a.(1+2+3+\ldots+(i-1))$$
$$\Delta Y_i = b.\Delta a.\left(\frac{i^2-i}{2}\right)$$

$$X_i = i.b$$
$$\Delta Y_i = \frac{b.\Delta a}{2b^2}.X_i^2 + \frac{\Delta a}{2}.X_i$$
$$\Delta Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2$$

این مثال فقط محور مرکزی باند را مورد توجه قرار داده بود. برای همین محور مرکزی، **قضیهٔ خطای انتقال المان برای مقیاس و Φ** نیز قابل اثبات می‌باشد ، که در شکل نشان داده شده است.

از آنجا که تاثیر خطاهای فوق یعنی خطای انتقال مقیاس، آزیموت و Φ به ترتیب بر روی محورهای X و Y و Z به صورت انتگرال است، مشتق گیری نسبت به X می‌تواند مقدار خطای مطلق المان را بدهد.

Ω Lateral tilt

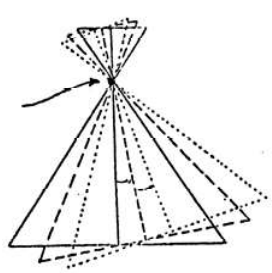
Effect of Δω-transfer errors:

The diagram shows:-

(i) that Δω-transfer errors does not affect the ship-axis

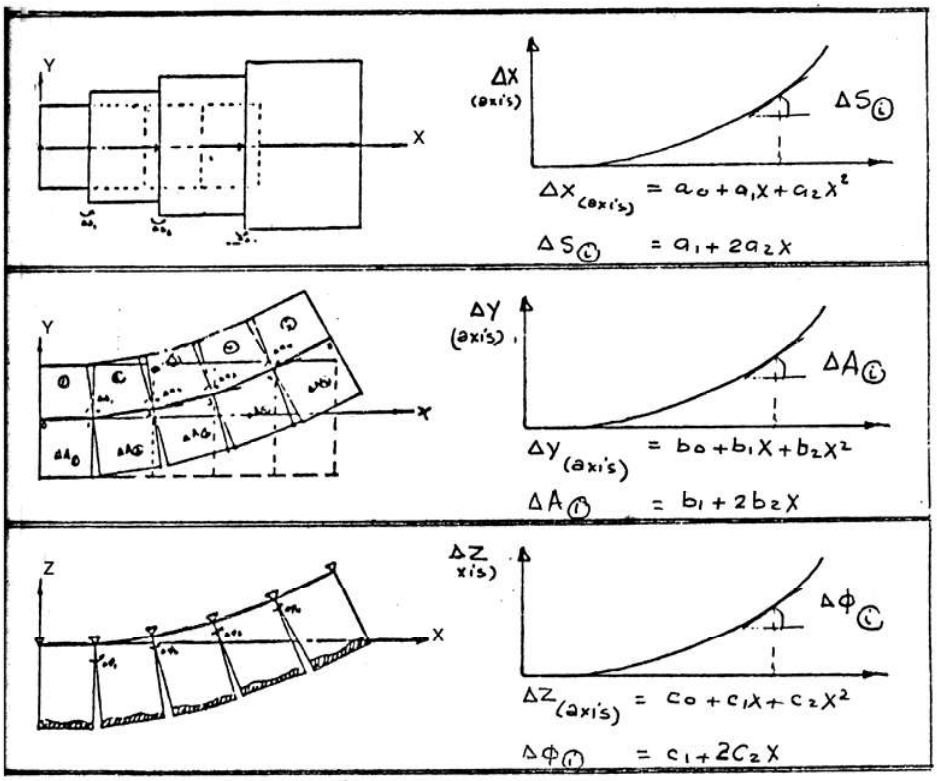
(ii) $\Delta\Omega_{(i)} = \sum \Delta\omega_i$

As $\Delta\Omega_{(i)}$ is obtained from single summation of Δω transfer errors



∴ $\Delta\Omega_{(i)}$ can be represented by a linear function

i.e $\Delta\Omega_{(i)} = d_1 + 2d_2.x$



خطای انتقال مقیاس روی محور مرکزی باند

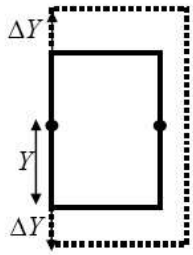
خطای انتقال آزیموت روی محور مرکزی باند

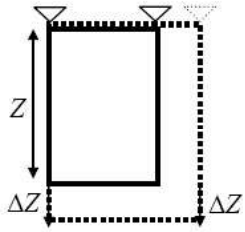
خطای انتقال Φ روی محور مرکزی باند

$$\Delta S_{(i)} = \frac{\partial(\Delta X)}{\partial X} \qquad \Delta A_{(i)} = \frac{\partial(\Delta Y)}{\partial X} \quad , \quad \Delta\Phi_{(i)} = \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial X}$$

خطای مطلق المانها با مشتق گیری نسبت به امتداد محور مرکزی باند

ب- بررسی خطای سیستماتیک انتقال المانها خارج از محور مرکزی باند



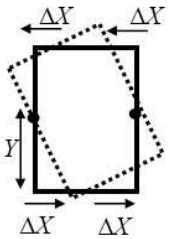


۱- برای خطای انتقال مقیاس خارج از محور باند

$$\Delta Y_S = Y \cdot \Delta S = Y \cdot (a_1 + 2a_2 . X)$$

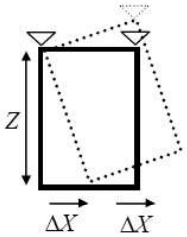
$$\Delta Z_S = Z \cdot \Delta S = Z \cdot (a_1 + a2_2 . X)$$

۲- برای خطای انتقال آزیموت خارج از محور باند



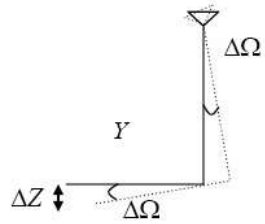
$$\Delta X_A = -Y \cdot \Delta A = -Y \cdot (b_1 + 2b_2 . X)$$

۳- برای خطای انتقال Φ خارج از محور باند

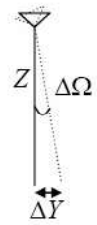


$$\Delta X_\Phi = Z \cdot \Delta\Phi = Z \cdot (c_1 + 2c_2 . X)$$

۴- برای خطای انتقال Ω خارج از محور باند



$$\Delta Z_{\Omega} = Y \cdot \Delta\Omega = Y \cdot (d_1 + 2d_2.X)$$



$$\Delta Y_{\Omega} = -Z \cdot \Delta\Omega = -Z \cdot (d_1 + 2d_2.X)$$

از روابط و تصاویر فوق مشاهده می‌شود که :

خطاهای تاثیر گذار بر امتداد محور باند

- Scale transfer error (ΔS)
- Azimuth transfer error (ΔA)
- Longitudinal transfer error ($\Delta\Phi$)

خطاهای بدون تاثیر بر امتداد محور باند

- Lateral tilt (attitude) transfer error ($\Delta\Omega$)

همچنین می‌توان روابط خطا را به صورت زیر منظم کرد :

$$\begin{cases} \Delta X = \overbrace{\Delta X_S}^{\text{درجهٔ دو}} + \overbrace{\Delta X_A + \Delta X_\Phi}^{\text{درجهٔ یک}} \\ \Delta Y = \Delta Y_A + \Delta Y_S + \Delta Y_\Omega \\ \Delta Z = \Delta Z_\Phi + \Delta Z_\Omega + \Delta Z_S \end{cases}$$

و همانطور که از پیش نیز می‌دانستیم، مقیاس روی همهٔ محورها (X,Y,Z) خطا ایجاد می‌کند و هیچ محوری از دورانی که حول آن محور است تاثیر نمی‌پذیرد.

و با استفاده از روابط بالا :

$$\begin{cases} \Delta X = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 - Y.\Delta A + Z.\Delta\Phi \\ \Delta Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + Y.\Delta S - Z.\Delta\Omega \\ \Delta Z = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + Y.\Delta\Omega + Z.\Delta S \end{cases}$$

Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

۴-۲) ترکیب روابط تاثیر خطای سیستماتیک انتقال المانها

مقادیر حاصل از تاثیر هر المان بر روی X, Y, Z باند در مجموع روابط زیر را ایجاد می‌کنند. این روابط نشان می‌دهند که تاثیر خطای سیستماتیک انتقال المانها بر روی مختصات از درجهٔ دو است و چندجمله‌ای تصحیح خطا باید حداقل از درجهٔ دو (نسبت به X) باشد.

$$\begin{cases} \Delta X = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 - Y(b_1 + 2b_2 X) + Z(c_1 + 2c_2 X) \\ \Delta Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + Y(a_1 + 2a_2 X) - Z(d_1 + 2d_2 X) \\ \Delta Z = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + Y(d_1 + 2d_2 X) + Z(a_1 + 2a_2 X) \end{cases}$$

و در حالتی که زمین در محوطهٔ باند، مسطح باشد (Z=constant) :

$$\begin{cases} \Delta X = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 - Y(b_1 + 2b_2 X) \\ \Delta Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + Y(a_1 + 2a_2 X) \end{cases}$$ Planimetry

$$\Delta Z = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + Y(d_1 + 2d_2 X)$$ Height

الف- تئوری Vermier

روابط فوق بر اساس فرضهای زیادی نوشته و نتیجه‌گیری شد. این فرضها برای ساده کردن موضوع اتخاذ شد. در اینجا این فرضها و نتایج حاصل را که به نام تئوری Vermier خوانده می‌شود مرور می‌کنیم.

۱- خطای تشکیل مدل صفر (یا قابل چشم پوشی) است. به عبارت دیگر تغییر شکل مدل (Model Deformation) وجود ندارد.

۲- خطای مختصات هر نقطهٔ مثلث بندی شده ناشی از خطای توجیه مطلق مدل است.

۳- خطای مطلق المانها در هر مدل برابر است با خطای مطلق در مدل اول به اضافهٔ خطای انتقال المان بین همهٔ مدلهای قبل از آن مدل

۴- خطاهای سیستماتیک و اتفاقی در مراحل تشکیل باند، موجب خطاهای سیستماتیک و اتفاقی انتقال المانها می‌شوند.

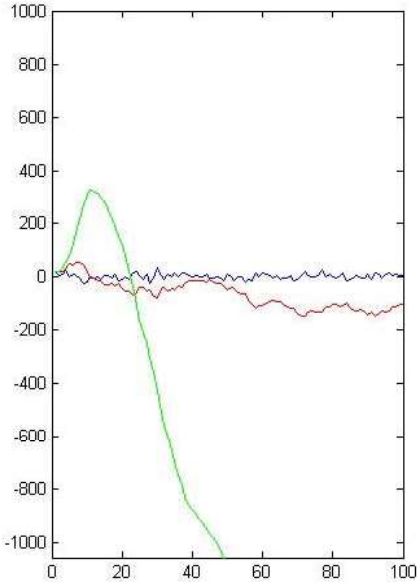
۵ و ۶- خطای انتقال المانها برای مقیاس و آزیموت و Φ موجب تغییر شکل قابل توجه در امتداد محور باند می‌شود، در حالیکه خطای انتقال Ω تاثیری بر امتداد محور باند ندارد.

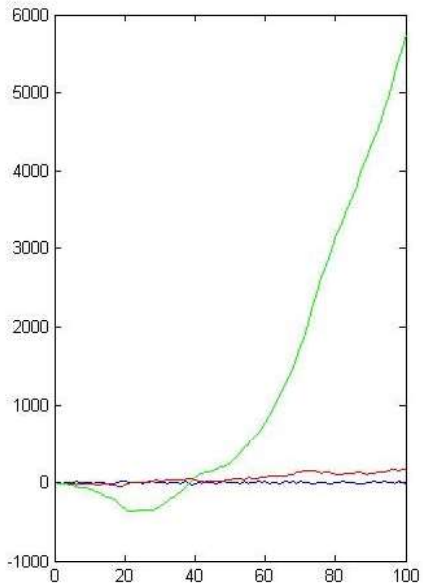
۷- خطای انتقال Xt, Yt, Zt تاثیر قابل توجهی در تغییر شکل باند ندارد.

و به این فرضها باید سیستماتیک بودن خطای انتقال المانها و دیفرانسیلی بودن این خطاها و نیز برابر بودن آنها در همهٔ مدلها را اضافه کرد.

ب- تاثیر همزمان خطای سیستماتیک و اتفاقی انتقال المانها

همانطور که در بخش الف۳-۲ نشان داده شد، تاثیر خطا انتقال المانها بر روی مختصات به صورت جمع دوگانه است. در اینجا مثالی از مفهوم جمع دوگانه برای خطاهای اتفاقی با استفاده از تابع مولد در MATLAB ارائه شده است. دو تصویر زیر این مفهوم را برای دو بار آزمایش نشان می‌دهد. شما می‌توانید با دستورات سمت راست حالتهای بیشتری را ببنید.






```
a=randn(100,1)*10;

b(1)=a(1);
for i=2:100
    b(i)=sum(a(1:i-1));
end

c(1)=b(1);
for i=2:100
    c(i)=sum(b(1:i-1));
end

plot(1:100,a,'b',1:100,b,'r',1:100,c,'g')
```

خطاهای اتفاقی و سیستماتیک در تشکیل باند پیوسته، همزمان با هم وجود دارند. برای خطاهای اتفاقی تشخیص چند جمله‌ای مناسب، کار بسیار مشکلی است. در عمل، با ادراکی که از مفهوم جمع دوگانه داریم، از چند جمله‌ایهای **درجهٔ دو و یا سه** استفاده می‌شود. (در دو بخش قبل، درجهٔ دو بودنِ تاثیر خطای سیستماتیک را، بعد از ساده سازیهای بسیار، ثابت نمودیم)

این چند جمله‌ایهای درجهٔ دو یا سه، با اعمال شرطهایی برای ۱)ساده سازی و ۲)کنترل نوسانهای چند جمله‌ای به کار گرفته می‌شوند.

نمونه‌ای از این شرطها، اعمال شرط هم شکل بودنِ (Conformal condition) تغییر شکل مسطحاتی باند، مطابق روابط زیر است:

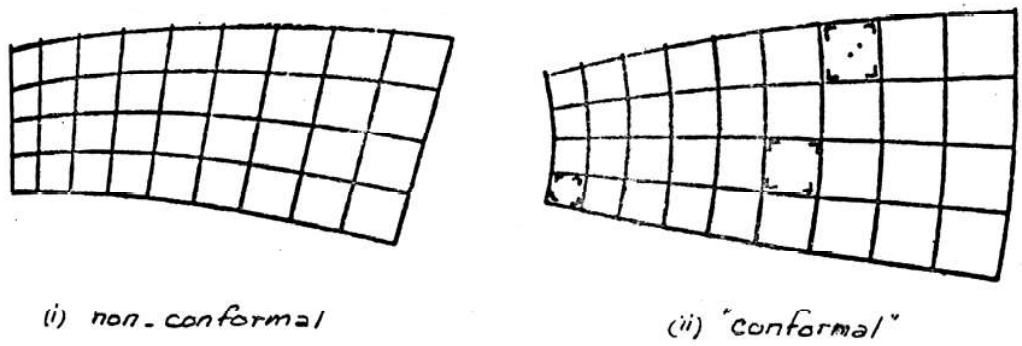
$$\Delta X = a_0 + a_1 X - b_1 Y + a_2\left(X^2 - Y^2\right) - 2b_2 XY$$
$$\Delta Y = b_0 + b_1 X + a_1 Y + b_2\left(X^2 - Y^2\right) + 2a_2 XY$$

شرط کانفرمال بودن:

$$\frac{\partial(\Delta X)}{\partial Y} = -\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial X}$$
$$\frac{\partial(\Delta X)}{\partial X} = \frac{\partial(\Delta Y)}{\partial Y}$$

برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه به مراجع درس نگاه کنید.

به این ترتیب تغییر شکل باند، به شرط هم شکل بودن مقید می‌شود. تصاویر تفاوت موضوع را نشان می‌دهند.



Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

۵-۲) سرشکنی خطاها در مثلث‌بندی هوایی آنالوگ

الف- روابط مورد استفاده

ما در اینجا از روابط ارائه شده در بخش «۴-۲» استفاده می‌کنیم. در استفاده از روابط دیگر (مانند آنچه در بخش «ب۴-۲» ارائه شد) مطالب این قسمت تغییر مختصری خواهند داشت.

$$\Delta X = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 - Y(b_1 + 2b_2 X) + Z(c_1 + 2c_2 X)$$
$$\Delta Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + Y(a_1 + 2a_2 X) - Z(d_1 + 2d_2 X)$$
$$\Delta Z = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + Y(d_1 + 2d_2 X) + Z(a_1 + 2a_2 X)$$

ب- مشاهدات و مجهولات

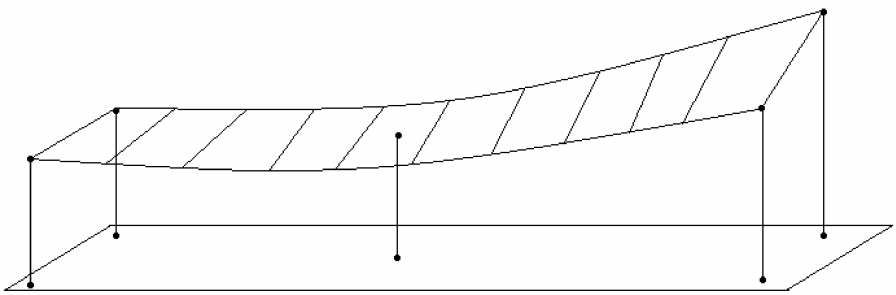
فرض کنید باند پیوسته در دستگاه تبدیل ایجاد شده و برای همهٔ نقاط (حتی برای نقاط کنترل که مختصات زمینی دارند) مختصات باندِ توجیه مطلق شده، قرائت گردیده است.

- مشاهدات ما عبارتند از اختلاف «مختصات زمینی نقاط کنترل» از «مختصات حاصل از باند پیوسته» برای آنها.
- مجهولات نیز ضرایب معادلات فوق هستند.

پ- محل مناسب برای نقاط کنترل

معادلهٔ مورد استفاده برای سرشکنی ارتفاعی را در نظر بگیرید. این یک معادلهٔ سطح Parabolic است (چون تغییر Ω در طول باند خطی است). برای حل پنج مجهول (پنج ضریب) در این معادله، به حداقل پنج نقطهٔ کنترل ارتفاعی نیاز داریم. محل و توزیع این نقاط، به صورت ارائه شده در شکل، پیشنهاد می‌شود.

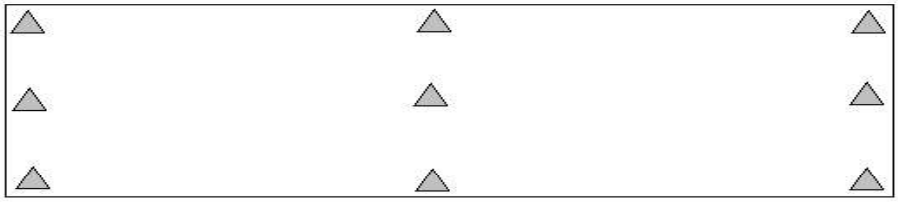
$$\Delta Z = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + Y\left(d_1 + 2 d_2 X\right)$$



این ترکیب برای کنترل تاثیر Ω (تغییر شیب مدل در جهت عرضی عمود بر محور باند) و تاثیر Φ در طول باند، در نظر گرفته شده است.

برای حل شش مجهول (شش ضریب) موجود در معادلات سرشکنی مسطحاتی باند، به حداقل سه نقطهٔ کنترل مسطحاتی نیاز داریم. محل و توزیع این نقاط، به صورت ارائه شده در شکل، پیشنهاد می‌شود.

$$\Delta X = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 - Y\left(b_1 + 2 b_2 X\right)$$
$$\Delta Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + Y\left(a_1 + 2 a_2 X\right)$$



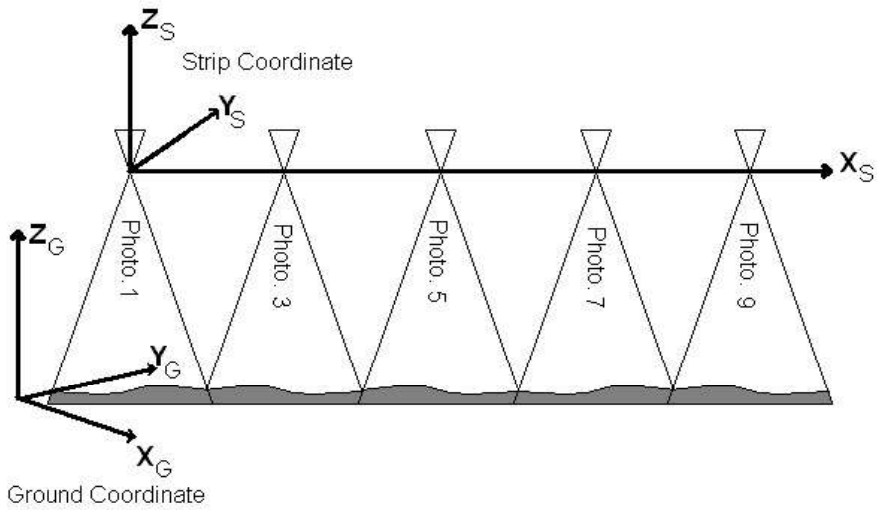
این ترکیب نقاط، با ۹ نقطه به جای سه نقطه، تمامی باند را (در جهت محور باند و عمود بر آن) کنترل می‌نماید.

Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

ت- سیستم مختصات باند

مشاهدات لازم برای حل معادلات فوق، باید در سیستم مختصاتی باشند که معادلات فوق در آن سیستم تعریف شده‌اند. این سیستم مختصات در شکل، قابل مشاهده است. محور X سیستم خط اتصال بین اولین و آخرین مرکز عکس در طول باند است. محور Z خط شاغولی و مبدا آن منطبق بر مرکز عکس اول است. سیستم دست راستی تعریف می‌شود.

بنابر این همهٔ مختصات نقاط، اعم از زمینی و حاصل از باند، باید به این سیستم تبدیل شوند.



ث- معادلات ماتریسی

برای حل سه بعدی سرشکنی باند (وقتی محوطهٔ باند تغییرات ارتفاعی دارد) معادلهٔ ماتریسی زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & 0 & -y & -2xy & 0 & z & 2xz & 0 & 0\\ 0 & y & 2xy & 1 & x & x^2 & 0 & 0 & 0 & -z & -2xz\\ 0 & z & 2xz & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & y & 2xy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ b_0\\ b_1\\ b_2\\ c_0\\ c_1\\ c_2\\ d_1\\ d_2\end{bmatrix}$$

برای حل سرشکنی مسطحاتی و ارتفاعی باند به صورت جداگانه (وقتی محوطهٔ باند تغییرات ارتفاعی ندارد) معادلات ماتریسی زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & 0 & -y & -2xy\\ 0 & y & 2xy & 1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

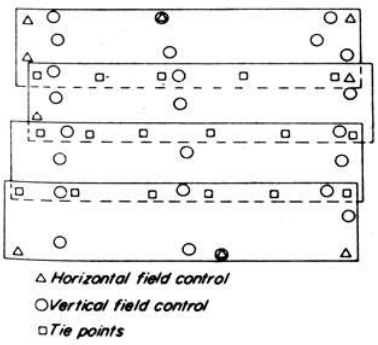
$$\Delta Z=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & y & 2xy\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix}$$

Esfahan University - Surveying Engineering Department - Dr. Momeni - 2006

ج- الگوریتم مثلث‌بندی هوایی آنالوگ برای یک باند

۰- مشخص کردن محل نقاط کنترل و طراحی و علامت زدن نقاط گرهی روی عکسها (دیاپوزتیوها)
۱- تشکیل مدل اول و توجیه مطلق آن و قرائت مختصات نقاط (گرهی و کنترل و سایر نقاط) روی مدل
۲- تشکیل مدلهای بعد به صورت پیوسته به مدل قبل و قرائت مختصات نقاط (گرهی و کنترل و سایر نقاط)
۳- تصمیم دربارهٔ درجه و نوع چندجمله‌ای تصحیح خطا (درجهٔ دو یا سه ، کانفورمال یا غیر آن ، سه بعدی یا مسطحاتی و ارتفاعی جدا از هم)
۴- محاسبهٔ خطای باند ($\Delta X,\Delta Y,\Delta Z$) روی نقاط کنترل (به عبارت دیگر تعیین مشاهدات)
۵- حل معادلات برای تعیین ضرایب چندجمله‌ایها
۶- محاسبهٔ تصحیح مختصات ($\Delta X,\Delta Y,\Delta Z$) هر یک از نقاط گرهی و غیر آن با استفاده از چندجمله‌ایها و اعمال تصحیحات

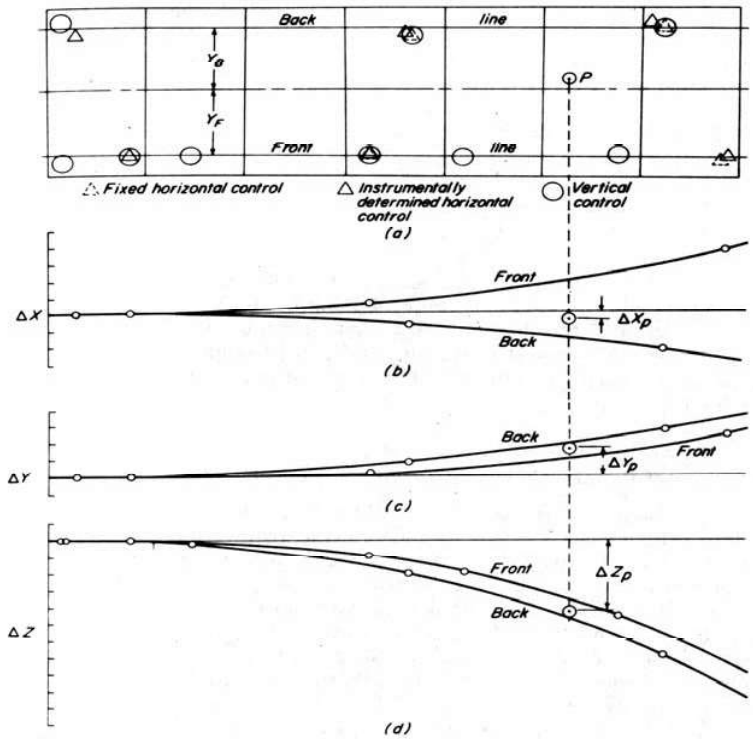
درصورت وجود باندهای دیگر (مثلاً بلوک فتوگرامتری) در فصل بعد توضیح داده خواهد شد. (مسالهٔ اتصال باندهای فتوگرامتری به هم برای تشکیل بلوک)



Photogrammetric block.

۶-۲) حل گرافیکی سرشکنی باند

ایدهٔ کلی



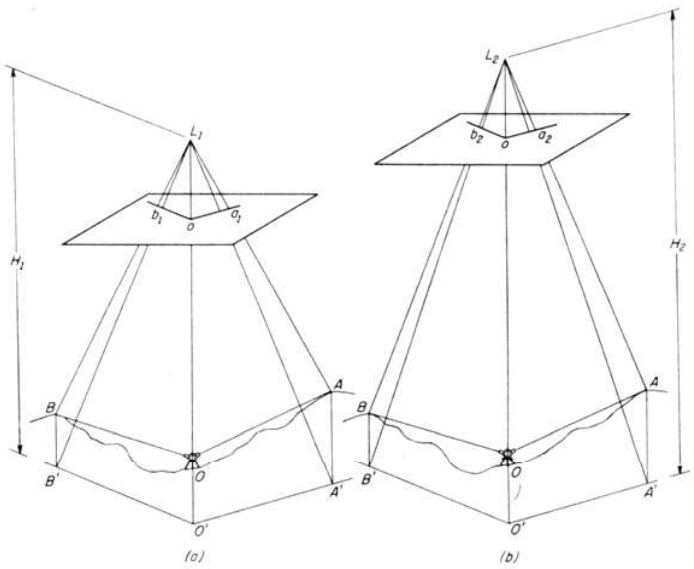
(a) Triangulated strip. (b) X-error curve. (c) Y-error curve. (d) Z-error curve.

برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه به مراجع نگاه کنید.

۱-۱) مثلث‌بندی شعاعی به روش ترسیمی

الف- زوایای افقی و عکس قائم

قضیه: در یک عکس قائم (و بدون اعوجاج مماسی عدسی)، زاویه‌هایی که به مرکز نقطه اصلی (PP) اندازه‌گیری می‌شوند، زاویهٔ افقی هستند.



جابجایی ناشی از ارتفاع نقاط نسبت به نقطهٔ نادیر شعاعی است.